UNIVERSITY OF BERGAMO

DEPARTMENT OF MANAGEMENT, ECONOMICS AND QUANTITATIVE METHODS

Working paper n. 1/2013

ricerca_meq@unibg.it

Series Education

Un'esperienza di learning week per il recupero di competenze nello studio dell'analisi matematica mediante l'uso del software GeoGebra

Antonio Criscuolo, Adriana Gnudi, Sebastiano Vitali

Un'esperienza di learning week per il recupero di competenze nello studio dell'analisi matematica mediante l'uso del software GeoGebra.

A. Criscuolo[1], A. Gnudi[2], S. Vitali[3]

1. Introduzione

Questo lavoro riguarda un'esperienza di utilizzo del software di matematica dinamica GeoGebra nell'ambito di una "*learning week*", un percorso intensivo di quaranta ore per il recupero delle abilità di base in analisi matematica, rivolta a studenti del quarto anno dell'Istituto tecnico industriale "E. Majorana" di Seriate con rendimento insufficiente in matematica.

Dopo un quadro delle scelte metodologiche adottate si descrivono alcune delle attività con GeoGebra - per gruppi di quattro studenti in cooperative learning e svolte con l'assistenza di tutor - sui concetti di limite e derivata e sul loro utilizzo per determinare il grafico di funzioni.
Nell'articolo si valuta in che misura l'utilizzo del software GeoGebra possa essere utile a creare efficaci situazioni di apprendimento, in particolare per studenti in difficoltà nello studio dell'analisi matematica. Si conclude infine con una valutazione dell'esperienza basata su una prova finale e un questionario di gradimento.

2. Il contesto dell'esperienza

Questa esperienza didattica di "*learning week*", denominata *"Ripartire dall'applicazione per una matematica laboratoriale"*, è stata promossa dalla Fondazione Ikaros di Bergamo, centro di formazione accreditato presso la Regione Lombardia, e finanziata dall'amministrazione regionale con fondi sociali europei.

La Fondazione Ikaros di Bergamo ha curato l'aderenza del progetto ai principi metodologici delle "*learning week*", previsti dal bando di selezione, gli aspetti organizzativi e quelli amministrativi.

---

[1] Centro MatNet Università di Bergamo, antonio.criscuolo@unibg.it

[2] Dipartimento di Scienze aziendali, economiche e metodi quantitativi, Università degli studi di Bergamo, adriana.gnudi@unibg.it

[3] Dipartimento di Scienze aziendali, economiche e metodi quantitativi, Università degli studi di Bergamo, sebastiano.vitali@unibg.it

Il Centro MatNet dell'Università di Bergamo ha invece curato la progettazione e la conduzione del percorso per quanto riguarda gli aspetti disciplinari e didattico-metodologici.

Una docente di matematica dell'istituto, la Prof.ssa Lucia Ferretti, ha collaborato alla elaborazione dei test iniziale e finale, delle schede di alcune esercitazioni oltre che alla conduzione degli incontri.

Il percorso, svolto dal 25 al 30 giugno 2012 presso aule laboratorio dell'istituto "Majorana", si è rivolto ad un gruppo di ventiquattro studenti del quarto anno, (indirizzi Elettronica, Telecomunicazioni, Informatica) che hanno manifestato difficoltà d'apprendimento della matematica. A dieci di questi studenti è stato assegnato, al termine dell'anno scolastico, il debito formativo in matematica. Ai rimanenti quattordici la scuola ha comunque suggerito la partecipazione all'intervento formativo per il recupero e il consolidamento delle competenze matematiche. Si tratta quindi di allievi le cui difficoltà d'apprendimento sono da ricondurre alla mancata acquisizione di abilità relative ad argomenti matematici di base. Su richiesta della scuola l'intervento è stato orientato sia al recupero e al consolidamento di conoscenze e abilità matematiche relative alla matematica studiata nei precedenti anni scolastici sia a quelle previste dalla programmazione didattica d'istituto per le classi quarte.

Da rilevare che l'insegnamento nelle diverse classi di provenienza degli studenti è sostanzialmente impostato su lezioni frontali ed esercitazioni dedicate al calcolo, e non vengono svolte né attività di *problem solving* né attività laboratoriali con impiego di software di matematica.

Le quaranta ore del corso sono state distribuite in cinque incontri di sette ore, quattro antimeridiane e tre pomeridiane dal lunedì al venerdì, e nell'incontro antimeridiano del sabato di cinque ore.

Obiettivo di fondo della "*learning week*" l'acquisizione di un'esperienza per favorire un atteggiamento positivo, di curiosità e approfondimento, nei confronti della matematica e delle sue applicazioni.

Le finalità essenziali del percorso, concordate con gli insegnanti di matematica della scuola, possono essere così sintetizzate: recuperare l'interesse degli studenti nei confronti della matematica; affrontare le difficoltà d'apprendimento con il consolidamento di abilità e competenze matematiche di base; consolidare i concetti fondamentali di analisi matematica sviluppati nel corso dell'anno scolastico in vista della prosecuzione dello studio nel successivo anno scolastico.

3. Il progetto e le scelte metodologico-disciplinari

Per quanto riguarda gli aspetti metodologici il principale riferimento è alla didattica laboratoriale in particolare alla concezione di laboratorio di matematica che caratterizza le proposte elaborate dall'Unione Matematica Italiana e presentate nella pubblicazione Matematica 2003: il laboratorio di matematica come "un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici." (Anichini *et al*.,2004).

Attività di *problem solving* in quanto "*contesto ideale per lo sviluppo delle capacità di autoregolazione, relative ai processi di controllo e quindi anche alla presa di decisioni strategiche*" (Zan, 2007, p. 259) e "*per quanto riguarda le abilità metacognitive, ... unanimemente riconosciuto come il contesto naturale per svilupparle e riconoscerle.*" (Zan, 2007, p. 260). Abilità metacognitive particolarmente carenti proprio per gli studenti con difficoltà d'apprendimento come quelli cui si rivolge l'intervento e quindi da promuovere e sostenere.

In questo ambito GeoGebra è stato impiegato sia come strumento per la rappresentazione e risoluzione di situazioni problematiche, sia come ambiente d'apprendimento in attività di gruppo e in esercitazioni individuali.

Altro riferimento alla base dell'esperienza, l'apprendimento cooperativo (Sharan et al., 1998; Comoglio et al., 2000) inteso come situazione in cui si attivano competenze trasversali (partecipare, comunicare, condividere, collaborare; interpretare un testo, risolvere problemi, saper valutare la correttezza delle soluzioni adottate) e motivazioni che in contesti tradizionali, come quello della lezione frontale, non si riescono a conseguire.

Attività per gruppi cooperativi basata su un modello con assegnazione di ruoli che per quanto riguarda la matematica è stato sperimentato da A. Pesci (Pesci, 2003, 2004).

Il modello è stato adattato a gruppi di quattro studenti con alcune modifiche dei ruoli. In particolare nell'attività di risoluzione di problemi e di discussione di quesiti matematici sono stati confermati i tre ruoli di coordinatore (orientato al compito), redattore e relatore e si è introdotto il ruolo di operatore il cui profilo prevede la gestione degli aspetti operativi e di calcolo legati all'uso di strumenti come calcolatrici elettroniche e il software GeoGebra. Ogni gruppo è stato affidato a un tutor che aveva il compito di sostenere la motivazione al lavoro di gruppo, il clima relazionale e il rispetto dei ruoli assegnati per favorire il processo cognitivo di ogni partecipante.

I tutor, neolaureati in discipline scientifiche, non intervengono nel merito del compito assegnato se non in particolari occasioni e secondo modalità concordate con il docente.

Durante le esercitazioni di gruppo su specifici argomenti invece non è prevista l'assegnazione di ruoli. Il tutor in queste esercitazioni ha non solo il compito di sostenere la motivazione e relazioni produttive all'interno del gruppo, ma interviene anche nel merito del compito per stimolare la riflessione e fornire chiarimenti. I momenti dedicati all'attività di *problem solving* in gruppo si sono alternati a discussioni plenarie per il confronto delle soluzioni individuate dai diversi gruppi e ad interventi frontali del docente per la sistematizzazione concettuale. Le attività di *problem solving* sono state collocate al mattino mentre il pomeriggio è stato dedicato alle esercitazioni.

Tra i riferimenti più propriamente disciplinari - che hanno orientato anche la scelta e le modalità di svolgimento delle attività volte al recupero di abilità di base - quelli relativi alle competenze quali i "sensi matematici" del numero (Sowder, 1992), del simbolo (Arcavi, 1994) e del grafico (Robutti, 2003) indispensabili per poter usare, in modo flessibile ed efficace, i concetti matematici anche in ambiti e contesti non strettamente disciplinari.

Il dare "senso" agli oggetti matematici, che gli studenti sono chiamati a manipolare, rappresenta il filo conduttore del percorso.

Per "senso del numero" si intende sicuramente la conoscenza dei numeri interi, decimali, frazionari, irrazionali, e la capacità di operare con essi ma anche possedere la capacità di stima di un ordine di grandezza, di un errore, delle cifre decimali significative e la capacità di determinare una percentuale o di fare calcoli approssimati.

Per "senso del simbolo", in questo contesto, si può intendere la capacità di saper leggere attraverso i simboli le relazioni esistenti tra le variabili in gioco scegliendo anche opportunamente il modo nel quale rappresentarle.

Per "senso del grafico" si intende sia l'abilità nel leggere ed interpretare grafici sia l'abilità nel rappresentare dati e funzioni di data equazione.

Queste competenze sono particolarmente limitate in allievi con difficoltà d'apprendimento e la cui carenza emerge gravemente nell'affrontare concetti che richiedono un elevato livello di astrazione, come ad esempio quelli di funzione, di limite e di derivata. Concetti che finiscono quindi per risultare agli studenti privi di "senso" e di cui al più lo studente riconosce il carattere procedurale e di calcolo.

Per quanto riguarda il concetto di limite si è privilegiata la descrizione dinamica (infinito potenziale) a quella statica (infinito attuale, definizione epsilon-delta) tenendo conto sia delle difficol-

tà cognitive che quest'ultima comporta sia del fatto che la trattazione proposta agli studenti nel corso di matematica, pur basata sulla definizione di Weierstrass, non li ha visti impegnati, nel corso dell'anno scolastico, nella verifica di limiti mediante la definizione. Verifica sempre meno presente nella pratica didattica e come segnalato da più ricerche, piuttosto problematica sia dal punto di vista epistemologico (Prodi, 1993; Bagni, 1999) che cognitivo (Malara, 2003).
L'approccio dinamico al concetto di limite può, d'altra parte, essere efficacemente proposto con l'uso di software che, come GeoGebra, consentono manipolazioni grafiche. Numerose ricerche (Trouche, 1996; Maschietto, 2006; Paola, 2005) segnalano come il manipolare rappresentazioni grafiche dinamiche possa validamente sostenere l'apprendimento dei concetti fondanti dell'Analisi matematica nella scuola secondaria di secondo grado.
Anche per quanto riguarda il concetto di derivata si è scelto un approccio dinamico che con l'utilizzo di GeoGebra consente un apprendimento percettivo-motorio che dalla costruzione di immagini mentali e di significati conduce alla concettualizzazione (Paola, 2005). Concettualizzazione che con gli approcci logico-formale e procedurale gli studenti, in particolare quelli che manifestano difficoltà d'apprendimento, non riescono a conseguire.

4. Struttura del percorso e descrizione delle attività

Il percorso ha avuto la durata di 40 ore distribuite nell'arco di una settimana, 7 ore dal lunedì al venerdì, con una pausa pranzo di un'ora, e 5 ore al sabato.
Delle 40 ore 30 sono state dedicate ad attività di risoluzione problemi ed esercitazioni di consolidamento, rivolte a tutti gli studenti. Le rimanenti 10 ore sono state di esercitazioni di matematica per gli studenti con il solo debito formativo in matematica o di elettronica o inglese per gli studenti con debito formativo in una di queste discipline.
La docenza del corso e il coordinamento delle attività è stato svolto dal Prof. A. Criscuolo del Centro MatNet dell'Università di Bergamo. Il docente di matematica dell'I.T.I.S. "E. Majorana", ha collaborato alla conduzione delle esercitazioni svolte nelle ore pomeridiane.
Nelle svolgimento delle attività ognuno dei sei gruppi è stato seguito da un tutor. Hanno svolto il ruolo di tutor quattro neolaureati e due tutor interni docenti di matematica o di discipline tecnico-scientifiche.
In linea di massima sono stati svolti lavori di gruppo per la risoluzione di problemi per circa 2-3 ore ad incontro, esercitazioni di gruppo ed esercitazioni guidate, per il consolidamento dei con-

cetti e delle abilità nelle procedure di calcolo per circa 2 ore e interventi frontali per complessive due ore circa.
Il lunedì, il martedì e il mercoledì della “*learning week*” sono stati dedicati ad argomenti di matematica di base e ai concetti fondamentali relativi alle funzioni e alla loro rappresentazione grafica: numeri e percentuali; funzione di proporzionalità diretta, funzione lineare e relativi grafici; definizione di funzione, riconoscimento di relazioni e di funzioni; rappresentazione di funzioni con simboli, tabelle, grafi, grafici; dominio, codominio, proprietà e classificazione delle funzioni; funzioni elementari e relativi grafici; *leggere i grafici*, segno, zeri, intersezioni con gli assi, simmetrie, crescenza, decrescenza, concavità, estremi, flessi, discontinuità, limiti e asintoti; caratteristiche delle funzioni polinomiali e delle funzioni razionali fratte; *tracciare grafici*, operazioni grafiche e trasformazioni geometriche, dal grafico di funzioni elementari a grafici di funzioni composte con le trasformazioni geometriche; funzioni con valori assoluti; funzioni inverse.
Il giovedì e il venerdì sono stati interamente dedicati ai concetti dell’analisi per lo studio di funzioni: il concetto di limite, calcolo di semplici limiti e forme indeterminate; asintoti, tangente al grafico di una funzione e concetto di derivata; derivata, monotonia ed estremi; derivata e concavità; calcolo di derivate, studio di funzione.
Il sabato mattina è stato dedicato allo studio di funzioni razionali, al test finale e alle compilazione del questionario di gradimento.

L’uso di GeoGebra nello svolgimento delle attività

Il software, che gli studenti incontravano per la prima volta, è stato utilizzato da subito senza difficoltà, sulla base di essenziali indicazioni operative illustrate al momento e utilizzando file appositamente predisposti contenenti quesiti e costruzioni GeoGebra da esplorare.
Non è stato quindi necessario svolgere un preventivo addestramento. Ciò ha consentito di mantenere il focus sull’attività matematica e non sullo strumento informatico che è stato utilizzato dagli studenti in modo sostanzialmente intuitivo ed autonomo.
L’interesse e la spontanea attitudine all’utilizzo di strumenti informatici ha contribuito a rendere coinvolgente l’uso di GeoGebra che spesso si è tradotto in sviluppi e approfondimenti del compito assegnato.
La comprensione di particolari nodi concettuali legati a temi tipicamente ostici, come il concetto di limite e di derivata, è stata decisamente sostenuta dalla rappresentazione dinamica proposta

da GeoGebra. L'utilizzo congiunto dei diversi registri di rappresentazione consentiti dal software (testuale, numerico, tabellare, grafico e algebrico-simbolico) ha reso più stimolante l'approccio ai quesiti proposti e in particolare ha alleggerito lo studio di funzione dalla pesantezza del calcolo arricchendolo invece di significati intuitivi e comprensibili secondo una modalità visuale.

L'esperienza sembra inoltre mostrare che l'impiego di GeoGebra risulta produttivo ed efficace anche nelle attività in gruppi cooperativi con ruoli assegnati.

Le attività svolte

Tratteremo qui solo alcune delle attività relative ai concetti di limite e derivata e allo studio di funzioni proposte agli studenti. Nell'Allegato 1 sono riportate le schede delle attività che riguardano a questa parte.

Tralasceremo quelle relative alle competenze di base - i numeri, il concetto di funzione, i grafici e alle loro trasformazioni - anch'esse svolte con l'utilizzo di GeoGebra.

Le costruzioni con GeoGebra qui descritte possono essere visionate su GeoGebraTube[4].

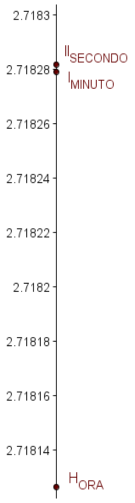
Interesse continuo e numero di Napier: il concetto di limite

La situazione problematica *Interesse continuo e numero di Napier*, tratta da un testo scolastico di Emma Castelnuovo (Castelnuovo et al., 1986), ma proposta anche da Bruno De Finetti in una versione un po' diversa (De Finetti, 1988), conduce alla "scoperta" del numero di Napier.

Nel nostro caso è stata occasione per un ragionamento sul concetto di limite. Questa la domanda posta dal problema: *"Investendo 1 € al tasso d'interesse composto del 100% annuo dopo un anno il capitale accumulato è di 2 €. Quanto vale il capitale accumulato, detto montante nel linguaggio dell'economia, dopo un anno se, anziché applicare il tasso annuale del 100%, si applica un tasso semestrale del 50% oppure un tasso trimestrale del 25%? Continuando così, con l'aiuto del foglio di calcolo di GeoGebra, con un tasso mensile del* $\frac{100}{12}$% *e poi giornaliero, orario, al minuto, cosa noti?".*

[4] http://www.geogebratube.org/collection/show/id/2033

In Figura 1 è riportata la soluzione del quesito con un'immagine della vista grafica di GeoGebra in cui le ordinate dei punti sull'asse delle *y* rappresentano le successive approssimazioni del numero di Napier.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Annuale	Semestrale	Trimestrale	Mensile	Giornaliero	Orario	al minuto	al secondo
2	Interesse	1.0000	0.50000	0.25000	0.083333	0.0027397	0.00011416	0.0000019026	0.000000031710
3	Periodi	1.0000	2.0000	4.0000	12.000	365.00	8760.0	525600	31536000
4									
5	Capitale Iniziale	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
6	**Montante**	**2.0000**	**2.2500**	**2.4414**	**2.6130**	**2.7146**	**2.7181**	**2.7183**	**2.7183**
7									
8	**e=2,7182818284..**								
9									
10		1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
11		2.0000	1.5000	1.2500	1.0833	1.0027	1.0001	1.0000	1.0000
12			2.2500	1.5625	1.1736	1.0055	1.0002	1.0000	1.0000
13				1.9531	1.2714	1.0082	1.0003	1.0000	1.0000
14				2.4414	1.3774	1.0110	1.0005	1.0000	1.0000
15					1.4921	1.0138	1.0006	1.0000	1.0000
16					1.6165	1.0166	1.0007	1.0000	1.0000
17					1.7512	1.0193	1.0008	1.0000	1.0000
18					1.8971	1.0221	1.0009	1.0000	1.0000
19					2.0552	1.0249	1.0010	1.0000	1.0000

Figura 1 – Soluzione quesito *Interesse continuo e numero di Napier*

E' prevista sia una soluzione di tipo ricorsivo, per i primi frazionamenti del periodo annuale, sia la soluzione con il calcolo del termine n-esimo della successione. Sull'asse delle ordinate sono rappresentati i montanti che, inizialmente sovrapposti, possono essere discriminati utilizzando lo strumento zoom di GeoGebra. La visualizzazione mostra con evidenza intuitiva come il limite sia un numero, nella visione dinamica il risultato di un processo e non il processo stesso come spesso gli studenti ritengono.

Questo approccio, discreto e dinamico al tempo stesso, ha anche il vantaggio di basarsi sul limite di una successione che è più facile e più significativo cogliere per lo studente come ha scritto Giovanni Prodi (Prodi, 1993):

"Preferisco cominciare dai limiti delle successioni per la spontaneità con cui si pone il problema: infatti, dopo aver introdotto attraverso una legge generale o attraverso un procedimento di ricorrenza, una successione (e dopo aver fatto, se possibile, un'attività al calcolatore) è naturale chiedersi come essa si comporta quando l'indice diventa sempre più grande. Così il tema del limite si salda molto bene con quello degli algoritmi, anche perché spesso il termine generale della successione rappresenta le successive approssimazioni nel calcolo di un'incognita. In questi casi la nozione di limite nasce in una situazione molto motivante, specialmente quando il limite non è un numero già noto."

L'attività immediatamente successiva è stata la rappresentazione con GeoGebra del grafico della funzione $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ che sviluppa la precedente attività con il passaggio dal discreto al continuo e la visualizzazione del limite attraverso l'asintoto orizzontale $y = e$. L'attività consente di far riflettere lo studente su due aspetti distinti, ma connessi: il limite come numero, in questo caso l'ordinata comune ai punti dell'asintoto, e il processo "al limite" con cui è possibile rendere piccola a piacere la differenza $|f(x) - e|$ processo che con GeoGebra è al tempo stesso grafico e dinamico.

Con il passo successivo si è cercato di affrontare quello che diversi autori segnalano come un cospicuo ostacolo cognitivo insito nella definizione di Weierstrass (definizione ε, δ) (Prodi,1993; Malara, 2003; Berni, 2002; Ascari, 2009). In questa definizione i ruoli indipendente – dipendente risultano invertiti rispetto al concetto di funzione. È la ε che riguarda la variabile dipendente, a determinare il δ che è riferito alla variabile dipendente. Un'inversione di ruoli cui è stata assegnata la denominazione di "piroetta di Weierstrass" (Arzarello, 2002). Un processo quindi che si caratterizza come inverso di un procedimento abituale e proprio in quanto tale comporta una particolare difficoltà cognitiva.

L'attività consiste nell'esplorare due costruzioni che visualizzano in modo dinamico la definizione di Weirstrass nel caso di limite finito per *x* che tende ad un valore finito e di limite finito per *x* che tende ad infinito. Lo studente, esplorando la costruzione, ripercorre i tre tratti della definizione formale di limite, $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$:

1. la scelta di $I(l)$, intorno arbitrario di l ($\forall \varepsilon > 0$),
2. l'individuazione dell'intorno di x_0, punto di accumulazione del dominio D $(\exists \delta > 0)$,
3. la verifica che, per i valori della x appartenenti all'intorno di x_0 con l'esclusione di x_0, i corrispondenti valori della funzione appartengono all'intorno del limite l , arbitrariamente scelto al l'inizio ($\forall\, x \in I(x_0) \cap D, x \neq x_0\, , f(x) \in I(l)$).

La terza parte della definizione, richiedendo di ripercorrere in senso inverso il processo di verifica, introduce un'ulteriore difficoltà cognitiva. Un nuovo cambio di punto di vista. Questo passo a ritroso, che ha un carattere esclusivamente concettuale e non operativo, viene solitamente dato per scontato, ignorato e non accompagnato da adeguate rappresentazioni grafiche (Malara, 2003).

In Figura 2 sono riportati due esempi della vista grafica di GeoGebra relative al caso di limite per $x \to x_0$ finito e $x \to +\infty$, dove al variare di ε, viene automaticamente determinato un intorno di x_0.

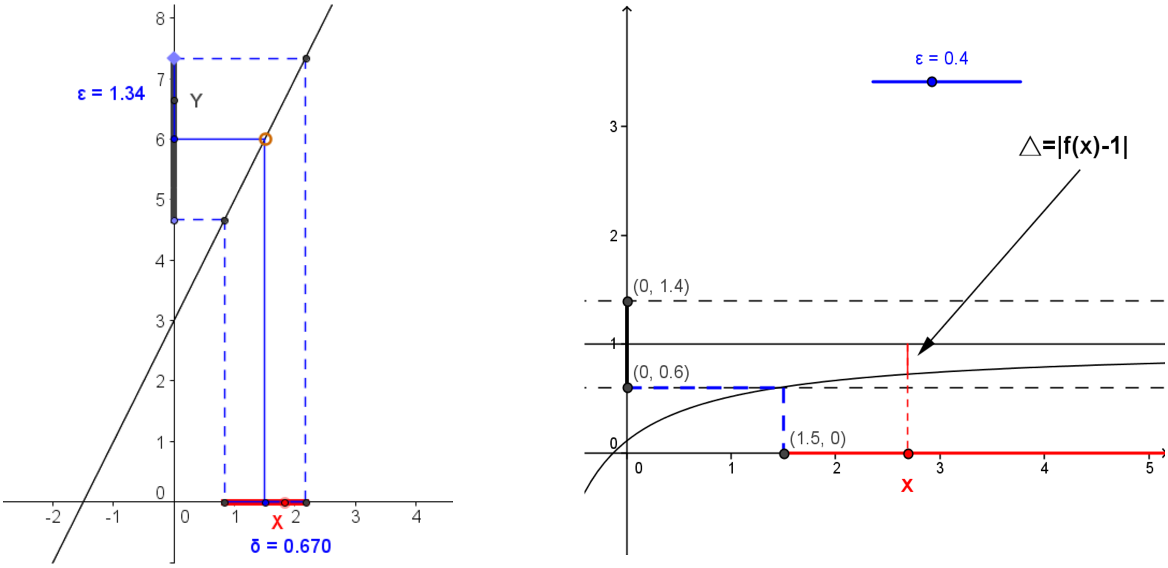


Figura 2 – Verifica di limite con GeoGebra

Gara podistica: il concetto di derivata

L'attività proposta sul concetto di derivata è basata sulla visualizzazione della rapidità di variazione di grandezze cinematiche.

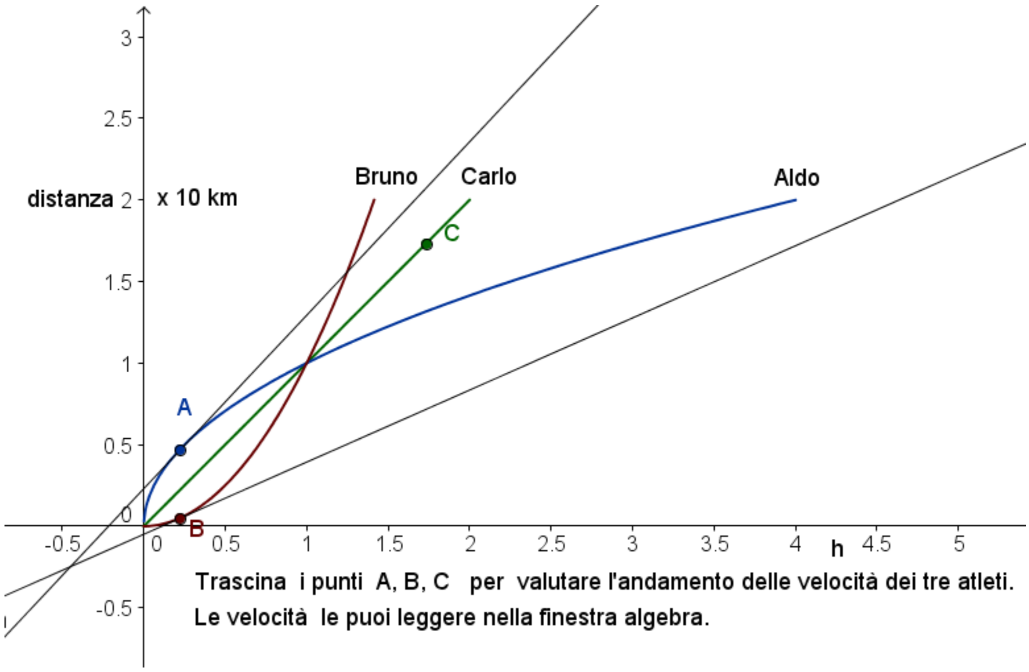


Figura 3 – Grafici relativi al quesito *Gara podistica*

Si tratta di tre grafici realizzati con GeoGebra che rappresentano le leggi orarie di tre atleti impegnati in una gara podistica (Figura 3).

Gli atleti affrontano la gara con strategie diverse cui corrispondono grafici orari rappresentati dalle funzioni $y = x^2$, $y = x$ e $y = \ \overline{x}$. L'attività dello studente consiste nell'esplorare l'andamento dei grafici, le cui funzioni generatrici sono tenute nascoste, per rispondere ad una serie di domande che conducono a riflettere, confrontando le velocità degli atleti, sul significato della derivata come pendenza della tangente e su come la sua variazione sia legata alla concavità del grafico orario.

Una successiva costruzione, realizzata sempre con GeoGebra, completa la trattazione della derivata con una riflessione sugli andamenti grafici delle derivate prima e seconda, le velocità e le accelerazioni dei tre atleti.

Un confronto duplice tra grafici. Il primo tra gli andamenti della legge oraria, velocità ed accelerazione di ciascun atleta che pone l'accento sul concetto di rapidità di variazione e sulla derivata come funzione. Passaggio importante per realizzare un corretto collegamento tra il concetto di derivata in un punto e quello di funzione derivata. Passaggio quest'ultimo che costituisce un ben noto ostacolo cognitivo: l'introduzione alla derivata come operatore che associa ad una funzione un'altra funzione. Un concetto nuovo che genera un contrasto cognitivo con il concetto di funzione che invece ad un numero associa un numero (Sargenti, 2008; Paola, 2005).

Il secondo confronto è quello tra i grafici delle velocità dei tre atleti, e poi tra le loro accelerazioni, che rinvia alle diverse caratteristiche delle tre leggi orarie la cui forma matematica è tenuta nascosta agli studenti applicando alle funzioni la caratteristica di oggetto ausiliario e quindi non visualizzato nella finestra algebrica di GeoGebra.

L'attività si è conclusa con una discussione sugli istanti iniziali della gara e sul riconoscimento delle funzioni che rappresentano le tre equazioni orarie.

Dall'esplorazione del grafico delle leggi orarie in prossimità del tempo $t = 0$, effettuata con la funzione zoom di GeoGebra e leggendo i valori delle velocità nella finestra algebra, emerge con evidenza che un solo atleta (Bruno) è partito da fermo e che uno degli atleti (Aldo) non parte dall'origine. Quest'ultima situazione dipende dalla scelta, come legge oraria, della funzione radice quadrata e alla conseguente difficoltà di considerare la velocità iniziale in $t = 0$ essendo la funzione $y = \sqrt{x}$ non derivabile in $x = 0$. La difficoltà si può risolvere scegliendo, come GeoGebra consente, per dominio un intervallo con estremo inferiore pari ad esempio a 0,001 anziché a 0.

Il modello dinamico della gara podistica, che ha stimolato gli studenti alla riflessione e a vivaci discussioni, ha fornito loro un'occasione d'apprendimento percettivo-intuitivo, apprendimento che dovrebbe precedere quello logico-formale che in questo caso è stato invece proposto "a posteriori".

Identikit di una funzione: il grafico

Con questa attività gli studenti hanno concluso il percorso di recupero e consolidamento applicando i metodi dell'analisi alla determinazione del grafico di una funzione.

Lo scopo dell'attività è quello di sviluppare il procedimento, usualmente svolto con carta e penna, utilizzando GeoGebra per i calcoli, per verifiche e infine per la rappresentazione della funzione. Gli studenti liberati in questa fase dalle esigenze di calcolo possono concentrarsi e riflettere sui significati: sul senso di ciascuno dei passi del procedimento, sull'ordine secondo cui svolgerli, sull'interpretazione dei risultati via via ottenuti e infine sulla sintesi da effettuare.

Naturalmente il grafico della funzione non deve essere reso visibile allo studente, se non ad attività conclusa come verifica della correttezza della soluzione. Per far ciò è sufficiente assegnare la funzione come oggetto ausiliario non mostrato. In questo modo la funzione non compare nella finestra algebra e il grafico non è rappresentato. La funzione da studiare può essere visualizzata come testo LaTex nella finestra grafica (Figura 4).

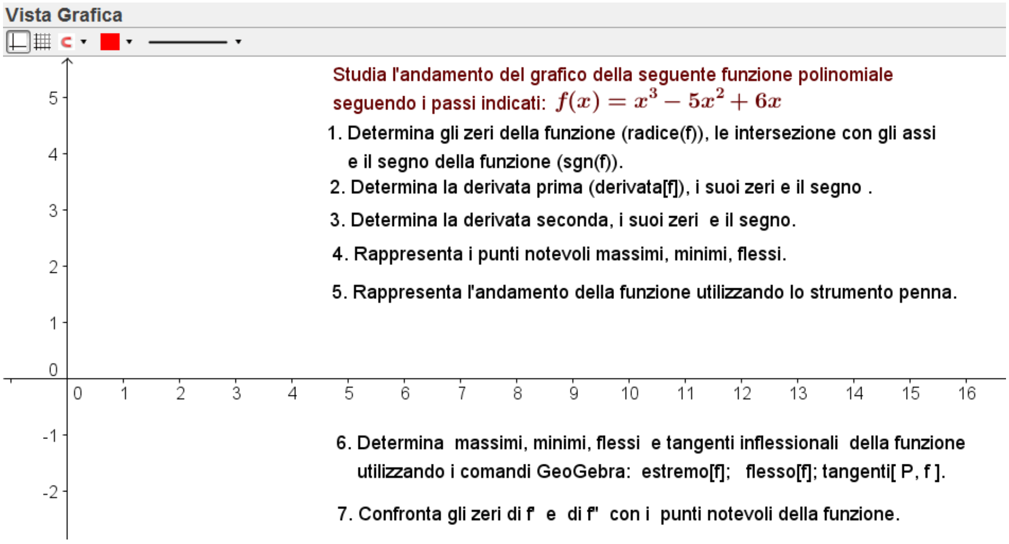


Figura 4 - *Identikit di una funzione*

Nello svolgimento dell'attività sono stati utilizzati le funzioni e i comandi più vicini all'operatività con carta e penna e non i comandi diretti di GeoGebra (*Estremo, Flesso*) usati, a volte, come verifica. Sostanzialmente sono sufficienti quattro comandi, una funzione e uno strumento di GeoGebra: i comandi *Radice e Intersezione e* la funzione *Sgn* (per determinare il dominio, per la ricerca degli zeri e lo studio dei segni) poi i comandi *Limite e Derivata* e infine lo strumento *Penna.*

Nello svolgere l'attività gli studenti, che hanno lavorato individualmente o in gruppi di due, sono stati invitati a riportare l'intero procedimento anche su carta. Con questa scelta si è inteso sottolineare il carattere ausiliario dell'utilizzo di GeoGebra e al tempo stesso suggerire un modello d'uso adattabile al modo di lavorare cui sono abituati gli studenti.

E' stata anche sperimentata un'attività in cui la forma analitica della funzione è stata completamente nascosta allo studente. Agli studenti viene fornito unicamente il file con la funzione da studiare definita come oggetto ausiliario non mostrato. In questo modo lo studente deve affrontare lo studio di una funzione senza conoscerne la forma analitica. Venendogli a mancare le informazioni generali da essa deducibili (tipologia, proprietà, eventuali simmetrie) è costretto a fare affidamento unicamente nell'applicazione corretta del procedimento e soprattutto nell'interpretazione e nella sintesi delle informazioni derivanti dall'analisi.

Utilizzando GeoGebra con questa modalità lo studio di funzione risulta semplificato per l'assenza di calcoli e al tempo stesso reso più stimolante ed impegnativo per quanto riguarda l'interpretazione delle informazioni e la sintesi che conduce al grafico. Aspetti questi che sono a nostro parere i più significativi e concettuali di uno studio di funzione.

5. Test d'ingresso e di uscita e questionario di gradimento

All'avvio e al termine della "*learning week*" gli studenti hanno svolto un test basato su un questionario di quindici domande a risposta multipla su argomenti di base, relativi al biennio e alla secondaria di 1° grado, e ad alcuni argomenti fondamentali di analisi (Allegato 2). Le domande dei due test sono analoghe e pressoché dello stesso livello di difficoltà, pur differendo nella forma e negli eventuali calcoli da svolgere, in modo da poter confrontarne i risultati e stimare in che misura la "*learning week*" ha inciso sull'apprendimento.

I risultati del test iniziale hanno inoltre consentito di orientare modalità e tempi di svolgimento delle attività e suggerire la composizione dei gruppi di lavoro.

Analisi delle risposte date nei due test

La percentuale di risposte corrette è risultata in media pari al 40% nel test iniziale e pari all'84% nel test finale. L'incremento, pari al 44% dei quesiti proposti, è da considerarsi positivo anche se sicuramente influenzato dal fatto che nella test iniziale gli studenti si sono trovati di fronte ad una tipologia di prova e una varietà di domande cui non erano abituati mentre nel test finale ne avevano già fatto esperienza.

Il confronto tra i risultati di ingresso e di uscita, contrariamente a quanto ci si poteva attendere, gli studenti con debito formativo in matematica hanno conseguito risultati migliori degli studenti cui non è stato assegnato il debito formativo: 44% contro 35% nel test iniziale e 87% contro 81%. Da rilevare che i cinque studenti senza alcun debito hanno conseguito in media nel test finale il 91% di risposte corrette contro il 43% nel test iniziale.

Bisogna però considerare che tutti gli studenti partecipanti sono stati valutati come carenti in matematica, anche se non a tutti la scuola ha attribuito il debito in matematica in ragione di valutazioni di carattere complessivo non attinenti esclusivamente l'apprendimento matematico.

Confrontando i risultati relativi ai quesiti riconducibili ai diversi argomenti si nota che nel test iniziale le domande in cui la percentuale di risposte corrette è risultata inferiore alla media sono state quelle relative alle funzioni (40%) e al concetto di derivata (28%). Anche nel test finale questa sezione è, in termini assoluti, quella con la minore percentuale di risposte corrette (68% rispetto alla media dell'84%), ma risulta al tempo stesso quella in cui l'incremento delle risposte corrette, tra test iniziale e finale, risulta percentualmente maggiore (2,4 volte). In altri termini per la sezione del test finale che ha riguardato i grafici e le derivate, l'indice di miglioramento è risultato pari al 55%, gli studenti hanno cioè risposto correttamente al 55% dei quesiti cui non avevano saputo rispondere nel test iniziale.

La tipologia di quesiti per i quali si è manifestato un miglioramento più marcato sono state quelle attinenti al dominio di funzioni razionali, irrazionali e trascendenti (indice di miglioramento del 94%), al riconoscimento della linearità delle funzioni (93%) e al riconoscimento proporzionalità diretta e calcolo radici e potenze (entrambe 92%).

In media nel test finale gli studenti hanno risposto correttamente al 74% del tipo di domande cui non avevano saputo rispondere nel test iniziale.

Particolarmente positivi nella prova finale i risultati relativi ai primi cinque quesiti, relativi al senso del numero, e ai quesiti dal sesto al decimo relativi ai concetti di proporzionalità e linearità, di funzione e di grafico su cui si è particolarmente insistito nello svolgimento dell'attività.

Esiti del questionario di gradimento

Il questionario di gradimento (Allegato 3) ha evidenziato che l'esperienza nel suo complesso è stata valutata positivamente dalla totalità degli studenti (indice 3 oppure 4 su una scala di gradimento 1-4). Il 17% degli studenti (4 studenti su 24) attribuisce la valutazione massima.

Il gradimento risulta maggiore da parte degli studenti con debito con un punteggio medio di 3.3 rispetto agli studenti senza debito con un punteggio medio di 3.1.

Il 96% degli studenti considerano l'esperienza interessante o molto interessante (indice di accordo 3.2), l'88% coinvolgente o molto coinvolgente (3.1) mentre il 38% difficile o molto difficile (2.3).

Per quanto riguarda l'uso di GeoGebra ventidue studenti su ventiquattro (92%) si dichiarano d'accordo o molto d'accordo con l'affermazione "ho sperimentato l'utilità dell'uso di software nello studio della matematica" (indice di accordo 3.4).

Tutte le attività hanno ottenuto indici medi di gradimento (media pesata della scala di gradimento 1-4) compresi tra 3.1 e 3.3 con un indice medio complessivo di 3.2. Il gradimento più elevato è risultato quello per le esercitazioni guidate al computer con GeoGebra (3.3) per le quali il 42% degli studenti esprimono il gradimento massimo (4). Anche le esercitazioni e la risoluzione e discussione di problemi hanno ottenuto un gradimento elevato pari a 3.3.

Nel complesso l'88% degli studenti ha espresso gradimento (caratteri 3 e 4) per il complesso delle attività: il 92% per le attività di risoluzione di problemi in gruppo e per le esercitazioni guidate in aula, l'83% per i richiami teorici e le spiegazioni.

Da ciò si può dedurre che le attività caratterizzanti il progetto, come le attività di *problem solving* e l'uso di GeoGebra, sono state tra quelle più apprezzate da parte degli studenti.

Interessante a riguardo l'analisi delle osservazioni e dei suggerimenti che gli studenti hanno segnalato nella sezione "*Dico la mia"* del questionario di soddisfazione. Ricorrenti i riferimenti all'interesse suscitato, alla novità e all'efficacia dell'esperienza come ad esempio nei commenti di due studenti: *"La learning week è stata interessante, soprattutto mi ha fatto sperimentare un modo nuovo per imparare la matematica"*; *"Questa settimana mi ha reso mentalmente più forte rassicurandomi e migliorandomi nel ragionamento e nello svolgimento degli esercizi".*

Per quanto riguarda le attività proposte il gradimento più elevato è andato alle attività Problemi condominiali, proporzionalità e linearità (3.3), Interesse continuo e numero di Napier sul concetto di limite (3.2) e Identikit di una funzione relativo allo studio di funzioni (3.1).

Sensibile la diversificazione per i due gruppi di studenti. Per gli studenti con debito l'attività più gradita è risultata *Funzioni: grafici e trasformazioni (3.2)* e un gradimento superiore a quello medio è andato anche all'attività Studio di funzioni con GeoGebra. Ciò sembra indicare un maggiore apprezzamento delle attività più fortemente legate ai contenuti scolastici.

Valutazione dell'esperienza

Gli studenti si dichiarano d'accordo circa tutte le affermazioni/valutazioni positive proposte nel questionario (in media 3.2) e in particolare relativamente a *"sperimentare l'utilità dell'uso di software nello studio della matematica"* (3.4) e "*ha proposto la matematica in modo diverso da quello scolastico* (3.7)*"*. L'indice di accordo è in media leggermente inferiore per gli studenti con debito (3.10) rispetto agli studenti senza debito (3.22). Per quanto riguarda l'affermazione *"mi sarà utile per lo studio della matematica nel prossimo anno scolastico"* l'accordo più elevato si verifica per gli studenti con debito (3.3 contro 3.1).

Gli studenti considerano la "*learning week*" *"pesante"* (3.0) probabilmente anche in funzione dell'impegno orario, ma non "difficile" (2.3). In particolare, come era facile attendersi, gli studenti con debito hanno percepito la "*learning week*" più *"pesante"* e relativamente più *"difficile"* degli studenti senza debito (rispettivamente 3.4 contro 2.8 e 2.4 contro 2.1).

Conclusioni

L'esperienza appare confermare che le difficoltà che gli studenti incontrano nell'apprendimento dei concetti fondamentali dell'analisi possano essere positivamente affrontate con attività laboratoriali basate sull'apprendimento cooperativo e il *problem solving* e supportate dall'uso di GeoGebra.

La possibilità che il software offre di utilizzare e coordinare i vari registri di rappresentazione (testuale, numerico, tabellare, grafico, algebrico-simbolico) consente di proporre situazioni problematiche e nodi concettuali, legati all'apprendimento dei concetti di limite e derivata, in modo stimolante per gli studenti ed efficace dal punto di vista dell'apprendimento.

Questioni come la rappresentazione del limite nella sua duplice descrizione dinamica (infinito potenziale) e statica (infinito attuale, definizione epsilon-delta), la distinzione tra funzione derivata e derivata in un punto, lo studio di funzioni, sgravato dal calcolo e reso più denso di significati, se proposte con GeoGebra assumono un carattere dinamico ed intuitivo che ne facilita la comprensione.

L'esperienza conferma inoltre che per studenti degli ultimi anni della scuola secondaria superiore l'utilizzo di GeoGebra in classe non necessita di un preventivo addestramento.

Gli studenti possono impararne le principali caratteristiche d'uso in modo diretto e sincrono con l'attività di *problem solving* e le esercitazioni da svolgere. Ciò consente di mantenere il focus sull'attività matematica e non sullo strumento informatico che può essere utilizzato dagli studenti in modo sostanzialmente autonomo.

Nonostante l'utilizzo del software sia per sua natura individuale, GeoGebra può essere proficuamente utilizzato anche a supporto di attività in gruppi cooperativi una volta definiti ruoli e compiti all'interno del gruppo.

Oltre alla risposta molto positiva degli studenti, per livello di coinvolgimento e per risultati, anche gli insegnanti che hanno collaborato alla conduzione della "*learning week*" hanno apprezzato il software e si sono mostrati interessati al suo utilizzo didattico.

4. Bibliografia

1. Anichini G., Arzarello F., Ciarrapico L., Robutti O., *Matematica 2003: Materiali per un nuovo curricolo di matematica con suggerimenti per attività e prove di verifica (scuola superiore)*, Matteoni stampatore, Lucca, 2004.
2. Arcavi A., *Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics,* For the Learning of Mathematics, 14, 3, 1994.
3. Arzarello F., *A model for analysing mathematical objects, theorems and proofs: theoretical and empirical considerations*, 1st Joint International Meeting AMS-UMI Pisa, Giugno 12-16, 2002.
4. Ascari M., *Argomentare, congetturare, dimostrare nell'insegnamento dell'Analisi*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol. 32 A-B n. 6, 2009.
5. Bagni G.T., *Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale,* L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 22B, 4, 353–372, 1999.
6. Berni M., *Note per un corso di Analisi zero*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol. 25B, n. 2, apr 2002, p. 153-179, 2002.
7. Castelnuovo E., Gori Giorgi C., Valenti D., *La Matematica nella realtà*, La Nuova Italia Editrice, Scandicci (FI), 1986.
8. Comoglio M., Cardoso M. A., *Insegnamento e apprendimento in gruppo: il cooperative learning*, LAS, Roma, 2000.
9. De Finetti B., *Tre personaggi della matematica: e, π, i, su "Numeri, caso e frequenze"*, Quaderni de Le Scienze n.45, 1988.

10. Malara N. A., *Un aspetto dell'apprendimento del concetto di limite: la verifica mediante definizione*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate, Vol. 26B, n.1, 61-82, 2003.
11. Maschietto M., *Introduzione all'analisi matematica: il ruolo degli artefatti*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 29 A-B, n.4, 357-370, 2006.
12. Paola D., *L'insegnamento apprendimento del Calculus e le nuove tecnologie: una rivoluzione a portata di mano*, Progetto Alice, Vol. VI, n.16, 43-87, 2005.
13. Pesci A., Baldrighi A., Torresani M., *Relazioni disciplinari e sociali nell'apprendimento cooperativo: esperienze didattiche e spunti di riflessione*, Matematica e Difficoltà n. 12, Pitagora, Bologna, 170-178, 2003.
14. Pesci A., *Insegnare e apprendere cooperando: esperienze e prospettive*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 27 A-B, n. 6, 638-670, 2004.
15. Prodi G., *Riflessioni sull'insegnamento dell'Analisi matematica*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, Vol. 16, n. 5-6, 1993.
16. Robutti O., *Il senso del grafico con la mediazione delle tecnologie: metafore attivate e significati costruiti*, La Matematica e la sua Didattica, Vol. 2, pp. 173-195, 2003.
17. Sargenti A., *Il concetto di derivata: come e quando introdurlo nella scuola secondaria?*, L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate. Vol. 31 B, n. 1, 2008.
18. Sharan Y., Sharan S., *Gli alunni fanno ricerca, l'apprendimento in gruppi cooperativi*, Trento, Erickson, 1998.
19. Sowder J. T., *Making sense of in school mathematics Analysis of Arithmetic for theoretical and empirical considerations*, 1st Joint International Meeting AMS-UMI Pisa, 1992.
20. Trouche L., *Étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Tesi di dottorato, Université Montpellier II, 1996.
21. Zan R., *Difficoltà in matematica Osservare, interpretare, intervenire*, Springer-Verlag, Italia, 2007.