

Università degli Studi di Bergamo

Dottorato di ricerca in Formazione della Persona e Mercato del Lavoro

LA DIDATTICA DELLA GEOMETRIA E LE RILEVAZIONI NAZIONALI

Candidata: dott.ssa **Laura Montagnoli**

Matricola: 1013940

Relatrice: prof.ssa **Silvia Pianta**

INDICE

INDICE	2
INTRODUZIONE	4
CAPITOLO 1 - LA GEOMETRIA DALLE ORIGINI AI GIORNI NOSTRI	8
1.1 LE ORIGINI DELLA GEOMETRIA	8
1.2 LA GEOMETRIA MODERNA	10
1.3 LA VALENZA DIDATTICA E FORMATIVA DELLA GEOMETRIA	15
CAPITOLO 2 - LE PROVE INTERNAZIONALI	21
2.1 LA GEOMETRIA PER OCSE E IEA	21
L'ORGANIZZAZIONE PER LA COOPERAZIONE E LO SVILUPPO ECONOMICO	21
LE PROVE OCSE/PISA	22
ALCUNI ESEMPI	31
CONCLUSIONI	38
L'INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR THE EVALUATION OF EDUCATIONAL ACHIEVEMENT	39
LE PROVE IEA/TIMSS	40
CONFRONTO E SPUNTI	49
2.2 GLI ESITI DELLE PROVE INTERNAZIONALI	50
L'ESITO DELLA PROVA OCSE/PISA 2009	50
SINTESI DELL'ESITO PROVA OCSE/PISA 2012	59
L'ESITO DELLA PROVA IEA/TIMSS 2011	60
COMMENTO	65
CAPITOLO 3 - L'INVALSI, IL QUADRO TEORICO E L'ANALISI DELLE PROVE	67

3.1 L'ISTITUTO NAZIONALE PER LA VALUTAZIONE DEL SISTEMA EDUCATIVO DI ISTRUZIONE E DI FORMAZIONE	67
3.2 IL QUADRO DI RIFERIMENTO	69
3.3 LE PROVE SOMMINISTRATE	78
3.4 GLI ESITI DELLE PROVE NAZIONALI 2011/2012 E 2012/2013	79
3.5 L'ANALISI DEI QUESITI GEOMETRICI DELLE PROVE NAZIONALI	85
PROVA NAZIONALE 2007/2008	85
PROVA NAZIONALE 2008/2009	89
PROVA NAZIONALE 2009/2010	95
PROVA NAZIONALE 2010/2011	100
PROVA NAZIONALE 2011/2012	105
PROVA NAZIONALE 2012/2013	110
I PROCESSI E I MACROPROCESSI	115
CONCLUSIONI	119
<u>CAPITOLO 4 – OSSERVAZIONI E PROPOSTE</u>	<u>121</u>
<u>CAPITOLO 5 – I QUESITI DI GEOMETRIA NEI TEST D'ACCESSO AL TFA</u>	<u>129</u>
COMMENTO	138
<u>BIBLIOGRAFIA</u>	<u>140</u>
<u>APPENDICE</u>	<u>144</u>

INTRODUZIONE

Il mio percorso di studi e professionale e i miei interessi viaggiano lungo due binari intrecciati: la matematica e la didattica. L'esperienza maturata negli anni di insegnamento nella scuola secondaria di primo grado e in ambito universitario, come assistente ai corsi di geometria, mi ha portata a interessarmi ad argomenti che hanno come sfondo la matematica e che mi coinvolgono sotto due aspetti: la ricerca e la didattica.

Il mio primo anno di insegnamento è coinciso proprio con la prima somministrazione della Prova Nazionale dell'INValSI (Istituto Nazionale per la Valutazione del sistema educativo di istruzione e di formazione) e, durante il mio percorso di dottorato, ho ricevuto alcuni stimoli ad occuparmi di questo argomento, anche grazie ai convegni di didattica a cui ho partecipato e nei quali sono intervenuta.

La domanda attorno a cui ruota questo lavoro è relativa alla geometria che le prove INValSI sottintendono: mi sono chiesta quale sia l'impostazione epistemologica che l'istituto veicola attraverso le sue prove e se essa sia effettivamente deducibile dall'analisi delle prove e dall'attenta lettura del Quadro di Riferimento. Ho voluto cercare di comprendere quali fossero le informazioni deducibili dall'analisi dei risultati (è possibile trarre suggerimenti didattici? È possibile ottenere un quadro reale dell'andamento nazionale? Ha senso che gli insegnanti finalizzino o orientino la programmazione al superamento delle prove?).

Per rispondere a questi interrogativi ho provato anzitutto a riassumere le tappe fondamentali dell'evoluzione della geometria e successivamente mi sono concentrata sulla valenza didattica e formativa di questa scienza.

Parallelamente ho raccolto alcune informazioni relative al panorama internazionale, scoprendo quali fossero gli intenti delle valutazioni predisposte dall'OCSE

(Organizzazione per la Cooperazione e per lo Sviluppo Economico) tramite il programma PISA (Programme for International Student Assessment) e dalla IEA (International Association for the Evaluation of Educational Assessment) attraverso lo studio TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study).

Mi sono poi concentrata nello specifico sull'INValSI, ripercorrendone la storia e analizzandone le finalità.

Per valutare quale idea di geometria l'istituto sottintende, mi sono concentrata in particolare sulle Prove Nazionali, somministrate agli studenti che chiudono l'ottavo grado di istruzione. Tale prova non ha solo carattere di rilevazione, ma concorre alla determinazione del voto dell'Esame di Stato Conclusivo del Primo Ciclo di Istruzione.

Il mio percorso di dottorato ha subito una interruzione dovuta all'avvio del Tirocinio Formativo Attivo. L'ammissione a questo corso è stato subordinato al superamento di alcune prove, in cui venivano verificate le conoscenze dei futuri abilitandi. Pertanto ho pensato di inserire qualche commento anche riguardo ad esse, trattandosi esse di una ulteriore espressione del pensiero del Ministero dell'Istruzione rispetto alla matematica.

Le valutazioni internazionali che ho esaminato nel mio lavoro si prefiggono scopi differenti:

- il programma PISA indaga la capacità degli studenti di risolvere problemi concreti, poiché l'OCSE è interessata alla ricerca di pratiche commerciali utili a sviluppare l'economia, a dare stabilità finanziaria e a combattere la povertà;
- lo studio TIMSS mira a ottenere informazioni sulla qualità dell'istruzione e dei curricula, poiché la IEA conduce studi comparativi finalizzati al successo educativo;
- l'istituto INValSI punta alla valutazione dell'efficacia e dell'efficienza del sistema di valutazione del sistema di istruzione italiano.

Ne consegue che non è facile effettuare un raffronto delle prove. Da esso, comunque, emerge chiaramente che i quesiti proposti dall'INValSI costituiscono una sorta di mediazione tra l'attenzione all'acquisizione della competenza e al problem solving, con quesiti collocati in situazioni reali (PISA) e al possesso dei contenuti, con domande di natura teorica (TIMSS).

Da una analisi degli esiti delle ultime prove somministrate, emerge che gli studenti italiani si trovano maggiormente in difficoltà di fronte alle prove dell'OCSE, il che fa pensare che la didattica per competenze sia ancora soltanto un lontano obiettivo e che prassi d'insegnamento e libri di testo siano ancora fortemente incentrati sulla didattica trasmissiva dei contenuti. Ben vengano, allora, le prove INValSI, quando rappresentano uno stimolo agli insegnanti e all'editoria scolastica a lasciare un po' di spazio – accanto ai necessari esercizi meccanici – anche ai problemi che richiedono competenza.

Quale geometria va quindi insegnata nella scuola di primo grado? Più che fornire una risposta definitiva, posso suggerire alcuni orientamenti. La geometria euclidea del piano e dello spazio, impostata in modo classico, deve rappresentare per l'alunno una palestra di ragionamento e una via per affinare l'intuizione spaziale, grazie alla sua natura di astrazione della realtà. Inoltre deve configurarsi come una fonte di problemi astratti, la cui risoluzione chiarisce ulteriormente il significato delle nozioni stesse. Infine è strumento per l'interpretazione e la modellizzazione di situazioni reali e per la soluzione di problemi concreti.

Una interessante tematica emersa dall'analisi delle prove INValSI è la relazione tra gli enti geometrici e la loro rappresentazione. Non solo in queste prove, ma anche nei libri di testo (della scuola secondaria di primo grado), la relazione ente/figura è spesso sottintesa. L'alunno, che nella scuola primaria è abituato a confondere l'ente con la sua rappresentazione, si trova spiazzato se non gli viene chiarito che esiste un approccio più rigoroso. Talvolta, infatti, non viene espresso se si debbano dedurre i dati dalla figura o se si debba costruire la figura in base ai dati. Il ruolo della rappresentazione è meramente funzionale a «farsi un'idea» della situazione problematica presentata: trasmettere questa consapevolezza è un compito arduo, che risulterebbe semplificato se nei testi scolastici non si confondessero le due impostazioni. È fondamentale l'intervento dell'insegnante, che spieghi che l'ente geometrico è un oggetto astratto, che non si può disegnare. Di esso, però, si può costruire un'immagine, una rappresentazione imprecisa, ma utile, perché consente di visualizzarne alcune caratteristiche, trascurandone altre.

La tesi che presento potrebbe essere ulteriormente approfondita sotto vari aspetti. Credo che uno spunto per proseguire il lavoro potrebbe consistere in un'analisi comparativa tra le Indicazioni Nazionali per il Curricolo e i libri di testo utilizzati dagli studenti italiani. Inoltre potrebbe risultare interessante un confronto tra i programmi scolastici dei diversi Paesi. Infine una comparazione tra i libri di testo dei paesi OCSE fornirebbe uno strumento utile per comprendere se l'impostazione italiana è bilanciata o se davvero privilegia l'aspetto del contenuto a quello della competenza.

CAPITOLO 1 - LA GEOMETRIA DALLE ORIGINI AI GIORNI NOSTRI

1.1 LE ORIGINI DELLA GEOMETRIA

La matematica, e quindi la geometria, ha radici antiche, precedenti all'utilizzo della scrittura. Pertanto è difficile collocarne nel tempo le origini. Erodoto (Alicarnasso, 484 a.C. – Thurii, 425 a.C.) e Aristotele (Stagira, 384 a.C. o 383 a.C. – Calcide, 322 a.C.) fanno risalire la nascita della geometria all'epoca della civiltà egiziana, quindi intorno al 3000 a.C., ma molto probabilmente le radici di questo pensiero sono state anteriori, ma non codificate.

Secondo Erodoto la geometria è nata come risposta alla necessità di misurare le terre, dopo le inondazioni del Nilo. Aristotele, invece, riteneva che fosse legata all'esigenza speculativa ed estetica dell'agiata classe sacerdotale egizia. I geometri egiziani erano chiamati «tenditori di corde» o «agrimensori», ma ciò può sostenere entrambe le teorie, dal momento che le corde venivano tese sia per ridefinire i confini delle terre sia per tracciare le piante dei templi.

Un'altra ipotesi relativa alla genesi della geometria è sostenuta dalle pratiche rituali primitive indiane. Infatti i più antichi risultati geometrici sono i «*Sulvasutras*», cioè «regole della corda». Si tratta di relazioni tra misure, che servivano per orientare la costruzione di altari e di templi. Esse fornivano i criteri per la costruzione di figure geometriche quali rettangoli e quadrati, e la trasformazione di quadrati in rettangoli, trapezi isosceli, triangoli isosceli, rombi e cerchi equivalenti (con approssimazioni).

Questa ipotesi mette in relazione la nascita della geometria con le esigenze pratiche ed estetiche; è stata avanzata da Abraham Seidenberg¹ anche la possibilità che l'origine della geometria indiana e di quella egiziana sia unica: una geometria in fase germinale, connessa a riti primitivi.

Ad avvalorare l'antichità di questa disciplina sono stati rinvenuti graffiti e disegni di epoca preistorica che testimoniano interesse per le forme e le relazioni spaziali, aspetti necessari per lo sviluppo del pensiero geometrico. Terraglie (ceramiche a pasta porosa), tessuti e cesti presentano esempi di congruenza e simmetria, concetti essenziali della geometria elementare. Probabilmente l'interesse dell'uomo preistorico per le relazioni spaziali deriva dal gusto per l'estetica delle forme, ragione estremamente attuale, perché ancora oggi su di essa può basarsi la scelta di intraprendere e approfondire questi studi.

Tutta la geometria fin qui descritta è stata di carattere *intuitivo*, cioè non necessitava di ragionamenti a sostegno delle idee presentate, ma si basava su osservazioni e intuizioni «evidenti», non necessariamente giustificate in modo rigoroso.

La geometria *razionale* nacque invece in Grecia, con Talete di Mileto (640 a.C. o 625 a.C. – circa 547 a.C.): a lui si attribuisce la prima dimostrazione della storia, quella del Teorema che asserisce che se un triangolo è inscritto in una semicirconferenza, allora è rettangolo. Pare che Talete abbia dimostrato anche altri quattro teoremi: un cerchio viene bisecato dal suo diametro; gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti; gli angoli opposti al vertice, individuati da due rette incidenti, sono congruenti; il secondo criterio di congruenza dei triangoli. Nessun documento, ma solo la tradizione, attesta che Talete sia autore delle dimostrazioni di questi fatti geometrici.

Il primo trattato di geometria risale al 300 a.C. e raccoglie tutte le conoscenze precedenti e coeve. Lo si deve a Euclide di Alessandria (323 a.C. – 286 a.C.), si tratta del testo *Elementi*, composto da tredici libri, nove dei quali riguardano la geometria. I primi sei libri, infatti, trattano la geometria piana elementare, dal settimo al nono l'aritmetica, il decimo gli incommensurabili e gli ultimi tre la geometria solida. Il libro primo esordisce con ventitré definizioni, cui seguono cinque postulati e cinque nozioni comuni (o assiomi). Il termine «definizioni» non è usato qui nell'accezione moderna,

¹ Matematico americano (Washington D.C., 1916 – Milano, 1988), che ha compiuto studi di algebra commutativa, geometria algebrica, algebra differenziale e storia della matematica.

ma in quella propria di Euclide (descrizioni degli oggetti geometrici che vengono poi menzionati nei postulati). È fondamentale sottolineare che l'impostazione che Euclide dà agli Elementi è, per la prima volta, di tipo deduttivo, anche se sono presenti ancora aspetti che fanno riferimento alla matematica dell'utile e del concreto.

L'impostazione greca della geometria rappresenta un momento fondamentale nell'evoluzione del pensiero umano: per la prima volta la conoscenza del reale diviene motivata, fondata, e perciò scientifica.

La nascita stessa della geometria suggerisce quali siano le diverse sfumature che essa stessa ancora oggi porta con sé. Al crescere della consapevolezza della persona e delle capacità astrattive e analitiche, l'idea stessa di geometria che ciascuno possiede evolve. La geometria che il bambino può conoscere è quella che deriva dalla percezione dello spazio e della propria fisicità in tale spazio. L'adulto, educato alla matematica, possiede anche la capacità intellettuale di uscire dallo spazio fisico, percepire lo spazio geometrico come anisotropo e illimitato e, attraverso l'astrazione, affrontare ragionamenti e dimostrazioni. Quindi i due volti «storici» della geometria sono attuali e ben descrivono la duplice percezione che se ne può avere. Nella scuola secondaria di primo grado prevale certamente l'aspetto della misura dello spazio, ma è importante gettare le basi perché inizi a crescere la visione astratta e speculativa.

1.2 LA GEOMETRIA MODERNA

Nei paragrafi seguenti, confrontiamo la visione classica della geometria con quella moderna, per poi offrire qualche considerazione sulla didattica.

La geometria classica è incentrata sulla descrizione del reale. È la geometria dei movimenti rigidi (cioè che conservano le distanze tra punti) e più in generale delle similitudini (trasformazioni in cui gli angoli sono invarianti). La storia della geometria conosce una fase di stallo fino al 1600 circa, periodo in cui i risultati degni di nota sono pochissimi. Gradualmente e in modo non sempre lineare, i presupposti di movimento rigido e similitudine vengono meno. I risultati ottenuti dal Seicento in poi convogliano

nelle tre crisi della geometria (XIX secolo), dovute all'esigenza di giustificare, in modo rigoroso, fatti fino a poco prima ritenuti «evidenti». Queste fasi hanno consentito di aprire nuovi e fecondi filoni di ricerca: sono mutati sia i contenuti sia i metodi e i risultati noti vengono riletti alla luce di nuovi significati.

1. *Crisi della geometria metrica tradizionale*. L'idea di movimento rigido è alla base del III Postulato del libro I degli Elementi di Euclide, che recita: «Anchora adimandiamo che ce sia concesso, che sopra a qualunque centro ne piace puotiamo designare un cerchio di che grandezza ci pare»,² cioè: fissati un punto e una lunghezza è possibile descrivere un cerchio avente quel punto come centro e per raggio la lunghezza assegnata.

La nozione di trasporto rigido e le proprietà del continuo geometrico sono riconducibili alle Proposizioni I e II dello stesso libro I: «Possiamo sopra una data retta linea costituir un triangolo equilatero» (è possibile costruire un triangolo equilatero assegnato il lato) e «Da un dato punto possiamo condurre una linea retta eguale a qualunque proposta retta linea» (dati un segmento e un punto è possibile costruire un segmento congruente a quello dato e avente un estremo nel punto fissato).

Attraverso il superamento dei concetti di corpo rigido e movimento rigido nasce anzitutto la geometria proiettiva. Essa è costruita sulle proiettività (bijezioni tra punti che conservano gli allineamenti) e concretizza l'accettazione del fatto che le figure geometriche possono essere trasformate anche attraverso proiezioni, oltre che tramite similitudini. L'impulso alla ricerca matematica in questo campo è fornito dagli artisti rinascimentali, i primi a riaccendere l'interesse per la natura e per la rappresentazione del mondo reale, proprio come gli occhi lo osservano. Tra questi artisti (Filippo Brunelleschi, Paolo Uccello, Masaccio, poi Leonardo e Piero della Francesca) il genio teorico fu Leon Battista Alberti (1404-1472), che pose domande a cui il matematico Girard Desargues (1591-1661), più di cent'anni dopo, diede risposta. Leon Battista Alberti immaginava di visualizzare dei raggi di luce che collegavano l'occhio con tutti i punti della scena da rappresentare e di interporre uno schermo tra l'osservatore e la

² Le traduzioni di questo postulato e delle successive preposizioni e postulati sono di Niccolò Tartaglia.

scena. Defini «sezione» l'insieme dei punti di intersezione tra questi raggi e lo schermo e si chiese quale fosse la relazione matematica che intercorre tra due sezioni qualsiasi (ottenute ad esempio cambiando la posizione dell'occhio) e quali sono le proprietà comuni a due diverse sezioni. Queste domande segnarono l'inizio della geometria proiettiva.

Grazie al pensiero di Cartesio (1596-1650) nasce la geometria analitica: egli voleva evitare che, nella geometria euclidea, ogni dimostrazione richiedesse un approccio nuovo e ingegnoso e criticava la geometria degli antichi, perché troppo astratta e talmente legata alle figure che «essa può esercitare l'intelletto soltanto a condizione di affaticare grandemente l'immaginazione»; di conseguenza prende piede la sua idea di correggere con l'algebra i «difetti» della geometria e viceversa.

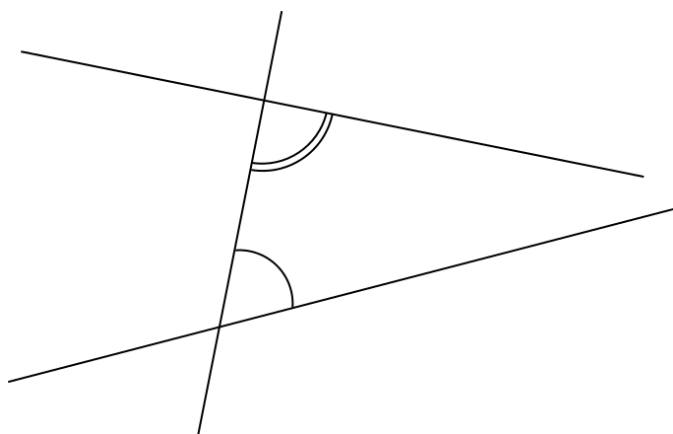
Si sviluppa così l'algebra lineare e, anche grazie all'utilizzo dei metodi della geometria analitica, al progresso dell'algebra e all'ampliamento dei tradizionali insiemi numerici, la geometria algebrica, che riguarda le proprietà degli enti algebrici invarianti per trasformazioni birazionali (date da espressioni analitiche espresse da funzioni razionali di grado superiore al primo) e nasce dalla volontà di riconoscere proprietà di figure in modo indipendente dal sistema di coordinate scelto.

Dalla crisi della geometria euclidea tradizionale nasce anche un altro importante ramo, quello delle cosiddette geometrie-non (cioè le geometrie non continue, non archimedee, non ordinate o non desarguesiane, in cui, cioè, mancano la continuità, o l'assioma di Archimede o l'ordinamento o non valgono tutti gli assiomi di congruenza) collegate, grazie a D. Hilbert, allo studio delle proprietà formali del calcolo dei segmenti.

Viene affrontato lo studio delle strutture algebriche in chiave geometrica e in particolare delle geometrie costruite su corpi diversi dal campo reale e dal campo complesso, su campi finiti o addirittura su strutture algebriche più deboli come corpi non commutativi, quasicorpi o altre.

I geometri algebrici che hanno fornito i maggiori contributi alla ricerca sono stati George Boole (1815-1864), Arthur Cayley (1821-1895), James Joseph Sylvester (1814-1897), George Salmon (1819-1904), David Hilbert (1862-1943) ed Emmy Noether (1882-1935).

2. *Crisi dell'estendibilità a distanza delle esperienze locali.* Per effetto della critica della proprietà di estendibilità nello spazio delle esperienze locali nasce la geometria non euclidea. Il V Postulato degli Elementi afferma l'esistenza del punto d'intersezione tra due rette complanari sotto certe condizioni su ampiezze di angoli, misurabili dall'osservatore: *«Adimandiamo etiam che ci sia concesso, che se una linea retta cascherà sopra due linee rette, et che duoi angoli da una parte siano minori di duoi angoli retti, che quelle due linee senza dubbio, protratte in quella medesima parte sia necessario congiungersi»*, cioè: se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando indefinitamente le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.



Esso generalizza un'esperienza locale, esperienza «evidente». La sua necessità è stata a lungo discussa: si è cercato di capire se fosse dimostrabile a partire dai quattro postulati precedenti e successivamente si è deciso di studiare la geometria che nasce se lo si esclude (geometria assoluta) o se, addirittura, lo si nega (geometria non euclidea iperbolica).

Fu Gerolamo Saccheri (1667-1733) ad approcciarsi per primo al V Postulato con il seguente ragionamento: data una retta R e dato un punto p esterno ad essa, allora possono sussistere tre casi: (a) per p passa esattamente una parallela a R ; (b) per p non passano parallele a R ; (c) per p ci sono almeno due parallele a R . La tesi (b) portò a ottenere contraddizioni con i postulati (presupponendo la nozione di ordinamento archimedeo, che in Euclide era sottointesa). Saccheri faticò a trovare contraddizioni a partire da (c) e concluse ritenendo che l'esistenza di rette asintotiche (rette che si

avvicinano indefinitamente senza mai intersecarsi), che era una delle conseguenze di tale ipotesi, fosse un'idea che «ripugna la natura di retta». Tuttavia, più tardi, Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) interpretarono correttamente e quasi contemporaneamente l'intuizione di Saccheri, decretando che il V Postulato è indipendente dagli altri assiomi e che diverse geometrie coerenti possono essere costruite sulla sua negazione.

Questo risultato ha contribuito in modo decisivo a fornire alla geometria una nuova identità. Da scienza delle figure e dello spazio metrico si è mutata in sistema ipotetico-deduttivo, le cui regole sono i postulati e in cui i teoremi si ottengono da essi, attraverso le trasformazioni logiche. Gli oggetti della teoria non vengono definiti, ma ne viene chiarito il comportamento attraverso i postulati stessi. Questa costruzione teorica, però, non è avulsa dalla realtà. Infatti prende le mosse dalla percezione e dall'osservazione della realtà sensibile; successivamente le immagini della realtà fornite dai sensi vengono rielaborate attraverso fantasia e creatività e infine queste diventano idee, esprimibili tramite parole e simboli.

Tornando alla critica dell'estendibilità nello spazio di proprietà geometriche locali, un altro risultato è stato la generalizzazione del concetto di coordinate. Alla geometria differenziale va il merito di aver creato metodi e simbolismi che rimangono validi anche se vengono cambiate le coordinate, approccio che ha potuto sfruttare Einstein, data la sua necessità di rendere le leggi fisiche indipendenti dall'osservatore. L'impostazione di Riemann prevede di studiare la situazione locale, nell'intorno di un punto e poi di collegare tra loro le geometrie degli intorni di ogni punto considerato. Questa visione porta anche alla nascita del concetto di connessione.

3. *Crisi del concetto di continuità.* L'idea della continuità come proprietà fondamentale degli oggetti geometrici è fondata sull'esperienza sensibile ed è giustificata dalle concezioni della fisica coeve a Euclide, idee che hanno fondato la fisica fino alla fine del XVIII secolo. La necessità di esprimere la continuità in modo rigoroso consente lo sviluppo del calcolo infinitesimale e la nascita della topologia.

La nascita e la formalizzazione del calcolo infinitesimale si devono ad alcuni dei più grandi matematici del Seicento, i cui contributi sono stati raccolti e coronati dalle opere di Newton (1642-1727) e Leibnitz (1646-1716). Il calcolo infinitesimale ebbe origine da

alcuni problemi, di natura sia concreta sia teorica: lo studio del moto dei corpi (volendo ottenere, data la formula che dà lo spazio percorso in funzione del tempo, velocità e accelerazione istantanee e viceversa), la massimizzazione della gittata di un cannone, il calcolo degli spazi percorsi dai pianeti, il calcolo dei baricentri o dei volumi delimitati da determinate superfici e la determinazione della tangente a una curva (un problema di geometria teorica, ma con applicazioni ad esempio nel campo dell'ottica).

La topologia è lo studio delle figure deformabili in modo continuo, cioè delle figure che restano invariate per deformazioni che non creino nuovi punti né fondano tra loro punti esistenti. Ovvero si tratta della geometria che ha come gruppo fondamentale quello delle trasformazioni biiettive e bicontinue. Le sue origini sono state numerose e diverse; fu Klein, nel programma di Erlangen (1872) a suggerire la possibilità di renderla un filone a sé stante. Il primo risultato di topologia è attribuito a Eulero (1707-1783), pubblicato nell'articolo «Sette ponti di Königsberg», che rispondeva alla domanda se fosse possibile percorrere i ponti della città una e una sola volta attraverso un percorso chiuso. I principali matematici che hanno contribuito allo sviluppo della topologia sono stati: Georg Cantor (1845-1918), Henri Poincaré (1854-1912), Maurice Fréchet (1878-1973), Felix Hausdorff (1868-1942).

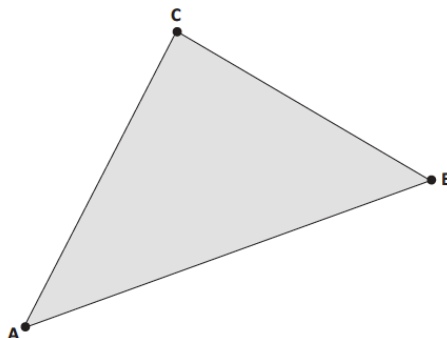
La geometria, nata per scopi sia pratici sia speculativi, ma comunque fondata sulla misura e sulle osservazioni del mondo reale, si è mutata nello studio delle trasformazioni e degli oggetti invarianti per certi tipi di trasformazioni. Questo approccio conserva profondi legami con la descrizione della realtà, basti pensare alla fisica einsteiniana o anche solo alle applicazioni della geometria sferica alla navigazione e all'astronomia.

1.3 LA VALENZA DIDATTICA E FORMATIVA DELLA GEOMETRIA

La geometria ha una grande valenza formativa e didattica, perché consente di passare da una percezione soggettiva e poco analitica della realtà alla sua schematizzazione. Essa, infatti, aiuta a esplorare il mondo, prendendo coscienza del fatto che il soggetto occupa una posizione privilegiata, ma questa non è l'unica da cui si possa osservare la realtà.

Ciò comporta anche la necessità di comunicare in modo oggettivo, indipendente cioè dalla collocazione dell'osservatore. Un esempio: capita che gli studenti confondano il concetto di verticale, che presuppone un sistema di riferimento, con quello di perpendicolare; l'errore deriva proprio dalla confusione tra spazio fisico e geometrico: nello spazio della geometria non vi è una direzione privilegiata dalla quale «osservare»

D25. Osserva la figura.



Disegna nel triangolo ABC l'altezza CH relativa al lato AB.

gli enti geometrici, per cui non sono ad esso compatibili le espressioni: orizzontale, verticale, a destra di ..., a sinistra di ..., ecc. Invece, grazie alla forza di gravità, tali binomi locativi assumono significato. Ad indagare questa difficoltà ha provveduto un quesito della Rilevazione Nazionale 2011/2012 destinato agli studenti della prima classe della scuola secondaria di primo grado:

La geometria allena all'analisi dei propri comportamenti e dei loro effetti, perché permette di conoscere le conseguenze della manipolazione degli oggetti. Educa alla fantasia e all'extrapolazione, perché spesso non ha carattere algoritmico e richiede di mediare continuamente tra la situazione assegnata e l'immaginazione, tra la creatività e la consistenza della teoria, tra i concetti e le loro rappresentazioni.

Si aggiunga poi che gli studenti della scuola secondaria di primo grado dovrebbero aver già fatto, nella scuola primaria e più in generale nella loro quotidianità, esperienza dello spazio e del concetto di misura; è opportuno, a questo punto, rafforzare queste competenze e iniziare a cogliere gli aspetti più astratti. Tra essi anche il fatto che al momento della creazione degli oggetti geometrici su cui verrà impostata la teoria è necessario estrapolare alcuni aspetti della realtà, trascurandone altri. Ad esempio, vanno

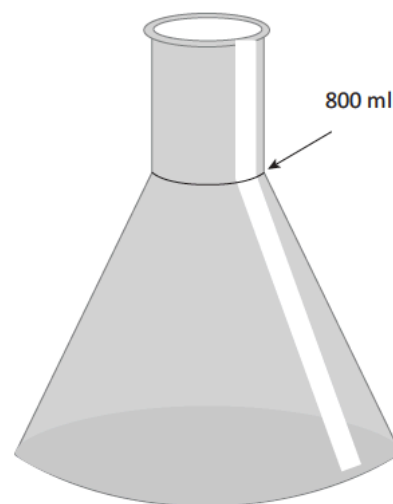
fatte cogliere somiglianze e differenze tra le nozioni di punto, retta, piano come esse sono introdotte, caratterizzandole mediante precise proprietà geometriche, e gli oggetti reali che ne hanno suscitato l'idea o che le modellizzano.

La scuola, attraverso l'insegnamento della matematica, deve sostenere la crescita del pensiero razionale, della capacità di formulare e verificare ipotesi, di argomentare e criticare le scelte proprie e altrui. Il percorso stesso della geometria ha grande valenza educativa, perché testimonia la tortuosità e la complessità dell'evolversi del pensiero scientifico. È giusto proporre, quindi, esercizi e problemi che non si debbano risolvere tramite conti, ma solo attraverso il ragionamento: facendo notare all'alunno che si può fare geometria (o più in generale matematica) anche senza manipolare numeri. Un esempio potrebbe essere fornito dal quesito che segue, tratto dalla Prova Nazionale 2012/2013.

D12. Giovanni versa 100 ml di acqua alla volta nel recipiente che vedi in figura fino a 800 ml. Ogni volta segna con una tacchetta sul recipiente il livello raggiunto dall'acqua.

Com'è la distanza tra le tacchette segnate da Giovanni?

- A. ☐ La distanza tra le tacchette diminuisce verso l'alto
- B. ☐ La distanza tra le tacchette aumenta verso l'alto
- C. ☐ La distanza tra le tacchette si mantiene costante
- D. ☐ La distanza tra le tacchette prima aumenta e poi diminuisce



L'evoluzione della geometria, delineata in modo sintetico nel precedente paragrafo, insegna quali siano gli aspetti su cui fare leva anche nella didattica. Come detto, la geometria ha conosciuto una stasi di circa 1600 anni. Questo fatto fa cogliere come la geometria proposta da Euclide negli Elementi fosse ben fondata e descrivesse molto accuratamente la realtà, almeno fino a quando la realtà stessa e le menti più speculative

non hanno proposto domande e problemi più sottili. La sua longevità e questa ottima applicabilità alla realtà sono ragioni che supportano la scelta di continuare a insegnarla. Da molto tempo a questa parte si fa leva sulla necessità di passare a una *didattica per problemi*. L'impostazione è del tutto condivisibile e, a livello di scuola secondaria, i problemi reali si interpretano geometricamente proprio in contesto euclideo.

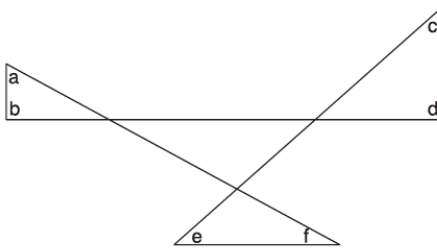
La storia della geometria mette in luce anche il suo aspetto imprevedibile. La conclusione di Saccheri è emblematica: egli non poteva aspettarsi che il V Postulato fosse indipendente dagli altri postulati e, anche se i risultati ottenuti gli suggerirono il contrario, egli non cedette. Anche nella didattica si possono riscontrare le stesse osservazioni. Gli studenti, spesso, vorrebbero sempre avere a disposizione semplici formule, non troppo sorprendenti. Un esempio che ho rilevato è il seguente. Nella classe terza della scuola secondaria di primo grado si affronta la geometria dello spazio e, per buona parte dell'anno, ci si allena nel calcolo di superfici e volumi di poliedri e di solidi di rotazione. Se, ad esempio, si fa ruotare di 360° un trapezio rettangolo attorno alla sua base minore, si ottiene un solido di rotazione che ha una cavità. Non è per niente problematico far intuire come calcolarne il volume (una cavità e una sottrazione sembrano perfettamente coerenti); l'aspetto che sorprende è che per calcolare la superficie totale di un solido che appare come un cilindro a cui è stato sottratto un cono, bisogna aggiungere le superfici. Questo esempio penso possa fornire una base di riflessione: è importante allenare gli studenti al fatto che ogni ragionamento (e quindi anche ogni formula) va meditato senza preconcetti, lasciando aperta la possibilità che si incontri qualche elemento inaspettato.

Lo shock maggiore, nella scuola secondaria di primo grado, è, a mio avviso, causato dalla nuova interpretazione delle figure. Nella scuola primaria l'apprendimento è basato sull'esperienza, ma nell'ordine di scuola successivo questa impostazione inizia a capovolgersi. La prospettiva dello studente della scuola primaria rispetto alle figure è la seguente: una figura esiste per il fatto che la posso disegnare, non è caratterizzata dalla sua definizione o da alcune proprietà, ma dalla sua rappresentazione. Successivamente l'alunno deve iniziare a prendere consapevolezza del ribaltamento di quest'ottica. Un ente geometrico esiste perché nozioni primitive e assiomi permettono la sua esistenza ed esso è caratterizzato da alcuni elementi: quelli che vengono espressi dandone la definizione. Tale ente può essere rappresentato tramite una figura ed essa è soltanto un

modo, impreciso e visivo, di crearne una approssimazione che faccia da supporto al ragionamento. È importante far rendere conto agli alunni di questo aspetto, che è per essi una novità sconvolgente e affascinante.

Anche l'INValSI ha rischiato quest'errore con il quesito D8 della Prova Nazionale 2008/2009: come si può notare non sono specificati né il parallelismo tra le due rette rappresentate orizzontalmente né la perpendicolarità (si «deduce» dalla figura che b e d sono angoli retti). Tuttavia è possibile risolvere il quesito indipendentemente dalle ampiezze degli angoli b e d , osservando che la somma richiesta è data dalla somma degli angoli interni di tre triangoli meno la somma degli angoli interni del triangolo centrale.

D8. Qual è la somma degli angoli a, b, c, d, e, f nella figura disegnata qui sotto?



- ☐ A. Un angolo piatto, ossia 180°
- ☐ B. Tre angoli retti, ossia 270°
- ☐ C. Due angoli piatti, ossia 360°
- ☐ D. Cinque angoli retti, ossia 450°

Credo che la crisi dell'insegnamento della matematica nella scuola non possa essere risolta formulando nuove indicazioni e nuovi obiettivi di apprendimento, ma rivedendo il modo in cui ogni insegnante fa approcciare i suoi studenti alla disciplina: occorre una solida preparazione, per avere la capacità di far cogliere i significati delle scritture simboliche, delle formule, delle figure. Occorre che tre prospettive siano sempre presenti e si alternino consapevolmente: l'aspetto utilitaristico della matematica, che consente di risolvere questioni concrete; la sua impostazione ipotetico-deduttiva, che allena al buon ragionamento; la concezione della matematica come strumento di analisi della realtà, che educa a interpretare e costruire modelli matematici. Lo svolgimento

pedissequo degli esercizi del libro di testo non consentirà all'alunno di apprezzare questi aspetti, perciò occorre che l'insegnante sia ben consapevole del valore della matematica e sia convinto che le sue proposte, ben ponderate, possano fare la differenza.

CAPITOLO 2 - LE PROVE INTERNAZIONALI

2.1 LA GEOMETRIA PER OCSE E IEA

Ci occuperemo, nei capitoli successivi, di presentare l'INValSI, di analizzare il quadro teorico a sostegno delle rilevazioni nazionali e le prove proposte agli studenti di terza secondaria di primo grado. Proprio perché l'idea di matematica, e di geometria in particolare, che l'INValSI propone trova le sue radici non solo nei documenti nazionali, ma anche in diversi studi internazionali, portati a termine dall'OCSE e dalla IEA, offriamo, di seguito, una breve panoramica delle due organizzazioni internazionali e degli obiettivi che esse si prefiggono e un'analisi delle prove che redigono e dei documenti su cui sono costruite.

L'Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico

L'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico), nota anche con la sigla OECD (acronimo di Organisation for Economic Co-operation and Development) è un'organizzazione internazionale che compie studi di carattere economico. È stata fondata il 14 dicembre 1961 grazie all'accordo di venti Stati: diciotto europei, il Canada e gli Stati Uniti. L'Italia ne ha preso parte il 29 marzo 1962. L'organizzazione ha sede a Parigi e, attualmente, conta trentaquattro Stati membri³; si

³ Paesi membri dell'OCSE: Australia, Austria, Belgio, Canada, Cile, Danimarca, Estonia, Finlandia, Francia, Germania, Gran Bretagna, Grecia, Irlanda, Islanda, Israele, Italia, Giappone, Korea, Lussemburgo, Messico, Olanda,

tratta sia di Paesi avanzati sia emergenti, come Messico, Cile e Turchia, che condividono il sistema di governo di tipo democratico e l'economia di mercato. L'OCSE collabora anche con Cina, India e Brasile e con le economie emergenti dell'Africa, dell'Asia, dell'America Latina.

L'obiettivo che si prefigge è la ricerca di pratiche commerciali utili a sviluppare l'economia, a dare stabilità finanziaria e a combattere la povertà. Procedo raccogliendo e analizzando dati, facendo previsioni a breve e lungo termine e presentando ai Governi le proprie considerazioni e decisioni, in modo da ottemperare al suo compito prevalentemente consultivo.⁴

Tra i suoi interessi c'è anche la valutazione del livello delle conoscenze e delle abilità degli studenti, poiché esso è legata al benessere sociale ed economico. Nel 1997 l'OCSE ha lanciato PISA (Programme for International Student Assessment), un programma di valutazione standardizzato a livello internazionale, rivolto agli studenti quindicenni, che sonda la loro preparazione a cadenza triennale. La scelta dell'età è legata all'interesse dell'OCSE verso gli studenti che sono quasi al termine dell'obbligo scolastico per indagare la loro possibilità di giocare un ruolo costruttivo nella società.⁵ La prima rilevazione è stata effettuata nel 2000. Le rilevazioni sono campionarie; in Italia vengono testati circa 1500 estratti da 150 scuole.

Le prove OCSE/PISA

Le prove predisposte dall'OCSE/PISA indagano la capacità degli studenti di risolvere problemi concreti: la matematica viene vista come strumento a servizio della situazione reale.

Il livello di preparazione degli studenti è denominato «alfabetizzazione matematica» (*Mathematical literacy*); con tale espressione si intende la «capacità di un individuo di utilizzare e interpretare la matematica e di darne rappresentazione mediante formule, in

Norvegia, Nuova Zelanda, Polonia, Portogallo, Repubblica Ceca, Repubblica Slovacca, Slovenia, Spagna, Svezia, Svizzera, Stati Uniti, Turchia, Ungheria.

⁴ Informazioni tratte da www.oecd.org.

⁵ Cfr. The PISA 2003 Assessment Framework - Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills, OECD, 2003.

una varietà di contesti. Tale competenza comprende la capacità di ragionare in modo matematico e di utilizzare concetti, procedure, dati e strumenti di carattere matematico per descrivere, spiegare e prevedere fenomeni. Aiuta gli individui a riconoscere il ruolo che la matematica gioca nel mondo, a operare valutazioni e a prendere decisioni fondate che consentano loro di essere cittadini impegnati, riflessivi e con un ruolo costruttivo».⁶ A completare la definizione, il documento di riferimento⁷ presenta alcune osservazioni relative al valore della matematica: si dice che ha uso anzitutto funzionale, perciò deve essere fondata su solide conoscenze, che vanno sfruttate con creatività e che è propedeutica rispetto agli studi successivi. Infine le si attribuisce anche valore estetico e ricreativo.

Questa visione porta come conseguenza il fatto che la capacità cruciale che l'OCSE intende indagare è l'abilità nel porre, formulare, risolvere e interpretare problemi, utilizzando la matematica nei più vari contesti e situazioni, a livelli di complessità differenti. Attitudini ed emozioni sono certamente correlate con l'abilità matematica, ma non sono, volutamente, considerate nella *Mathematical Literacy*.

PISA 2012 focalizza la propria attenzione anche sul *problem solving*, che definisce come «la capacità di un individuo di mettere in atto processi cognitivi per comprendere e risolvere situazioni problematiche per le quali il percorso di soluzione non è immediatamente evidente. Questa competenza comprende la volontà di confrontarsi con tali situazioni al fine di realizzare le proprie potenzialità in quanto cittadini riflessivi e con un ruolo costruttivo».

L'analisi delle prove che coinvolgono questa competenza non sarà oggetto di questa tesi, infatti le situazioni problematiche che vengono proposte non sono di carattere matematico.

⁶ PISA 2012 MATHEMATICS FRAMEWORK in <http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/pisa2012draftframeworks-mathematicsproblemsolvingandfinancialliteracy.htm>

⁷ «PISA 2003. Assessment Framework. Mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills», Capitoli 1 (Mathematical Literacy) e 4 (Problem Solving), questo è il testo di riferimento per le competenze matematiche, indagate in particolare nella seconda somministrazione, quella del 2003; «Pisa 2012. Field trial problem solving framework», poiché nella quinta somministrazione, quella del 2012, l'attenzione è incentrata sul problem solving.

Nella predisposizione dei quesiti e in fase di valutazione vengono considerate tre componenti:

1. il *contesto* (o *situazione*) in cui il problema è collocato;
2. il *contenuto matematico* da utilizzare per risolvere il problema, organizzato secondo alcuni *temi centrali*;
3. i «*cluster*» di *competenze* che devono essere attivati per collegare il contesto reale con gli strumenti matematici e per risolvere il problema matematico.

1. Il contesto rappresenta un aspetto importante, perché spesso la scelta del metodo risolutivo e della rappresentazione dipende proprio dalla situazione in cui il problema è collocato. Ve ne sono quattro: *personale* (la vita o l'esperienza dello studente); *educativo/occupazionale* (la vita scolastica, i contenuti lavorativi noti agli studenti e il tempo libero); *pubblico* (la vita della comunità locale e della società). È presente, anche se non predominante, il contesto *scientifico* (si tratta di quesiti collocati nel mondo matematico, senza un necessario aggancio con una situazione reale; comunque, la scelta cade più frequentemente sui problemi in cui la situazione reale influenza pesantemente la soluzione o la sua interpretazione).

2. Dovendo affrontare problemi concreti, non è necessario isolare i contenuti teorici: spesso capita che uno stesso quesito richieda di spaziare tra diversi campi della matematica. Per questo la scelta è ricaduta su un approccio empirico: non vengono elencati, né valutati, i singoli contenuti teorici, ma le competenze richieste, raggruppate in temi centrali (*overarching ideas*), che sono *Quantità*; *Spazio e forma*; *Cambiamenti e relazioni*; *Incertezza* (si veda la Tabella successiva). Tali temi rispecchiano lo sviluppo storico della matematica: il concetto di numero e la geometria concreta dell'Egitto e della Cina, la geometria astratta della Grecia e l'algebra dell'India sono i contenuti dei primi due temi; l'invenzione di calcolo di Newton e Leibnitz del terzo e i più recenti studi di statistica e probabilità del quarto.

Temî centrali	Contenuti
Quantità	Quantificare per organizzare oggetti e processi: percepire ordini di grandezza, riconoscere schemi numerici, usare i numeri per rappresentare quantità e attributi quantificabili relativi a oggetti reali (conti e misure), comprendere il significato del numero e delle sue diverse rappresentazioni, saper ragionare in termini quantitativi, capire il significato delle operazioni, saper effettuare stime e calcoli a mente.
Spazio e forma	Visualizzare e riconoscere e costruire schemi e forme: capire le proprietà degli oggetti e le loro mutue posizioni, imparare a muoversi nello spazio creando relazioni tra forme, immagini e rappresentazioni visive, capire come oggetti tridimensionali possono essere rappresentati in due dimensioni, interpretare le ombre e la prospettiva.
Cambiamenti e relazioni	Comprendere e interpretare le relazioni e i cambiamenti della realtà: interpretarli attraverso relazioni di varia natura (equivalente, equazioni, divisibilità, inclusione, funzioni,...) e coinvolgendo diverse rappresentazioni (simbolica, algebrica, grafica, tabulare, geometrica,...).
Incertezza	Sapersi muovere nella «società dell'informazione»: raccogliere e analizzare, rappresentare dati per elaborare informazioni di statistica e probabilità.

Tabella. I contenuti matematici, raggruppati per tema centrale.

Analizzando l'ambito Spazio e forma, è evidente il continuo riferimento al passaggio tra lo spazio fisico (quello in cui il problema vive) e spazio geometrico (lo spazio in cui il problema matematico che modella quello reale va collocato e risolto). Tale passaggio è una richiesta naturale, data l'impostazione che il PISA ha scelto per le proprie prove. Per possedere questa competenza è necessaria una solida conoscenza della geometria euclidea del piano e dello spazio, e una buona capacità di «vedere», immaginare, figurarsi questa geometria.

3. Il passaggio fondamentale che gli studenti devono mettere in atto è quello di *matematizzazione*, articolato secondo *processi*. Essi devono consentire di:

- passare dal problema reale alla formulazione matematica; per farlo è necessario identificare i contenuti matematici legati al problema, smussare gradualmente la

realtà (rappresentare il problema in modo diversi, organizzando la rappresentazione in base a assunzioni, generalizzazioni, formalizzazioni); riconoscere schemi, regolarità, relazioni;

- risolvere il problema matematico, usando diverse rappresentazioni, il linguaggio simbolico e specifico e le operazioni, sapendo argomentare e generalizzare;
- tradurre la soluzione matematica in risposta al problema reale; ciò richiede di dare senso concreto alle soluzioni trovate, identificando anche limitazioni dovute al contesto; saper criticare il modello e mostrarne i limiti.

Per mettere in atto i processi elencati, gli studenti devono aver maturato alcune competenze (o attività cognitive), che il PISA individua in: pensare e ragionare; argomentare; comunicare; creare modelli; porre e risolvere problemi; rappresentare; usare i linguaggi simbolico, formale e tecnico e le operazioni; utilizzare strumenti e suggerimenti.

Le competenze elencate possono essere acquisite sia sui banchi di scuola sia attraverso l'esperienza e, quando si affronta un problema, vengono utilizzate simultaneamente. L'OCSE/PISA descrive anche le attività cognitive che tali competenze richiedono. Tali attività cognitive sono distribuite tre livelli: di riproduzione (saper ripetere procedure già apprese); di connessione (saper risolvere problemi non di routine, ma riferiti sempre ad ambiti familiari o semi-familiari); di riflessione (saper pianificare e implementare strategie per risolvere problemi originali). Nella tabella seguente presentiamo le attività cognitive, declinate per livello e raggruppate per competenza.

Competenze	Livello di riproduzione	Livello di connessione	Livello di riflessione
a) <i>Pensare e ragionare</i> : porsi le domande tipiche della matematica (esiste? Quanti sono? Come si trovano?); conoscere le risposte che la matematica offre a tali domande; distinguere tra diversi tipi di	Porsi le domande basilari della matematica (quanti sono? Quanto è...?) e capire le corrispondenti tipologie di risposta; distinguere tra definizioni e fatti; capire e manipolare concetti matematici in contesti	Porsi domande (come si trova? Che matematica è coinvolta?) e capire le corrispondenti tipologie di risposta (fornite da tabelle, grafici, linguaggio algebrico, figure); distinguere tra definizioni e tipi diversi	Porsi domande (come si trova? Quale matematica è coinvolta? Quali sono gli aspetti essenziali?) e capire le corrispondenti tipologie di risposta (fornite da tabelle, grafici, linguaggio algebrico, figure,

affermazioni (definizione, teorema, congettura, ipotesi esempio, condizione); capire e manipolare potenzialità e limiti dei concetti matematici	già noti	di affermazioni; capire e manipolare concetti matematici in contesti che si discostano leggermente da quelli noti	passaggi chiave, ecc.); distinguere tra diversi tipi di affermazioni (definizione, teorema, congettura, ipotesi esempio, condizione), riflettere su di esse operando distinzioni; capire e manipolare potenzialità e limiti dei concetti matematici e generalizzare i risultati
b) <i>Argomentare:</i> conoscere il significato di «dimostrare» e le differenze tra dimostrazione e altri tipi di ragionamento matematico; comprendere e giustificare sequenze di argomentazioni; avere un approccio euristico; creare ed esprimere ragionamenti matematici	Comprendere e giustificare processi quantitativi standard, inclusi algoritmi, catene di affermazioni e calcolo di risultati	Comprendere e giustificare semplici ragionamenti matematici senza distinguere tra dimostrazioni e altre argomentazioni; comprendere e valutare sequenze di argomentazioni; avere un approccio euristico (cosa può accadere? Perché? Quali informazioni conosco e quali risultati voglio ottenere?)	Comprendere e giustificare semplici ragionamenti matematici, distinguendo tra dimostrazioni e altre argomentazioni; comprendere e valutare e costruire sequenze di argomentazioni; avere un approccio euristico (cosa può accadere? Perché? Quali informazioni conosco e quali risultati voglio ottenere? Quali proprietà sono essenziali? A cosa sono correlati questi oggetti?)
c) <i>Comunicare:</i> esprimere il proprio pensiero in varie forme rispetto a un contenuto matematico, sia oralmente sia per iscritto; capire le altrui argomentazioni	Capire ed esprimere il proprio pensiero oralmente e per iscritto riguardo semplici contenuti matematici in almeno un modo	Capire ed esprimere il proprio pensiero oralmente e per iscritto riguardo contenuti matematici (spiegare nomi e proprietà di oggetti noti, algoritmi e risultati e loro relazioni); capire le altrui	Capire ed esprimere il proprio pensiero oralmente e per iscritto riguardo contenuti matematici (spiegare nomi e proprietà di oggetti noti, algoritmi e risultati; relazioni complesse anche di

		argomentazioni	carattere logico); capire le altrui argomentazioni
d) <i>Creare modelli:</i> tradurre la realtà in strutture matematiche; interpretare modelli matematici in termini reali; lavorare con modelli e saperli convalidare; riflettere, analizzare, criticare modelli e risultati; monitorare e controllare processi	Riconoscere e utilizzare modelli noti; interpretare la realtà attraverso modelli e viceversa; comunicare in modo semplice i risultati che il modello offre	Tradurre la realtà in strutture matematiche in contesti non troppo complessi, ma nuovi; interpretare la realtà attraverso modelli e viceversa; comunicare i risultati che il modello offre	Tradurre la realtà in strutture matematiche in contesti molto diversi da quelli noti; interpretare modelli matematici in termini reali e viceversa; comunicare i risultati: raccogliere informazioni e dati, monitorare i processi, convalidare, criticare e discutere il modello
e) <i>Porre e risolvere problemi:</i> porre, formulare e definire differenti tipi di problemi matematici e risolverli in vari modi	Porre e formulare problemi riconoscendo e ripetendo procedure standard e applicarle a problemi analoghi a quelli noti; risolverli usando procedure conosciute; tipicamente in un unico modo	Porre e formulare problemi riconoscendo procedure standard e applicarle a problemi analoghi a quelli noti; risolverli utilizzando procedure conosciute; mettere in atto anche nuove procedure, collegando differenti aree della matematica e differenti modalità di rappresentazione (schemi, tabelle, grafici, parole, immagini)	Porre e formulare problemi riconoscendo procedure standard e applicarle a problemi analoghi a quelli noti; risolverli utilizzando procedure conosciute; risolvere anche problemi originali, collegando differenti aree della matematica e differenti modalità di rappresentazione (schemi, tabelle, grafici, parole, immagini); riflettere sulle strategie e sulle soluzioni
f) <i>Rappresentare:</i> codificare e decodificare, tradurre, interpretare e distinguere tra differenti forme di rappresentazione di situazioni e oggetti	Codificare e decodificare e interpretare rappresentazioni standard di oggetti matematici noti; passare tra differenti forme di rappresentazione, solo	Codificare e decodificare e interpretare rappresentazioni note e meno note di oggetti; scegliere e passare tra differenti forme di rappresentazione	Codificare e decodificare e interpretare rappresentazioni note e meno note di oggetti; scegliere e passare tra differenti forme di rappresentazione,

matematici e loro relazioni; scegliere e passare tra differenti forme di rappresentazione a seconda della situazione e dello scopo	quando tale cambiamento è esplicitamente richieste nella rappresentazione stessa		tradurle e distinguerle; combinarle in modo creativo e saperle creare
g) <i>Usare i linguaggi simbolico, formale e tecnico e le operazioni:</i> decodificare e interpretare il linguaggio simbolico e quello formale e comprendere i suoi legami con il linguaggio naturale; tradurre il linguaggio naturale in quello simbolico/formale; manipolare affermazioni ed espressioni che contengano simboli e formule; usare variabili, risolvere equazioni e svolgere calcoli	Decodificare e interpretare il linguaggio simbolico e formale di base su oggetti matematici noti; passare da una rappresentazione all'altra solo quando tale cambiamento è richiesto dal linguaggio stesso	Decodificare e interpretare il linguaggio simbolico e formale di base in contesti e situazioni noti e meno noti; manipolare affermazioni e espressioni che contengano simboli e formule, usare variabili, risolvere equazioni e svolgere calcoli attraverso procedure note	Decodificare e interpretare il linguaggio simbolico e formale di base in contesti e situazioni noti e meno noti; manipolare affermazioni e espressioni che contengano simboli e formule, usare variabili, risolvere equazioni e svolgere calcoli; trattare affermazioni complesse ed espressioni e con il linguaggio formale e simbolico non conosciuto; capire e tradurre tale linguaggio in linguaggio naturale
h) <i>Utilizzare strumenti e suggerimenti:</i> conoscere e essere in grado di utilizzare vari aiuti e strumenti e saperne valutare i limiti	conoscere e essere in grado di utilizzare aiuti e strumenti noti, in situazioni simili a quelle familiari	conoscere e essere in grado di utilizzare aiuti e strumenti noti, in situazioni diverse rispetto a quelli familiari	conoscere e essere in grado di utilizzare aiuti e strumenti noti e ignoti, in situazioni e modi diversi rispetto a quelli familiari; saperne valutare i limiti

Tabella. Le competenze matematiche OCSE/PISA 2003.

Il programma PISA classifica le risposte che lo studente assegna a ogni quesito secondo sei livelli, che tengono conto della difficoltà della domanda e del contenuto della risposta stessa. In tal maniera ogni prova può essere classificata come segue (uno studente che si collochi in un certo livello è in grado di svolgere i compiti dichiarati in quel livello e in tutti i precedenti).

Livello 6	Gli studenti di sesto livello sono in grado di concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni basate sulla propria analisi e modellizzazione di situazioni problematiche complesse. Essi sono in grado di collegare fra loro differenti fonti d'informazione e rappresentazioni passando dall'una all'altra in maniera flessibile. A questo livello, gli studenti sono capaci di pensare e ragionare in modo matematicamente avanzato. Essi sono inoltre in grado di applicare tali capacità di scoperta e di comprensione contestualmente alla padronanza di operazioni e di relazioni matematiche di tipo simbolico e formale in modo da sviluppare nuovi approcci e nuove strategie nell'affrontare situazioni inedite. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di esporre e di comunicare con precisione le proprie azioni e riflessioni collegando i risultati raggiunti, le interpretazioni e le argomentazioni alla situazione nuova che si trovano ad affrontare.
Livello 5	Gli studenti di quinto livello sono in grado di sviluppare modelli di situazioni complesse e di servirsene, di identificare vincoli e di precisare le assunzioni fatte. Essi sono inoltre in grado di selezionare, comparare e valutare strategie appropriate per risolvere problemi complessi legati a tali modelli. A questo livello, inoltre, gli studenti sono capaci di sviluppare strategie, utilizzando abilità logiche e di ragionamento ampie e ben sviluppate, appropriate rappresentazioni, strutture simboliche e formali e capacità di analisi approfondita delle situazioni considerate. Essi sono anche capaci di riflettere sulle proprie azioni e di esporre e comunicare le proprie interpretazioni e i propri ragionamenti.
Livello 4	Gli studenti di quarto livello sono in grado di servirsi in modo efficace di modelli dati applicandoli a situazioni concrete complesse anche tenendo conto di vincoli che richiedano di formulare assunzioni. Essi sono in grado, inoltre, di selezionare e di integrare fra loro rappresentazioni differenti, anche di tipo simbolico, e di metterle in relazione diretta con aspetti di vita reale. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di utilizzare abilità ben sviluppate e di ragionare in maniera flessibile, con una certa capacità di scoperta, limitatamente ai contesti considerati. Essi riescono a formulare e comunicare spiegazioni e argomentazioni basandosi sulle proprie interpretazioni, argomentazioni e azioni.

Livello 3	Gli studenti di terzo livello sono in grado di eseguire procedure chiaramente definite, comprese quelle che richiedono decisioni in sequenza. Essi sono in grado, inoltre, di selezionare e applicare semplici strategie per la risoluzione dei problemi. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di interpretare e di utilizzare rappresentazioni basate su informazioni provenienti da fonti differenti e di ragionare direttamente a partire da esse. Essi riescono a elaborare brevi comunicazioni per esporre le proprie interpretazioni, i propri risultati e i propri ragionamenti.
Livello 2	Gli studenti di secondo livello sono in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedano non più di un'inferenza diretta. Essi sono in grado, inoltre, di trarre informazioni pertinenti da un'unica fonte e di utilizzare un'unica modalità di rappresentazione. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di servirsi di elementari algoritmi, formule, procedimenti o convenzioni. Essi sono capaci di ragionamenti diretti e di un'interpretazione letterale dei risultati.
Livello 1	Gli studenti di primo livello sono in grado di rispondere a domande che riguardino contesti loro familiari, nelle quali siano fornite tutte le informazioni pertinenti e sia chiaramente definito il quesito. Essi sono in grado, inoltre, di individuare informazioni e di mettere in atto procedimenti di routine all'interno di situazioni esplicitamente definite e seguendo precise indicazioni. Questi studenti sono anche capaci di compiere azioni ovvie che procedano direttamente dallo stimolo fornito.

Tabella. I sei livelli di una prova PISA.

Alcuni esempi

Vediamo alcuni esempi del tema centrale «Spazio e forma», tratti dal Compendio rilasciato dal PISA e contenente prove somministrate nel 2003, nel 2006 e nel 2009.⁸

Utilizziamo il primo esempio per comprendere meglio il significato della collocazione del problema nel contesto e nel livello di competenza e i successivi per avere un'idea della tipologia, della difficoltà e dei contenuti delle domande.

⁸ http://www.invalsi.it/invalsi/rn/odis.php?page=odis_it_00.

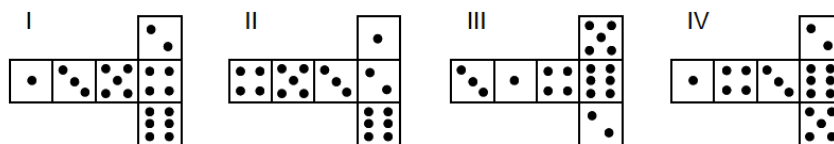
Esempio 1. DADI DA GIOCO

Il disegno a destra rappresenta due dadi.

I dadi sono cubi con le facce numerate secondo la seguente regola: la somma dei punti su due facce opposte deve essere sempre uguale a sette.



Puoi costruire un dado da gioco tagliando, piegando e incollando un pezzo di cartone. Puoi realizzare questo in molti modi. La figura qui sotto mostra quattro cartoncini che puoi utilizzare per costruire un dado.



alla

regola per cui la somma delle facce opposte è 7? Per ciascuna forma, fai un cerchio intorno

a «Sì» o «No» nella tabella che segue.

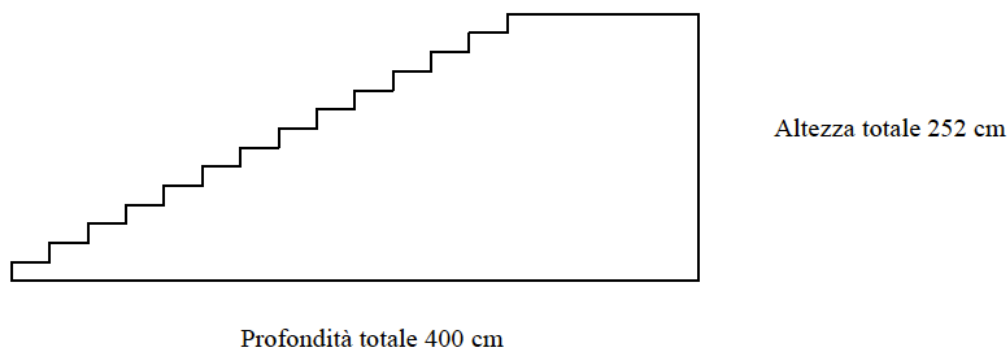
Forma	Obbedisce alla regola per cui la somma delle facce opposte è 7?
I	Sì / No
II	Sì / No
III	Sì / No
IV	Sì / No

Come si può notare, la prova è strutturata in due parti: uno «stimolo», che è la descrizione del contesto in cui si colloca il problema e una domanda (talvolta più di una, afferenti eventualmente a temi diversi).

Questo problema si colloca nel contesto personale. Per rispondere alla domanda vanno utilizzate le attività cognitive: passare da una forma di rappresentazione di un oggetto all'altra; saper distinguere diverse forme di rappresentazione. Il livello di competenza è quello della connessione. Il livello globale è 3.

Significa che il problema è di livello medio, la procedura è spiegata in modo semplice e si tratta soltanto di applicarla; l'unica difficoltà sta nell'interpretazione dei segni grafici.

Per rispondere correttamente è necessario comprendere la regola riguardante la somma



di punti su facce opposte e saper riconoscere quali siano le facce opposte negli sviluppi piani rappresentati. Il quesito non verte sulla modellizzazione del problema o sulla sua traduzione in linguaggio matematico, ma piuttosto sulla relazione «essere opposto» tra le facce del cubo, oggetto tridimensionale, e la sua rappresentazione tramite sviluppo nel piano. Si tratta di un quesito abbastanza standard, perché gli studenti dovrebbero conoscere gli sviluppi piani dei solidi più semplici, grazie alle nozioni di geometria dello spazio acquisite a scuola. Tipicamente, in Italia, questo argomento si affronta in matematica nella terza classe della scuola secondaria di primo grado (lo si svolge anche in tecnologia). La tipologia di risposta è chiusa (vero/falso) e effettivamente, dato il quesito, non sarebbe stato significativo chiedere una giustificazione.

Nell'indagine PISA 2003 in Italia (attraverso un campione) ha risposto correttamente (4 su 4) il 54,5%. Nei Paesi OCSE ha risposto esattamente il 60,7%.

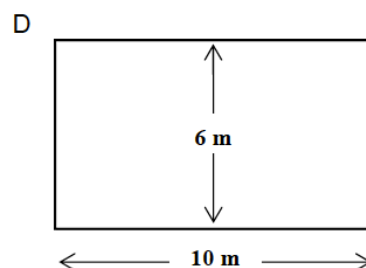
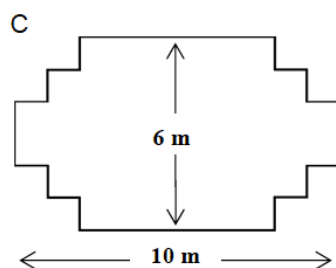
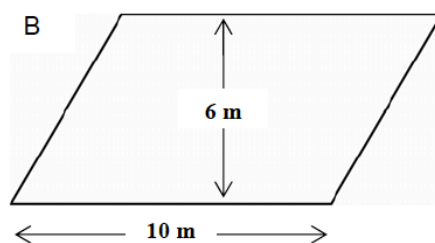
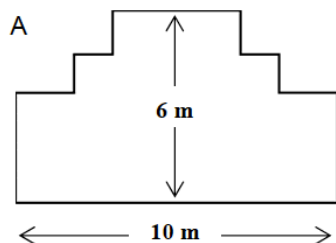
In generale è prevista anche l'analisi di risultati non completamente corretti, questo vale anche per le prove a risposta aperta (in tal caso viene fornito agli insegnanti un vademecum che spiega come classificare la risposta, con un codice per ogni tipologia di errore, per gli errori più comuni).

Esempio 2. SCALA

La seguente figura mostra una scala che ha 14 gradini e un'altezza totale di 252 cm.

Qual è l'altezza di ciascuno dei 14 gradini?

Altezza:cm



Questo problema si colloca nel contesto personale. Per rispondere alla domanda vanno utilizzate le attività cognitive: decodificare e interpretare rappresentazioni di oggetti, riconoscere modelli noti, formulare semplici ragionamenti a carattere matematico. Il livello di competenza è quello della «riproduzione». Il livello globale è 2.

Esso richiede di saper riconoscere il modello bidimensionale della scala, decodificando l'espressione «altezza di un gradino» e di effettuare una divisione. È presente un dato superfluo. Il quesito è piuttosto semplice e fa riferimento a una situazione reale, che è già stata modellizzata attraverso il disegno.

Nell'indagine PISA 2003 in Italia ha risposto correttamente il 77,6% del campione. La percentuale di risposte corrette di tutti i Paesi OCSE è 75,5%.

Esempio 3. CARPENTIERE

Un carpentiere ha 32 metri di tavole di legno e vuole fare il recinto a un giardino. Per il recinto prende in considerazione i seguenti progetti.

Indica per ciascun progetto se è possibile realizzarlo con 32 metri di tavole.

Fai un cerchio intorno a «Sì» o «No».

Progetto per il recinto	Si può realizzare il recinto con 32 metri di tavole?
Progetto A	Sì / No
Progetto B	Sì / No
Progetto C	Sì / No
Progetto D	Sì / No

Questo quesito è a risposta chiusa e ciò rappresenta una grossa perdita di informazione. Valutare i ragionamenti sarebbe stato opportuno. Ecco due esempi che mettono in evidenza come si possa sfruttare il sapere matematico per risolvere il problema, in modo differente.

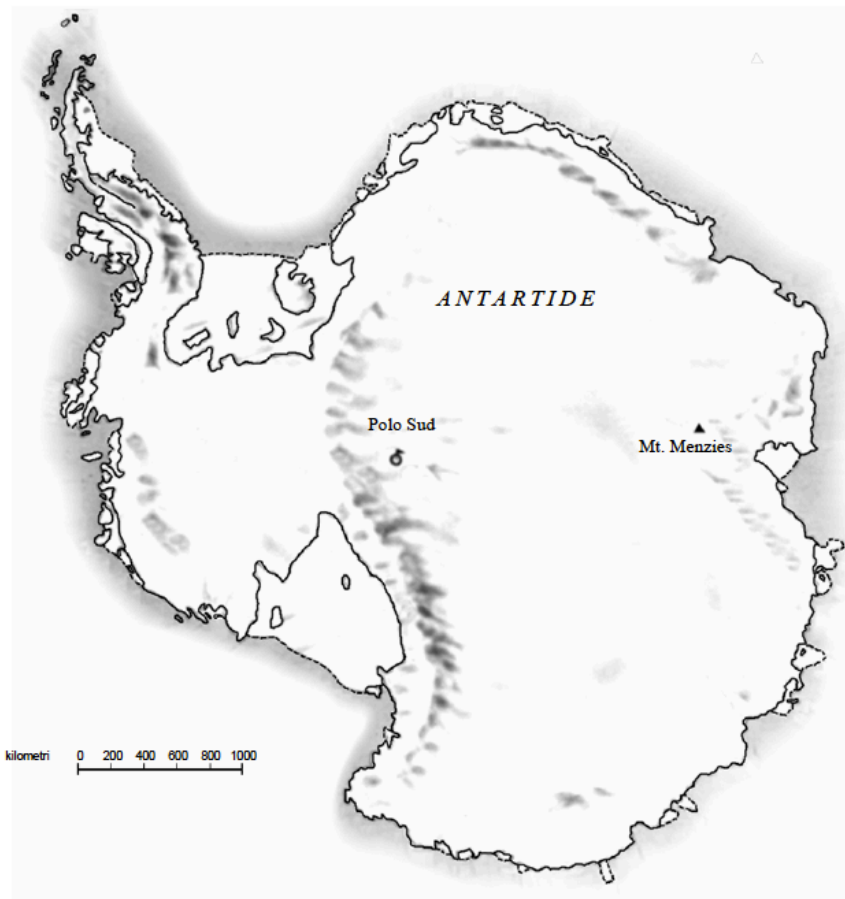
- Colorando con due colori diversi i segmenti orizzontali e quelli verticali dei poligoni A, C e D, si nota che questi poligoni devono avere tutti lo stesso perimetro. Tale perimetro vale $2(10+6) = 32$ m, quindi i progetti A, C, D sono tutti realizzabili. Tracciando, invece l'altezza relativa al lato maggiore del parallelogramma B uscente dal vertice in alto a sinistra, si può individuare un triangolo rettangolo. Questo triangolo ha un cateto di 6 m, per cui l'ipotenusa (che è il lato obliquo del parallelogramma) è maggiore di 6 m. Di conseguenza il perimetro di B è maggiore di 32 m.
- Un altro modo per rispondere correttamente, più operativo: dato che è facile ottenere il perimetro di D, si può confrontare la lunghezza in cm del perimetro delle figure, misurando con il righello. In questo modo si vede che B ha perimetro maggiore di D, mentre A e C hanno lo stesso perimetro, che deve, quindi essere di 32 m, nella realtà.

Questo secondo metodo è decisamente poco rigoroso; il primo richiede di coniugare un buon numero di operazioni razionali: un confronto delle strategie risolutive sarebbe stato significativo.

Si sarebbe potuto anche comprendere la ragione della risposta errata: valutare il lato obliquo del parallelogramma B congruente all'altezza è un errore tipico. Altro errore potrebbe essere non fare riferimento ai perimetri, come richiesto, ma alle aree delle figure.

Questo quesito offre, comunque, un ottimo spunto all'insegnante per lavorare in aula sul problema.

In PISA 2003 le percentuali di risposta corretta (4 su 4) sono state: 12,3% in Italia, 19,5% nei Paesi OCSE.



Esempio 4. AREA DI UN CONTINENTE

La figura illustra una carta geografica dell'Antartide.

Stima l'area dell'Antartide utilizzando la scala della carta geografica.

Mostra il tuo lavoro e spiega come hai fatto la tua stima. (Puoi disegnare sulla carta se questo può aiutarti a fare la tua stima).

Il quesito è molto interessante, perché richiede di costruire la figura o le figure geometriche la cui misura della superficie sia calcolabile in modo elementare e che

consentono di approssimare con errore non troppo grande la superficie dell'Antartide. In sostanza le risposte a questa richiesta permettono davvero di valutare la competenza dell'alunno nel gestire problemi reali riguardanti le aree. Sono possibili molte scelte: utilizzare un quadrato o un rettangolo, oppure più poligoni diversi tra loro, o approssimare l'area con un cerchio.

A punteggio pieno (stima compresa tra 12.000.000 e 18.000.000 km²) la difficoltà dell'item si colloca al livello 6; a punteggio parziale a livello 5. È molto interessante la strategia valutativa, riportata di seguito:

2 - Punteggio pieno. I codici seguenti sono da attribuire alle risposte in cui il metodo utilizzato e il cui risultato sono corretti. La seconda cifra del codice serve a distinguere i differenti metodi.

Codice 21: stima effettuata disegnando un quadrato o un rettangolo - risposta compresa tra 12.000.000 km² e 18.000.000 km² (l'unità di misura non è richiesta).

Codice 22: stima effettuata disegnando un cerchio - risposta compresa tra 12.000.000 km² e 18.000.000 km².

Codice 23: stima effettuata addizionando l'area di più figure geometriche regolari – risposta compresa tra 12.000.000 km² e 18.000.000 km².

Codice 24: stima effettuata correttamente con un altro metodo - risposta compresa tra 12.000.000 km² e 18.000.000 km².

Codice 25: risposta corretta (tra 12.000.000 km² e 18.000.000 km²) ma non viene illustrato il procedimento seguito.

1 - Punteggio parziale. I codici seguenti sono da attribuire alle risposte in cui l'approccio utilizzato è corretto, ma il risultato è sbagliato o incompleto. La seconda cifra del codice serve a distinguere i differenti approcci utilizzati e corrisponde alla seconda cifra del codice utilizzato per il punteggio pieno.

Codice 11: stima l'area disegnando un quadrato o un rettangolo - metodo corretto, ma risposta incompleta o sbagliata.

- Disegna un rettangolo e moltiplica la larghezza per la lunghezza, ma la risposta è una sovrastima o una sottostima (ad esempio 18.200.000)
- Disegna un rettangolo e moltiplica la larghezza per la lunghezza, ma il numero degli zeri è sbagliato (ad esempio $4.000 \cdot 3.500 = 140.000$).

- Disegna un rettangolo e moltiplica la larghezza per la lunghezza, ma dimentica di utilizzare la scala per trasformare in km² (ad esempio $12\text{ cm} \cdot 15\text{ cm} = 180$).
- Disegna un rettangolo e indica che l'area è di $4.000\text{ km} \cdot 3.500\text{ km}$, senza concludere il lavoro.

Codice 12: stima l'area disegnando un cerchio - metodo corretto, ma risposta incompleta o sbagliata.

Codice 13: stima l'area addizionando l'area di più figure geometriche regolari – metodo corretto, ma risposta incompleta o sbagliata.

Codice 14: stima l'area utilizzando un altro metodo corretto - ma la risposta è incompleta o sbagliata.

0 - Nessun punteggio

Codice 01 : Calcola il perimetro al posto dell'area.

- Per esempio, 16.000 km , perché il segmento corrispondente a 1.000 km può essere riportato circa 16 volte sul contorno del continente.

Codice 02: altre risposte sbagliate. Ad esempio, 16.000 km (non viene illustrato il procedimento seguito e la risposta è sbagliata).

Codice 99: non risponde.

Come si può notare, questa differenziazione dei codici che i correttori devono attribuire alla risposta consente una analisi precisa e significativa. Dato che non siamo interessati a tale analisi, riportiamo solo qualche dato significativo: punteggio pieno Italia: 3,9%. Punteggio pieno Paesi OCSE: 9,4%. Risposta omessa Italia: 73,3%. Risposta omessa Paesi OCSE: 48,2% (punteggio parziale e nessun punteggio Paesi OCSE: circa 20% ciascuno).

Conclusioni

Analizzando l'ambito «Spazio e forma», così come PISA lo dichiara, si nota che l'accento è posto sulle relazioni (tra oggetti geometrici) e sul legame che intercorre tra l'oggetto reale e la sua rappresentazione; effettivamente le prove non disattendono questa dichiarazione.

Un pregio di queste prove consiste nel fatto che consentono, ai docenti che le analizzano con cura, di predisporre attività didattiche efficaci. Il quesito «La scala» è utile per verificare se gli studenti sono in grado di leggere correttamente la rappresentazione, ma anche se hanno interiorizzato il significato di divisione tra numeri, quindi è un buon quesito per la prima classe della scuola secondaria di primo grado. Il quesito «Carpentiere» permette di lavorare sulle lunghezze, ma non chiede di operare molti calcoli. Il solo calcolo di un perimetro, accompagnato dal ragionamento sulle altre figure, consente di rispondere correttamente. Questa impostazione è auspicabile: la geometria, nella scuola secondaria di primo grado, deve restare sbilanciata sul calcolo di lunghezze, aree e volumi, ma non deve escludere l'aspetto speculativo, in cui si possa evitare il calcolo per ottenere le risposte cercate attraverso il ragionamento. Questa competenza è fondamentale perché ogniqualvolta si ottiene un risultato, è importante saperne stimare la correttezza (mi aspettavo questo numero, relativamente all'ordine di grandezza? È giusto che sia maggiore/minore di...? È ragionevole che la cifra delle unità sia...? È corretto che sia pari/dispari? Ecc.). Il quesito «Antartide» consente di valutare davvero la competenza geometrica. Con esso emergono due idee: la geometria dev'essere connessa con la realtà (modellizzazione); per poterla utilizzare a servizio della risoluzione di un problema reale (cioè per esserne davvero competenti) occorre averne compreso profondamente gli enti e gli assiomi che la fondano e i principali risultati teorici. Gli studenti del terzo anno della scuola secondaria di primo grado possono affrontare questo quesito, magari guidati dal docente. Sarebbe importante che si abituassero a rendere concreta la geometria che studiano e che vedono, spesso, come mera applicazione di formule.

L'International Association for the Evaluation of Educational Achievement

La IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) è un'associazione internazionale indipendente di centri di ricerca nazionali e enti di ricerca governativi con sede ad Amsterdam. Conduce studi comparativi su larga scala, focalizzati sul successo educativo e si prefigge l'obiettivo di definire standard internazionali che possono aiutare i governi a individuare i punti forti e deboli dei propri sistemi educativi.

È stata fondata ufficialmente nel 1967, ma, di fatto, è nata nel 1958, quando un gruppo di studiosi, psicologi, sociologi si sono incontrati nella sede tedesca dell'UNESCO per discutere problemi riguardanti la scuola e la valutazione degli studenti. Attualmente i Paesi membri sono 68.⁹

È attraverso lo studio TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Studies) che la IEA intende fornire uno strumento per migliorare l'insegnamento e l'apprendimento della matematica e delle scienze, valutando il successo degli studenti, in modo da fornire informazioni sulla qualità dell'istruzione e dei curricula.¹⁰ Naturalmente, nel seguito della trattazione, ci concentriamo soltanto sul versante matematico.

Le prove IEA/TIMSS

Le prove IEA/TIMSS valutano i contenuti appresi e i processi (detti *domini cognitivi*) acquisiti dagli alunni al IV e all'VIII grado di istruzione. La scelta dei due gradi risponde al fatto che in molti Paesi essi corrispondono al termine dei primi due cicli scolastici, diversamente da quanto avviene in Italia, in cui il quarto grado corrisponde alla IV classe della scuola primaria (e l'VIII grado corrisponde alla III classe della scuola secondaria di primo grado).

Scopo della IEA è valutare i *curricula* e identificare i fattori che influenzano la performance in matematica (e scienze), quali, ad esempio, variabili socio-economiche e culturali, strategie didattiche, eccetera. In particolare lo studio TIMSS analizza i programmi ministeriali (*intended curriculum*), li confronta con il curriculum

9 Paesi membri IEA: Armenia, Asia, Australia, Austria, Autorità Nazionale Palestinese, Belgio (fiammingo), Belgio (francese), Bosnia-Herzegovina, Botswana, Brasile, Bulgaria, Canada, Cile, Cina, Colombia, Croazia, Egitto, Emirati Arabi Uniti, Cipro, Danimarca, Estonia, Filippine, Finlandia, Francia, Georgia, Germania, Giappone, Giordania, Grecia, Hong Kong, Indonesia, Inghilterra, Iran, Irlanda, Islanda, Italia, Israele, Kazakistan, Kenia, Korea, Kuwait, Lettonia, Lituania, Lussemburgo, Macedonia, Malaysia, Marocco, Messico, Olanda, Nigeria, Norvegia, Nuova Zelanda, Portogallo, Qatar, Repubblica Ceca, Repubblica Slovacca, Romania, Russia, Scozia, Slovenia, Spagna, Svezia, Thailandia, Turchia, Ungheria, Singapore, Stati Uniti, Sud Africa, Taiwan.

¹⁰ Cfr. TIMSS 2007. International Mathematics Report.

effettivamente attuato dagli insegnanti (*implemented curriculum*) e verifica contenuti e processi che gli studenti hanno appreso (*attained curriculum*). Per poter operare questa analisi a tre livelli chiede a docenti e genitori di compilare dei questionari (relativi alle indicazioni nazionali del proprio Stato, alla prassi didattica, al contesto culturale, sociale e familiare). I quesiti che vengono proposti agli studenti riguardano argomenti che sono previsti dai diversi curricula dei Paesi partecipanti. Il comitato organizzatore di TIMSS, durante la fase preparatoria dell'indagine, sottopone a ciascun Paese partecipante una lista di tutti i possibili contenuti che potrebbero essere affrontati nella prova e ciascun Paese partecipante ha la facoltà di specificare quali, tra tutti quelli proposti, sono effettivamente insegnati nelle classi del proprio Paese e quali no.

L'analisi è campionaria: in ogni Paese vengono selezionate almeno 150 scuole (e per ogni scuola selezionata, viene somministrata la prova ad almeno una classe).

Ad esempio, TIMSS 2007 ha coinvolto in totale circa 240.000 studenti di scuola secondaria, il campione italiano è stato di 170 scuole, per un totale di quasi 5.000 studenti. Il campione TIMSS 2011 ha introdotto l'analisi di cinque macroaree: nord-ovest, nord-est, centro, sud, isole.

I testi delle prove sono predisposti dalla IEA in inglese, tradotti dall'INValSI e ricontrollati dalla IEA. Una particolarità delle prove TIMSS consiste nella possibilità di ogni Paese di personalizzare le prove, cioè di inserire anche quesiti che tengano conto della specificità della singola nazione.

Per quanto riguarda il IV grado, i contenuti sono raggruppati in tre ambiti: *Numero* (che comprende anche l'algebra affrontata a questo livello scolastico); *Forme geometriche e misura*; *Rappresentazione di dati*. Nell'VIII grado il primo ambito è *Numero e Algebra*; gli altri due ambiti prendono i nomi di *Geometria* e *Dati ed eventi casuali*.

I processi sono articolati, per entrambi i gradi, in: conoscenza, applicazione, ragionamento.

I contenuti sono espressi nelle tabelle seguenti. Per ciascun contenuto, in modo più specifico, vengono elencati gli argomenti a seconda del grado.

Ambiti e contenuti	Argomenti	
	IV grado	VIII grado
<i>Numero</i> : comprendere il valore posizionale, le	Numeri naturali	Numeri naturali

rappresentazioni e le relazioni tra numeri; conoscere il significato del numero e delle operazioni; calcolare con facilità; saper utilizzare le operazioni per risolvere problemi	Frazioni e numeri decimali Espressioni con numeri naturali Sequenze di numeri e relazioni	Frazioni e numeri decimali Numeri interi Rapporti, proporzioni e percentuali
<i>Algebra</i>: riconoscere e generalizzare schemi, usando simboli algebrici per rappresentare situazioni matematiche; svilupparle producendo espressioni equivalenti e risolvere equazioni lineari	/	Modelli Espressioni algebriche Equazioni, formule e funzioni
<i>Forme geometriche e misura</i>: conoscere le proprietà di figure geometriche (lunghezze, ampiezze, aree, volumi); identificare e analizzare le proprietà e le caratteristiche di linee, angoli e figure anche tridimensionali; comprendere sistemi di coordinate informali e saper visualizzare la stessa figura nello spazio tridimensionale e bidimensionale	Punti, linee, angoli Forme bidimensionali e tridimensionali	/
<i>Geometria</i>: analizzare le proprietà e le caratteristiche di figure geometriche bidimensionali e tridimensionali (comprese le lunghezze e le ampiezze); fornire spiegazioni basate su relazioni geometriche; applicare il Teorema di Pitagora per risolvere problemi; usare proprietà e relazioni	/	Forme geometriche Misure Posizioni e movimenti
<i>Rappresentazione di dati</i>: leggere e interpretare serie di dati; comprenderli e organizzarli in grafici; confrontare dati e trarne conclusioni	Lettura e interpretazione Organizzazione e rappresentazione	
<i>Dati e eventi casuali</i>: saper organizzare dati raccolti da sé o da altri; saperli rappresentare attraverso grafici; confrontare dati e trarne conclusioni; capire i problemi legati a cattive interpretazioni di dati	/	Organizzazione e rappresentazione Interpretazione Probabilità

Tabella. I contenuti oggetto della prova IEA/TIMSS (IV e VIII grado).

Come si vede, l'ambito *Geometria* è incentrato sulla conoscenza di proprietà di figure e di relazioni geometriche, sulla misura, sulla capacità di giustificare asserti matematici e sull'utilizzo del Teorema di Pitagora. Possiamo quindi affermare che, rispetto alle prove PISA, l'approccio è più «teorico», più aderente all'impostazione dei libri di testo e non richiede collegamenti con la realtà.

Più nel dettaglio l'ambito Geometria dell'VIII grado prevede tre macro-argomenti:

- Forme geometriche: classificare rispetto all'ampiezza e rappresentazione di angoli; conoscere e utilizzare relazioni tra angoli (opposti al vertice, consecutivi, adiacenti, angoli ottenuti per sezione di rette parallele, bisettrice) e perpendicolarità; conoscere e utilizzare proprietà di figure geometriche quali triangoli, quadrilateri e altri poligoni; costruire e rappresentare triangoli e quadrilateri di dimensioni date; identificare triangoli e quadrilateri congruenti e loro misure; identificare triangoli simili e conoscerne le proprietà; riconoscere relazioni tra figure tridimensionali e loro rappresentazione bidimensionale; applicare il Teorema di Pitagora per risolvere problemi; applicare proprietà geometriche per risolvere problemi.
- Misura: misurare, rappresentare, stimare misure di angoli, lunghezze di linee, perimetri, aree e volumi; scegliere e utilizzare formule appropriate per il calcolo di perimetri, circonferenze, aree di cerchi, superfici e volumi; trovare misure di aree irregolari (stima) o composte.
- Localizzazioni e movimenti: usare coppie ordinate, equazioni, intercetta e pendenza per localizzare punti e rette sul piano cartesiano; riconoscere e utilizzare simmetrie assiali e rotazioni di figure bidimensionali; riconoscere o dimostrare per via grafica traslazioni, riflessioni e rotazioni.

Vediamo ora i domini cognitivi. Il primo è chiamato *conoscenza* e riguarda i fatti, i concetti e le procedure senza i quali non sarebbe possibile la risoluzione di un quesito. In particolare richiede di:

- ricordare definizioni, termini, notazioni, proprietà aritmetiche e geometriche;

- riconoscere oggetti matematici (forme, numeri, espressioni, quantità); riconoscere l'equivalenza (di frazioni, di numeri decimali e frazioni, di figure in posizioni diverse);
- portare a termine procedure di calcolo (quattro operazioni e loro combinazioni con numeri naturali, decimali, frazioni, e numeri interi); approssimare per fornire stime; svolgere calcoli algebrici;
- recuperare informazioni da grafici o tabelle e leggere semplici scale;
- usare strumenti di misure e scegliere le opportune unità di misura;
- classificare/ordinare oggetti, figure, numeri e espressioni secondo proprietà comuni; prendere decisioni corrette rispetto ai rappresentanti di classi; ordinare numeri e oggetti rispetto ai loro attributi.

Il secondo dominio cognitivo è l'*applicazione* delle conoscenze alla risoluzione di problemi o per rispondere a domande. Richiede di:

- scegliere il metodo, la strategia, le operazioni opportune per risolvere un problema del quale la procedura risolutiva sia già nota;
- rappresentare informazioni dati attraverso grafici e creare rappresentazioni equivalenti per quantità o relazioni date;
- creare modelli appropriati attraverso equazioni, figure geometriche o diagrammi per risolvere problemi standard;
- implementare un insieme di istruzioni matematiche (es. disegnare figure, date le istruzioni);
- risolvere problemi standard, simili a quelli incontrati in classe in contesti familiari o matematici.

Il terzo dominio cognitivo, il *ragionamento*, è relativo alla soluzione di problemi non standard, problemi complessi, in contesti non familiari, o che richiedano una procedura non breve. Esso richiede di:

- analizzare: determinare, descrivere o mettere in relazione variabili o oggetti e creare corrette inferenze a partire dalle informazioni date;
- generalizzare/specializzare: estendere il dominio al quale si possono applicare i risultati della speculazione matematica e della risoluzione di una problema, ottenendo soluzioni più generali;

- sintetizzare: creare legami tra differenti elementi noti e loro rappresentazioni, collegare idee matematiche. Combinare fatti, concetti e procedure per ottenere risultati e da essi effettuare ulteriori deduzioni;
- giustificare: motivare utilizzando fatti o proprietà;
- risolvere problemi non standard ambientati nel contesto matematico o nella vita reale e non incontrati precedentemente: applicare fatti, concetti e procedure in contesti non familiari e complessi.

Per valutare come siano stati bilanciati i contenuti e i domini cognitivi, si può osservare a titolo d'esempio la suddivisione percentuale delle prove del 2011.

Contenuti			
IV grado		VIII grado	
Numero	50%	Numero	30%
		Algebra	30%
Forme geometriche e misura	35%	Geometria	20%
Rappresentazione di dati	15%	Dati e eventi casuali	20%
Domini cognitivi			
IV grado		VIII grado	
Conoscere	40%	Conoscere	35%
Applicare	40%	Applicare	40%
Ragionare	20%	Ragionare	25%

Tabella. Distribuzione dei quesiti in TIMSS 2011 rispetto a contenuti e domini cognitivi.

Questa suddivisione in domini cognitivi è ragionevole se si pensa all'obiettivo delle prove TIMSS: valutare, attraverso prove standardizzate, i curricula delle scuole dei diversi Paesi. Dal punto di vista didattico e dal punto di vista del ragionamento matematico, tale suddivisione è una semplificazione e può risultare superata per il fatto che conoscenza, applicazione e ragionamento sono tre processi che sono in stretta interazione sia in fase di apprendimento sia in fase di verifica di quanto appreso. Invece le prove INValSI presentano, quesito per quesito, l'analisi dei processi da mettere in atto per trovare la soluzione, elencandone più di uno: una posizione più vicina alla realtà.

I risultati dei diversi Paesi sono misurati su una scala che ha media 500 e deviazione standard 100; entrambi i parametri sono tenuti fissi nel tempo per consentire confronti diacronici. I livelli sono: avanzato, alto, medio, basso.

Livelli e relative competenze sono illustrati di seguito in modo più dettagliato.

Livelli	IV grado	VIII grado
Avanzato	Gli studenti sono in grado sia di applicare conoscenze e comprensione in una varietà di situazioni relativamente complesse sia di spiegare il loro ragionamento.	Gli studenti sono in grado di organizzare e trarre conclusioni dalle informazioni possedute, nonché di fare generalizzazioni e risolvere problemi non di routine.
Alto	Gli studenti sono in grado di applicare conoscenze e comprensione per risolvere problemi.	Gli studenti sono in grado di applicare conoscenze e comprensione in una varietà di situazioni relativamente complesse.
Medio	Gli studenti sono in grado di applicare conoscenze matematiche in situazioni semplici.	Gli studenti sono in grado di applicare conoscenze matematiche di base in situazioni semplici.
Basso	Gli studenti hanno alcune conoscenze matematiche di base.	Gli studenti hanno alcune conoscenze relative ai numeri interi e decimali, alle operazioni e ai grafici di base.

Tabella. Competenze e livelli IEA.

Le prove TIMSS prevedono solo risposte chiuse (o false aperte), a differenza delle PISA e delle INValSI.

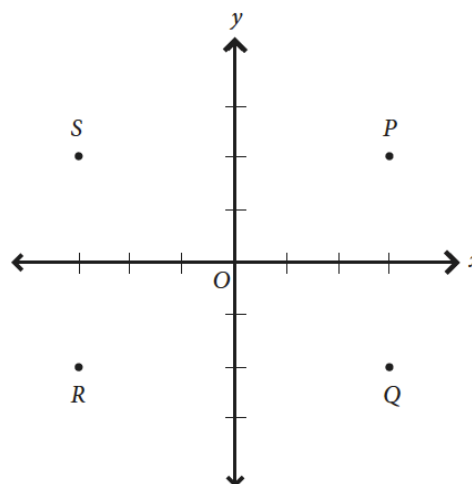
Dedurre e comparare l'idea di geometria che sottende la formulazione dei quesiti è un compito piuttosto arduo, perché bisogna tenere conto del fatto che, come detto, PISA e TIMSS si prefiggono scopi differenti. Tuttavia, proprio per questo, le prove TIMSS offrono la possibilità di passare in rassegna gli aspetti che sono ritenuti fondamentali per creare una solida conoscenza geometria e le prove PISA permettono di analizzare le competenze su cui tale conoscenza poggia.

Mostriamo alcuni esempi, tratti dalle prove del 2007.

Esempio 1.

Nel grafico, quale dei seguenti rappresenta il punto (3;-2)?

- P
- Q
- R
- S



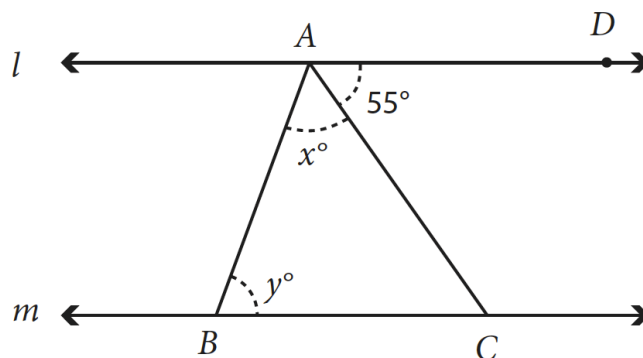
Questo quesito è collocato nel dominio cognitivo *conoscere*. Ha il risposto correttamente il 62,7% del campione italiano e il dato complessivo TIMSS è 62,8%.

Un'osservazione. La presenza della doppia freccia all'«estremità» di ogni asse cartesiano non è la rappresentazione preferibile: la freccia indica un verso, quello che determina l'ordine crescente; sarebbero preferibili dei puntini (in basso e a destra), che richiamano l'idea di illimitatezza della retta.

Questo quesito richiede di conoscere la convenzione per cui il primo numero della coppia ordinata rappresenta l'ascissa del punto e il secondo l'ordinata. Come detto richiede pura conoscenza.

Esempio 2.

Nella figura la retta l è parallela alla retta m . La misura dell'angolo DAC è 55° .



Qual è il valore di $x + y$?

- 55
- 110
- 125
- 135

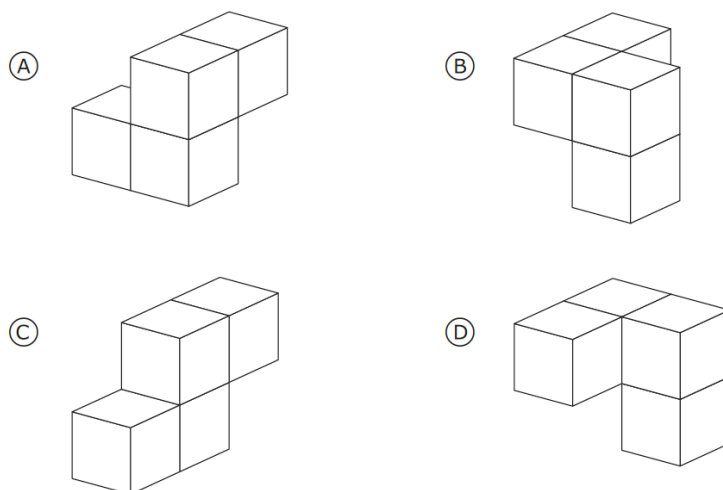
Questo quesito è collocato nel dominio cognitivo *applicare*. Ha il risposto correttamente il 37,9% del campione italiano, mentre complessivamente la risposta esatta è stata selezionata dal 42,1% (la stessa domanda è presente anche nella prova INValSI 2007/2008 (C2), dove le risposte corrette sono state il 62%).

La domanda richiede la conoscenza di due fatti geometrici: il Teorema per cui date due rette parallele tagliate da una trasversale, gli angoli alterni interni sono congruenti e il valore della somma delle ampiezze degli angoli interni di un triangolo (oppure la misura dell'angolo piatto o anche la proprietà dell'angolo esterno di un triangolo di essere congruente alla somma degli angoli interni a esso non adiacenti). Proprio per la pluralità di procedimenti risolutivi, sarebbe stato utile associare alla risposta chiusa, anche la richiesta di giustificare il procedimento.

Esempio 3.

L'oggetto in figura viene girato in una posizione diversa.

Quale tra le seguenti figure rappresenta l'oggetto dopo averlo girato?



Questo quesito è collocato nel dominio cognitivo *ragionamento* ed è relativo alla rotazione di una figura tridimensionale e alla sua rappresentazione. In Italia le risposte corrette sono state pari al 66,1% del campione, nei Paesi TIMSS al 56,5%.

Confronto e spunti

Le prove TIMSS puntano alla valutazione dei *curricola* proposti e appresi dagli studenti, come tali, nell'ambito Geometria, sono incentrate sulla conoscenza degli enti geometrici fondamentali e sulle loro proprietà; sul saper misurare e stimare grandezze; sull'utilizzo del piano cartesiano, sulla localizzazione di oggetti e sulle principali isometrie nel piano e nello spazio. L'ultimo argomento è, nella prassi didattica italiana, poco sviluppato, pur essendo fondamentale per una buona lettura e rappresentazione di situazioni reali (tipicamente anche le prove INValSI presentano un quesito per ogni prova riguardante le isometrie). Anche le attività cognitive sono strettamente legate alla valutazione dell'apprendimento, infatti presentano la tradizionale suddivisione in conoscenza, applicazione e ragionamento.

Attraverso queste prove non possiamo ricavare informazioni sulla visione della geometria, ma piuttosto sugli aspetti che è necessario siano chiari agli studenti che terminano il primo ciclo di istruzione, per affrontare le esperienze scolastiche successive. In questo senso offrono un importante spunto agli insegnanti: il confronto degli esiti degli altri Paesi può aiutare a comprendere quali siano gli aspetti deboli e quali quelli forti della didattica della matematica in Italia. Sarebbe quindi interessante capire quali siano gli aspetti della conoscenza o le strategie su cui si punta nei Paesi che risultano avere, per alcuni o tutti gli ambiti della matematica, studenti più preparati.

Le prove PISA, invece, puntano sul verificare le effettive competenze al termine dell'obbligo scolastico, per cui mirano a sondare la capacità di risolvere problemi utilizzando la matematica. I quesiti sono perciò meno «scolastici» e molto più applicativi e curiosi. I contenuti non vengono declinati in modo specifico e le attività cognitive sono strettamente legate alla procedura mentale necessaria per risolvere un problema e controllare che la risoluzione si compatibili con i limiti posti dalla situazione concreta. È alta l'attenzione alla diversificazione dei livelli, per cui sono presenti domande di difficoltà molto diversa, a differenza dalle prove TIMSS che da questo punto di vista sono decisamente più uniformi. L'ambito Spazio e forma (il nome stesso evoca l'impostazione più pragmatica) è incentrato sulle proprietà e sulle mutue posizioni degli oggetti, sull'interpretazione delle rappresentazioni spaziali, sul legame tra forme, immagini e rappresentazioni. I contenuti sono di base, potremmo dire che la conoscenza della matematica lascia parecchio spazio alle capacità di ragionamento.

2.2 GLI ESITI DELLE PROVE INTERNAZIONALI

L'esito della prova OCSE/PISA 2009

Gli ambiti dell'indagine PISA sono: lettura, matematica e scienze. Ogni ciclo dell'indagine rileva le competenze in tutti e tre gli ambiti, ma ne approfondisce uno in particolare. Nel primo ciclo (PISA 2000) l'ambito principale è stato la lettura, nel secondo ciclo dell'indagine (PISA 2003) la matematica; nel terzo ciclo (PISA 2006) le scienze, nel quarto ciclo (PISA 2009) la lettura e nel quinto ciclo (PISA 2012)

nuovamente la matematica, a cui si aggiunge la somministrazione informatizzata di prove di *problem solving*.

Riportiamo l'esito della prova del 2009, paragonando l'Italia alla media dei Paesi OCSE e di seguito vediamo come l'Italia si colloca rispetto a ogni Paese che ha partecipato all'indagine (il rapporto completo dell'indagine effettuata nel 2012 è stato approntato durante le fasi conclusive della stesura di questa tesi, tuttavia nel prossimo paragrafo ne presenterò una sintesi).

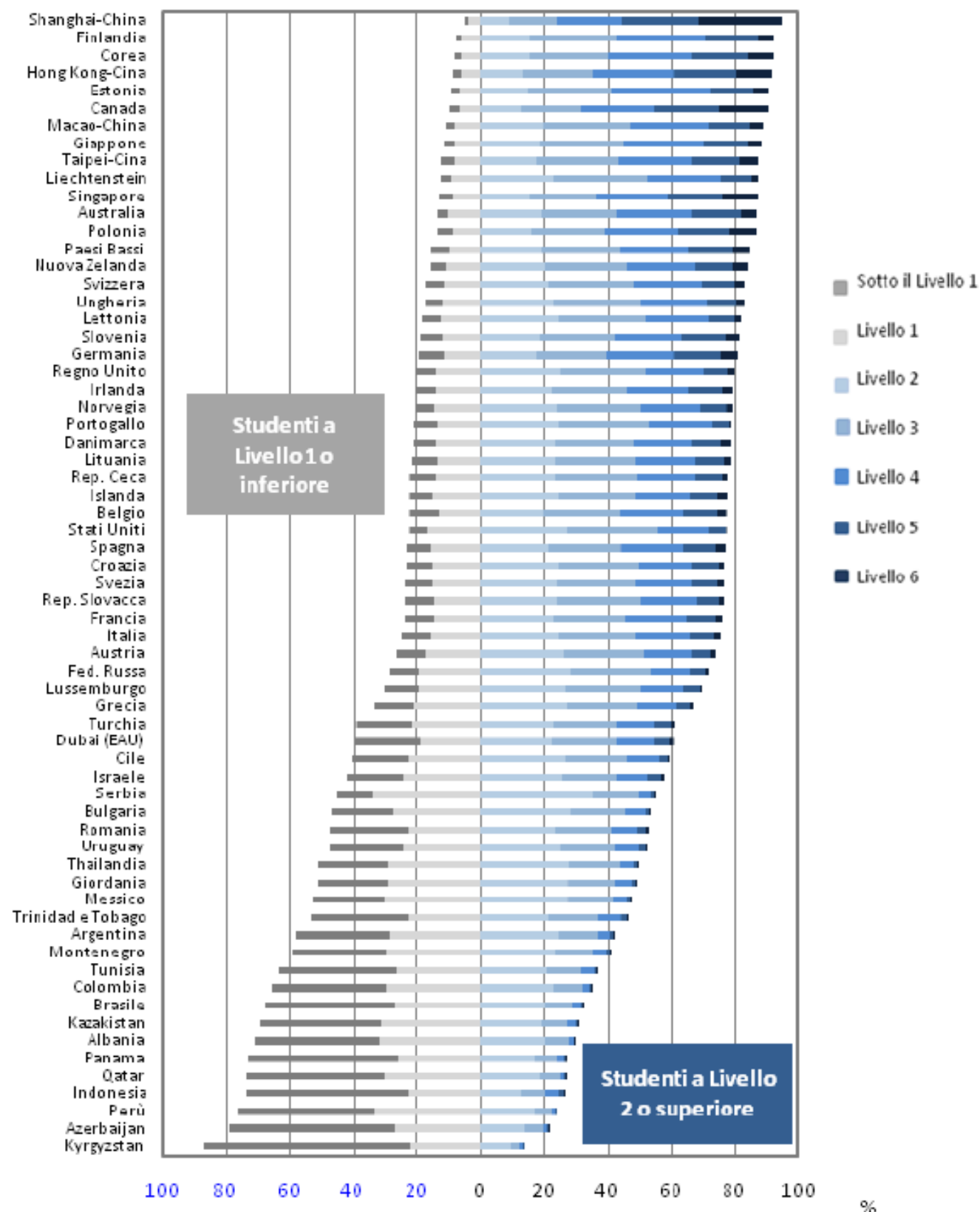
Livello	Punteggio limite inferiore	Percentuale di studenti in grado di svolgere i compiti del livello considerato o dei livelli superiori.	Competenze necessarie a risolvere i compiti proposti e caratteristiche dei compiti stessi
6	669	Italia 1,6% Paesi OCSE 3,1%	Gli studenti che si collocano al 6° Livello sono in grado di concettualizzare, generalizzare e utilizzare informazioni basate sulla propria analisi e modellizzazione di situazioni problematiche e complesse. Essi sono in grado di collegare fra loro differenti fonti d'informazione e rappresentazioni passando dall'una all'altra in maniera flessibile. A questo livello, gli studenti sono capaci di pensare e ragionare in modo matematicamente avanzato. Essi sono inoltre in grado di applicare tali capacità di scoperta e di comprensione contestualmente alla padronanza di operazioni e di relazioni matematiche di tipo simbolico e formale in modo da sviluppare nuovi approcci e nuove strategie

			nell'affrontare situazioni inedite. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di esporre e di comunicare con precisione le proprie azioni e riflessioni collegando i risultati raggiunti, le interpretazioni e le argomentazioni alla situazione nuova che si trovano ad affrontare.
5	607	Italia 9% Paesi OCSE 12,7%	Gli studenti che si collocano al 5° Livello sono in grado di sviluppare modelli di situazioni complesse e di servirsene, di identificare vincoli e di precisare le assunzioni fatte. Essi sono inoltre in grado di selezionare, comparare e valutare strategie appropriate per risolvere problemi complessi legati a tali modelli. A questo livello, inoltre, gli studenti sono capaci di sviluppare strategie, utilizzando abilità logiche e di ragionamento ampie e ben sviluppate, appropriate rappresentazioni, strutture simboliche e formali e capacità di analisi approfondita delle situazioni considerate. Essi sono anche capaci di riflettere sulle proprie azioni e di esporre e comunicare le proprie interpretazioni e i propri ragionamenti.
4	545	Italia 26,3% Paesi OCSE 31,6%	Gli studenti che si collocano al 4° Livello sono in grado di servirsi in modo efficace di modelli dati applicandoli a situazioni concrete complesse anche tenendo conto di vincoli che richiedano di formulare assunzioni. Essi sono in grado, inoltre, di selezionare e di integrare fra loro

			rappresentazioni differenti, anche di tipo simbolico, e di metterle in relazione diretta con aspetti di vita reale. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di utilizzare abilità ben sviluppate e di ragionare in maniera flessibile, con una certa capacità di scoperta, limitatamente ai contesti considerati. Essi riescono a formulare e comunicare spiegazioni e argomentazioni basandosi sulle proprie interpretazioni, argomentazioni e azioni.
3	482	Italia 50,9% Paesi OCSE 56%	Gli studenti che si collocano al 3° Livello sono in grado di eseguire procedure chiaramente definite, comprese quelle che richiedono decisioni in sequenza. Essi sono in grado, inoltre, di selezionare e applicare semplici strategie per la risoluzione dei problemi. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di interpretare e di utilizzare rappresentazioni basate su informazioni provenienti da fonti differenti e di ragionare direttamente a partire da esse. Essi riescono a elaborare brevi comunicazioni per esporre le proprie interpretazioni, i propri risultati e i propri ragionamenti.
2	420	Italia 75,1% Paesi OCSE 78%	Gli studenti che si collocano al 2° Livello sono in grado di interpretare e riconoscere situazioni in contesti che richiedano non più di un'inferenza diretta. Essi sono in grado, inoltre, di trarre informazioni pertinenti da un'unica fonte e di utilizzare

			un'unica modalità di rappresentazione. A questo livello, gli studenti sono anche capaci di servirsi di elementari algoritmi, formule, procedimenti o convenzioni. Essi sono capaci di ragionamenti diretti e di un'interpretazione letterale dei risultati.
1	358	Italia 90,9% Paesi OCSE 92%	Gli studenti che si collocano 1° Livello sono in grado di rispondere a domande che riguardino contesti loro familiari, nelle quali siano fornite tutte le informazioni pertinenti e sia chiaramente definito il quesito. Essi sono in grado, inoltre, di individuare informazioni e di mettere in atto procedimenti di routine all'interno di situazioni esplicitamente definite e seguendo precise indicazioni. Questi studenti sono anche capaci di compiere azioni ovvie che procedano direttamente dallo stimolo fornito.

Attraverso il grafico alla pagina seguente si può notare la distribuzione dei livelli nei Paesi OCSE. Si può osservare la percentuale di studenti che si sono collocati ad ogni livello osservando la lunghezza delle barre. Colori diversi indicano i livelli stessi: a sinistra dello 0% si possono leggere le percentuali relative agli studenti del primo livello e di quelli che si collocano al di sotto del primo livello, rappresentati tramite barre grigie. A destra, rappresentati dalle barre azzurre e blu, gli studenti del secondo livello e dei successivi.



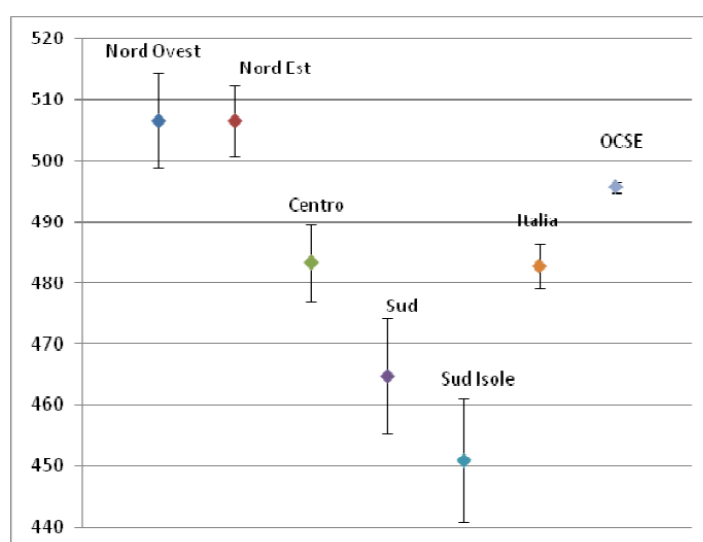
Di seguito la tabella relativa all'indagine del 2009, che colloca l'Italia tra i primi Paesi ad essere significativamente al di sotto della media OCSE.

		Intervallo delle posizioni			
		Paesi OCSE		Tutti i Paesi	
	Punteggio medio (errore standard)	Limite sup.	Limite inf.	Limite sup.	Limite inf.
Significativamente sopra la media OCSE					
Shanghai	600 (2,8)	0	0	1	1
Singapore	562 (1,4)	0	0	2	2
Hong Kong	555 (2,7)	0	0	3	4
Corea	546 (4,0)	1	2	3	6
Taipei – Cina	543 (3,4)	0	0	4	7
Finlandia	541 (2,2)	1	3	4	7
Liechtenstein	536 (4,1)	0	0	5	9
Svizzera	534 (3,3)	2	4	6	9
Giappone	529 (3,3)	3	6	8	12
Canada	527 (1,6)	4	6	9	12
Paesi Bassi	526 (4,7)	3	7	8	13
Macao – Cina	525 (0,9)	0	0	10	12
Nuova Zelanda	519 (2,3)	6	8	12	14
Belgio	515 (2,3)	7	11	13	17
Australia	514 (2,5)	7	11	13	17
Germania	513 (2,9)	8	12	13	17
Estonia	512 (2,6)	8	11	14	17
Islanda	507 (1,4)	11	13	17	19
Danimarca	503 (2,6)	12	16	18	21
Slovenia	501 (1,2)	13	15	19	21
Non significativamente differenti dalla media OCSE					
Norvegia	498 (2,4)	13	20	19	26

Francia	497 (3,1)	13	22	19	28
Rep. Slovacca	497 (3,1)	13	22	19	28
Austria	496 (2,7)	14	22	20	28
Polonia	495 (2,8)	15	24	21	29
Svezia	494 (2,9)	15	24	21	30
Rep. Ceca	493 (2,8)	16	25	22	31
Regno Unito	492 (2,4)	17	25	23	31
Ungheria	490 (3,5)	18	28	23	34
Significativamente sotto la media OCSE					
Lussemburgo	489 (1,2)	22	26	28	33
Stati Uniti	487 (3,6)	21	29	26	36
Irlanda	487 (2,5)	22	29	28	35
Portogallo	487 (2,9)	22	29	28	36
Spagna	483 (2,1)	26	29	32	36
Italia	483 (1,9)	26	29	32	36
Lettonia	482 (3,1)	0	0	32	37
Lituania	477 (2,6)	0	0	36	38
Fed. Russa	468 (3,3)	0	0	38	39
Grecia	466 (3,9)	30	30	38	40
Croazia	460 (3,1)	0	0	39	40
Dubai (UAE)	453 (1,1)	0	0	41	42
Israele	447 (3,3)	31	32	42	44
Turchia	445 (4,4)	31	32	41	44
Serbia	442 (2,9)	0	0	42	44
Azerbaijan	431 (2,8)	0	0	45	47
Bulgaria	428 (5,9)	0	0	45	51
Romania	427 (3,4)	0	0	45	49
Uruguay	427 (2,6)	0	0	45	49
Cile	421 (3,1)	33	34	47	51
Thailandia	419 (3,2)	0	0	48	52
Messico	419 (1,8)	33	34	49	51

Trinidad e Tobago	414 (1,3)	0	0	51	52
Kazakistan	405 (3,0)	0	0	53	54
Montenegro	403 (2,0)	0	0	53	54
Argentina	388 (4,1)	0	0	55	58
Giordania	387 (3,7)	0	0	55	58
Brasile	386 (2,4)	0	0	55	58
Colombia	381 (3,2)	0	0	56	59
Albania	377 (4,0)	0	0	57	61
Tunisia	371 (3,0)	0	0	59	63
Indonesia	371 (3,7)	0	0	59	63
Qatar	368 (0,7)	0	0	61	63
Perù	365 (4,0)	0	0	61	64
Panama	360 (5,2)	0	0	62	64
Kyrgyzstan	331 (2,9)	0	0	65	65

In Italia, la media è di 483 punti; questo indicatore, pur essendo importante per il raffronto con gli altri Paesi, nasconde le notevoli differenze interne alla popolazione. Se si vanno ad analizzare i risultati tra le macroaree geografiche e tra le diverse tipologie di



scuola frequentate dagli studenti, infatti, l'indagine PISA mette in evidenza una notevole divergenza tra i punteggi ottenuti e quindi tra i livelli di *literacy matematica*

corrispondenti.¹¹ Vediamo, attraverso la tabella seguente, le medie distinte per criterio (PISA 2009). Una simile discrepanza è rilevata anche dall'INValSI, ma non verrà approfondita, non essendo oggetto di questa tesi.

Sintesi dell'esito prova OCSE/PISA 2012

Come detto, gli esiti di questa prova, che indaga in particolare l'area della matematica, sono di recentissima pubblicazione.

I segnali di miglioramento che erano stati colti dalla precedente indagine sono stati confermati, tuttavia l'Italia si colloca ancora al di sotto della media OCSE (risultato complessivo, cioè relativo alla matematica, alla lettura e alle scienze).

In particolare le competenze dei quindicenni italiani in matematica sono circa del 2% sotto la media. Sono equiparabili all'Italia i risultati di Norvegia, Portogallo, Spagna, Repubblica Slovacca e Stati Uniti. Ottengono invece un punteggio inferiore Svezia, Ungheria, Israele, Grecia, Cile e Messico.

L'Italia presenta, in matematica, una *performance* significativamente peggiore per le ragazze rispetto ai ragazzi, con un divario più ampio rispetto a quello registrato mediamente.

Relativamente alle quattro aree di contenuti: cambiamento e relazioni, quantità, spazio e forma, incertezza e dati, l'Italia ha registrato il risultato peggiore nella prima. Relativamente ai tre processi: utilizzare, interpretare, formulare, il terzo si è rivelato il più critico.

Le discrepanze territoriali sono in linea con quelle rilevate dalle precedenti indagini.

¹¹ Rapporto PISA 2009

L'esito della prova IEA/TIMSS 2011

TIMSS ha effettuato sino ad ora 5 rilevazioni: 1995, 1999, 2003, 2007, 2011.

Nella Tabella che segue sono riportati per ogni dominio di contenuto il numero di quesiti per ciascuna tipologia, cioè distinguendo le domande a scelta multipla da quella a risposta aperta. Come si può vedere le domande a scelta multipla sono solo il 2% in più di quelle a risposta aperta (che includono sia quelle a risposta aperta univoca, sia quelle a risposta aperta articolata), mentre, per quanto riguarda il dominio di contenuto, l'algebra è quello maggiormente rappresentato.¹²

Domande della prova TIMSS	Domande a scelta multipla	Domande a risposta aperta	Numero totale	Percentuale del punteggio
Dominio di Contenuto				
Numero	31 (30)	30 (36)	61 (67)	29%
Algebra	37 (37)	26 (27)	70 (76)	33%
Geometria	25 (25)	18 (19)	43 (44)	19%
Dati e probabilità	25 (25)	18 (20)	43 (45)	19%
Totale	118 (118)	99 (114)	217 (232)	100%
Percentuale del punteggio	51%	49%		

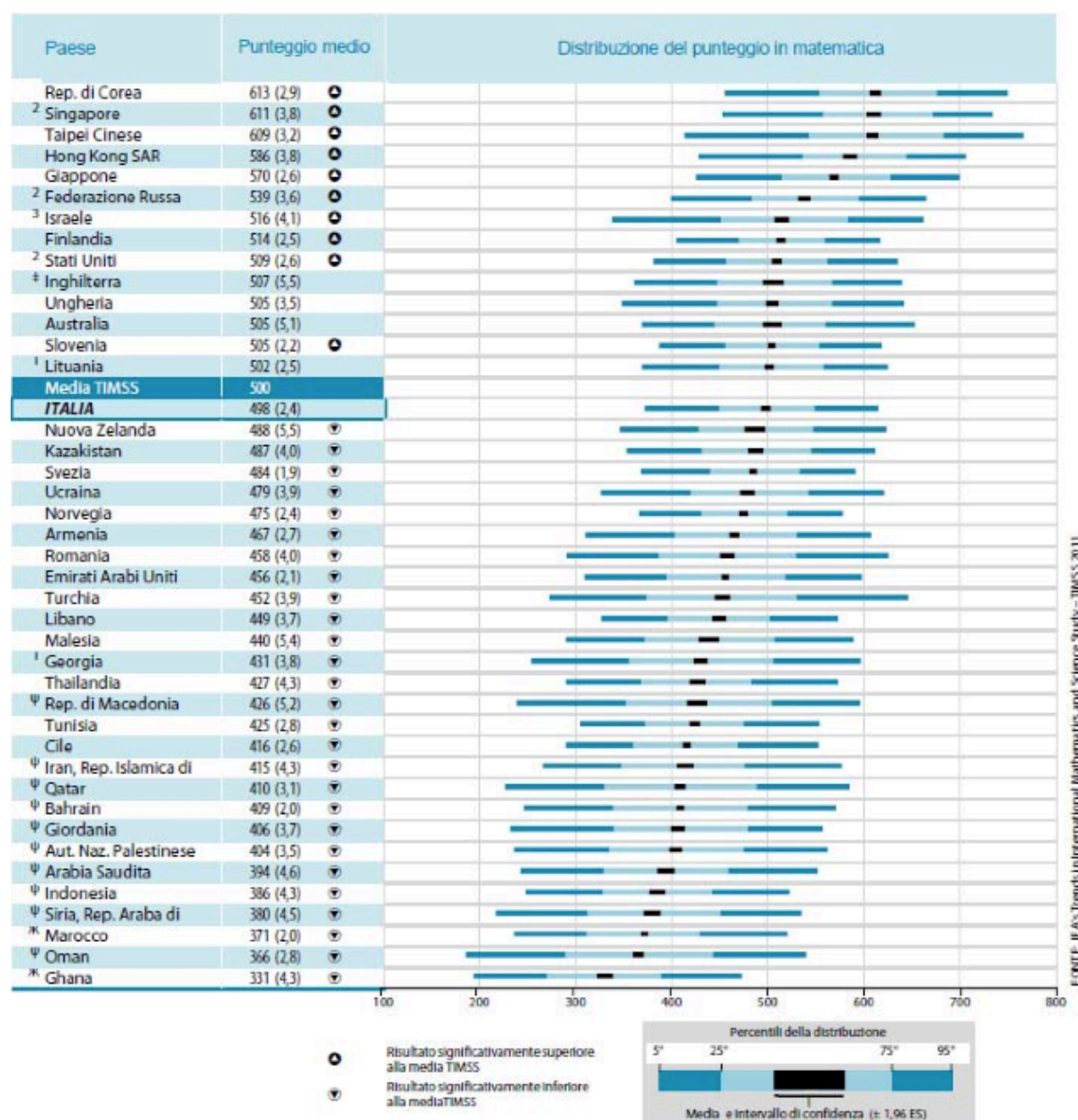
Tabella. Distribuzione del numero di quesiti TIMSS per domini di contenuto e tipologia di item.

Vediamo i risultati degli studenti dell'VIII grado (che abbiano almeno 13 anni compiuti). La scala dei risultati di TIMSS è stata stabilita, fin dalla prima rilevazione del 1995, con una media uguale a 500 e una deviazione standard uguale a 100 e tale media è rimasta costante anche nelle rilevazioni successive.

Nella parte sinistra della figura, i Paesi sono disposti in ordine decrescente di punteggio ottenuto e quelli che hanno ottenuto risultati significativamente, dal punto di vista statistico, superiori o inferiori alla media TIMSS presentano, accanto al punteggio, una freccia rivolta rispettivamente o verso l'alto o verso il basso.

¹² Rapporto TIMSS 2012: http://www.invalsi.it/invalsi/ri/timss2011/documenti/Rapporto_PIRLS_TIMSS.pdf

L'Italia ha ottenuto un punteggio (498) che, dal punto di vista statistico, non è significativamente diverso dalla media di TIMSS, lo stesso vale per Inghilterra, Ungheria, Australia e Lituania. Emerge un enorme distacco tra i cinque Paesi asiatici migliori (Singapore, Corea del Sud, Taipei Cinese, Hong Kong e Giappone) e il resto dei Paesi partecipanti.

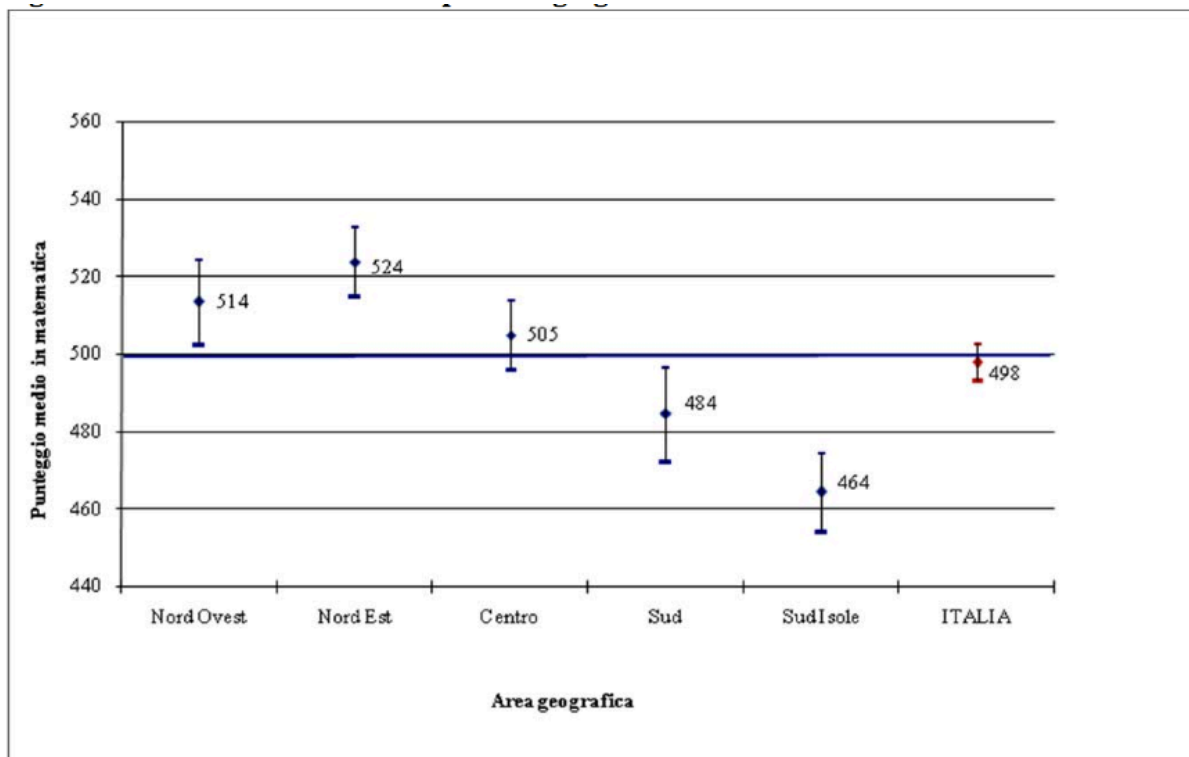


La lunghezza complessiva di ciascuna barra dà un'idea della dispersione dei punteggi: la zona centrale in colore celeste chiaro di ciascuna barra corrisponde ai punteggi dal 25° al 75° percentile; la fascetta nera al centro rappresenta l'intervallo di confidenza

entro cui cade la media della popolazione di studenti dell'ottavo anno di ogni singolo Paese. Le due parti in colore celeste scuro a sinistra e a destra della zona centrale, corrispondono ai punteggi, rispettivamente, dal 5° al 25° percentile e dal 75° al 95° percentile.

Comparando l'esito dell'indagine 2011 con quello del 2007 si nota un leggero miglioramento (matematica, VIII grado), mentre tale prova è risultata in calo rispetto alla precedente (2003).

Dopo aver analizzato i risultati conseguiti dagli studenti italiani rispetto agli altri Paesi partecipanti, confrontiamo gli esiti dei nostri studenti all'interno del nostro Paese. Nelle diverse macroaree in cui è stato suddiviso il campione statistico, i risultati sono stati differenti: il Nord Est è risultata la macroarea con il punteggio più alto (524), tale punteggio è statisticamente superiore rispetto al punteggio medio dell'Italia e delle macroaree del Centro, del Sud e Sud Isole. Il Centro e il Sud hanno un punteggio che non è significativamente differente dall'Italia nel suo complesso, mentre la macroarea del Sud Isole differisce significativamente, ma in senso negativo, dal punteggio dell'Italia. Un dato che fa riflettere è che la differenza tra il Nord Est, la macroarea con i migliori risultati, e il Sud Isole, la macroarea con i peggiori risultati, è ben di 60 punti.



Fonte: base dati IEA TIMSS / INVALSI 2011.

I nostri studenti ottengono punteggi superiori alla media complessiva di scala nel dominio di contenuto geometria e nel dominio cognitivo applicazione. Gli studenti italiani ottengono risultati inferiori nel dominio di contenuto algebra e nei domini cognitivi conoscenza e ragionamento. Solo il 3% degli studenti italiani raggiunge il livello Avanzato nella scala complessiva di matematica, mentre il 10% degli studenti non raggiunge il livello Basso.

Tabella 47: Punteggi medi in matematica per domini di contenuto

**8°
Anno**

Paese	Punteggio medio nella scala complessiva di matematica	Numero		Algebra		Geometria		Dati e probabilità	
		Punteggio medio	Differenza dal punteggio medio nella scala complessiva di matematica	Punteggio medio	Differenza dal punteggio medio nella scala complessiva di matematica	Punteggio medio	Differenza dal punteggio medio nella scala complessiva di matematica	Punteggio medio	Differenza dal punteggio medio nella scala complessiva di matematica
Rep. di Corea	613 (2,9)	618 (2,6)	5 (1,2)	617 (3,2)	4 (1,6)	612 (2,7)	-1 (2,0)	616 (2,5)	3 (1,4)
² Singapore	611 (3,8)	611 (3,6)	0 (1,4)	614 (4,1)	3 (0,9)	609 (3,9)	-2 (1,9)	607 (4,4)	-4 (1,3)
Taipei Cinese	609 (3,2)	598 (3,1)	-12 (1,0)	628 (3,8)	19 (1,5)	625 (3,7)	16 (1,3)	584 (3,0)	-25 (1,7)
Hong Kong SAR	586 (3,8)	588 (3,7)	2 (1,2)	583 (3,9)	-3 (1,2)	597 (4,3)	12 (1,3)	581 (4,1)	-4 (1,6)
Giappone	570 (2,6)	557 (3,0)	-13 (1,6)	570 (3,0)	0 (1,6)	586 (3,5)	16 (2,4)	579 (3,0)	10 (2,5)
² Federazione Russa	539 (3,6)	534 (3,2)	-5 (1,0)	556 (3,7)	17 (1,7)	533 (4,0)	-6 (1,8)	511 (3,9)	-28 (1,6)
³ Israele	516 (4,1)	518 (4,0)	2 (1,1)	521 (4,7)	5 (1,7)	496 (4,6)	-20 (1,6)	515 (4,8)	0 (2,1)
Finlandia	514 (2,5)	527 (2,4)	13 (1,1)	492 (2,9)	-22 (1,5)	502 (2,9)	-12 (1,2)	542 (3,1)	28 (2,1)
² Stati Uniti	509 (2,6)	514 (3,0)	4 (1,0)	512 (2,6)	2 (1,0)	485 (2,7)	-25 (0,7)	527 (3,3)	18 (1,1)
⁸ Inghilterra	507 (5,5)	512 (5,8)	5 (1,4)	489 (5,7)	-17 (1,5)	498 (5,7)	-9 (2,7)	543 (6,8)	36 (2,8)
Ungheria	505 (3,5)	510 (3,9)	5 (1,1)	496 (4,0)	-8 (1,8)	501 (4,1)	-3 (2,2)	517 (4,3)	12 (2,3)
Australia	505 (5,1)	513 (5,4)	8 (0,9)	489 (5,3)	-16 (1,6)	499 (5,4)	-6 (1,7)	534 (5,9)	30 (1,8)
Slovenia	505 (2,2)	511 (2,5)	6 (1,1)	493 (2,6)	-12 (1,8)	504 (3,1)	-1 (2,0)	518 (3,3)	13 (2,1)
¹ Lituania	502 (2,5)	501 (2,5)	-1 (1,5)	492 (2,8)	-10 (1,5)	500 (3,1)	-3 (1,2)	515 (2,8)	13 (2,2)
Italia	498 (2,4)	496 (2,9)	-2 (1,7)	491 (2,7)	-8 (1,3)	512 (3,5)	14 (2,5)	499 (3,2)	1 (2,3)
Nuova Zelanda	488 (5,5)	492 (5,9)	5 (1,2)	472 (5,5)	-16 (1,2)	483 (5,5)	-5 (2,1)	513 (6,7)	26 (2,9)
Kazakistan	487 (4,0)	479 (4,0)	-8 (1,8)	506 (4,4)	19 (1,4)	491 (4,4)	4 (1,4)	444 (4,5)	-43 (1,6)
Svezia	484 (1,9)	504 (1,8)	19 (1,0)	459 (2,2)	-26 (1,2)	456 (2,3)	-28 (1,3)	504 (2,7)	20 (1,2)
Ucraina	479 (3,9)	472 (4,1)	-7 (1,8)	487 (4,4)	8 (1,6)	476 (4,3)	-3 (1,6)	471 (4,0)	-8 (2,2)
Norvegia	475 (2,4)	492 (2,8)	18 (1,1)	432 (2,7)	-43 (1,3)	461 (3,5)	-14 (1,8)	513 (3,6)	39 (2,6)
Armenia	467 (2,7)	474 (2,4)	7 (1,0)	496 (2,8)	29 (1,1)	450 (3,3)	-16 (1,7)	376 (3,7)	-90 (1,8)
Romania	458 (4,0)	448 (4,1)	-10 (1,7)	477 (4,3)	19 (1,6)	453 (4,5)	-5 (1,5)	429 (4,0)	-29 (1,2)
Emirati Arabi Uniti	456 (2,1)	459 (2,2)	3 (0,8)	468 (2,2)	12 (1,3)	431 (2,4)	-25 (1,1)	440 (2,4)	-15 (0,6)
Turchia	452 (3,9)	435 (3,9)	-18 (1,5)	455 (4,2)	2 (1,2)	454 (4,3)	2 (1,5)	467 (4,0)	15 (1,5)
Libano	449 (3,7)	451 (3,8)	2 (1,9)	471 (3,8)	22 (1,5)	447 (3,8)	-2 (2,1)	393 (5,2)	-56 (2,5)
Malaysia	440 (5,4)	451 (5,8)	11 (1,2)	430 (5,2)	-10 (1,3)	432 (6,4)	-8 (1,5)	429 (5,3)	-11 (1,2)
¹ Georgia	431 (3,8)	435 (3,5)	4 (1,5)	450 (3,8)	19 (1,6)	406 (4,2)	-25 (2,2)	392 (4,5)	-39 (2,3)
Thailandia	427 (4,3)	425 (4,6)	-2 (1,0)	425 (4,3)	-2 (1,2)	415 (5,4)	-12 (2,8)	431 (4,1)	3 (1,9)
⁹ Rep. di Macedonia	426 (5,2)	418 (5,1)	-8 (2,3)	448 (5,3)	22 (2,3)	419 (6,0)	-7 (2,4)	389 (5,9)	-37 (3,6)
Tunisia	425 (2,8)	431 (2,8)	6 (1,8)	419 (2,9)	-6 (1,7)	426 (3,2)	1 (1,4)	398 (3,3)	-27 (1,7)
Cile	416 (2,6)	413 (2,9)	-4 (1,2)	403 (3,6)	-14 (2,1)	419 (3,1)	3 (2,2)	426 (3,1)	9 (1,8)
⁹ Iran, Rep. Islamica di	415 (4,3)	402 (4,9)	-13 (2,7)	422 (4,3)	7 (1,9)	437 (4,8)	22 (2,6)	393 (4,9)	-22 (3,0)
⁹ Qatar	410 (3,1)	408 (3,4)	-1 (1,9)	425 (2,8)	15 (1,9)	387 (3,6)	-22 (2,6)	390 (3,6)	-20 (1,7)
⁹ Bahrain	409 (2,0)	397 (1,7)	-13 (1,4)	424 (1,7)	15 (1,2)	398 (2,6)	-11 (1,9)	407 (2,6)	-2 (2,1)
⁹ Giordania	406 (3,7)	390 (3,8)	-15 (1,4)	432 (3,9)	26 (1,1)	407 (3,7)	1 (1,1)	379 (3,7)	-26 (1,5)
⁹ Aut. Naz. Palestinese	404 (3,5)	400 (3,4)	-5 (1,2)	419 (3,3)	14 (1,6)	416 (3,6)	12 (1,8)	368 (3,6)	-36 (1,3)
⁹ Arabia Saudita	394 (4,6)	393 (4,8)	-1 (1,9)	399 (4,9)	6 (1,3)	364 (5,3)	-30 (2,0)	387 (5,1)	-7 (2,7)
⁹ Indonesia	386 (4,3)	375 (4,8)	-11 (2,0)	392 (3,8)	6 (1,3)	377 (5,3)	-9 (2,3)	376 (4,8)	-10 (2,2)
⁹ Siria, Rep. Araba di	380 (4,5)	373 (4,0)	-7 (1,8)	391 (4,9)	11 (2,8)	386 (5,0)	6 (2,5)	343 (4,7)	-37 (1,8)
⁹ Marocco	371 (2,0)	379 (2,6)	8 (1,3)	357 (2,7)	-15 (1,6)	390 (2,5)	19 (2,1)	332 (2,0)	-39 (1,7)
⁹ Oman	366 (2,8)	351 (3,0)	-16 (1,9)	383 (2,8)	17 (1,4)	377 (2,7)	11 (1,4)	342 (3,1)	-24 (2,0)
⁹ Ghana	331 (4,3)	321 (4,5)	-10 (1,8)	358 (4,0)	28 (2,1)	315 (4,3)	-16 (2,2)	296 (4,5)	-35 (1,7)

● Punteggio nella scala del dominio significativamente più alto del punteggio nella scala complessiva di matematica
 ▼ Punteggio nella scala del dominio significativamente più basso del punteggio nella scala complessiva di matematica

Fonte: IEA Trends in International Mathematics and Science Study – TIMSS 2011

Tabella 49: Punteggi medi in matematica per domini cognitivi

Paese	Punteggio medio nella scala complessiva di matematica	Conoscenza		Applicazione		Ragionamento	
		Punteggio medio	Differenza dal punteggio medio nella scala complessiva di matematica	Punteggio medio	Differenza dal punteggio medio nella scala complessiva di matematica	Punteggio medio	Differenza dal punteggio medio nella scala complessiva di matematica
Rep. di Corea	613 (2,9)	616 (2,9)	3 (1,9)	617 (2,9)	4 (1,1)	612 (2,5)	0 (1,0)
² Singapore	611 (3,8)	617 (3,8)	6 (1,0)	613 (3,9)	2 (0,7)	604 (4,3)	-7 (1,0)
Taipei Cinese	609 (3,2)	611 (3,7)	2 (1,4)	614 (3,5)	5 (1,7)	609 (3,4)	0 (1,5)
Hong Kong SAR	586 (3,8)	591 (3,9)	6 (1,2)	587 (3,7)	2 (1,0)	580 (3,9)	-6 (1,1)
Giappone	570 (2,6)	558 (2,7)	-12 (1,5)	574 (2,5)	4 (1,3)	579 (3,0)	9 (1,8)
² Federazione Russa	539 (3,6)	548 (3,6)	9 (1,0)	538 (3,5)	-1 (1,3)	531 (3,7)	-8 (1,2)
³ Israele	516 (4,1)	516 (4,1)	0 (1,1)	513 (4,4)	-3 (1,4)	520 (4,0)	4 (1,7)
Finlandia	514 (2,5)	508 (2,5)	-6 (1,0)	520 (2,5)	6 (1,4)	512 (2,7)	-2 (1,5)
² Stati Uniti	509 (2,6)	519 (2,7)	10 (0,8)	503 (2,8)	-6 (1,0)	503 (2,7)	-6 (0,7)
¹ Inghilterra	507 (5,5)	501 (5,4)	-5 (1,1)	508 (5,5)	2 (1,2)	510 (5,5)	3 (2,0)
Ungheria	505 (3,5)	507 (3,8)	2 (1,6)	505 (3,5)	0 (1,2)	502 (3,7)	-3 (0,8)
Australia	505 (5,1)	504 (5,1)	-1 (1,1)	506 (4,8)	1 (1,0)	506 (4,9)	1 (1,0)
Slovenia	505 (2,2)	508 (2,4)	3 (1,1)	502 (2,1)	-2 (0,7)	500 (2,7)	-5 (1,3)
¹ Lituania	502 (2,5)	502 (2,6)	-1 (1,1)	508 (2,4)	5 (1,0)	493 (2,5)	-10 (1,9)
Italia	498 (2,4)	494 (2,6)	-4 (0,8)	503 (2,2)	4 (1,0)	496 (2,6)	-2 (1,0)
Nuova Zelanda	488 (5,5)	481 (5,6)	-7 (1,1)	491 (5,0)	3 (1,3)	494 (5,3)	6 (1,6)
Kazakistan	487 (4,0)	489 (4,4)	2 (1,3)	484 (4,2)	-3 (1,0)	482 (4,7)	-5 (2,1)
Svezia	484 (1,9)	478 (2,0)	-7 (1,5)	489 (2,2)	5 (1,0)	478 (2,4)	-7 (1,1)
Ucraina	479 (3,9)	481 (4,4)	2 (1,7)	480 (4,3)	1 (1,8)	467 (4,2)	-12 (1,8)
Norvegia	475 (2,4)	465 (2,5)	-10 (1,2)	480 (2,6)	6 (1,3)	478 (2,9)	3 (1,9)
Armenia	467 (2,7)	476 (2,9)	9 (1,3)	458 (3,0)	-8 (1,5)	451 (3,0)	-15 (1,6)
Romania	458 (4,0)	460 (4,4)	2 (1,4)	454 (3,9)	-4 (1,5)	455 (4,0)	-3 (1,6)
Emirati Arabi Uniti	456 (2,1)	467 (2,2)	11 (0,7)	442 (2,2)	-14 (0,8)	449 (2,1)	-7 (0,7)
Turchia	452 (3,9)	441 (4,1)	-12 (1,3)	459 (4,0)	6 (1,2)	465 (3,5)	12 (1,1)
Libano	449 (3,7)	464 (3,9)	15 (1,8)	436 (4,1)	-13 (1,4)	426 (4,7)	-24 (1,9)
Malesia	440 (5,4)	444 (5,7)	4 (0,9)	439 (5,2)	-1 (0,9)	426 (5,5)	-14 (2,0)
¹ Georgia	431 (3,8)	438 (4,2)	6 (1,9)	425 (3,6)	-6 (1,3)	414 (4,2)	-17 (2,2)
Thailandia	427 (4,3)	423 (4,7)	-4 (1,5)	428 (4,1)	1 (1,1)	429 (4,3)	2 (1,1)
^ψ Rep. di Macedonia	426 (5,2)	430 (5,6)	4 (2,5)	417 (5,2)	-9 (1,7)	424 (5,9)	-3 (3,3)
Tunisia	425 (2,8)	425 (2,8)	0 (0,8)	421 (2,9)	-4 (1,3)	423 (2,7)	-2 (1,0)
Cile	416 (2,6)	405 (2,9)	-11 (1,4)	425 (2,5)	9 (0,9)	422 (2,8)	5 (1,5)
^ψ Iran, Rep. Islamica di	415 (4,3)	410 (4,4)	-5 (1,5)	411 (4,6)	-4 (2,2)	428 (4,3)	13 (1,6)
^ψ Qatar	410 (3,1)	418 (2,9)	8 (1,5)	396 (3,3)	-13 (1,7)	406 (3,3)	-3 (1,8)
^ψ Bahrain	409 (2,0)	411 (2,4)	2 (2,0)	400 (2,4)	-9 (1,8)	415 (2,1)	5 (1,9)
^ψ Giordania	406 (3,7)	405 (4,3)	-1 (1,5)	397 (3,8)	-9 (1,4)	416 (3,8)	10 (1,9)
^ψ Aut. Naz. Palestinese	404 (3,5)	406 (3,5)	2 (1,1)	397 (3,5)	-7 (1,1)	404 (4,1)	0 (1,6)
^ψ Arabia Saudita	394 (4,6)	402 (4,6)	8 (0,9)	375 (4,8)	-19 (1,2)	388 (4,7)	-6 (2,8)
^ψ Indonesia	386 (4,3)	378 (4,8)	-8 (1,1)	384 (4,7)	-2 (1,5)	388 (3,8)	2 (1,7)
^ψ Siria, Rep. Araba di	380 (4,5)	374 (4,4)	-6 (2,4)	379 (4,2)	-1 (2,4)	371 (5,4)	-9 (2,8)
²⁸ Marocco	371 (2,0)	363 (2,2)	-8 (1,2)	378 (1,9)	7 (1,4)	357 (2,7)	-14 (1,7)
^ψ Oman	366 (2,8)	365 (3,0)	-2 (1,4)	360 (3,0)	-6 (1,6)	369 (2,8)	3 (1,6)
²⁸ Ghana	331 (4,3)	331 (4,4)	1 (2,1)	316 (4,1)	-15 (1,3)	324 (4,8)	-7 (1,9)

FONTE: IEA's Trends in International Mathematics and Science Study - TIMSS 2011

Commento

L'Italia sia nell'indagine PISA sia nell'indagine TIMSS non ottiene risultati confortanti, essendo sempre e in modo significativo al di sotto della media.

Come sappiamo le rilevazioni internazionali che abbiamo presentato hanno scopi e impostazioni molto diverse: l'una punta sulla capacità di modellizzare e risolvere problemi, l'altra è incentrata sull'apprendimento dei *curricola*. Per gli studenti italiani

risulta relativamente più semplice affrontare una prova «standard» e analoga a quelle proposte nella prassi didattica come quella proposta da TIMSS, piuttosto che cimentarsi nel *problem solving* di PISA. Per poter comparare l'esito di PISA 2009 con quello di TIMSS 2007 bisognerebbe anche confrontare i Paesi partecipanti, tuttavia ad una prima occhiata si nota che gli studenti italiani raggiungono punteggi più elevati se i quesiti sono «da libro di testo». Le prove incentrate sulle competenze li mettono a maggior disagio. Sembra che la scuola italiana sia, sulla carta, improntata alla didattica per competenze, ma nella realtà pare non aver ancora fatto questo passo. Forse prevale, negli insegnanti e nei libri di testo, la didattica tradizionale trasmissiva. È certo che un insegnamento più improntato sul laboratorio potrebbe giovare all'apprendimento. Non a caso questa impostazione rappresenta una delle (poche) novità che è possibile riscontrare nelle Indicazioni Nazionali per il primo ciclo del 2012. In esse il laboratorio è visto «sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere i dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive». Il sospetto è che la didattica italiana sia troppo legata alle nozioni fini a se stesse, che andrebbero invece costruite con gli alunni, guidati certamente ad apprendere con precisione, ma anche a scoprire, fin dalla scuola primaria.

CAPITOLO 3 – L’INValSI, IL QUADRO TEORICO E L’ANALISI DELLE PROVE

3.1 L’ISTITUTO NAZIONALE PER LA VALUTAZIONE DEL SISTEMA EDUCATIVO DI ISTRUZIONE E DI FORMAZIONE

L’INValSI ha raccolto l’eredità del «Centro Europeo Dell’Educazione» (CEDE), istituito a norma del decreto del Presidente della Repubblica n.419 del 31 maggio 1974. I compiti assegnati al CEDE consistevano nella raccolta, nell’elaborazione e nella diffusione di documenti di carattere pedagogico-didattico italiani e stranieri; nell’attuazione di studi e ricerche sugli ordinamenti scolastici degli altri Paesi (in particolare quelle della Comunità Europea) e sulle attività educative delle organizzazioni internazionali.

Gli studi e le ricerche erano incentrate, oltre che sui problemi dell’apprendimento e della relativa valutazione, anche su altri aspetti, quali: la programmazione e i costi dei sistemi educativi; la formazione permanente e i rapporti tra formazione e occupazione; l’aggiornamento del personale con attenzione alle tecnologie a servizio dell’educazione.

Il CEDE è stato trasformato successivamente in «Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema dell’Istruzione» (INValSI) attraverso il decreto legislativo n. 258 del 20 luglio 1999, a norma dell’articolo 11 della legge n. 59 del 15 marzo 1997.

I compiti assegnati all’INValSI erano:

- valutare l’efficienza e l’efficacia del sistema di istruzione nel suo complesso e in modo analitico (anche per singola istituzione scolastica), inquadrando la valutazione nazionale nel contesto internazionale;

- studiare le cause di insuccesso e dispersione scolastica, in riferimento al contesto sociale e alle tipologie dell'offerta formativa;
- fornire supporto e assistenza tecnica all'amministrazione per la realizzazione di autonome iniziative di valutazione, fornire supporto alle singole istituzioni scolastiche anche mediante la predisposizione di archivi informatici liberamente consultabili;
- valutare gli effetti degli esiti applicativi delle iniziative legislative che riguardano la scuola;
- valutare gli esiti dei progetti e delle iniziative di innovazione promossi in ambito nazionale;
- assicurare la partecipazione italiana a progetti di ricerca internazionale in campo valutativo e nei settori connessi dell'innovazione organizzativa e didattica.

Infine il Decreto legislativo n. 286 del 19 novembre 2004 ha istituito il Servizio Nazionale di Valutazione del Sistema educativo di Istruzione e di formazione e ne ha predisposto il riordino, a norma degli articoli 1 e 3 della legge n.53 del 28 marzo 2003. Le finalità espresse nel decreto legislativo n. 258 del 20 luglio 1999 sono rimaste valide, con alcune aggiunte:

- il coinvolgimento della formazione professionale, con verifiche che riguardino i soli livelli essenziali di prestazione, effettuate tenendo conto degli altri soggetti istituzionali che già operano nel settore della valutazione delle politiche nazionali finalizzate allo sviluppo delle risorse umane;
- la predisposizione delle prove nazionali, nell'ambito delle prove dell'esame di Stato conclusivo dei cicli di istruzione;
- la predisposizione di attività di formazione del personale docente e dirigente della scuola, connessa ai processi di valutazione e di autovalutazione delle istituzioni scolastiche.

3.2 IL QUADRO DI RIFERIMENTO

La finalità principale dell'INValSI è la valutazione dell'efficienza e dell'efficacia del sistema d'istruzione. Tenendo conto di questo, l'INValSI redige il documento fondamentale per orientarsi nella lettura delle prove: il Quadro di Riferimento (QdR). Tale documento viene predisposto da un gruppo di insegnanti, dirigenti scolastici, ricercatori ed esperti ed è un documento aperto, nel senso che l'esperienza, le osservazioni e lo studio dei risultati ne determinano la graduale evoluzione, con l'obiettivo di renderlo uno strumento sempre più chiaro ed efficace sia per coloro che preparano le prove sia per chi ne legge i risultati. Nel seguito di questa trattazione si farà riferimento al QdR del primo ciclo del 2013, talvolta comparandolo con le precedenti edizioni.

Nel QdR relativo alle prove di Matematica vengono dichiarati:

- il significato della «Conoscenza Matematica»;
- gli aspetti della matematica che esso intende valutare, cioè ambiti e processi, e i criteri di scelta degli argomenti;
- le caratteristiche delle prove e i criteri seguiti nella costruzione delle stesse.

1. *Conoscenza matematica.* L'INValSI mira anzitutto a valutare la conoscenza matematica, che è definita come «conoscenza concettuale, frutto di interiorizzazione dell'esperienza e di riflessione critica, non di addestramento «meccanico» o di apprendimento mnemonico. Una conoscenza concettuale quindi che affonda le sue radici in contesti critici di razionalizzazione della realtà». Pertanto le prove mirano non solo a testare l'apprendimento della matematica «utile», ma anche a verificarla come strumento di pensiero e come disciplina con un proprio statuto epistemologico.

2. *Ambiti e processi.* Il più recente QdR (2013) prevede, ricalcando la scelta di TIMSS, di incentrare l'attenzione: sugli apprendimenti raggiunti dagli allievi (curricolo raggiunto); sulla validità delle scelte didattiche, sull'efficacia dell'offerta formativa, sull'ampiezza, profondità e coerenza del curriculum effettivamente svolto (curricolo effettivo); sulla sua corrispondenza con il curriculum programmato. Per effettuare questa rilevazione l'INValSI somministra le prove e i questionari studente (che ogni alunno

compila, descrivendo il proprio ambiente familiare, le attività che svolge durante il tempo libero, le sue opinioni relative allo studio e alla scuola in generale).

La valutazione del livello di apprendimento avviene scandagliando due aspetti: i «contenuti» e i «processi».

La scelta dei contenuti è operata a partire dai Curricoli UMI-CIIM¹³ e dai documenti programmatici: Indicazioni Nazionali (L. 53/2003 e D. Lgs. 59/2004) e Indicazioni per il Curricolo (D.M. 31 luglio 2007). Essi sono articolati in quattro ambiti: *Numeri*; *Spazio e Figure*; *Relazioni e Funzioni* (valutato a partire dalla classe V primaria); *Misure, Dati e Previsioni* (recentemente modificato in *Dati e Previsioni*, in quanto la misura è stata ritenuta trasversale a più ambiti). Tale suddivisione del sapere matematico è condivisa a livello internazionale. La scelta di utilizzare come titoli degli ambiti i nomi di oggetti matematici risponde alla volontà di valorizzare gli oggetti con cui l'alunno si deve misurare, lasciando l'approfondimento dell'inquadramento teorico al secondo ciclo di istruzione¹⁴. Condivide tale scelta l'OCSE PISA 2006, mentre la disattende TIMSS 2007.

Per ciascun ambito, il QdR presenta un elenco dei possibili oggetti di valutazione, scegliendo gli argomenti più significativi per valutare la competenza matematica nel primo ciclo, analogamente a TIMSS. Attraverso la seguente tabella è possibile comparare le scelte dichiarate negli ultimi due QdR relativamente agli argomenti valutati.

Ambito	Oggetti di valutazione (QdR 2013)	Oggetti di valutazione (QdR 2011)
Numeri	Numeri naturali: significati (ordinale, cardinale, ...), operazioni (calcolo esatto e approssimato) e proprietà, ordinamento,	Numeri naturali e loro rappresentazione in base dieci. Addizione e sottrazione fra numeri naturali. Moltiplicazione e divisione

¹³ La matematica per il cittadino, tre volumi prodotti negli anni 2001, 2003, 2004 dalla Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica, dalla Società Italiana di Statistica e dalla Mathesis.

¹⁴ G. Anzellotti, S. Cotoneschi, Matematica, in «Le indicazioni per il curricolo: la parola alla scuola», *Notizie della scuola*, 2/3, AnnoXXXV, Tecnodid Editrice, 2007.

	rappresentazione in base dieci, rappresentazione sulla retta. Numeri interi: significati, operazioni (calcolo esatto e approssimato) e proprietà, ordinamento, rappresentazione in base dieci, rappresentazione sulla retta. Numeri razionali: frazioni e numeri decimali, significati, operazioni (calcolo esatto e approssimato), proprietà, ordinamento, rappresentazione sulla retta. Numeri pari, dispari, primi, multipli e divisori: proprietà e rappresentazioni. Rapporti e percentuali: significati, operazioni, proprietà e rappresentazioni. Potenze e radici: significati, operazioni e proprietà; uso delle potenze del 10 per esprimere grandezze, notazione scientifica. Espressioni con parentesi: significati e convenzioni.	fra numeri naturali. Numeri decimali e frazioni. Frazioni equivalenti. Scrittura posizionale dei numeri naturali e decimali. Operazioni fra numeri decimali. Proprietà delle operazioni. Significato delle parentesi in sequenze di operazioni. Proprietà dei numeri naturali: precedente successivo, pari dispari, doppio, metà...). Operazioni con i numeri interi. Calcolo approssimato. Potenze di numeri naturali e interi. Numeri primi. Multipli e divisori. Rapporti, percentuali e proporzioni. Numeri decimali limitati e illimitati periodici (rappresentazione decimale e frazionaria). Numeri razionali. Operazioni con i numeri razionali. Numeri decimali non periodici.
Spazio e Figure	Mappe, piantine e orientamento. Le principali figure del piano e dello spazio: definizioni, relazioni tra i loro elementi, costruzioni, proprietà. Gli oggetti e le figure nel piano e nello spazio: rappresentazioni con riga, squadra, compasso, ...; rappresentazioni nel piano	Mappe, piantine e orientamento. Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio. Semplici figure dello spazio e del piano (cubo, sfera, triangolo, quadrato...). I principali enti geometrici. Angoli e loro ampiezza. Rette incidenti, parallele e perpendicolari. Verticalità, orizzontalità.

	cartesiano; rappresentazioni bidimensionali di figure tridimensionali. Unità di misure di lunghezze, aree, volumi e angoli: rappresentazioni, confronti e relazioni. Perimetri, aree e volumi di figure del piano e dello spazio: formule, relazioni, somme, scomposizioni, approssimazioni. Il teorema di Pitagora: proprietà e problemi. Traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini: significati, invarianti, proprietà. Riproduzioni in scala: ampliamenti e riduzioni.	Uguaglianza di figure. Equivalenza fra figure. Composizione e scomposizione di figure. Elementi di semplici figure dello spazio (vertici, spigoli, ...). Unità di misure di lunghezze, aree e volumi. Perimetro di poligoni. Aree di poligoni. Somma degli angoli di un triangolo e di poligoni. Teorema di Pitagora. Traslazioni, rotazioni e simmetrie. Riproduzioni in scala: ampliamenti e riduzioni. Lunghezza della circonferenza e area del cerchio. Angoli al centro e angoli alla circonferenza. Aree e volumi dei principali solidi. Rappresentazione piana di figure solide. Sistema di riferimento cartesiano. Rappresentazione sul piano cartesiano di figure piane e di trasformazioni geometriche.
Relazioni e Funzioni	Classificazione di oggetti, figure, numeri: criteri in base a una determinata proprietà, equivalenze e ordinamenti. Relazioni tra oggetti matematici (numeri, figure, ...): rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà (es. perpendicolarità, ordine, proporzionalità diretta e inversa,...).	Classificazione di oggetti, figure, numeri in base a una determinata proprietà. Equivalenze e ordinamenti. Grandezze direttamente e inversamente proporzionali Ricerca di regolarità in sequenze di numeri, figure, simboli e parole. Generalizzazione di regolarità attraverso parole e espressioni algebriche. Funzioni del tipo $y=ax$, $y=a/x$ e $y=x^2$ e loro

	Successioni di numeri, figure, dati: ricerca di regolarità, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche. Formule contenenti lettere: interpretazione, costruzione, utilizzo, trasformazione e rappresentazioni verbali. Funzioni del tipo $y=ax$, $y=a/x$ e $y=x^2$: significati, rappresentazioni verbali, numeriche, grafiche, simboliche, proprietà e caratteristiche. Equazioni di primo grado: problemi, operazioni. Il Sistema Internazionale di misura.	rappresentazione grafica. Rappresentazione di funzioni attraverso parole, tabelle, grafici, espressioni algebriche. Equazioni di primo grado. Rappresentazione di fatti e fenomeni attraverso tabelle, grafici ed espressioni algebriche.
Dati e Previsioni	Insiemi di dati: raccolta, organizzazione, rappresentazione (tabelle, pittogrammi, istogrammi, grafici a barre, ecc.). Caratteri qualitativi e quantitativi. Valori medi e misure di variabilità: moda, mediana e media aritmetica; campo di variazione. Frequenza assoluta, relativa e percentuale: significati e calcoli. Eventi e previsioni (evento certo, possibile e impossibile, eventi disgiunti, dipendenti e indipendenti): significati, determinazione di probabilità a	Il collettivo statistico e i suoi elementi. Prime rappresentazioni di dati (tabelle, pittogrammi, grafici a barre, ecc.). Caratteri qualitativi e quantitativi. Moda, mediana e media aritmetica. Istogrammi. Calcolo di frequenze relative e percentuali. Diagrammi di vario tipo. Evento certo, possibile e impossibile. Campione estratto da una popolazione: casuale e non casuale. Probabilità di un evento: valutazione della probabilità di eventi elementari ed equiprobabili. Semplici valutazioni di probabilità

	priori e a posteriori.	di un evento a partire da dati statistici. Misure di grandezze discrete per conteggio. Misure di grandezze continue attraverso oggetti e strumenti. Il Sistema Internazionale di misura. Stime e approssimazioni. Notazione scientifica.
--	------------------------	--

Tabella. Oggetti di valutazione declinati per ambito.

Gli ultimi due Quadri di Riferimento presentano sostanzialmente gli stessi contenuti. Nell'ambito Spazio e Figure si può notare che tali «oggetti di valutazione» sono stati declinati in modo più sintetico (senza riferimenti alle singole proprietà e ai singoli teoremi) e con un riferimento più chiaro all'abilità che quel contenuto richiede di sfruttare (rappresentare, definire, conoscere le proprietà,...). L'unico elemento nuovo è la richiesta di saper effettuare costruzioni geometriche.

La scelta dei processi è operata tenendo conto della «tradizione culturale» e dei *frameworks* internazionali, come ad esempio la rilevazione TIMSS 2007. I processi sono le procedure coinvolte nel lavoro matematico e nella risoluzione dei problemi. Tra essi si elencano la conoscenza e la padronanza dei contenuti specifici, degli algoritmi e delle procedure, oltre alla conoscenza delle forme di rappresentazione, al saper risolvere problemi, saper riconoscere il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, le forme nello spazio e utilizzare strumenti di misura, saper operare il trattamento quantitativo dell'informazione. Più dettagliatamente vediamo i processi tratti dal Nuovo QdR del primo ciclo del 2012/2013 e confrontiamoli con quelli del QdR del 2008 (valido fino all'anno scolastico 2011/2012 incluso).

Processi cognitivi (QdR 2008)	Processi cognitivi (QdR 2011)	Processi cognitivi (QdR 2013)
(a) conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà,	(a) conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà,	(a) conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà,

strutture, ...);	strutture, ...);	strutture., ...);
(b) conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico, ...);	(b) conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico, ...);	(b) conoscere e utilizzare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico, ...);
(c) conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...);	(c) conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...);	(c) conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra (verbale, numerica, simbolica, grafica, ...);
(d) sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo, ...);	(d) sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo, ...);	(d) risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico – (individuare e collegare le informazioni utili, individuare e utilizzare procedure risolutive, confrontare strategie di soluzione, descrivere e rappresentare il procedimento risolutivo, ...);
(e) sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura,...);	(e) sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura,...);	(e) riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze (individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, stimare una misura,...);
(f) acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero	(f) acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero	(f) acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero

matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...);	matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...);	matematico (congetturare, argomentare , verificare, definire, generalizzare, ...);
(g) utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...).	(g) utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...).	(g) utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni ...).
	(h) saper riconoscere le forme nello spazio (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...).	(h) riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...).

Nel 2007 erano elencati soltanto i seguenti tre processi, denominati «domini cognitivi»: capacità di eseguire algoritmi (di routine o non di routine); uso di linguaggi specifici; sensibilità numerica e geometrica.

Come si vede, dal 2008 al 2012 i processi cognitivi sono rimasti sostanzialmente invariati, con la sola aggiunta del processo (h), relativo alle forme nello spazio.

Il QdR del 2013 ha modificato principalmente il processo (d), ponendo l'accento sulle strategie risolutive, invece che sugli strumenti. Infatti la Prova Nazionale ha lavorato in questo senso; ad esempio nell'ambito Spazio e Figure ben 5 item su 8 indagano proprio la capacità di risolvere problemi e complessivamente questa competenza è stata la più verificata (9 item).

Durante l'anno scolastico 2011/2012 l'INValSI ha anche proposto un raggruppamento dei processi cognitivi in aree denominate «macroprocessi», che non ha più recuperato nel nuovo QdR.

- «Concetti e procedure» (gruppo A), che comprende i processi (a) e (b)
- «Rappresentazioni» (gruppo B), che comprende i processi (c) e (h)
- «Modellizzazioni» (gruppo C), che comprende i processi (d), (e) e (g)
- «Argomentazioni» (gruppo D), che coincide con il processo (f).

3. *Caratteristiche delle prove.* Sono presenti quesiti di tre categorie: a «risposta chiusa» (con una sola opzione corretta) e a «risposta falsa-aperta» (o «univoca»), cioè quesiti che non presentano opzioni, ma che prevedono una risposta breve, costituita ad esempio dal risultato di un calcolo algebrico o dall'adesione o meno ad una affermazione. Lo scopo di questa struttura è la possibilità di valutare rapidamente e con il più elevato grado di certezza possibile. Alcuni quesiti richiedono, invece, una breve argomentazione che consiste nel motivare dei procedimenti, si tratta dei quesiti cosiddetti «a punteggio parziale».

I criteri di formulazione riguardano differenti aspetti:

- aspetti legati all'idea di matematica: la formulazione di domande in cui non necessariamente sia dato il solo contenuto minimo; la connessione dei quesiti con situazioni concrete, soprattutto per la II primaria, e, per le classi successive, in modo graduale, quesiti legati all'utilizzo della matematica per se stessa;
- aspetti che rendono univoca l'interpretazione: la precisazione del significato di simboli e di definizioni che potrebbero non essere ovunque condivise; la specificazione di congruenza di elementi di figure geometriche sia nel testo sia nella rappresentazione;
- aspetti tecnici: l'utilizzo di differenti registri (testo, figure, immagini, tabelle, grafici); un ordine di complessità crescente, l'assenza di espressioni vaghe, ambigue o inutilmente complicate; l'omogeneità di lunghezza e di struttura delle risposte.

Il QdR per il secondo ciclo è stato pubblicato nel 2013, tenendo conto anche delle Nuove Indicazioni Nazionali per il sistema dei Licei e per l'Istruzione Tecnica. Per l'anno scolastico 2010/2011 la prova è stata predisposta sulla base delle indicazioni della normativa riguardante l'adempimento dell'obbligo di istruzione.

3.3 LE PROVE SOMMINISTRATE

Dopo alcune analisi campionarie, l'INValSI ha iniziato la rilevazione su tutti gli studenti italiani durante l'anno scolastico 2007/2008, in cui è stato indagato, tramite Prova Nazionale (PN) l'ottavo grado di istruzione. Successivamente, e in modo graduale, l'analisi è stata ampliata anche ad altri gradi (secondo, quinto, sesto, decimo). Trattandosi di prove che non influiscono sulla valutazione sono denominate Rilevazioni Nazionali (RN). È in programma per i prossimi anni scolastici una prova anche per la quinta superiore, ma non è stato ancora chiarito il carattere: non è noto se si tratterà di un test inserito nell'Esame di Stato o se sarà una semplice rilevazione.

Riepiloghiamo di seguito le prove sino ad ora somministrate.

	2007/2008	2008/2009	2009/2010	2010/2011	2011/2012	2012/2013
II primaria		RN	RN	RN	RN	RN

V primaria		RN	RN	RN	RN	RN
I secondaria I grado			RN	RN	RN	RN
III secondaria I grado	PN	PN	PN	PN	PN	PN
II secondaria II grado				RN	RN	RN

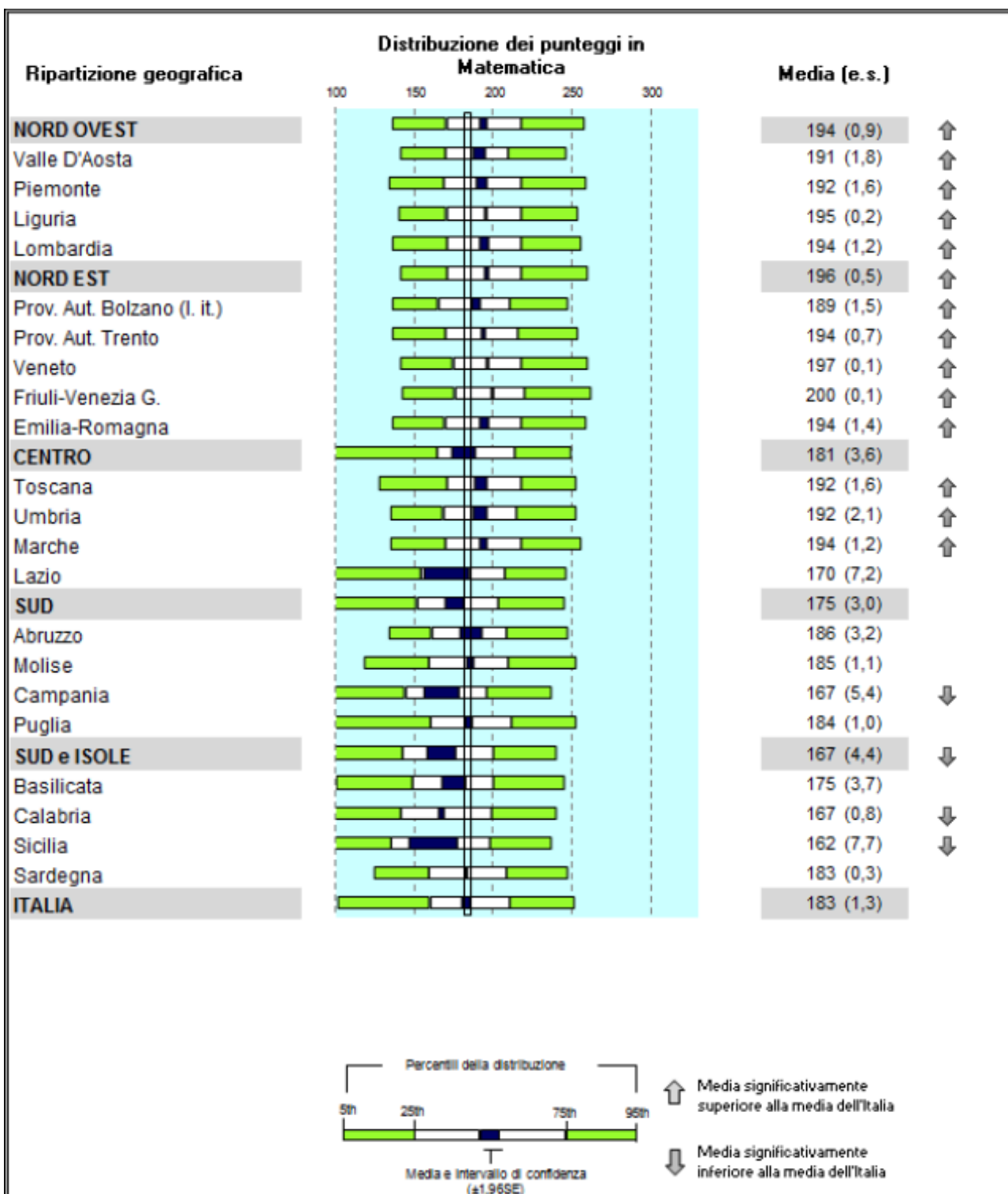
Tabella. Prove Nazionali (PN) e Rilevazioni Nazionali (RN) somministrate dall'INValSI.

3.4 GLI ESITI DELLE PROVE NAZIONALI 2011/2012 E 2012/2013

La Prova Nazionale 2011/2012 somministrata agli alunni delle classi terze della scuola secondaria di primo grado ha avuto luogo il 18 giugno 2012 e ha visto coinvolti 587.412 studenti appartenenti a 29.478 classi.

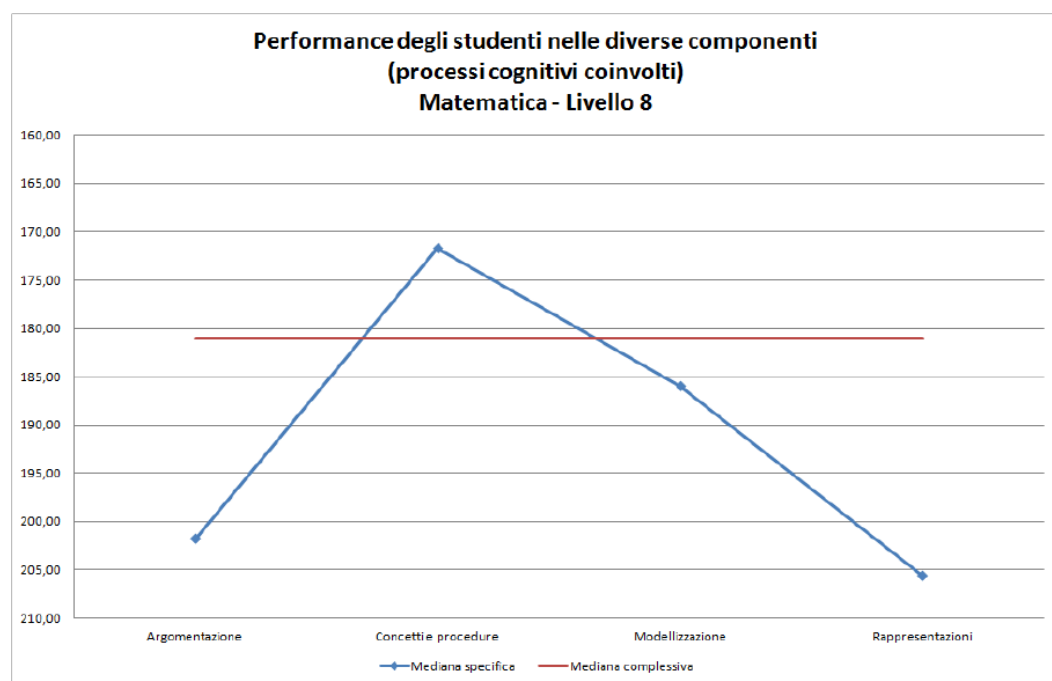
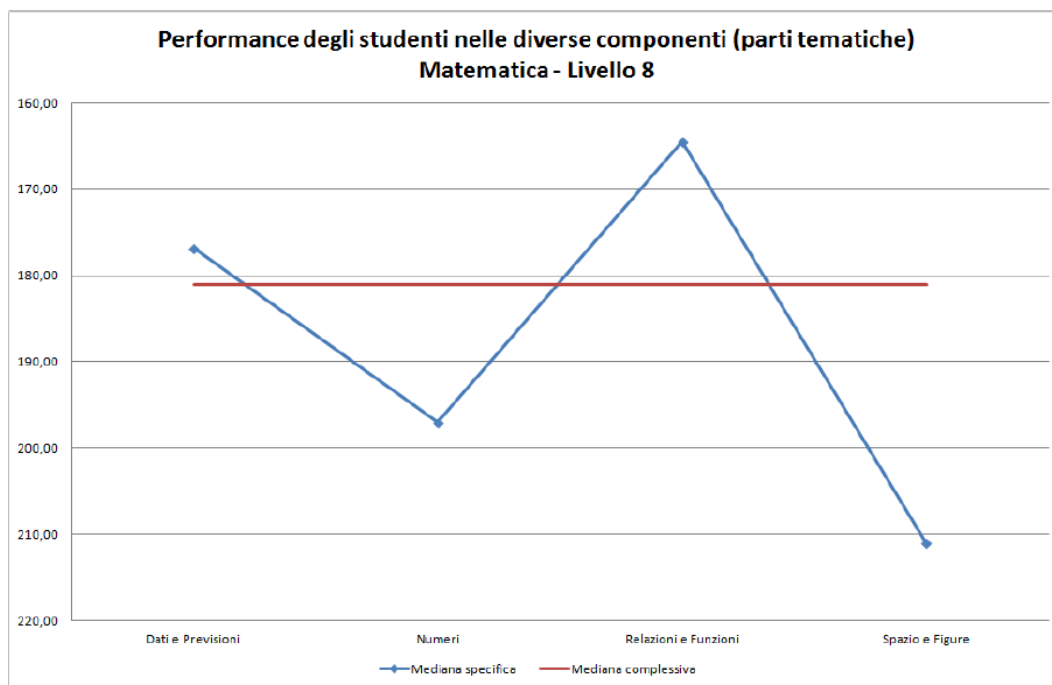
Il grafico nella figura seguente mostra i punteggi medi corretti (a causa del fenomeno del *cheating*) e le loro distribuzioni delle macro-aree, delle regioni e dell'Italia nel suo insieme. Le medie con il relativo intervallo di confidenza (95%) sono indicate su ognuna delle barre orizzontali del grafico da una fascetta blu e i rispettivi valori sono elencati nella colonna a destra con, tra parentesi, l'errore standard della stima. Il simbolo che compare in molti casi accanto a tali valori, una freccia con la punta rivolta verso l'alto o verso il basso, indica se i valori medi registrati nel campione regionale sono significativamente, in senso statistico, al di sopra (punta in su) o al di sotto (punta in giù) della media italiana nel suo complesso; se non compare alcun simbolo, significa che i valori non si discostano significativamente dalla media dell'Italia. Gli estremi della zona in bianco al centro di ogni barra corrispondono al 25° e 75° percentile della distribuzione dei punteggi, mentre le due estremità barre esterne della barretta in verde corrispondono rispettivamente al 5° e 95° percentile. La lunghezza totale delle barre offre un'immediata rappresentazione dell'ampiezza della dispersione dei punteggi nelle varie aree e regioni. In generale, la tendenza è ad una maggiore dispersione dei punteggi nell'Italia centrale e meridionale rispetto all'Italia settentrionale.¹⁵

¹⁵ Rapporto rilevazione apprendimenti 2012.



Riportiamo il grafico della performance degli studenti nei diversi ambiti e rispetto ai processi cognitivi. Come si vede gli studenti hanno riportato maggiori difficoltà

nell'ambito Spazio e Figure, e nei macroprocessi B (rappresentazione) e D (argomentazione).



La prova dell'anno successivo, svoltasi in data 17 giugno 2013, ha visto coinvolti 593.407 studenti distribuiti in 29.385 classi. Le classi campione sono state 1.420. Di seguito i grafici che riassumono gli esiti.

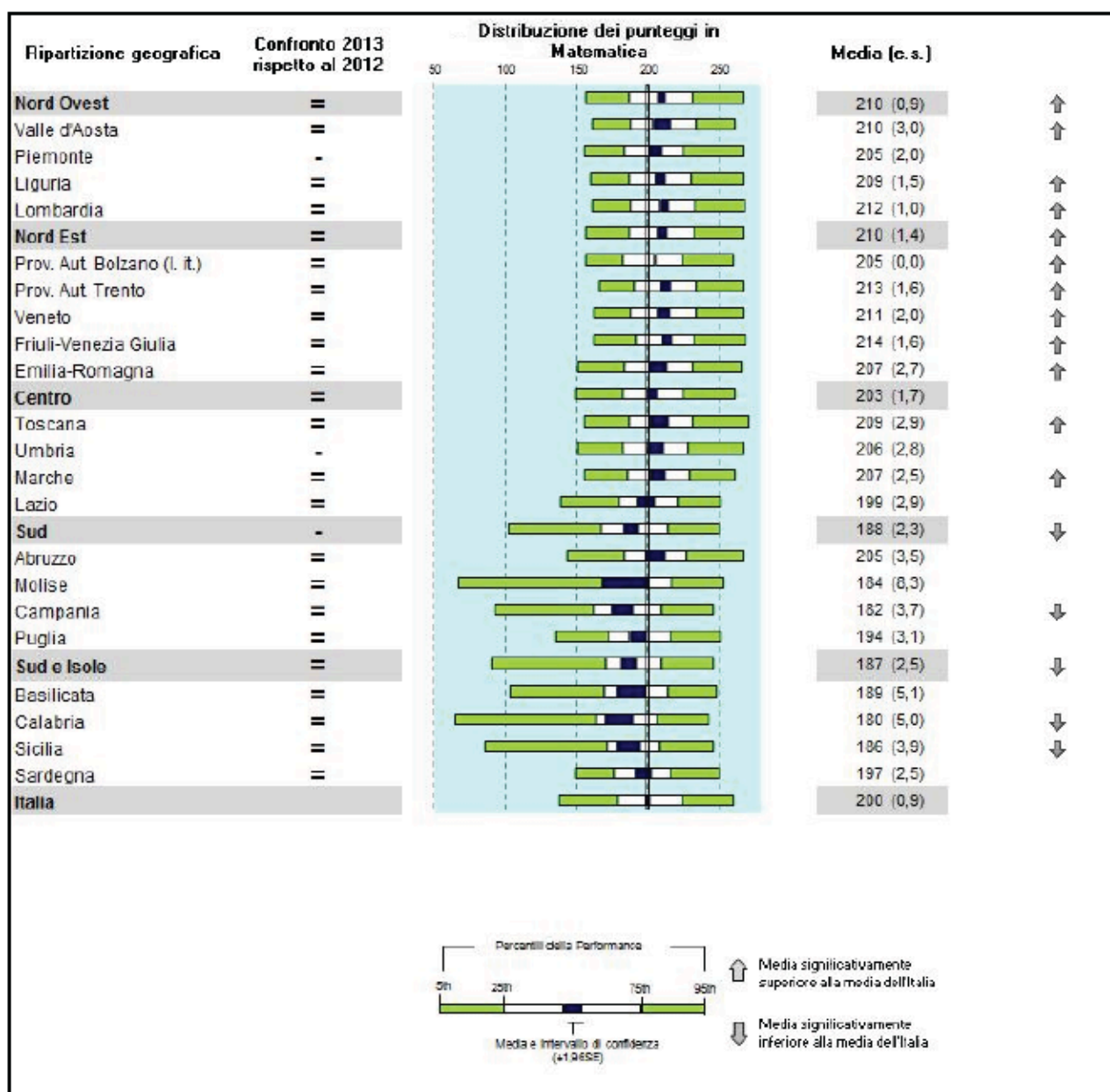
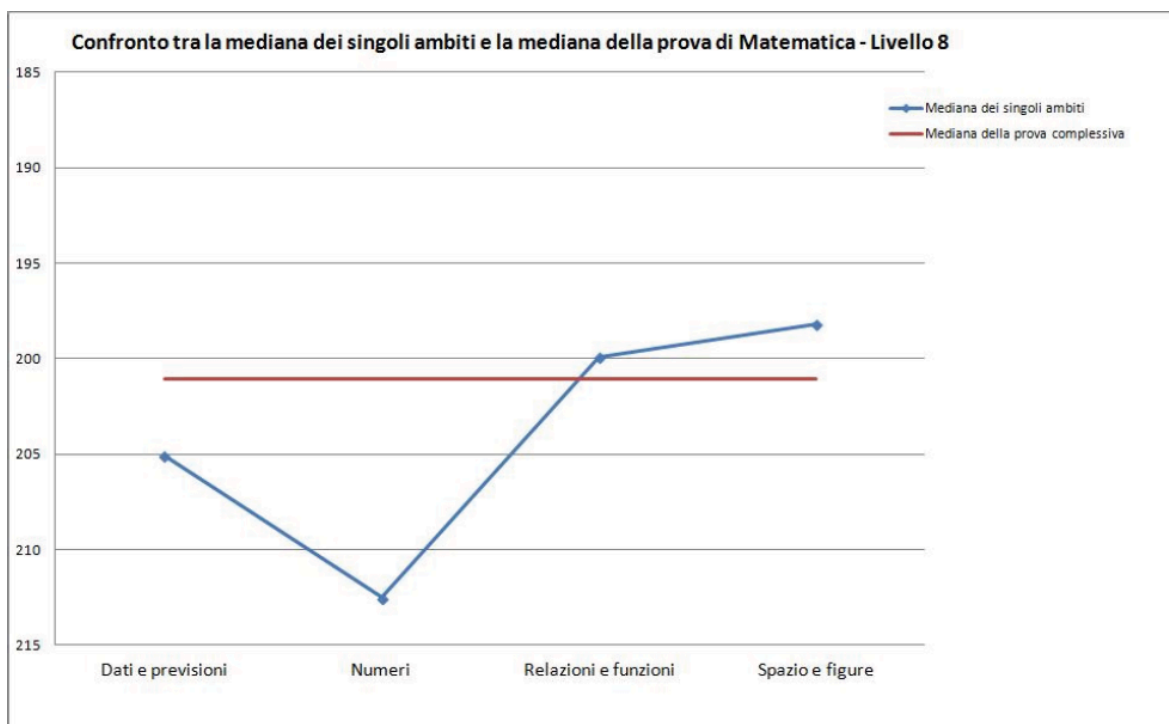
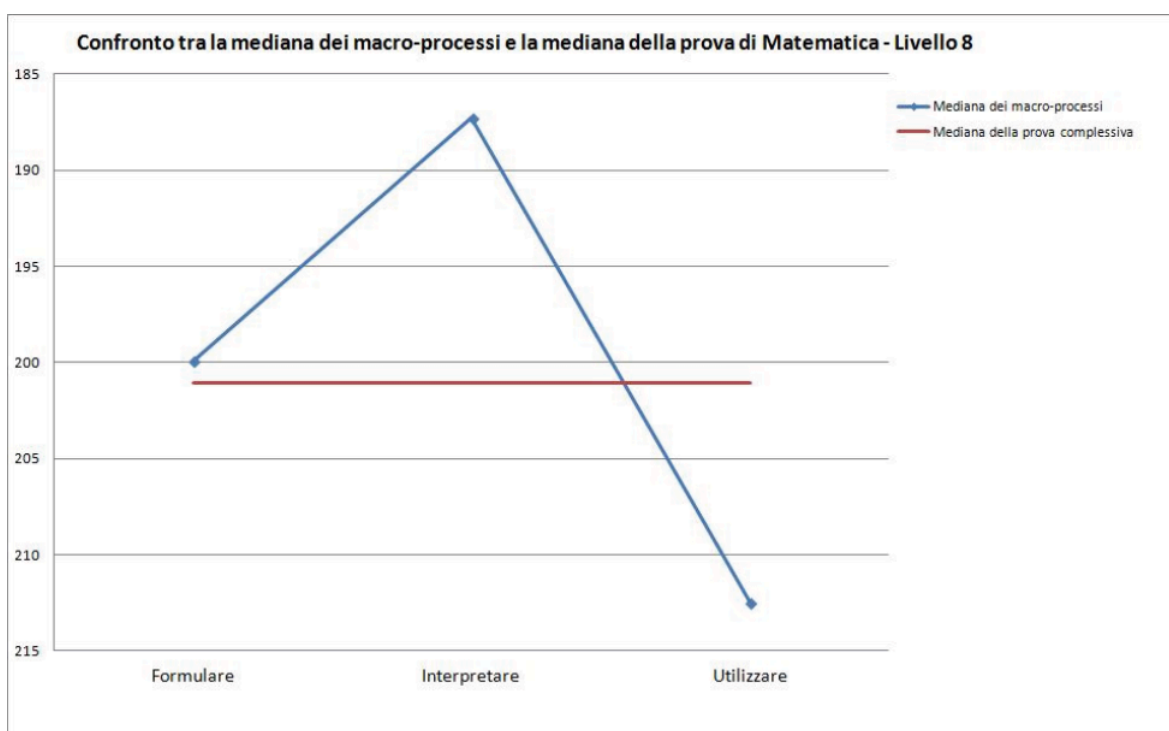


Figura 4.20: Distribuzione dei punteggi della prova di matematica– Livello 8



L'INValSI, nel 2013, ha preferito il raggruppamento dei processi in tre aree: formulare, utilizzare, interpretare. Ha così abbandonato i quattro macroprocessi, allineandosi all'OCSE PISA.



Gli ambiti in cui gli alunni hanno incontrato maggiori difficoltà sono Dati e Previsioni e Numeri, mentre più adeguata ad affrontare la prova è risultata la loro preparazione nell'ambito Spazio e Figure e in Relazioni e Funzioni: il livello di difficoltà delle domande in questo secondo caso eguaglia quello della prova complessiva. Per quel che riguarda i tre macro-processi, «interpretare» è stato piuttosto semplice, come anche «formulare»: il livello di difficoltà delle domande in questi due casi si avvicina di molto a quello della prova complessiva, mentre le domande dove si richiedeva di «utilizzare» sono risultate decisamente più difficili.

I risultati complessivi, suddivisi per regione, danno immediatamente l'idea dell'andamento delle prove sul territorio nazionale. Le regioni del nord e del centro conseguono abitualmente i risultati più elevati; quelle del sud e delle isole sono in linea o al di sotto della media nazionale. Queste osservazioni risultano di anno in anno coerenti.

Invece i risultati ottenuti in Italia nei diversi ambiti oscillano moltissimo: il confronto degli esiti per ambito non è fattibile, poiché essi dipendono strettamente dal livello di complessità dei singoli quesiti. L'analisi critica risulta pertanto ostacolata da questa variabilità.

Come visto, il confronto tra le impostazioni teoriche dell'OCSE e dell'INValSI è piuttosto immediato e risultano evidenti molte analogie. D'altra parte, raffrontarne i risultati (delle prove OCSE e della Rilevazione Nazionale per la seconda secondaria di secondo grado dell'INValSI) richiede di tener conto di alcuni aspetti relativi proprio all'impostazione delle prove. Anzitutto l'età degli alunni ai quali la prova è somministrata: alunni quindicenni possono non frequentare la stessa classe, per cui le due indagini non vengono fatte su popolazioni del tutto comparabili. È però possibile restringere l'attenzione ai due sottoinsiemi di popolazione studentesca che le due rilevazioni hanno in comune. In questo modo è possibile osservare molte somiglianze, nonostante le prove abbiano impostazioni completamente diverse e richiedano competenze e conoscenze differenti. Come si vedrà in seguito, facendo riferimento in particolare ai quesiti di geometria della Prova Nazionale, emerge una consistente difficoltà nell'utilizzo di procedure non standard, mentre risultano più fattibili i quesiti che richiedono conoscenze o applicazione diretta di procedure note.

3.5 L'ANALISI DEI QUESITI GEOMETRICI DELLE PROVE NAZIONALI

Ho scelto di prendere in considerazione le Prove Nazionali, avendo esse non solo carattere di rilevazione, ma anche valutativo delle conoscenze e competenze degli studenti. In particolare analizzerò di seguito e quei quesiti incentrati sulla geometria (sia quelli che l'INValSI classifica nell'ambito Spazio e Figure sia quelli che pur non essendo collocati in tale ambito possono dare informazione sulla visione che l'INValSI veicola di questa disciplina). Ho ritenuto utile riportare le percentuali di risposta solo nei casi in cui potesse essere significativo (i testi delle Prove Nazionali si trovano in Appendice).

Prova Nazionale 2007/2008

Distribuzione dei quesiti:

Numeri: 7

Spazio e Figure: 7

Misura, Dati e Previsioni: 4

Relazioni e Funzioni: 3

Osservazioni: in questa prima prova non viene svolta l'analisi dei domini cognitivi. Sono soltanto tre e declinati in modo piuttosto sintetico: capacità di eseguire algoritmi (di routine o non di routine); uso di linguaggi specifici; sensibilità numerica e geometrica.

C2. Il quesito, mutuato da TIMSS 2007, valuta la conoscenza del Teorema delle rette parallele tagliate da una trasversale e la capacità applicarlo, interpretando la figura. A seconda di come si conduce il ragionamento, è utile ricordare l'ampiezza dell'angolo piatto o il valore della somma degli angoli interni in un triangolo. Il quesito è abbastanza «standard», e verte su uno dei pochi teoremi che si affrontano nella scuola secondaria di primo grado (tipicamente al primo anno).

I distrattori sono efficaci: a mio parere in particolare 110° , per il fatto che si può dedurre che lo studente abbia considerato gli angoli x e y congruenti all'angolo noto (55°). Chi

ha commesso questo errore, presumibilmente, ha poca familiarità con l'utilizzo di proprietà e teoremi e preferisce cercare di dedurre informazioni dalla figura. La richiesta di deduzione dalla figura è, giustamente, molto pressante nella scuola primaria, mentre nel successivo ordine di scuola dovrebbe assumere un'altra impostazione: la figura è un supporto al ragionamento, ma può essere fuorviante; per questo i dati del problema o del quesito dovrebbero essere presenti tutti nel testo; la figura deve avere il solo compito di guidare il ragionamento, che continuamente va controllato a livello teorico. È importante aiutare gli alunni a crearsi questa abitudine mentale.

Il 25,1% degli studenti ha dato come risposta 55° , mentre la risposta corretta (125°) è stata scelta dal 61,8%. Altri distrattori: 55° e 135° (corrisponde all'errore nel tenere conto del prestito nella sottrazione $180^\circ - 55^\circ$).

C4. Questo quesito valuta la conoscenza e la capacità di applicare formule di geometria solida, argomento che si tratta tipicamente nella classe terza. La risposta corretta è stata data dal 67,7% degli studenti. La risposta 3 cm è stata ottenuta da chi ha erroneamente calcolato l'area del cerchio utilizzando il diametro al posto del raggio. Gli altri due distrattori sono semplicemente due multipli di tre compresi tra la risposta errata (3 cm) e quella corretta; peraltro la risposta 9 cm, scelta dall'11,5%, è piuttosto assurda se si considera che 9 non divide esattamente 192. I ragionamenti possono essere stati molteplici (ad esempio moltiplicare per una approssimazione di π , ottenendo il valore numerico dell'area e poi non dividere nel calcolo dell'altezza, dividere l'area per 2π e calcolarne la radice quadrata). È interessante il fatto che un doppio errore poteva dare comunque la soluzione corretta, calcolando l'area di base come segue: Area di base = $2\pi \cdot \text{diametro} = 16\pi$. Il doppio errore consiste nell'utilizzare la formula per il calcolo della lunghezza della circonferenza, invece di quella dell'area, e sostituire il raggio con il diametro.

C6. Il quesito è a risposta «falsa aperta» ed è stato proposto anche in TIMSS 2007. Si tratta, anche qui, di conoscere e applicare correttamente due formule (formula inversa del calcolo dell'area del quadrato e formula diretta per il calcolo del perimetro). La richiesta di scrivere il procedimento è opportuna e utile soprattutto agli insegnanti che vogliano analizzare le prove per mettere in discussione il proprio lavoro; in sede di

valutazione l'INValSI aveva scelto di non tenere conto di questa seconda parte del quesito. Il 67,4% degli alunni ha calcolato correttamente il perimetro. È un quesito molto semplice, il problema sta nella formulazione. Infatti alcuni studenti tendono ad aspettarsi di risolvere con un solo calcolo i problemi il cui testo è molto breve...

C9. La sola conoscenza del Teorema di Pitagora non è sufficiente per rispondere correttamente, in quanto bisogna anche ricavare un'informazione ulteriore dal testo. Non è un'operazione complessa, ma richiede una attenta lettura e una buona comprensione della situazione reale. Personalmente ritengo che un quesito come questo sia molto utile a livello didattico, perché consente di far osservare agli studenti la necessità di ragionare e affrontare la matematica senza voler giungere a conclusioni affrettate. Solo il 54,9% degli studenti ha risposto correttamente. Due distrattori presentavano soluzioni non plausibili (10 unità e 12 unità), mentre la risposta 8 unità, errata, è stata data dal 36,1% degli studenti, che evidentemente non ha pensato al Teorema di Pitagora (magari conoscendolo), ma ha scelto di utilizzare i numeri presenti nel testo e di compiere un solo calcolo o forse ha creduto che il triangolo fosse isoscele, non trovando altri dati da utilizzare.

C11. Questo quesito è di pura conoscenza. Per rispondere è necessario ricordare la proprietà dei triangoli inscritti nelle semicirconferenze e saperla motivare (l'angolo in O, piatto, è corrispondente all'angolo alla circonferenza con vertice C e di conseguenza è il suo doppio). Le proprietà della circonferenza generalmente si affrontano nella classe seconda e forse su esse non si insiste sufficientemente, o forse in generale si tende a puntare troppo poco sui quesiti più teorici (di geometria sintetica). L'esito conferma questa deduzione: solo il 25% degli studenti ha risposto correttamente, probabilmente anche per il fatto che il triangolo in figura è quasi isoscele (l'ipotenusa AB è quasi congruente al cateto maggiore BC) e non è raffigurato nelle «posizioni tipiche» dei triangoli rettangoli, due fatti che possono aver agito da distrattori. Questo, quindi, è un altro esempio di come sia delicato il rapporto tra geometria e rappresentazioni geometriche. Peraltro, poiché la figura era ben fatta, un alunno che avesse pensato di confrontare gli angoli del triangolo ABC con un angolo di una pagina del fascicolo avrebbe potuto notare che l'angolo C misura 90° e, seppur con un metodo ben lungi

dall'essere rigoroso, avrebbe forse avuto un primo indizio, ma non certo la risposta (veniva assegnato 1 punto alla risposta corretta con spiegazione corretta e 0 punti alla risposta errata o corretta ma con spiegazione errata).

C13. Anche questo quesito è nozionistico, richiede di conoscere la simmetria centrale e le coordinate cartesiane; la risposta corretta è stata fornita dal 62,5% degli studenti. Il distrattore (4;5) corrisponde al tipico errore di inversione dell'ascissa con l'ordinata, infatti, tra le risposte sbagliate, è stata quella più selezionata (16,6%).

C14. Il quesito appartiene all'ambito Numeri, essendo richiesta la percentuale di superficie quadrettata; può essere risolto ragionando sulle aree. Probabilmente molti studenti hanno cercato di pervenire a una stima della percentuale, sommando a coppie le porzioni di quadretto attraversate dalla corda del rettangolo. È una richiesta che può essere ben utilizzata dal punto di vista didattico, perché consente di collegare la misura con i numeri e le loro diverse rappresentazioni. Questo spiega perché l'esito è stato il seguente: A. 16,5%, B. 20,3%, C. (risposta corretta) 46,4%, D. 12,3%, non risponde 5%. Sarebbe stato più opportuno calcolare l'area (in quadretti) del triangolo bianco e dividerla per quella del rettangolo. Quindi questo quesito sarebbe stato più completo se si fosse richiesto di motivare la risposta.

C16. Il quesito, di geometria solida, verte sulla capacità di figurarsi il cubo ottenuto sullo sviluppo piano rappresentato, quindi richiede intuizione spaziale. È una richiesta piuttosto semplice, che l'80,9% degli studenti ha risolto correttamente.

Conclusioni. Come si è visto i quesiti geometrici presentati sono otto e tutti (tranne uno) di carattere nozionistico; tra essi due vertono sulla geometria solida.

Si è puntato su: Teorema delle rette parallele tagliate da una trasversale, volume del cilindro, area e perimetro del quadrato, Teorema di Pitagora, proprietà dei triangoli inscritti nelle semicirconferenze, piano cartesiano e simmetria centrale, area del rettangolo e del triangolo, sviluppo piano del cubo.

Il quesito più interessante è certamente C9, perché richiede una profonda comprensione della situazione problematica e anche per il suo aggancio con la realtà. Credo che

L'impostazione della prova consenta di dedurre che nella scuola secondaria di primo grado debba esserci una grande attenzione alle conoscenze e alla capacità di applicarle. Inoltre mi pare che si possa percepire una piccola sollecitazione all'educare gli alunni alla pazienza e al gusto della scoperta (C9, C6). La matematica è una disciplina che richiede di ragionare esattamente e tranquillamente, cioè analizzando i fatti uno ad uno, senza darli per scontati e senza lasciarsi fuorviare dalle figure o da altre modalità rappresentative, tenendo conto solo di ciò che è vero perché dato per ipotesi. Sarebbe auspicabile che gli studenti riuscissero a comprendere e sperimentare questo aspetto, che insegna anche che la cultura del «tutto e subito» non è sempre vincente. Sarebbe anche importante che gli insegnanti imparassero a classificare i quesiti: quelli più nozionistici sono certamente importanti, ma se fossero soli non darebbero profondità alla materia, mentre quelli che richiedono ragionamento, che generalmente sono scarsi sui libri di testo, vanno proposti con coraggio. Spesso i testi, infatti, propongono sezioni ricche di problemi, ma di scarso spessore speculativo. Tra gli item analizzati quello che ha destato maggiori difficoltà è C11, probabilmente per la scarsa abitudine degli allievi a giustificare fatti geometrici in modo rigoroso.

Un'osservazione sugli strumenti: nelle Rilevazioni e Prove Nazionali l'utilizzo della calcolatrice è vietato, ed effettivamente i calcoli sono piuttosto semplici. L'impostazione, trattandosi di scuola secondaria di primo grado, è del tutto condivisibile; spetta a ogni insegnante rendere consapevoli gli alunni del fatto che la calcolatrice è uno strumento e come tale è utilizzabile secondo necessità.

Prova Nazionale 2008/2009

Distribuzione dei quesiti:

Numeri: 5 domande, 5 item

Spazio e Figure: 6 domande, 10 item

Misura, Dati e Previsioni: 4 domande, 4 item

Relazioni e Funzioni: 6 domande, 8 item

Osservazioni: rispetto alla prova dell'anno precedente i quesiti pertinenti all'ambito Relazioni e Funzioni sono raddoppiati; sono diminuiti rispettivamente di due e una unità quelli dell'ambito Numeri e Spazio e Figure. La percentuale di risposte non date è

diminuita nettamente nei quesiti a risposta chiusa (se nella prova del 2007/2008 risultava poco al di sotto del 5%, qui, in molti item, è attorno all'1,5%).

Richiamiamo i processi cognitivi che l'INValSI ha dichiarato nel 2008/2009:

- conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica (oggetti matematici, proprietà, strutture...);
- conoscere e padroneggiare algoritmi e procedure (in ambito aritmetico, geometrico...);
- conoscere e padroneggiare diverse forme di rappresentazione e sapere passare da una all'altra (verbale, scritta, simbolica, grafica, ...);
- sapere risolvere problemi utilizzando gli strumenti della matematica (individuare e collegare le informazioni utili, confrontare strategie di soluzione, individuare schemi risolutivi di problemi come ad esempio sequenza di operazioni, esporre il procedimento risolutivo,...);
- sapere riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni e saper utilizzare strumenti di misura (saper individuare l'unità o lo strumento di misura più adatto in un dato contesto, saper stimare una misura,...);
- acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico (congetturare, verificare, giustificare, definire, generalizzare, ...);
- utilizzare la matematica appresa per il trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale (descrivere un fenomeno in termini quantitativi, interpretare una descrizione di un fenomeno in termini quantitativi con strumenti statistici o funzioni, utilizzare modelli matematici per descrivere e interpretare situazioni e fenomeni, ...).

D1. Questo quesito appartiene all'ambito Misure, Dati e Previsioni, riguardando proprio le unità di misura. Serve a verificare che gli alunni abbiano un'idea dell'ordine di grandezza (rispetto al peso di un oggetto). L'83,3% ha risposto correttamente. Tale quesito rappresenta un richiamo ad una geometria che sia spendibile per risolvere problemi concreti.

D3. Il quesito è ben costruito e non banale, poiché richiede di mettere in relazione lo sviluppo piano di un oggetto tridimensionale, la scatola, con la sua rappresentazione in prospettiva e con la sua forma reale. Inoltre è necessario dedurre dalla descrizione e dalle immagini le misure che servono per il calcolo del volume. Si tratta, quindi, di un ulteriore passo dell'INValSI verso una geometria concreta, che tuttavia non prescinde dalla conoscenza teorica (delle formule, in questo caso). Il 61,9% degli studenti ha risposto correttamente. Gli errori più consistenti: utilizzare i soli numeri presenti nel testo, trascurando il fatto che vengono rimossi i 4 quadratini, prima di piegare il foglio di partenza (14,2%) oppure calcolare il volume della scatola a base quadrata di spigolo di base pari a 10 e poi sottrarre il volume di quattro cubetti di spigolo 1 (16,5%). Questo potrebbe dipendere da una cattiva interpretazione del testo e delle figure.

D5. Il primo sviluppo piano è uno di quelli più «classici» e il secondo è palesemente errato. Infatti gli studenti non hanno mostrato difficoltà a riconoscerli (risposte corrette Disegno 1: 98,1%; Disegno 2: 91,7%). Il terzo sviluppo ha dato questo esito: Sì: 49,2%, No: 50,1%). L'aspetto da considerare è il fatto che, come scritto nel testo, le facce siano triangoli equilateri congruenti: proprio questo motiva il fatto che il terzo sviluppo è corretto. L'esito mostra come sia difficile per gli alunni della scuola secondaria di primo grado procedere ragionando sui concetti anziché solo sulle figure.

Secondo i parametri dell'INValSI il quesito viene ritenuto corretto se lo sono almeno due item su tre. Ciò banalizza un po' l'analisi, perché è proprio il terzo item a fare la differenza (e a dare informazione sull'eccellenza). D'altra parte, come già sottolineato rispetto ad altri, questo item offre agli insegnanti la possibilità di riflettere con i propri alunni.

D8. Date le molteplici strategie risolutive, sarebbe stato utile richiedere anche di motivare la risposta. Un modo di procedere potrebbe essere il seguente: prolungare il segmento che è lato comune degli angoli a e b fino a incontrare il prolungamento del lato comune agli angoli e ed f . Fare lo stesso rispetto ai due segmenti che sono lati comuni degli angoli c e d . In questo modo vengono visualizzati due triangoli rettangoli e si ottiene che l'angolo a è complementare all'angolo f e l'angolo c è complementare all'angolo e . Essendo b e d angoli retti, si ottiene che la somma vale 360° . Un altro

modo di procedere consiste nell'individuare le tre coppie di angoli opposti al vertice e quindi congruenti. La somma cercata si ottiene sommando tutti gli angoli interni dei tre triangoli esterni e sottraendo la somma degli angoli interni del triangolo centrale, quindi $180^\circ \cdot 2$. Questo quesito, quindi, non mi pare molto significativo in una Prova Nazionale, mentre mi sembra istruttivo come proposta in itinere, in quanto consente di applicare una serie di conoscenze e soprattutto di mettere alla prova gli studenti in merito alla loro capacità di argomentare rigorosamente.

D14. Il quesito richiede, oltre all'applicazione del Teorema di Pitagora, una attenta lettura della domanda (Quanti metri *in più* deve percorrere Roberto?). Assomiglia al C9 della prova 2007/2008, ma richiede anche che venga mostrato il procedimento (il 72,3% ha risposto correttamente all'item a.; il 50,6% ha risposto correttamente all'item b., il 17,5% ha fornito una risposta parzialmente corretta e il 4% ha omesso la risposta).

D17. Questo quesito fa il verso al C13 della prova precedente, perché richiede la conoscenza del piano cartesiano e di una particolare isometria (in questo caso la traslazione).

D18. Collocato nell'ambito Relazioni e Funzioni, il quesito richiede di conoscere o ricavare la formula dell'area del trapezio e ragionare sulla figura. Forse l'INValSI intende interrogare i docenti rispetto all'approccio che presentano dell'algebra. Non deve essere proposta solo come strumento di manipolazione di simboli, ma va posto l'accento sul significato di tali simboli. Tale prospettiva è, purtroppo, poco considerata e gli agganci con la geometria possono aiutare gli studenti a caricare l'algebra stessa di significato. Solo il 26,8% degli studenti ha risposto correttamente.

D19. Il quesito verte sulla comprensione del testo, sulla congruenza di segmenti (i raggi del cerchio) e sulla congruenza di due angoli del triangolo isoscele. Con esso si può ben valutare la competenza geometria acquisita, dato che si fonda su alcune conoscenze basilari e sulla capacità di metterle in relazione. La formulazione del quesito è rigorosa e non si affida alla sola figura (il testo non manca, infatti, di specificare che i due raggi, congruenti, misurano più di metà del segmento AB). La difficoltà sta nel riconoscere

proprio nei segmenti AC e BC i due raggi e dedurre che il triangolo ABC è isoscele. Inoltre non è detto che gli studenti sappiano collocare correttamente l'angolo ACB, che non è rappresentato. Come già visto in altri quesiti, l'item b. chiede di scrivere il procedimento, richiesta che vede cadere buona parte degli alunni (procedimento corretto: 42,3%, risposta corretta all'item a.: 69,2%).

La seguente tabella riporta gli oggetti della valutazione, i processi cognitivi, i compiti richiesti e il riferimento alle Indicazioni per il Curricolo del 2007, relativamente ai quesiti dell'ambito Spazio e Figure, così come dichiarati dall'INValSI.

	Oggetti di valutazione	Processi cognitivi	Compiti	Dalle Indicazioni per il Curricolo 2007
D3	Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio. Semplici figure dello spazio e del piano (cubo, sfera, triangolo, quadrato...). Aree e volumi dei principali solidi. Rappresentazione piana di figure solide.	(d)	Riconoscere le relazioni fra le forme a tre dimensioni e la loro rappresentazione bidimensionale. Sapere selezionare formule appropriate per calcolare perimetro, area, volume di figure geometriche	visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali. Calcolare il volume delle figure tridimensionali più comuni e dare stime di quello degli oggetti della vita quotidiana.
D5	Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio. Composizione e scomposizione di figure. Rappresentazione piana di figure solide.	(d)	Riconoscere le relazioni fra le forme a tre dimensioni e la loro rappresentazione bi-dimensionale.	rappresentare oggetti e figure tridimensionali in vario modo tramite disegni sul piano; visualizzare oggetti tridimensionali a partire da

				rappresentazioni bidimensionali.
D8	Angoli e loro ampiezza. Proprietà degli angoli: angoli opposti al vertice, somma degli angoli interni di un triangolo e di poligoni.	(a)	Classificare e misurare angoli. Risolvere problemi utilizzando proprietà geometriche	conoscere definizioni e proprietà significative delle principali figure piane.
D1 4	Teorema di Pitagora.	(d)	Utilizzare il teorema di Pitagora per risolvere problemi.	riconoscere e risolvere problemi di vario genere analizzando la situazione e traducendola in termini matematici. Conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni in matematica e in situazioni concrete.
D1 7	Traslazioni, rotazioni e simmetrie. Rappresentazione sul piano cartesiano di figure piane e di trasformazioni geometriche.	(a)	Saper rappresentare figure piane e trasformazioni geometriche nel piano cartesiano.	rappresentare punti, segmenti e figure sul piano cartesiano; riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse.
D1 9	Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio. Angoli e loro ampiezza.	(c)	Classificare e misurare angoli. Conoscere gli elementi e le	conoscere definizioni e proprietà significative delle

			proprietà del cerchio (raggio, diametro, angoli a centro e alla circonferenza, ...).	principali figure piane. Riprodurre figure e disegni geometrici in base ad una descrizione e codificazione fatta da altri.
--	--	--	--	--

Conclusioni. I quesiti di carattere geometrico sono ancora otto, di essi due riguardano la geometria solida, uno la misura e gli altri cinque la geometria piana. Gli argomenti indagati sono: ordini di grandezza per una misura di massa, geometria solida (rappresentazione di parallelepipedi, sviluppo piano della piramide), traslazioni nel piano cartesiano, Teorema di Pitagora, proprietà e rappresentazione di figure piane (angoli interni del triangolo, raggi del cerchio, area del trapezio).

Rispetto alla prova dell'anno precedente sono presenti alcuni quesiti agganciati alla realtà (D1, D3, D14). Altri puntano sulle conoscenze, ma in modo da metterle in relazione anche con le competenze acquisite (D8, D18, D19) e con il ragionamento astratto (D5). Il quesito D17 è invece di mera conoscenza.

Emerge da questa prova la difficoltà degli alunni ad argomentare correttamente i propri ragionamenti, infatti, come visto, sono le domande cosiddette «a punteggio parziale», cioè aperte, a segnalare le lacune più profonde. Penso che una prova come questa rappresenti quindi uno stimolo a una attenzione maggiore alla trasmissione della capacità di «comunicare, discutere, argomentare in modo corretto» che le Indicazioni Nazionali del 2007 raccomandano.

Questa prova presenta anche un buon equilibrio tra richieste teoriche, concettuali e aspetti pratici: la matematica, come sappiamo anche dalla sua genesi, presenta entrambe le sfaccettature ed è giusto che gli studenti le possano conoscere e in esse si possano sperimentare.

Prova Nazionale 2009/2010

Distribuzione dei quesiti:

Numeri: 5 domande, 6 item

Spazio e Figure: 6 domande, 7 item

Misura, Dati e Previsioni: 7 domande, 12 item

Relazioni e Funzioni: 7 domande, 15 item

Osservazioni: rispetto alla prova del 2008/2009 il numero dei quesiti è aumentato e in particolare per far posto a tre quesiti in più relativi all'ambito Misura, Dati e Previsioni. Sono state introdotte anche le voci di correzione e analisi «non valida», relativa a risposte a non valutabili (ad esempio perché la risposta è doppia o illeggibile) e «non raggiunta», per quelle domande che lo studente non ha avuto il tempo di svolgere.

D3. Il quesito pertiene all'ambito Misura, Dati e Previsioni, ma è di carattere geometrico, riguardando una distanza. Richiede di conoscere il concetto di scala e di saper operare un'equivalenza (esprimere in km una misura data in cm). È quindi una richiesta di tipo nozionistico, semplice. Ha risposto correttamente solo il 54,9%; il 16,8% ha sbagliato proprio l'equivalenza.

D7. Verte sull'intuizione spaziale e sulla capacità di interpretare la rappresentazione sul piano di una figura solida. Più interessante dell'esito sarebbe stato comprendere i modi di contare i cubetti che gli studenti hanno utilizzato: diventerebbe quasi un esercizio di geometria combinatoria, generalmente non trattata nella scuola del primo ciclo. Questo è quindi uno di quei problemi che si prestano anche alla discussione e alla condivisione di diversi approcci risolutivi. Pur essendo un quesito abbastanza semplice e chiaro nella formulazione ha suscitato parecchie difficoltà se si pensa che solo il 50,4% degli alunni ha risposto correttamente (cioè con almeno due numeri corretti su tre). Probabilmente gli studenti sono stati tratti in inganno dal fatto che la domanda non è di routine, ma piuttosto originale.

D11. Assomiglia a C4 della Prova Nazionale 2007/2008, infatti riguarda il calcolo del volume di un cilindro. Presenta però alcune differenze: il dato superfluo relativo alla massa del barattolo e la richiesta di approssimare il risultato. È un quesito piuttosto scolastico e l'aggancio con la situazione reale non mi sembra significativo.

D12. Anche questo quesito è puramente scolastico; la difficoltà verte ovviamente sul fatto che la retta r è posta in modo obliquo rispetto ai margini del foglio, cioè in una posizione che per uno studente potrebbe, purtroppo, essere inusuale. Indubbiamente con questa richiesta si riesce a stabilire se lo studente ha davvero capito e sa utilizzare il concetto di angolo retto (e la terminologia relativa al triangolo rettangolo).

D18. Questo quesito si colloca nell'ambito Misura, Dati e Previsioni, tuttavia l'obiettivo «Stimare per difetto e per eccesso l'area di una figura delimitata da curve» declinato dalle Indicazioni Nazionali del 2007 pertiene all'ambito Spazio e Figure ed effettivamente è un quesito prettamente geometrico. Anzitutto, detta A l'area della figura deve risultare banale che $7 < A < 25$. Questa stima si ottiene contando i quadrati completamente contenuti nella figura e contando i quadrati che la approssimano dall'esterno. Infatti cumulando le percentuali di risposta B. e C. si ottiene che l'89,5% degli studenti è pervenuto a questa stima. Per raffinare l'approssimazione è possibile procedere sommando ai 7 quadrati interni $0,5 \cdot 18$, dove 18 è il numero dei quadrati attraversati dal bordo della figura. Si ottiene 16, che può essere una stima un po' brutale, ma efficace di A . Altrimenti si può approssimare la figura attraverso due rettangoli e calcolarne le aree. Risulta, per l'approssimazione che ho scelto, $3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 21$. Si perviene in ogni caso alla risposta C, scelta dal 72,4% degli alunni. Questo quesito «Area di un continente» (prove PISA), ma è posto in modo molto più semplice. Nell'analisi dell'INValSI manca, a mio avviso, l'aspetto matematicamente interessante, cioè la procedura risolutiva.

D20. Anche questa prova ha un quesito relativo all'applicazione del Teorema di Pitagora, come già visto in C9 del 2007/2008 e D14 del 2008/2009. D'altra parte questo è il teorema più sfruttato nella scuola secondaria di primo grado. Per rispondere correttamente, occorre anche leggere correttamente la mappa, riconoscendo il triangolo rettangolo (magari con un po' di approssimazione) che si forma tra via Pietro Micca, via Antonio Giuseppe Bertola e via XX Settembre. La risposta corretta è stata scelta solo dal 45% degli studenti, forse anche a causa di un forte distrattore: 350 m, che rappresenta proprio la somma dei due dati (selezionato dal 32,9%). Ciò supporta l'idea

che spesso gli studenti affrontino i problemi secondo quest'ottica: quasi indipendentemente dalle parole del testo, cercano di fare qualche operazione con i numeri che hanno a disposizione, finché non ottengono il risultato atteso (che spesso i libri indicano). È sempre una questione di educazione alla riflessione, anche se questa costa tempo ed energie e ancora mi pare evidente che ci sia molta strada da fare in questo senso. Ben vengano, allora, quesiti come questo, che fanno riflettere i docenti su tale necessità. Per esperienza, infatti, sono certa che il Teorema di Pitagora è noto ad una larga maggioranza di studenti e che, quindi, se si fosse trattato solo di quello, molti di più avrebbero risposto correttamente.

D22. Questo item è l'analogo del D18 della Prova Nazionale 2008/2009 (appartiene anch'esso all'ambito Relazioni e Funzioni), ed è più semplice, perché verte su un perimetro; infatti le risposte corrette da 26,8% per il quesito menzionato, sono salite al 62,2% per questo. Si tratta ancora di utilizzare la geometria e l'algebra congiuntamente in modo che l'una dia significato all'altra.

D23. Richiede di riconoscere nella diagonale DB un raggio della circonferenza e di osservare che essa è congruente ad AC, l'altra diagonale del rettangolo. Questo quesito è molto significativo, anche perché offre la possibilità allo studente di esprimere questo breve ragionamento nell'item b. ed è piuttosto complesso, più che altro a causa della scarsa abitudine ai ragionamenti teorici. Mentre si punta molto e anche giustamente sulla risoluzione dei problemi, l'attenzione agli aspetti più caratterizzanti la matematica come il congetturare, il ragionare, il rendere rigoroso e il codificare è spesso non sufficiente nella scuola (di ogni ordine).

D25. In questo item si chiede di padroneggiare le diverse forme di rappresentazione di una figura tridimensionale, composta da un parallelepipedo a cui è stata sovrapposta una piramide a base rettangolare. Il quesito è piuttosto semplice e standard e l'esito è stato molto positivo.

Di seguito l'analisi sintetica dei quesiti di Spazio e Figure.

	Oggetto di valutazione	Processi cognitivi	Compiti	Dalle Indicazioni per il Curricolo 2007
--	------------------------	--------------------	---------	---

D7	Rappresentazione di figure solide (punti di vista)	(f)	Immaginare elementi non visibili di una rappresentazione	Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali
D11	Calcolo di volume	(d)	Calcolare un volume attraverso calcoli approssimati	Calcolare il volume delle figure tridimensionali più comuni e dare stime di quello degli oggetti della vita quotidiana
D12	Rette incidenti, parallele e perpendicolari	(b)	Disegnare una perpendicolare ad una retta per un punto dato	Riprodurre figure e disegni geometrici in base a una descrizione e codificazione fatta da altri
D20	Teorema di Pitagora. Condizioni di esistenza di un triangolo	(g)	Utilizzare il teorema di Pitagora per risolvere problemi	Conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni in matematica e in situazioni concrete
D23	I principali enti geometrici	(f)	Riconoscere elementi di una figura geometrica	Conoscere definizioni e proprietà significative delle principali figure piane (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari, cerchio).
D25	Rappresentazione piana di figure solide	(e)	Individuare rappresentazioni di figure solide da punti di vista diversi	Rappresentare oggetti e figure tridimensionali in vario modo tramite disegni sul piano

Conclusioni. I quesiti riguardanti la geometria sono, in questa prova nove. Tra essi quattro sono di geometria piana, due sulla misura, tre di geometria solida. I contenuti su cui vertono le domande sono: equivalenze, stime di aree, geometria solida (rappresentazione di cubi, parallelepipedi, piramidi, calcolo del volume del cilindro), Teorema di Pitagora, proprietà e rappresentazione di figure piane (diagonali del rettangolo, raggi del cerchio, perimetro del triangolo isoscele).

C'è un buon bilanciamento tra esercizi di routine, in cui sia richiesta una mera applicazione di quanto appreso ed esercizi che richiedono di ragionare e fare proprio il problema (in particolare D7, D18, D20) e si nota una maggiore varietà di processi cognitivi richiesti per rispondere a domande di geometria.

Si nota anche la grande difficoltà nell'argomentazione (si veda, ad esempio, D23 item b, corretto solo nel 18,3% delle prove).

Prova Nazionale 2010/2011

Distribuzione dei quesiti:

Numeri: 8 domande, 12 item

Spazio e Figure: 7 domande, 11 item

Dati e Previsioni: 5 domande, 8 item

Relazioni e Funzioni: 6 domande, 9 item

Osservazioni: questa prova dà maggior spazio ai quesiti relativi all'aritmetica, all'algebra e alla geometria. L'ambito Dati e Previsioni, come si vede, ha perso l'aspetto della misura, perché considerata trasversale a tutti i domini.

Inoltre, nel QdR, l'INValSI ha introdotto un processo cognitivo:

(h). saper riconoscere le forme nello spazio (riconoscere forme in diverse rappresentazioni, individuare relazioni tra forme, immagini o rappresentazioni visive, visualizzare oggetti tridimensionali a partire da una rappresentazione bidimensionale e, viceversa, rappresentare sul piano una figura solida, saper cogliere le proprietà degli oggetti e le loro relative posizioni, ...).

I processi, come gli ambiti, vengono indicati come «prevalenti» per significare che non è possibile una classificazione restrittiva, perché spesso i quesiti afferiscono a più di un ambito e richiedono di mettere in atto più processi, un'influenza probabilmente recepita dall'impostazione dell'OCSE relativa alla scelta dei *cluster* di competenze e dei temi centrali.

D4. L'unica conoscenza matematica necessaria è avere idea dell'ampiezza 180° , non occorre altro, se non un po' di senso pratico. Di conseguenza questo quesito non valuta ciò che lo studente ha appreso grazie alla scuola, ma piuttosto la sua capacità di muoversi nella realtà.

D6. Puntare sulla capacità di misurare (ed effettuare stime) è una tendenza confermata anche dalle nuove Indicazioni Nazionali, che sono state rese pubbliche nel maggio 2012 per la «consultazione» e emanate a settembre dello stesso anno. Per rispondere a questo quesito, infatti, oltre a conoscere la formula dell'area del triangolo e saper individuare nella figura un lato da considerare come base e la relativa altezza, è necessario saper utilizzare correttamente il righello, e ciò non è da darsi per scontato. Il quesito è efficace: con esso si può verificare se lo studente ha raggiunto un buon livello di competenza o meno, anche se non è detto che, in caso di risultato sbagliato, a partire dai calcoli espressi nel punto b. si riesca a dedurre quale sia stato l'errore. È utile ispirarsi ad esso anche per la didattica quotidiana. A conferma della difficoltà: il 29% degli studenti ha risposto correttamente all'item a. e il 24,9% ha scritto i calcoli richiesti dall'item b. in modo esatto.

D9. A mio avviso il quesito in assoluto più significativo, in particolare grazie all'item c, tuttavia non potendo vedere i ragionamenti effettuati dagli studenti, la rilevanza è quasi del tutto persa.

Item c.: rispondere correttamente richiede di esaminare con attenzione il testo, senza lasciarsi ingannare dalla figura (tema ricorrente, in queste analisi). Infatti, guardando la figura, si potrebbe dire che l'area di un quadrato è circa il doppio dell'area del triangolo e probabilmente questo è stato il ragionamento di quel 49,5% di studenti che ha risposto «Vero». Va fatto invece un ragionamento. Nella scuola secondaria di primo grado,

generalmente durante il secondo anno, si affronta il Teorema di Pitagora e come sua applicazione si studiano le relazioni tra i lati di un triangolo emiequilatero. Forse, però, non tutti gli insegnanti valutano necessaria questa applicazione specifica ed effettivamente anche qui basta un po' meno. Indichiamo con l il lato del quadrato e con h l'altezza del triangolo. Allora l'area del quadrato è l^2 e quella dei due triangoli equilateri è lh . L'altezza h è diversa dal lato l del triangolo isoscele perché h è la misura di un cateto del triangolo rettangolo che ha l'altro cateto lungo $l/2$ e come l'ipotenusa che misura l . Si deduce che le due aree considerate sono diverse. Come spesso capita in queste prove, questo aspetto speculativo non è rilevabile: resta come proposta al docente attento.

La risposta all'item b. è immediata, se si ricorda la costruzione con il compasso dell'esagono regolare o se si ragiona sulle ampiezze degli angoli.

L'item a. (corretto per il 61,4% degli studenti) richiede di confrontare l'area dell'esagono con la metà dell'area dell'ottagono. Immagino che molti di coloro che hanno risposto correttamente abbiano operato una stima «a occhio». E questo è spiacevole, perché induce a fare lo stesso sugli altri item. Si sarebbe potuto ragionare sul fatto che nella figura sono presenti sei triangoli equilateri congruenti, che complessivamente ricoprono esattamente l'area dell'esagono centrale. Di conseguenza la somma delle aree dei sei quadrati e dei sei triangoli non è uguale all'area dell'esagono. Questi tre item sono relativi a misure di superficie.

Molto più semplice, a mio avviso, l'item d., che richiede di confrontare due perimetri e verte sulla transitività della relazione di congruenza.

Avrei disposto le richieste in modo diverso, per invitare gli studenti a ragionare e utilizzare quanto compreso per il passo successivo. In particolare: d., b., a., c.

D12. Quesito piuttosto standard, ma che ha ottenuto il seguente esito: A. (risposta corretta) 34,1%; B. 18,9%; C 9,4%; D. 35,3%. Per chi ha risposto D, come spesso accade l'unico numero presente nel testo è coinciso con la risposta. Naturalmente richiede di ricordare che il fattore di proporzionalità della misura lineare va elevato al quadrato se si considera la rispettiva misura di superficie. D'altra parte, però, il quesito è risolubile anche con varie altre strategie, che avrebbero solo chiesto di investire qualche istante in più nel ragionamento.

D20. Il quesito richiede il calcolo di una parte della superficie totale di un parallelepipedo. I distrattori sono ben costruiti perché A. equivale alla sola superficie laterale, C. all'intera superficie totale e D. alla superficie totale a cui è stata sottratta solo una faccia, quella a contatto con il terreno. Questa domanda si presta a valutare proprio la padronanza della situazione reale, oltre che delle formule geometriche.

D22. Quesito in parte anche algebrico (o aritmetico) per la richiesta di esprimere attraverso un'unica espressione la sequenza di calcoli necessari per determinare la lunghezza dello scivolo. Verte, evidentemente, sul Teorema di Pitagora e si aggancia bene a una situazione concreta. Offre anche la possibilità (a posteriori) di mostrare agli studenti la validità nel caso specifico dell'operazione di «portar fuori» dal segno di radice un fattore comune, qualora si fosse applicato il Teorema un'unica volta sulla somma delle pedate e sulla somma delle alzate dei gradini posti sotto lo scivolo.

D24. L'ambito di pertinenza di questo quesito è Relazioni e Funzioni. È analogo ai quesiti D18 2008/2009 e D22 2009/2010. Verte sulla capacità di sottrarre due aree di rettangoli espresse al variare di un parametro fissato (di fatto due monomi in a^2).

D26. È l'immane quesito di rappresentazione di figure tridimensionali; richiede senso spaziale.

	Oggetto di valutazione	Processi cognitivi prevalenti	Compiti	Dalle Indicazioni per il Curricolo 2007
D4	Traslazioni, rotazioni e simmetrie	(h)	Individuare a quale immagine corrisponde la rotazione di un oggetto.	Riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse
D6	Misure di grandezze	Item a (e) Item b (b)	Misurare con righello e squadra	Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in

	continue attraverso oggetti e strumenti		un lato del triangolo e l'altezza relativa	modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, software di geometria)
D9	Composizioni e scomposizioni e di figure.	(a)	Individuare proprietà di una figura utilizzando composizioni e scomposizioni	Calcolare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari, ad esempio triangoli
D12	Misure di grandezze discrete per conteggio	(e)	Individuare la relazione fra scala lineare e area di un rettangolo	Riprodurre in scala una figura assegnata
D20	Aree e volumi dei principali solidi	(b)	Individuare parti della superficie laterale di un solido	Calcolare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari
D22	Teorema di Pitagora	(b)	Riconoscere l'espressione per il calcolo dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo	Conoscere il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni in matematica e in situazioni concrete
D26	Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio	(h)	Cogliere relazione tra punto di vista e rappresentazione prospettica	Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali

Conclusioni. Questa prova presenta otto quesiti che coinvolgono conoscenze di tipo geometrico. Ho volutamente omesso il quesito D10, per il quale si sarebbe potuto ragionare sul concetto di pendenza, ma sarebbe stata una forzatura, poiché ciò non

sarebbe coinciso che l'approccio di un alunno di scuola secondaria, decisamente più «pratico», a mio parere, per tale richiesta. Gli argomenti toccati sono stati: le misure in scala, la visione tridimensionale (in prospettiva di un parallelepipedo e di una rotazione di 180°), la congruenza tra segmenti e l'equivalenza tra poligoni, le formule delle aree di triangoli e rettangoli, il Teorema di Pitagora, il calcolo di una superficie di un parallelepipedo.

A differenza delle prove precedenti sono presenti agganci con la realtà più significativi. L'INValSI mi pare quindi che voglia sottolineare nuovamente il valore concreto delle conoscenze matematiche. D'altra parte, purtroppo, molti quesiti si risolvono più attraverso la conoscenza di concetti e l'utilizzo di meri algoritmi. Ad eccezione del D9, mi pare che non sia richiesta grande profondità di ragionamento, aspetto che dovrebbe essere la meta più importante. Purtroppo solo in un caso è richiesto di mostrare il procedimento seguito, in contrasto con quanto l'INValSI stesso dichiara nelle considerazioni finali della prova 2008/2009: «Potrebbe essere opportuno avere un numero maggiore di domande nelle quali si chiede di scrivere il procedimento seguito e altre nelle quali gli studenti debbano giustificare con argomentazioni opportune le proprie risposte».

Ritengo corretto porre domande come la D6, con cui si può notare come anche alcune conoscenze di base possono non essere diventate competenze assodate.

Prova Nazionale 2011/2012

Distribuzione dei quesiti:

Numeri: 8 domande, 10 item

Spazio e Figure: 7 domande, 11 item

Dati e Previsioni: 5 domande, 9 item

Relazioni e Funzioni: 5 domande, 10 item

Richiamiamo qui il raggruppamento dei processi in «macroprocessi»:

- «Concetti e procedure» (gruppo A), che comprende i processi (a) e (b)
- «Rappresentazioni» (gruppo B), che comprende i processi (c) e (h)
- «Modellizzazioni» (gruppo C), che comprende i processi (d), (e) e (g)
- «Argomentazioni» (gruppo D), che coincide con il processo (f).

E1. Questa richiesta valuta la capacità di orientarsi tra diverse riproduzioni degli stessi oggetti tridimensionali. È un quesito semplice, non molto significativo per valutare l'apprendimento (si confronti anche con D24 della prova 2010/2011).

E6. Pur essendo a risposta chiusa ritengo questo quesito abbastanza difficile, dal momento che non è immediato dimostrare l'equivalenza dei triangoli ABO e BCO. Ciò può essere provato tracciando gli assi di simmetria del rettangolo e osservando che ciascuno dei triangoli ABO e BCO è costituito da due triangoli tra loro equivalenti. Oppure si possono scrivere le formule dell'area dei suddetti triangoli, verificando che risultano essere identiche. Questo è un problema del quale sarebbe risultata molto significativa la possibilità di argomentare liberamente. A conferma di quanto detto, l'esito: la risposta corretta, la C, è stata scelta dal 24,1%. Cumulando A e B, si può notare che ben il 57,7% degli alunni del campione ha ritenuto che l'area del triangolo grigio non fosse determinabile.

E8. L'item a. richiede un semplice calcolo del volume di un cilindro, ed è collocato in ambito reale. L'item b., invece, vuole verificare la mera conoscenza di una formula (o la capacità di ricostruirla pensando al concetto di densità o osservando le unità di misura) e come tale mi sembra poco significativo, inoltre già le Indicazioni Nazionali del 2007 non menzionano tra gli obiettivi specifici di apprendimento dell'ambito Spazio e Figure il concetto di densità.

E9. L'ambito di classificazione è Relazioni e Funzioni, ma il quesito presenta anche natura geometrica, in particolare per quanto riguarda l'item a, che non è una novità rispetto alle prove precedenti (utilizzo della scala e equivalenza, si confronti D3 della Prova Nazionale 2009/2010). Risponde correttamente solo il 36,2%.

L'item b. è più complesso, soprattutto perché richiede di riflettere e prendere posizione rispetto a una argomentazione già scritta (e in modo rigoroso) ed è ben collocato nell'ambito delle relazioni tra numeri, tuttavia la risposta corretta è stata scelta dal 42,4%.

E12. Questo quesito richiede di saper riconoscere nei segmenti OA, OB, OD e OC i raggi della circonferenza, dedurre il fatto che i triangoli AOD e OBC sono regolari (a congruenti) e ricavare che anche OCD è un triangolo regolare congruente ai precedenti. Di conseguenza i lati obliqui e la base minore misurano tutti 10 cm e la base maggiore 20 cm. Infine si chiede di calcolare il perimetro (alcuni studenti commettono l'errore, una volta tracciate le diagonali di un poligono, di considerarle come lati). Le nozioni richieste dovrebbero essere tutte note ed essere di base. La capacità di effettuare il ragionamento in modo rigoroso non è chiaramente propria di tutti gli studenti, infatti se il 60,8% risponde esattamente all'item a., solo il 42,0% fornisce una giustificazione corretta. È quindi importante e significativa la presenza di un item in cui si richieda di giustificare la risposta.

E14. Quesito di media complessità rispetto all'item a.: Teorema di Pitagora e area del quadrato sono fatti noti, ma la formulazione del quesito richiede da parte degli studenti di leggere attentamente e riflettere. Decisamente difficile l'item b., alla portata solo di pochissimi studenti (collocabile nell'ambito Relazioni e Funzioni). Ben venga se ciò presenta un'attenzione a monitorare le eccellenze.

E16. Quesito risolvibile utilizzando la similitudine tra i triangoli rettangoli ADB e AEC. Si può osservare che spesso la similitudine e le proporzioni sono concetti affrontati, nella prassi della scuola secondaria di primo grado, in modo slegato, sarebbe invece più opportuno sfruttare problemi di questo genere per mettere in relazione le conoscenze aritmetiche con quelle geometriche.

E23. Riguarda ancora l'utilizzo delle proporzioni ed è piuttosto scolastico. Mi sembra manchi un distrattore che si sarebbe rivelato efficace: 13 cm, che corrisponde a sommare 3 cm alla dimensione minore, un errore abbastanza frequente in chi non ha compreso il concetto di rapporto.

E25. Richiede la conoscenza del concetto di simmetria assiale, è analogo a C13 della prova 2007/2008 e a D17 della prova dell'anno successivo, pur non essendo collocato nel piano cartesiano.

Conclusioni. Le domande a sfondo geometrico sono nove. Gli argomenti spaziano tra: misura (scale ed equivalenze), rappresentazione di oggetti tridimensionali, calcolo del volume di un cilindro e della densità, similitudine e congruenza tra triangoli e congruenza tra lunghezze, angoli interni di un triangolo, proprietà e rappresentazione di figure piane (diagonali del rettangolo, raggi del cerchio, perimetro del triangolo isoscele), utilizzo delle proporzioni, simmetria assiale, capacità di comprendere l'andamento della variazione di un'area in funzione di una lunghezza che muta. A differenza delle prove precedenti, i quesiti geometrici di questa prova sono meno aderenti a problemi reali, infatti solo E1 ed E8 fanno riferimento a situazioni concrete (E16 è inserito in un contesto concreto, ma è già presente la modellizzazione del problema, tanto che la situazione reale è del tutto trascurabile)

	Oggetto di valutazione	Processi cognitivi prevalenti	Compiti	Dalle Indicazioni per il Curricolo 2007
E1	Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio	(h)	Collegare due rappresentazioni.	Utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto a una prima capacità di visualizzazione.
E6	Composizione e scomposizione di figure	(f)	Esprimere una valutazione in merito all'area di alcuni triangoli, scegliendo l'argomentazione corretta.	Calcolare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari, ad esempio triangoli.
E8	Volume del cilindro	(d)	Calcolare, anche approssimando,	Calcolare il volume delle figure tridimensionali più comuni.

			il volume di un cilindro.	
E9	Misure di grandezze continue attraverso oggetti e strumenti. Rapporti fra grandezze	Item a (e) Item b (f)	Convertire misure sulla carta in misure nella realtà.	Valuta le informazioni che ha su una situazione, riconosce la loro coerenza interna e la coerenza tra esse e le conoscenze che ha del contesto, sviluppando senso critico.
E12	Perimetro dei poligoni	Item a (h) Item b (f)	Calcolare il perimetro di un trapezio usando proprietà di rette parallele e della circonferenza; giustificare la risposta.	Conoscere definizioni e proprietà significative delle principali figure piane.
E14	Aree di poligoni	(h)	Calcolare l'area di un quadrato inscritto in un altro quadrato.	Calcolare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari, ad esempio triangoli.
E16	Figure simili	(h)	Riconoscere la similitudine tra triangoli e ricavare una lunghezza.	Riconoscere figure piane simili in vari contesti.
E23	Rapporti fra grandezze	(d)	Applicare la proporzionalità diretta.	Esprimere la relazione di proporzionalità con una uguaglianza di frazioni

				e vicesa.
E25	Rappresentazio ne di oggetti nel piano e nello spazio	(b)	Completare un disegno rispettando gli assi di simmetria dati.	Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, software di geometria).

Prova Nazionale 2012/2013

Distribuzione dei quesiti:

Numeri: 10 domande, 16 item

Spazio e Figure: 6 domande, 9 item

Dati e Previsioni: 6 domande, 10 item

Relazioni e Funzioni: 6 domande, 10 item

Osservazioni. L'INValSI ha predisposto, da questo anno scolastico, 5 fascicoli con le stesse domande e risposte, ma in posizione permutata; quanto segue si riferisce al Fascicolo 1.

In questa prova è presente un numero molto elevato di item a risposta aperta univoca: 20 su 45.

D2. Appartenente all'ambito Relazioni e Funzioni, richiede di scrivere l'espressione algebrica che esprime il volume di un poliedro: un cubo priva di un cubo più piccolo. I distrattori A e B vertono sulla confusione tra volume e superficie (cumulativamente sono stati selezionati dal 27,0%). Il distrattore C rappresenta un errore tipico di inversione di procedura: sottrarre le dimensioni per poi elevare alla terza la differenza ottenuta. Si tratta dell'n-esimo quesito che lega l'algebra alla geometria e dà senso al calcolo algebrico.

D3. La risoluzione dell'esercizio prevede l'applicazione del Teorema di Pitagora in una situazione reale e il successivo calcolo dell'area di un rettangolo. L'item b richiede che venga anche illustrato il procedimento. Si tratta di un quesito piuttosto semplice, in cui però lo studente deve decifrare esattamente la figura, comprendendo che il tetto non è altro che un rettangolo rappresentato in prospettiva. Ottima la scelta del contesto: una situazione concreta, a portata dell'alunno, di semplice lettura. Il distrattore più efficace è certamente B, che corrisponde a una errata lettura dell'immagine (20,9% risponde B, 44,6% risponde correttamente).

D5. Si tratta di mettere in relazione la rappresentazione in pianta dell'edificio con quella frontale e di saper leggere la pianta per esprimere le indicazioni per effettuare un percorso. È un quesito di base, che verte sull'orientamento spaziale e sulle rappresentazioni. È notevole il fatto che l'item a. è stato risolto esattamente solo dal 49,5% (l'item b. dal 54,2%).

D11. Viene presentato il testo di un problema geometrico, corredato dalla figura. Allo studente sono richiesti, oltre alla lettura e comprensione del testo e del disegno, il calcolo di un'area (di un deltoide o di alcuni triangoli). È un quesito «standard», da libro di testo, tuttavia solo il 39,3% scrive correttamente i calcoli. I distrattori corrispondono a: dimezzamento del risultato (per chi avesse ragionato su metà figura e dimenticato di raddoppiare) e a una mancata valutazione del fatto che i triangoli rettangoli in cui è scomponibile il deltoide non sono congruenti.

D12. Quanto detto per il quesito D3 in merito alla scelta del contesto reale si conferma anche per questa domanda: è di facile comprensione da parte dello studente e attinge a un'esperienza che esso può aver già vissuto. Si tratta di cogliere la relazione tra l'altezza e una base di tronchi di cono equivalenti. Versando sempre la stessa quantità di liquido (lo stesso volume), poiché il tronco di cono va assottigliandosi, l'incremento di quota dovrà via via aumentare. Sono, a mio avviso, pregevoli i quesiti che mostrano come si possa fare geometria anche senza effettuale calcoli: è una provocazione da sottoporre anche agli insegnanti.

D16. Come D11, è un quesito da libro di testo (tipico del primo quadrimestre della classe seconda). La richiesta, infatti, verte sulla rappresentazione di un rettangolo equivalente a quello dato, ma avente perimetro maggiore. Dovrebbe essere un compito semplice, già affrontato.

D24. Ancora una richiesta legata alla rappresentazione e al calcolo delle aree di semplici poligoni. Il quesito è risolubile attraverso molti procedimenti, per questo credo che sarebbe stato interessante poter osservare lo svolgimento (mentre, ad esempio, in D3, non vedo così necessaria la richiesta di esplicitare i conti, dato che si possono evidentemente dedurre dal risultato espresso). Ad esempio si può osservare che il piano terra è costituito da $S+K+K/2$, che dà $36 + 16 + 8 = 60 \text{ m}^2$ (da raddoppiare). Il distrattore A è stato scelto da chi ha dimenticato l'addendo $K/2$. Un'altra possibilità potrebbe essere ottenere le misure dei lati del rettangolo che rappresenta il piano terra. Circa uno studente su 5 ha risposto D (576 m^2), probabilmente perché ha moltiplicato le due aree assegnate ($36 \times 25 = 576$).

Conclusioni. Vi sono sei domande pertinenti all'ambito Spazio e Figure. Gli argomenti indagati sono: il Teorema di Pitagora, le rappresentazioni nel piano di oggetti tridimensionale (o piante di edifici), i rapporti tra le misure di oggetti geometrici equivalenti (nel piano e nello spazio). Sono quindi prevalse la geometria piana (del primo biennio della scuola secondaria di primo grado) e le rappresentazioni bidimensionali e tridimensionali.

È da notare la tendenza a non indagare l'acquisizione dei contenuti (se non quelli essenziali) e la quasi totale assenza di quesiti che richiedano conoscenze acquisite nella classe terza. Penso che ne possano derivare due osservazioni. Da un lato, trattandosi di una prova a carattere nazionale, che quindi valuta il percorso che l'alunno ha compiuto fino all'ottavo grado di istruzione è bene che verta solo sui contenuti principali. D'altra parte, però, questa è una prova dell'Esame di Stato, che deve valutare anche le conoscenze e le abilità acquisite anche nell'ultimo anno, per cui mi pare che si sarebbe potuto aggiungere un quesito che tenesse conto anche di questo aspetto. Queste

osservazioni, che ho espresso analizzando i quesiti dell'ambito Spazio e Figure, sono estendibili anche agli altri ambiti.

Le situazioni reali in cui i quesiti sono calati sono, a differenza della prova precedente, verosimili e alla portata dell'alunno.

I processi cognitivi si collocano prevalentemente nel Macroprocesso Modellizzazione.

	Oggetto di valutazione	Processi cognitivi prevalenti	Compiti	Dalle Indicazioni per il Curricolo 2012
D3	Teorema di Pitagora. Area rettangolo	(d)	Decifrare la figura, applicare il Teorema di Pitagora, calcolare l'area di un rettangolo	Conoscere il teorema di Pitagora e le sue applicazioni in matematica e in situazioni concrete. Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
D5	Rappresentazione di oggetti nel piano e nello spazio	(h)	Riconoscere forme nello spazio	Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali.
D11	Area di poligoni	(d)	Applicare proprietà della circonferenza e formule per il calcolo dell'area di un poligono	Risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure. Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.
D12	Volume	(f)	Comprendere la	Riconosce e denomina le forme

	solidi di rotazione		relazione tra altezza e area di base tra tronchi di cono equivalenti	del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e ne coglie le relazioni tra gli elementi.
D16	Perimetro e area di poligoni	(e)	Rappresentare un rettangolo equivalente ma non isoperimetrico rispetto a uno dato	Riprodurre una figura in base a una descrizione, utilizzando gli strumenti opportuni.
D24	Rappresentazione di oggetti nel piano. Area del rettangolo	(d)	Decifrare una rappresentazione e in piana e calcolare l'area di due rettangoli	Determinare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari, ad esempio triangoli, o utilizzando le più comuni formule.

Nella seguente tabella si possono leggere le percentuali di risposta corretta relativi alle domande dell'ambito Spazio e Figure delle prove delle quali tali dati sono noti.

2007/2008		2008/2009		2009/2010		2010/2011		2011/2012		2012/2013	
C2	61,8	D3	61,9	D7	50,4	D4	84,8	E1	97,7	D3 a	44,6
C4	67,7	D5 a	98,1	D11	68,4	D6 a	29	E6	24,1	D3 b	35,4
C6	67,4	D5 b	91,7	D20	45	D6 b	24,9	E8 a	43,1	D5 a	49,5
C9	54,9	D5 c	49,2	D23 a	37,2	D9 a	61,4	E8 b	32,4	D5 b	54,2
C11	25	D8	71,4	D23 b	18,3	D9 b	72,5	E9 a	36,2	D11 a	52,9
C13	62,5	D14 a	72,3			D9 c	48,8	E9 b	42,4	D11 b	39,3
		D14 b	50,6			D9 d	77,1	E12 a	60,8	D12	57,7

D17	80,7
D19 a	69,2
D19 b	42,3

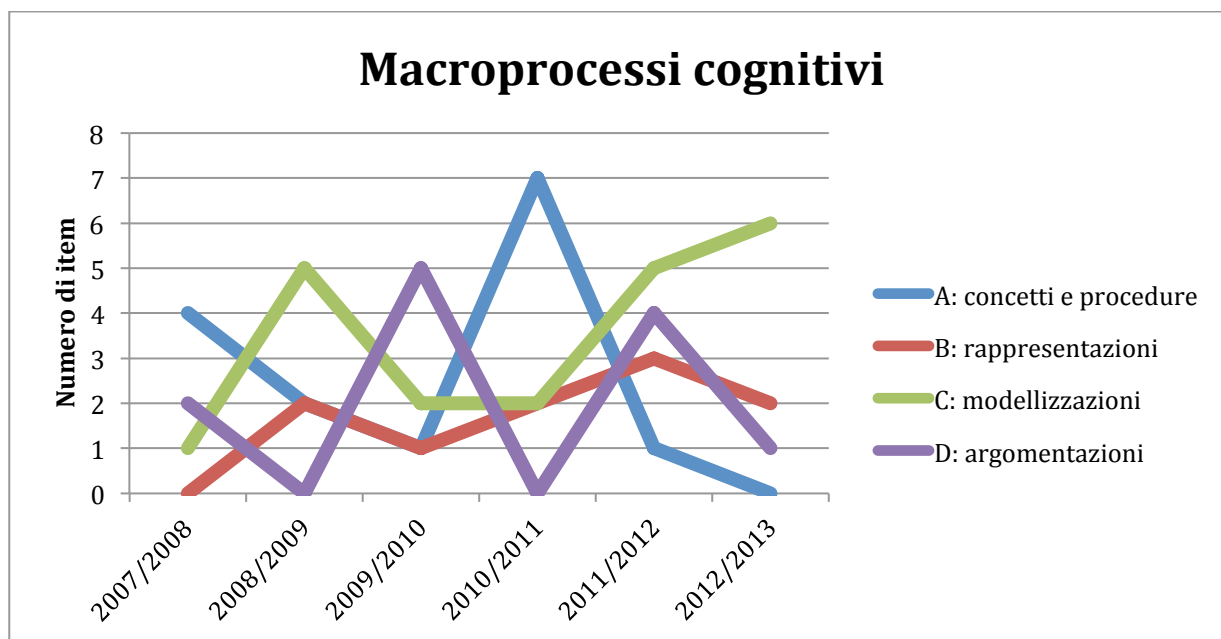
D12	34,1	E12 b	42	D16	57,8
D20	50,1	E14 a	24,2	D24	51,1
D22	54,7	E14 b	32,2		
D26	84,2	E16 a	50,7		
		E16 b	32,3		
		E23	72,1		
		E25	67,6		

I quesiti evidenziati in giallo sono quelli che riportano percentuali inferiori al 40%. Si tratta in larga parte di domande che richiedono di riconoscere e motivare proprietà (a eccezione di D12 2010/2011, in cui è richiesto di individuare la relazione tra le aree di due rettangoli per i quali è nota la scala lineare).

Gli item evidenziati in verde sono risultati invece piuttosto semplici (almeno 85% delle risposte corrette). Riguardano le rappresentazioni di figure solide nel piano e le isometrie (simmetria centrale, rotazione).

I processi e i macroprocessi

Il grafico seguente mostra il numero di item dell'ambito Spazio e Figure, raggruppati per macroprocessi.



L'INValSI non specifica il processo relativo ad ogni quesito per la prova del 2007/2008 in quanto in quel momento i domini cognitivi non erano ancora stati perfezionati, quindi l'attribuzione è personale. In essa si nota la mancanza del dominio B (rappresentazioni), tipico della geometria. È inoltre evidente la totale assenza di item che richiedono di argomentare nella prova 2008/2009 (essi mancavano anche negli altri ambiti) e in quelle degli anni scolastici 2010/2011 e 2012/2013 (in cui però il macroprocesso D era presente, ma per quesiti afferenti agli altri ambiti).

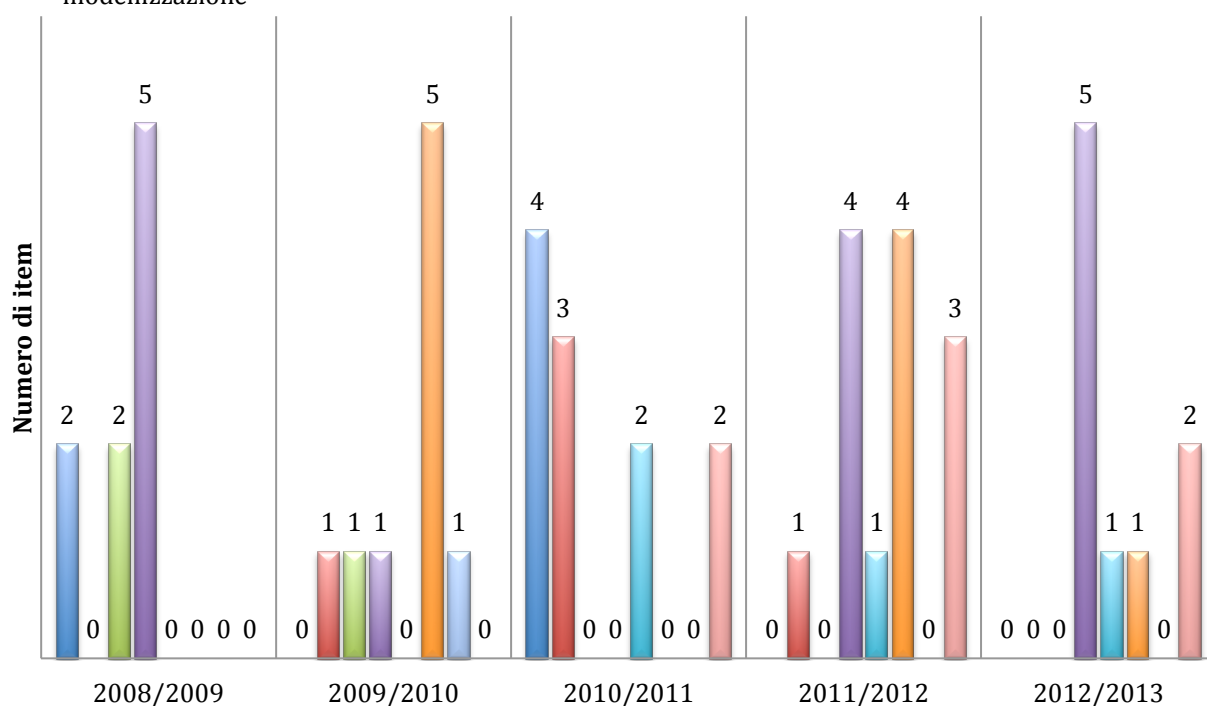
La sensazione è che, nel corso del tempo, l'INValSI abbia dato rilevanza ad aspetti differenti, tuttavia, escludendo «l'anomalia» della prova del 2010/2011, si nota che l'aspetto concettuale non è quello più incisivo, in coerenza con quanto affermano le Indicazioni Nazionali: «Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente applicando una definizione o una regola». Ciò che non emerge dalle Indicazioni, ma non deve sfuggire al docente attento, è l'arbitrarietà con cui definizioni e regole si possono fissare. È importante cioè far cogliere agli studenti che la matematica non è una disciplina in cui tutte le regole siano già scritte: a patto di non incorrere in contraddizioni, c'è spazio per deciderle, consapevoli che ogni assioma

fissato porterà a necessarie conseguenze, costruirà quindi una certa matematica, diversa da quella ottenibile con postulati differenti. Questo aspetto è uno dei più significativi e contribuisce a contraddistinguere la matematica dagli altri saperi e a renderla affascinante. Per questo va fatto cogliere agli studenti, che possono comprendere meglio la ragione per cui la matematica è componente irrinunciabile della cultura.

Il seguente grafico mostra la classificazione degli item dell'ambito Spazio e Figure nei processi (per le prove di cui l'INValSI ha pubblicato la Guida alla Lettura e quindi di cui ha dichiarato il processo richiesto per la risoluzione di ogni item).

Processi cognitivi

- (a) conoscere e padroneggiare i contenuti specifici della matematica
- (b) conoscere e utilizzare algoritmi e procedure
- (c) conoscere diverse forme di rappresentazione e passare da una all'altra
- (d) risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi – numerico, geometrico, algebrico
- (e) riconoscere in contesti diversi il carattere misurabile di oggetti e fenomeni, utilizzare strumenti di misura, misurare grandezze, stimare misure di grandezze
- (f) acquisire progressivamente forme tipiche del pensiero matematico
- (g) utilizzare strumenti, modelli e rappresentazioni nel trattamento quantitativo dell'informazione in ambito scientifico, tecnologico, economico e sociale
- (h) riconoscere le forme nello spazio e utilizzarle per la risoluzione di problemi geometrici o di modellizzazione



Si nota che non vi è una tendenza ad associare alla geometria determinati processi, ma piuttosto a variare di anno in anno i processi prevalenti.

Tuttavia è molto evidente che l'INValSI sta sempre più concentrando la sua attenzione su rappresentazione e modellizzazione, a scapito dei contenuti.

Conclusioni

Presentiamo alcuni commenti conclusivi relativi alle prove, a quale idea di geometria l'INValSI veicola e a quali aspetti di questa disciplina andrebbero potenziati.

Certamente l'interesse dell'INValSI è la valutazione del sistema di istruzione, ma è innegabile che l'introduzione delle Rilevazioni Nazionali, e in particolare della Prova Nazionale come parte dell'Esame Conclusivo del I Ciclo di Istruzione, conferisce anche a questi test l'onere di orientare le scelte didattiche dei docenti. Per questo ha senso chiedersi quale visione della matematica sia in essi racchiusa.

L'INValSI ha scelto di proporre accanto a quesiti puramente teorici, molti altri applicativi e di ragionamento, a significare che per verificare la competenza dell'alunno è necessario testare sia le sue conoscenze sia la capacità di creare modelli, di rappresentare situazioni, di leggere rappresentazioni proposte da altri e di argomentare. Ogni insegnante deve mantenere controllato questo bilanciamento, per non cadere nel nozionismo avulso dalla speculazione.

Un aspetto su cui solo parzialmente l'INValSI ha insistito è quello della giustificazione delle risposte. Anche qui spetta al docente sfruttare i quesiti proposti, rendendoli un efficace strumento di riflessione. Probabilmente è retorico ricercarne le cause, ma è certo che molti degli alunni non hanno l'abitudine al ragionamento, soprattutto quanto si chieda loro di costruire una riflessione che richieda più passaggi e un po' di tempo. È necessario educarli alla consapevolezza che dietro ogni affermazione ci sono sempre motivazioni e riflessioni, immediate o articolate che siano.

Potrebbe essere stimolante presentare quesiti che afferiscono a aree diverse della matematica: ciò renderebbe più complessa l'analisi statistica, ma sarebbe un modo per far percepire l'aderenza della matematica alla realtà. Ad esempio è totalmente assente la combinatoria, che d'altra parte si presta anche a semplici quesiti di ragionamento, che non richiedano (al livello scolastico in oggetto) di conoscere tanti contenuti.

L'INValSI, attraverso le Prove Nazionali degli ultimi anni, ha invitato a considerare la geometria come una disciplina che consente di creare e decifrare rappresentazioni e modelli. La scelta è coerente con la visione internazionale e con le Indicazioni per il

Curricolo italiane, tuttavia credo che, trattandosi del primo ciclo scolastico, sarebbe importante, da parte dell'Istituto, fornire uno stimolo ai docenti e agli studenti relativo apprendimento dei contenuti al sul rigore espositivo. Auspico che l'attenzione a consolidare un sapere utile e concreto non offuschi l'altra sfaccettatura della geometria, quella astratta, necessaria per educare a ragionare in modo ordinato («acquisire forme tipiche del pensiero matematico»).

CAPITOLO 4 – OSSERVAZIONI E PROPOSTE

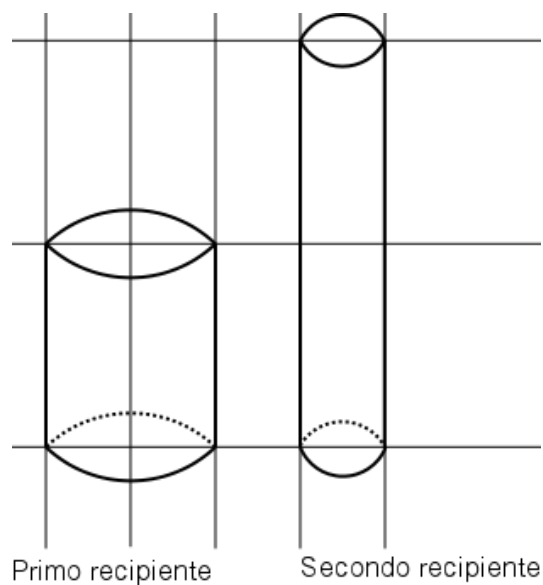
Completando le osservazioni del Capitolo precedente con altre considerazioni più specifiche relative ai quesiti, presentiamo alcune proposte: si tratta di quesiti che potrebbero essere introdotti nelle prossime rilevazioni.

Le domande delle prove INValSI spesso presentano agganci con la realtà molto «costruiti», sarebbe auspicabile se esse avessero un legame più «spontaneo» e diretto con il mondo reale, come nelle prove PISA. Ho provato a pensare ad alcuni esempi, che presento di seguito.

Proposta 1 – Sviluppo piano del cilindro in situazione reale. Un portapenne cilindrico ha il raggio di base di 4 cm e l'altezza di 12 cm. Vuoi ricoprirlo (solo lateralmente) con un unico pezzo di carta colorata. Disegna la forma della carta (anche non in scala) e scrivi le misure approssimando al millimetro.

Proposta 2 – Relazioni tra misure in situazione reale. Hai due recipienti cilindrici. Il secondo ha il raggio di base pari alla metà del raggio di base del primo. L'altezza del secondo è il doppio dell'altezza del primo. Puoi dire che:

- hanno la stessa capacità
- la loro capacità dipende dalle misure, che non sono state assegnate
- ha maggior capacità il primo recipiente
- ha maggior capacità il secondo recipiente.



Motiva la risposta.

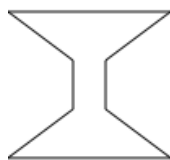
Proposta 3 – Tassellazione del piano in situazione reale. Devi piastrellare una stanza di forma rettangolare con piastrelle tutte uguali. Se occorre sei disposto a rompere le piastrelle, ma soltanto ai bordi. Quali piastrelle puoi scegliere?



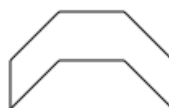
Piastrina A



Piastrina B



Piastrina C



Piastrina D

- a. Tutte tranne la C
- b. Solo la A e la B
- c. Solo la A
- d. Tutte

Motiva la tua scelta.

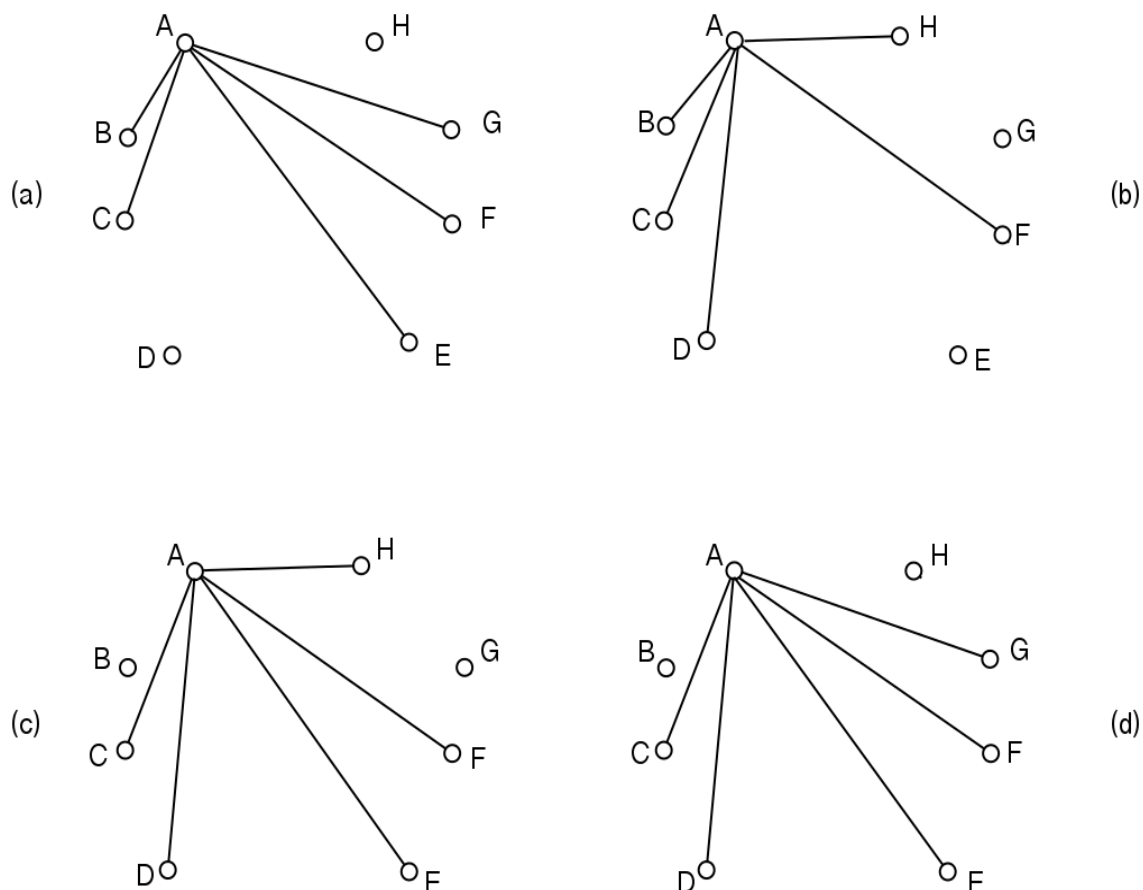
Proposta 4 – Teorema di Pitagora in situazione reale. Devi far passare una lastra sottilissima di vetro di dimensioni 125 cm x 200 cm attraverso una finestra di dimensioni 120 cm x 50 cm. È possibile?

Sì / No

Motiva la risposta.

Proposta 5 – Combinatoria in situazione reale. L'insegnante di scienze motorie ha a disposizione otto persone (quattro alunni e quattro alunne) per formare la squadra di pallavolo titolare, che disputerà il torneo (dovranno essere schierati in campo sei giocatori). I ragazzi in questione sono Andrea, Bruno, Carlo e Dario e le ragazze Elisa, Francesca, Giulia, Hillary. Il professore non vuole rinunciare alla coppia Andrea-Elisa, perché sono grandi amici e insieme si intendono alla perfezione, inoltre Andrea è il capitano della squadra. Francesca e Hillary, invece, ricoprono lo stesso ruolo, per cui non è possibile inserirle contemporaneamente nella squadra titolare. Infine, per rispettare il regolamento, deve creare una squadra che abbia tanti maschi quante femmine.

A. Scegli, tra i seguenti grafi, quelli che possono rappresentare possibili squadre da schierare in campo. I grafi sono costruiti in modo da collegare il capitano con gli altri giocatori titolari (i punti indicano i giocatori, il nome di ogni punto corrisponde all'iniziale del nome del giocatore a cui è riferito).



B. Quante sono in totale le squadre che l'allenatore può costituire (non considerare l'ordine)?

- a. Sei
- b. Otto
- c. Nove
- d. Tre

C. Costruisci tu un grafo che rappresenti un'altra possibile squadra.

D'altra parte le reali situazioni problematiche, spesso, non hanno soluzione unica e talvolta non hanno nemmeno soluzione, è quindi interessante mostrare agli studenti anche questa sfaccettatura della geometria (e più in generale della matematica). Ritengo auspicabile che l'INValSI guidi anche a riflettere in questo senso, anche perché la non esistenza o la non unicità di soluzione è argomento tipico della matematica teorica, oltre che fatto evidente delle situazioni concrete. Gli item presentati, come sovente accade

anche nella didattica quotidiana, danno l'impressione che per ciascun problema esista sempre la soluzione e sia unica. Di fronte a ogni tipo di situazione problematica lo studente e deve essere consapevole di questa molteplicità di possibilità.

Proposta 6 – Non unicità di soluzione. Un rettangolo ha il perimetro di 24 cm. Calcola la sua area.

- a. Non è possibile (non c'è un solo rettangolo di perimetro 24 cm)
- b. 12 cm^2
- c. 32 cm^2
- d. 48 cm^2

Proposta 7 – Non esistenza di soluzione. Un triangolo ha il perimetro di 25 cm. Due lati sono congruenti e ciascuno di essi misura 5 cm. Classifica il triangolo in base alla congruenza dei lati.

- a. Questo triangolo non esiste
- b. Il triangolo è equilatero
- c. Il triangolo è isoscele
- d. Il triangolo è scaleno

La scelta dell'INValSI di introdurre quesiti in cui si possano stimare grandezze, dopo aver fatto opportuni ragionamenti geometrici, è del tutto opportuna, è coerente con i nuovi orientamenti nazionali (che ribadiscono questo obiettivo) e contribuisce a ricordare ai docenti l'importanza di saper spendere le conoscenze e le competenze acquisite.

Proposta 8 – Stima di un'area. Un ottagono regolare è circoscritto a una circonferenza il cui raggio misura 1 cm.

L'area dell'ottagono, (in cm^2):

- a. è un numero di poco superiore a π
- b. è pari al lato dell'ottagono elevato alla seconda
- c. è pari alla base dell'ottagono moltiplicata per l'altezza
- d. è 8, perché l'ottagono si può scomporre in otto triangoli di area 1

Un aspetto prettamente geometrico è l'utilizzo delle figure. È necessario che sia chiaro allo studente come le deve leggere. Infatti, talvolta nei testi dei quesiti sono specificati tutti i dati, in modo da rendere la figura un supporto accessorio, utile soltanto a visualizzare immediatamente e quindi comprendere con maggiore immediatezza le parole. In altri casi, si veda ad esempio D8 2008/2009, i dati sono da dedurre dalla

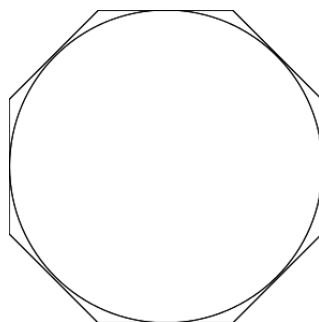


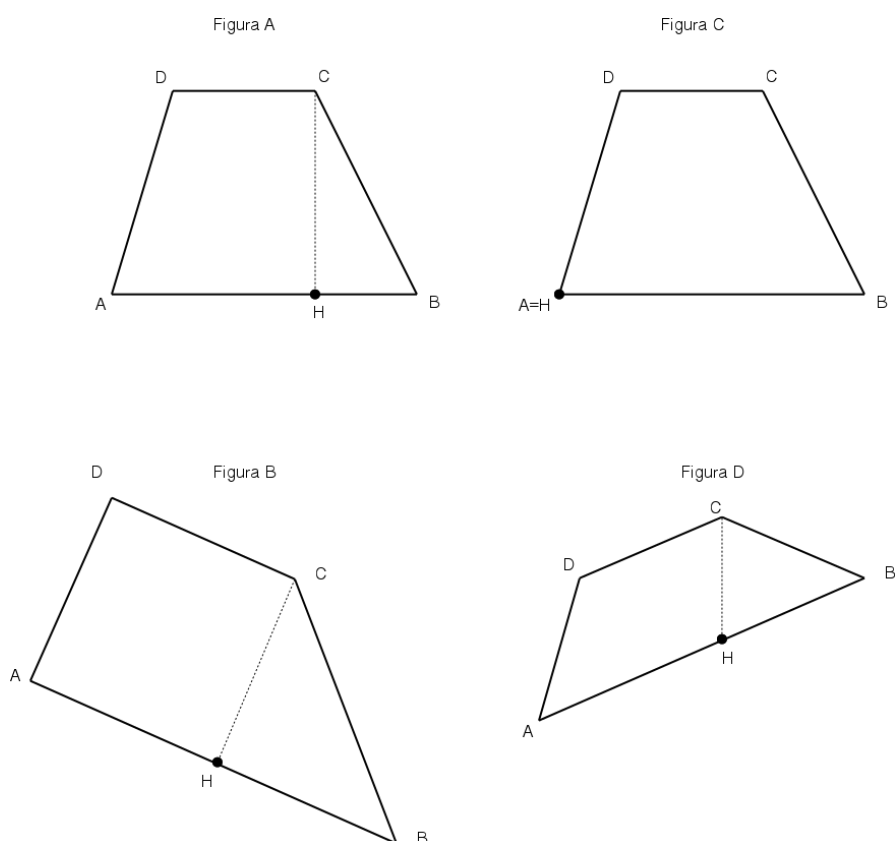
figura. Credo che questo possa generare confusione, soprattutto negli studenti meno confidenti con la geometria e riscontro questa ambiguità anche in moltissimi testi della scuola secondaria di primo grado. Ritengo che l'approccio corretto sia il primo, che è certamente più rigoroso. Sulla base di questa riflessione propongo un quesito in cui lo studente deve scegliere tra figure già disegnate quelle che rappresentano correttamente la situazione descritta nel testo.

Proposta 9 - Rappresentazione. Il poligono ABCD è un trapezio. Il punto H è la proiezione ortogonale di un vertice sulla base maggiore.

Quali tra le figure rappresentano correttamente il trapezio e il punto H?

Figura A	Sì / No
Figura B	Sì / No
Figura C	Sì / No
Figura D	Sì / No

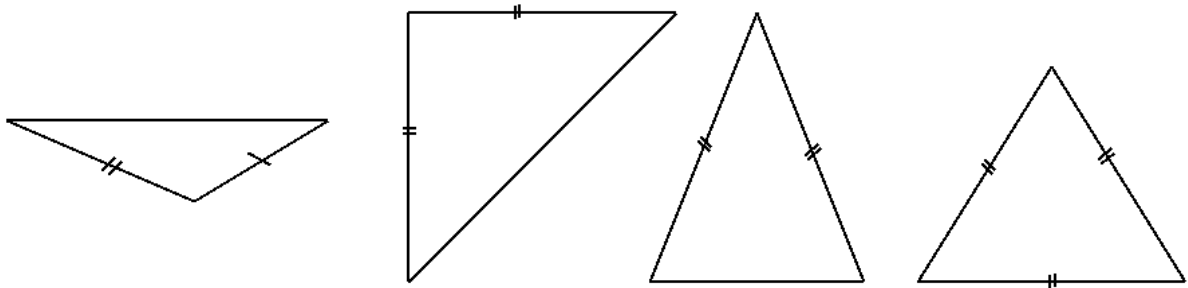
Riprendendo il tema del rigore, vorrei sottolineare l'importanza del traguardo di competenza (dalla Indicazioni Nazionali): «produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà



caratterizzante e di definizione)». Potrebbe essere inserita nella prova nazionale una domanda relativa proprio al concetto di definizione o a quello di caratterizzazione.

Proposta 10 – Definizioni. Leggi la seguente definizione:

«Un triangolo simpatico è un triangolo avente almeno una coppia di lati congruenti»,
quanti tra i seguenti triangoli sono simpatici?



- a. Tre
- b. Due
- c. Uno
- d. Zero

Ora leggi questa seconda definizione:

«Un triangolo antipatico è un triangolo avente esattamente una coppia di lati congruenti»,
quanti tra i triangoli della figura precedente sono antipatici?

- a. Tre
- b. Due
- c. Uno
- d. Zero

Proposta 11 – Caratterizzazioni. Un quadrilatero ha le diagonali perpendicolari e che si intersecano nel punto medio. Esso è un:

- a. Rombo
- b. Quadrato
- c. Deltoide
- d. Rettangolo

CAPITOLO 5 – I QUESITI DI GEOMETRIA NEI TEST D'ACCESSO AL TFA

Nell'estate 2012 è stata attivata la procedura di accesso al Tirocinio Formativo Attivo, un anno di formazione teorica e sul campo che porta all'abilitazione degli insegnanti della scuola secondaria, in sostituzione alle Scuole di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario. La selezione consiste in tre prove: un test redatto dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca; una prova scritta e una orale, a cura degli Atenei. Il test ha destato parecchie polemiche, in particolare a causa di molte domande mal formulate, che sono poi state annullate (indipendentemente dalla risposta fornita, essa è stata data come corretta).¹⁶ Si tratta di sessanta quesiti a risposta multipla, con quattro opzioni di risposta. Dieci vertono sulla comprensione del testo e i restanti sulle discipline della classe di insegnamento in cui l'aspirante docente intende abilitarsi. Le classi di concorso che ho considerato sono: A047 Matematica , A048 Matematica applicata, A049 Matematica e Fisica, A059 Scienze Matematiche, Chimiche, Fisiche e Naturali nella scuola secondaria di primo grado.

Mi sono chiesta se fosse possibile dedurre, alla luce di questi test, quale geometria ai futuri insegnanti è chiesto di conoscere e se essi siano comparabili con le prove redatte dall'INValSI e con le Indicazioni Nazionali. Bisogna, però, ricordare che lo scopo delle prove INValSI è differente dalla finalità selettiva delle prove in oggetto, per cui,

¹⁶ Elenchiamo le domande considerate per tutti corrette. Classe A047: 12, 19, 24, 32, 38, 39, 47, 52, 54 e 60; classe A048: 1, 11, 18, 29, 39, 44, 49 e 51; classe A049: 6, 17, 23, 24, 27, 30, 35, 43, 48, 51, 56, 58 e 60; classe A059: 9, 20, 28, 41, 47, 39, 56, 57 e 60.

anzitutto, per rispondere alle domande che mi sono posta, è necessario anteporre altre, più generali, riferite alle caratteristiche delle prove d'accesso ai percorsi formativi (universitario o di specializzazione). Poiché tale argomento esula dalle tematiche affrontate in questa tesi, preferisco analizzare i quesiti e ragionare sulla natura delle domande e sugli argomenti scelti.

Nella seguente tabella si può osservare una classificazione dei quesiti di geometria proposti nei test delle classi: A047 Matematica, A048 Matematica applicata, A049 Matematica e Fisica, nella scuola secondaria di secondo grado; A059 Matematica e Scienze nella scuola secondaria di primo grado, classificati per macroprocesso (A=concetti e procedure, B=rappresentazioni, C=modellizzazioni, D=argomentazioni), ricalcando la scelta dell'INValSI.

Domanda	Argomento	Compito	Macro-processo	Commento
A047				
3	Geometria piana (aree)	Riconoscere la formula errata dell'area del triangolo.	A	Distrattori banali (due sono equivalenti, per cui errati, essendo unica la risposta); la risposta da selezionare si può trovare immediatamente, essendo incoerente rispetto all'unità di misura.
6	Geometria piana (poligoni regolari)	Determinare il lato del decagono regolare in funzione del raggio della circonferenza circoscritta.	A	Basta ricordare che il lato del decagono è la sezione aurea del raggio (oppure ragionare sugli angoli e ricordare il valore delle funzioni trigonometriche per $\pi/5$)
9	Rappresen- tazione di	Data un'equazione	B	

	curve	in coordinate parametriche, riconoscere che si tratta di una ellisse		
13	Rappresen- tazione di curve	Data un'equazione di II grado in due variabili, riconoscere il luogo rappresentato.	B	Il quesito presenta un errore di formulazione, perché non è chiaro l'ambiente di lavoro. Infatti l'equazione data non ha radici reali e ciò porta a rispondere «Insieme vuoto», ma se considerata sul complesso, allora la curva rappresentata è un'ellisse.
15	Geometria piana (triangoli)	Dire con quale probabilità un punto interno a un triangolo equilatero è tale che la somma delle distanze del punto dai lati è uguale all'altezza	D	Quesito abbastanza complesso e che richiede un ragionamento articolato (considerati anche i tempi della prova: tre minuti per ogni domanda)
22	Geometria nello spazio (riconduci- bile al piano)	Calcolare la distanza tra i punti di tangenza di due sfere a uno stesso piano	D	Bisognerebbe dichiarare che i punti A e B sono distinti
24	Geometria	Determinare	D	Domanda annullata

	sintetica nello spazio	l'equivalenza tra tre segmenti collocati all'interno di un cubo		
27	Geometria nello spazio (poliedri regolari)	Dire quanti poliedri regolari hanno come facce triangoli equilateri	A	Domanda di pura conoscenza dei solidi platonici
28	Trasforma zioni del piano	Riconoscere il tipo di trasformazione , date le equazioni	A	
30	Geometria analitica	Determinare l'equazione della normale a una curva in un punto	A	
35	Geometria sferica	Confrontare con π la somma degli angoli interni di un triangolo sferico	A	Già proposto nelle prove di ammissione alla SSIS
36	Algebra lineare	Determinare una stima dall'alto per il rango di una	A	

		matrice		
44	Storia (Elementi Euclide)	Dire in quale libro degli Elementi di Euclide vi è la dimostrazione che i numeri primi sono infiniti	A	Quesito puramente nozionistico
46	Trigonometria	Riconoscere tra quattro espressioni con funzioni trigonometriche e quale non è un'identità	A	
A048				
1	Geometria piana (poligoni)	Determinare il numero di diagonali di un poligono in funzione del numero dei lati	A	Questo quesito presenta due risposte corrette. <i>È stato annullato.</i>
23	Geometria piana (triangoli)	Determinare le condizioni cui deve sottostare la misura di un segmento affinché dati altri due segmenti si possa con essi	A	Già proposto nelle prove di ammissione alla SSIS

		costruire un triangolo		
25	Trasformazioni del piano	Riconoscere gli invarianti di una trasformazione di cui sono fornite le equazioni	A	Un item analogo è stato proposto nelle prove di ammissione alla SSIS
30	Geometria piana (triangoli, circonferenza)	Determinare l'ampiezza di un angolo, riconoscendo la congruenza di raggi di circonferenze congruenti	D	
32	Rappresentazione di curve	Data un'equazione di II grado in due variabili, riconoscere il luogo rappresentato.	B	Trattandosi di un'ellisse a punti immaginari, valgono le stesse considerazioni fatte per 13 di A047.
33	Geometria nello spazio (poliedri regolari)	Dire quanti sono i poliedri regolari	A	Domanda di pura conoscenza dei solidi platonici
36	Geometria analitica	Determinare l'equazione della tangente	A	

		a una circonferenza in un punto		
38	Geometria solida	Calcolo volume di un solido	A	
44	Angoloidi	Confrontare con 2π la somma delle facce di un angoloide	A	Domanda annullata
45	Geometria piana (sezione aurea)	Determinare la sezione aurea di un segmento dato	A	Richiede il calcolo della radice quadrata di 500, a meno che non si parta dalla risposte oppure si utilizzi il valore di ϕ
46	Storia (programma di Erlangen)	Dire qual è l'autore del programma di Erlangen	A	Quesito puramente nozionistico
A049				
7	Geometria nello spazio (poliedri regolari)	Dire quanti poliedri regolari hanno come facce esagoni regolari	A	
13	Geometria nello spazio (poliedri)	Determinare il volume di un tetraedro regolare noto lo spigolo	A	

22	Geometria piana (costruibilità)	Dire chi è l'autore della dimostrazione della costruibilità del poligono regolare di 17 lati con riga e compasso	A	Quesito puramente nozionistico
26	Geometria nello spazio (poliedri)	Calcolare la diagonale di un parallelepipedo rettangolo noti i lati (con approssimazio ne)	A	
29	Trigonometria	Riconoscere tra quattro espressioni con funzioni trigonometriche e quale non è un'identità	A	Domanda annullata
A059				
4	Storia (Elementi Euclide)	Dire quali libri degli Elementi di Euclide trattano la geometria solida	A	Quesito puramente nozionistico
14	Geometria piana	Determinare l'area	A	I distrattori sono assurdi, perché la risposta corretta è l'unico

	(poligoni regolari)	dell'ottagono regolare circoscritto a un cerchio di raggio 1		numero vicino a π , l'area del cerchio inscritto. La domanda diventa banale.
15	Rappresen- tazione di curve	Data un'equazione di II grado in due variabili, riconoscere il luogo rappresentato.	B	
18	Trigonometria	Determinare il numero di soluzioni di una equazione trigonometrica	A	
27	Trigonometria	Convertire in radianti un'ampiezza assegnata in gradi sessagesimali	A	

Nelle seguenti tabelle presento i conteggi delle frequenze relativamente ai macroprocessi e agli argomenti.

Macroprocessi	A047	A048	A049	A059
A: concetti e procedure	9	9	5	4

B: rappresentazioni	2	1	0	1
C: modellizzazioni	0	0	0	0
D: argomentazioni	3	1	0	0

Argomenti	A047	A048	A049	A059
Formule e nozioni	6	7	3	1
Geometria sintetica	2	0	0	0
Rappresentazione di curve / trasformazioni	1	0	1	2
Geometria analitica	1	1	1	1
Trigonometria	3	2	0	1
Storia	1	1	0	0

Commento

Come si vede, indipendentemente dalla classe di concorso si punta in particolare sulla conoscenza di formule e procedure e poco su quesiti in cui si devono effettuare deduzioni (ciò soltanto in 15 e 24 di A047). Risulta totalmente assente il processo relativo alla modellizzazione (C). Sono presenti domande di tipo puramente nozionistico, di nessuna rilevanza matematica. Quanto detto vale in particolare per le domande di storia: è giusto richiedere a un futuro insegnante anche una conoscenza storica della disciplina che insegnerà, ma le domande scelte richiedevano di ricordare dettagli poco significativi dal punto di vista culturale: ad esempio sarebbe stato più interessante chiedere di che tipo fosse la dimostrazione che i numeri primi sono infiniti (per assurdo) contenuta negli Elementi di Euclide, piuttosto che chiedere in quale libro essa sia collocata.

In generale il livello di difficoltà dei quesiti di geometria è medio.

Si nota la sostanziale assenza di quesiti di geometria sintetica, per dare spazio più che altro a domande che necessitano di applicare formule. In questo senso, potremmo dire, le prove INValSI sono meglio bilanciate, perché rilevano più che le capacità mnemoniche, quelle di ragionamento.

L'impressione è quella di una generale fretteolosità nella stesura di questi test, che risultano mal bilanciati sia dal punto di vista dei contenuti sia rispetto ai processi cognitivi. Ne consegue che essi non consentono un'analisi seria di quale geometria è richiesto che il futuro insegnante conosca.

BIBLIOGRAFIA

Libri e articoli

- A.M. Arpinati, Vantaggi e Problemi, *Nuova Secondaria*, N. 1, Brescia 2011.
- C. B. Boyer, Storia della Matematica, Mondadori, Milano 2002.
- P. Dominigo, Le prove PISA ed INValSI: possibili conseguenze sulla pratica didattica, Atti Convegno UMI CIIM, 2005.
- M. Kline, La matematica nella cultura occidentale, Feltrinelli, Milano 1979.
- M. Kline, Storia del pensiero matematico. Dall'antichità al Settecento, Biblioteca Einaudi, Torino 1972.
- M. Kline, Storia del pensiero matematico. Dal Settecento a oggi, Biblioteca Einaudi, Torino 1972.
- C.F. Manara, La generalizzazione del concetto di geometria.
- C.F. Manara, La geometria nell'ambito del pensiero matematico, Periodico Matematiche, Vol. XXXIV, Nicola Zanichelli Editore, Bologna 1956.
- C.F. Manara, Metodi della geometria del secolo XIX.
- C.F. Manara, La geometria, problemi logici e didattici, Quaderno di Dipartimento, Dip. di Matematica «F. Enriques», Milano 1984.
- P. Odifreddi, C'è spazio per tutti. Il grande racconto della geometria, Mondadori, Milano 2010.
- P. Odifreddi, Divertimento geometrico. La origini geometriche della logica da Euclide a Hilbert, Bollati Boringhieri, Torino 2003.
- S. Ponzio, INVALSI e indagini internazionali: dalla costruzione delle prove alla

valutazione, http://online.scuola.zanichelli.it/arpinati_matematica/risorse-per-insegnante/invalsi-costruzione-prove/.

- Seidenberg, The ritual origin of Geometry, Archive for History of Exact Sciences, 1, 1962.
- Spotorno, V. Villani, Mondo reale e modelli matematici, La Nuova Italia, Firenze 1976.

Quadri di riferimento, prove e report INValSI, OCSE e IEA

Pubblicazioni web relative alle prove INValSI

Quadri di riferimento:

- Il quadro di riferimento per la Prova Nazionale per l'esame di Stato scuola secondaria I grado (2007/2008)
- Quadro di riferimento di matematica (2008/2009)
- Quadro di riferimento di matematica (2009/2010)
- Quadro di riferimento della prova di matematica (2010/2011)
- Nuovo quadro di riferimento della prova di matematica (2012)

Analisi dei quesiti e delle prove:

- La Prova Nazionale al termine del primo ciclo, Distribuzione percentuale delle risposte tra le opzioni possibili (Analisi dei quesiti 2007/2008)
- La Prova Nazionale per la classe terza della Scuola Secondaria di Primo Grado, a.s. 2007/08 (Commento ai quesiti 2007/2008)
- Descrizione e commento alla sezione di matematica della prova nazionale all'esame finale del primo ciclo (a.s. 2008-2009)
- Prova Nazionale al termine del primo ciclo: Matematica, a.s. 2009/10, Guida alla lettura.
- Le prove INValSI 2011, Relazione tecnica sulle caratteristiche psicometrico-misuratorie delle prove INVALSI 2011 sostenute dagli studenti delle classi II e V della scuola primaria, I e III della secondaria di primo grado e della classe II

della scuola secondaria di secondo grado, Rapporto tecnico sulle caratteristiche delle prove INVALSI 2011.

- Prova Nazionale Esame di Stato al termine del I ciclo, MATEMATICA a.s. 2010/11, Guida alla lettura.
- Rilevazioni nazionali sugli apprendimenti 2011-2012. La rilevazione degli apprendimenti nelle classi II e V primaria, nelle classi I e III (Prova nazionale) della scuola secondaria di primo grado e nella II classe della scuola secondaria di secondo grado. Il quadro di sistema.
- Rilevazioni nazionali sugli apprendimenti 2012-2013. La rilevazione degli apprendimenti nelle classi II e V primaria, nelle classi I e III (Prova nazionale) della scuola secondaria di primo grado e nella II classe della scuola secondaria di secondo grado. Il quadro di sistema.

Rapporti:

- La prova nazionale al termine del primo ciclo. Aspetti operativi e prime valutazioni sugli apprendimenti degli studenti (Rapporto finale 2007/2008).
- Esame di Stato I ciclo, Rapporto Prova Nazionale 2008/2009
- Esame di Stato I ciclo, Rapporto Prova Nazionale 2009/2010
- Servizio nazionale di valutazione 2010/2011. La rilevazione degli apprendimenti nelle classi II e V primaria, nelle classi I e III (Prova nazionale) della scuola secondaria di primo grado e nella II classe della scuola secondaria di secondo grado. Le rilevazioni degli apprendimenti.
- Prime evidenze del rapporto tra voto della prova nazionale e apprendimenti in italiano e matematica. Prova nazionale 2011/2012.
- Rilevazioni nazionali sugli apprendimenti 2011/2012. La rilevazione degli apprendimenti nelle classi II e V primaria, nelle classi I e III (Prova nazionale) della scuola secondaria di primo grado e nella II classe della scuola secondaria di secondo grado. Rapporto tecnico.
- Servizio Nazionale di Valutazione, a.s. 2012/13, Guida alla lettura, Prova Nazionale al termine del primo ciclo: Matematica, Classe terza- Scuola secondaria di I grado.

- Rilevazioni nazionali sugli apprendimenti 2012/2013. La rilevazione degli apprendimenti nelle classi II e V primaria, nelle classi I e III (Prova nazionale) della scuola secondaria di primo grado e nella II classe della scuola secondaria di secondo grado. Rapporto tecnico.

-

Pubblicazioni web relative alle prove OCSE

- Compendio prove PISA
- PISA 2003, Assesment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills
- Le competenze in lettura, matematica e scienze degli studenti quindicenni italiani, Rapporto Nazionale PISA 2009
- OCSE PISA 2012, Sintesi dei risultati per l'Italia, a cura di INValSI

Pubblicazioni web relative alle prove IEA

- TIMSS 1999, Mathematics items, released set for eight grade
- TIMSS 2003, Released Items: Eighth Grade Mathematics
- TIMSS 2007, Assessment Frameworks
- Prove TIMSS 2007. Prove rilasciate di Matematica III Classe, secondaria di I grado
- TIMSS 2007. Prime valutazioni sugli apprendimenti degli studenti italiani
- TIMSS 2007, International Mathematics Report
- Quadro di riferimento di TIMSS 2011

APPENDICE

Le Prove Nazionali di Matematica dal 2007/2008 al 2012/2013