



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

Scuola di alta formazione dottorale

Corso di Dottorato in formazione della persona e mercato del lavoro

Ciclo XXXIII

**RIFLESSIONI PEDAGOGICHE
SULL'INSEGNAMENTO-APPRENDIMENTO
DELLA MATEMATICA**

Relatore:

Chiar.mo Prof. Andrea Potestio

Tesi di Dottorato

Elisa LEONE

Matricola n. 1053591

ANNO ACCADEMICO 2020 / 2021

A Pietro per avermi insegnato che educare è prima di tutto amare

Sommario

Introduzione	1
Capitolo 1.....	5
Riflessioni sulla didattica e la questione del metodo	5
1.1 Concetto di didattica.....	9
1.2 Concetto di competenza	20
1.3 Concetto di valutazione.....	27
1.4 Strumenti per la matematica.....	33
1.5 Alternanza Formativa.....	40
Capitolo 2. La didattica della matematica	49
2.1 Cos'è la matematica?	49
2.2 L'insegnamento- apprendimento della matematica	55
2.3 Le difficoltà nell'apprendimento e nell'insegnamento della matematica	67
2.4 Disturbi dell'apprendimento e gestione della discalculia.....	77
2.5 Competenze matematiche	82
2.6 Valutazione interna ed esterna degli apprendimenti matematici.....	88
Capitolo 3. Insegnare matematica in Cometa.....	91
3.1 La matematica al liceo artigianale.....	93
3.1.1 La struttura del Liceo Scientifico Artigianale	93
3.1.2 Dal fare al sapere: il Progetto Terra, gli stage e la commessa.....	97
3.1.3 La programmazione didattica e i riferimenti alle Indicazioni Nazionali per i licei....	99
3.1.4 Esempi di apprendimento della matematica attraverso l'alternanza formativa.....	112
3.2 La matematica al professionale	131
3.2.2 Dal fare al sapere: la commessa	132
3.2.3 La progettazione didattica e i riferimenti agli OSA	133
3.2.4 Esempi di apprendimento della matematica attraverso l'alternanza formativa.....	139
Capitolo 4. Conclusione e sviluppi futuri.....	147
Bibliografia	149
Sitografia.....	151

Introduzione

Questo lavoro di ricerca si propone di approfondire il tema della didattica della scuola secondaria di secondo grado apportando un esempio di metodo che, attraverso l'esperienza, permette agli studenti di comprendere l'importanza della conoscenza del sapere matematico e di apprenderlo senza le forzature che gli stereotipi della didattica tradizionale impongono.

Le metodologie didattiche che ho indagato si basano sulla proposta “*Dal fare al sapere*” utilizzata presso la *Scuola Oliver Twist*, facente parte dell'ente *Cometa Formazione s.c.s.* di Como, in cui ho insegnato per tre anni.

La “*mission*” di Cometa è di favorire lo sviluppo dei talenti di ciascuno studente prevenendo le difficoltà della crescita attraverso un ambiente stimolante in cui ciascuno si senta valorizzato e acquisti fiducia nelle proprie capacità. La formazione dei giovani è favorita dalla collaborazione con le aziende del territorio che permettono ai ragazzi di svolgere tirocini e di confrontarsi con il mondo reale del lavoro acquisendo competenze specifiche.

Pertanto, le metodologie didattiche utilizzate presso la Scuola Oliver Twist si fondano innanzitutto sulla centralità della persona umana. L'innovazione che Cometa Formazione si propone di apportare alla didattica si basa su un modello di scuola pensata, non come istituzione ma, come composta da persone fisiche, docenti e studenti, dotate di intelligenze diverse, ognuna delle quali meritevole di svilupparsi a pieno. Per permettere che questo avvenga, Cometa si prende cura prima di tutto dell'ambiente, inteso come contesto educativo nel quale accogliere gli studenti. Non si può pensare all'educazione di un individuo senza considerare il contesto culturale, sociale, economico, naturale, etc. in cui questo vive. L'apprendere attraverso l'esperienza è un tentativo di intrecciare la cultura posseduta e la cultura appresa per favorire il pieno ed armonico sviluppo di ciascuno.

La cultura non viene intesa come l'essere in possesso di determinate nozioni e nemmeno come il padroneggiare determinate conoscenze, va intesa in senso più ampio. Attraverso una didattica per problemi e progetti, legata all'esperienza di vita reale e di lavoro quotidiano si vuole far acquisire agli studenti la capacità di “giudizio”, cioè la capacità di

distinguere il bene dal male, il reale dal virtuale, il personale dal sociale, etc. per poi tradurre questa capacità in vita, in azioni concrete.

Infine, attraverso i problemi di realtà proposti ai ragazzi, si creano situazioni che aiutino a percepire la necessità di andare oltre le proprie conoscenze e di approfondire quelle già possedute per ottenere il risultato desiderato. In questo modo, anche le discipline più ostiche, come la matematica, che presentata attraverso la didattica tradizionale ha l'aspetto di essere una materia astratta senza nessun collegamento con la realtà, possono diventare oggetto di curiosità e di interesse. Lo scopo di questa ricerca è proprio quello di verificare se questa didattica permette di stimolare la curiosità e l'interesse, nonché la motivazione degli studenti all'apprendimento della matematica grazie all'immediato riscontro circa l'utilità nella vita reale e nel lavoro. Si vuole creare un ambiente di apprendimento che permetta ai discenti di "costruire" il sapere e di raggiungere il proprio livello senza alcuna costrizione. Come un artigiano costruisce il proprio prodotto, lo studente può costruire il proprio sapere, con la fatica che questo richiede, nel rispetto dei tempi di ciascuno, a dimostrazione del fatto che le discipline non sono fatte per essere imparate ma per essere apprese non trascendendo la storia personale, ambientale e culturale vissuta da ciascuno.

In Cometa Formazione, ci si propone di insegnare agli studenti un metodo che gli consenta di approcciarsi alle varie discipline, permettendone anche le connessioni; gli studenti sono chiamati a risolvere un problema, si pongono domande, procedono per tentativi ed errori fino a trovare la strada corretta per la risoluzione del problema.

Nel progetto di ricerca sono partita da un'analisi della letteratura circa la didattica e le metodologie didattiche innovative per poi affrontare un focus sulla matematica e sulla didattica della matematica. Lo scopo è ricercare metodologie didattiche che possano aiutare gli studenti a comprendere la fatica che l'apprendimento della matematica comporta e i docenti a presentare la materia non più come astratta e carica di nozioni da imparare a memoria, ma come una materia viva, utile allo studente nei vari contesti ambientali, culturali e sociali di cui fa parte.

Sono, infine, riportati esempi, a partire dalla programmazione, di insegnamento/apprendimento della matematica attraverso le metodologie innovative da me stessa sperimentate presso il Liceo Artigianale di Cometa Formazione e esempi di attività che ho potuto osservare dai miei colleghi degli indirizzi professionali.

Si è scelto di analizzare la didattica della matematica in Cometa in quanto si propone di creare un ponte tra i programmi ministeriali e le esigenze dei giovani di oggi. L'obiettivo di Cometa è formare dei futuri cittadini "pensanti" che riescano ad analizzare in modo critico le situazioni problematiche che si ritroveranno ad affrontare nel loro percorso di vita. Questo tipo di formazione personale non può non passare attraverso le discipline. In modo particolare la matematica è la disciplina che più di tutte aiuta a sviluppare il senso critico dell'individuo che gli studenti di oggi hanno la necessità di riscoprire nella sua accezione originale. I concetti non si vogliono trasmettere attraverso la lezione frontale tipica della didattica tradizionale, lo scopo è permettere agli studenti di scoprire, attraverso un loro percorso personale fatto di tentativi ed errori, il processo che porta alla formazione dei concetti matematici.

Questa proposta didattica vuole far riscoprire la motivazione all'appropriazione del sapere matematico negli studenti, stimolandone la curiosità, l'interesse e il senso critico. Questo lavoro non è esaustivo delle possibili metodologie da applicare ma ha scopo esemplificativo di come l'utilizzo di metodologie alternative alla lezione frontale, il procedere per progetti o problemi, la promozione del metodo scientifico e soprattutto il legame con la realtà facilita non solo l'apprendimento ma anche l'insegnamento della matematica, in quanto stimola la curiosità, generando motivazione.

Capitolo 1.

Riflessioni sulla didattica e la questione del metodo

«Se tentiamo di innestare l'educazione nella realtà del vivere umano ci troviamo subito di fronte al contesto sociale in cui si svolge la nostra vita»¹ e avvertiamo, in maniera sempre più accentuata, che la possibilità del realizzarsi dell'educazione è sempre più legata al problema della libertà. L'uomo, da sempre, si trova in un mondo che da un lato è pieno di pressioni e problemi, dall'altro di opportunità. «Forse mai come ora il pericolo per l'uomo sta non tanto nell'area delle necessità materiali, ma soprattutto nella possibile perdita della sua condizione di uomo, che si lascia annegare nelle correnti massificanti oggi più forti che mai»². Queste correnti massificanti, oggi, possono essere individuate nei mezzi di comunicazione di massa in quanto riducono la capacità di discutere e di fatto "abbrutiscono" l'uomo. Per ovviare a questo, è necessario che l'educazione sviluppi «nell'uomo essenzialmente la sua capacità di comunicazione, vale a dire la sua capacità di espressione e di comprensione. In altri termini, le diverse forme di linguaggio devono costituire il nucleo fondamentale della formazione culturale e scientifica dell'uomo di oggi»³. L'uomo ha l'esigenza di esprimere la propria interiorità, questo rafforza la necessità «che la formazione culturale poggi soprattutto sulla capacità di espressione»⁴. La rappresentazione della realtà avviene attraverso tre modelli e i tre linguaggi utilizzati per esprimerli. Il primo modello è quello iconico che si esprime attraverso un «linguaggio plastico, pittorico o diretto, nel quale si percepisce sensibilmente la relazione tra il modello e la realtà»⁵. Il secondo modello è quello analogo, anche questo modello viene espresso con un linguaggio grafico o plastico «ma implica già una certa astrazione, una maggiore generalizzazione rispetto a quello iconico, e con esso è possibile rappresentare sistemi dinamici. Il modello simbolico è il più astratto; in esso si utilizzano i linguaggi matematico e verbale»⁶. Questi linguaggi sono espressione dell'attività intellettuale

¹ V. Garcia Hoz, *L'educazione personalizzata*, a cura di Giuseppe Zanniello, La Scuola, Brescia, 2009, p. 47

² *Ivi* p. 48

³ *Ivi* p. 55

⁴ *Ivi* p. 56

⁵ *Ivi* p. 57

⁶ *Ibidem*

dell'uomo. Pertanto, «l'educazione di oggi deve avere come uno dei suoi obiettivi lo sviluppo della capacità di espressione e di comprensione verbale, matematica, plastica e dinamica»⁷. «Si tratta di un modo nuovo di impostare l'insegnamento, nel quale il linguaggio diventa realmente espressivo attraverso le manifestazioni immediate e scientifiche del mondo in cui vive l'alunno e, a loro volta, i diversi ambiti di conoscenza acquistano un maggior valore espressivo e un maggiore rigore perché tutti e ciascuno di essi sono appresi come un qualcosa che può e deve essere espresso verbalmente, matematicamente, plasticamente e dinamicamente»⁸.

A queste quattro espressioni corrispondono altrettante attività: l'attività linguistica, l'attività matematica, l'attività tecnica e artistica e l'attività musicale. Queste costituiscono lo schema formale del lavoro scolastico. Le materie insegnate a scuola «più che essere concepite come materie, dovrebbero essere intese come «nuclei di esperienza», intorno ai quali si progettano tutti i mezzi di espressione. Il valore educativo dell'espressione si fonda sul fatto che è il culmine di un processo intellettuale che sfocia in una conoscenza o in una abilità»⁹. Per poter incentrare il lavoro scolastico sull'espressione bisogna partire dall'esperienza dell'alunno per generare in lui conoscenze, abilità e competenze. Questo deve avvenire già nella scuola dell'infanzia in cui i nuclei d'esperienza vengono scelti dal docente. In questa fase non sono importanti le conoscenze che il bambino deve acquisire quanto la capacità di espressione che questo deve sviluppare. Durante gli anni della scuola primaria, i nuclei di esperienza dovranno essere scelti in modo che coprano tutti i campi di conoscenza che si ritengono importanti per l'alunno e che lo rendano capace di entrare nel mondo della scienza sistematica. Nella scuola secondaria di primo grado i nuclei di esperienza vengono strutturati in materie, in modo che alla fine del percorso lo studente abbia una visione ordinata del campo della cultura e possa scegliere consapevolmente il proseguimento dei suoi studi. Infine, nella scuola secondaria di secondo grado «il programma delle attività dovrà includere le aree culturali o di conoscenze che nel loro insieme costituiscono una cultura generale sistematica. [...] L'esplicita menzione delle aree culturali non può far dimenticare che anche in questa tappa della loro formazione scolastica gli studenti devono man mano sviluppare la capacità di riflessione e di espressione, che assumerà già un carattere critico,

⁷ *Ivi* p. 59

⁸ *Ibidem*

⁹ *Ivi* p. 60

ma che continuerà a rivestire le stesse forme di espressione verbale, matematica, plastica e dinamica di cui si è detto»¹⁰.

L'insegnamento, nella nostra società, è affidato a diverse istituzioni, come la famiglia, la scuola, la chiesa, il mondo del lavoro, incaricate di trasmettere il sapere specifico di propria competenza. L'educazione può essere concepita in due forme diverse: come un processo di assimilazione culturale e morale o come un processo di separazione individuale. Si definisce processo di assimilazione perché le nuove generazioni sono influenzate dalle generazioni adulte, assimilando gli usi e le forme sociali della comunità a cui appartengono. Si definisce «processo di separazione individuale, perché con essa si fa in modo che il soggetto sviluppi e realizzi le sue personali capacità»¹¹. Non è semplice definire degli obiettivi comuni quando si tratta di educazione. «Di solito gli educatori concepiscono l'educazione come un processo di assimilazione. I genitori vogliono che i figli si comportino come loro e gli insegnanti sperano che gli alunni pensino come pensano loro»¹². Questo accade perché il desiderio di accompagnare l'altro nel proprio percorso di vita fa dimenticare il carattere unico di ogni persona. L'educazione vista come processo di separazione individuale aiuta l'educatore a personalizzare la sua azione ponendo l'attenzione sull'individuo affinché questo riesca a sviluppare la capacità di governare la propria vita e di rendere effettiva la libertà personale partecipando alla vita comunitaria con le proprie peculiarità.

L'esigenza di far sviluppare la personalità dell'educando ha portato negli anni a distinguere diverse tipologie di educazione: l'educazione individuale, l'educazione collettiva, l'educazione individualizzata e l'educazione personalizzata. «Quando l'educazione si realizza in modo tale che un maestro stimola e dirige il processo educativo di un solo alunno, ci troviamo di fronte all'educazione individuale»¹³. L'educazione individuale era tipica degli aristocratici che potevano permettersi il maestro che istruisse un ragazzo nobile. Con la nascita delle scuole l'educazione individuale lasciò il posto a quella collettiva. «Nell'educazione collettiva o comune un solo maestro stimola e dirige l'educazione di un gruppo di alunni»¹⁴. Entrambe queste forme di educazione hanno,

¹⁰ *Ivi* p. 61

¹¹ V. Garcia Hoz, *L'educazione personalizzata* a cura di Giuseppe Zanniello, *cit.* p. 21

¹² *Ivi* pp. 21-22

¹³ *Ivi* p. 25

¹⁴ *Ibidem*

però, dei limiti. L'educazione individuale isola l'alunno dal gruppo dei pari non permettendogli, pertanto, di stabilire delle relazioni sociali, fonte principale della formazione del ragazzo e del suo inserimento nella società. Inoltre, c'è il rischio che lo studente si affidi completamente al sapere dell'educatore a discapito dello sviluppo delle proprie capacità personali. L'educazione collettiva realizza l'inserimento dello studente nel gruppo dei pari e quindi il suo cammino verso l'inserimento nella società. In questo tipo di educazione gli studenti ricevono gli stessi stimoli, indipendentemente dalle loro peculiarità. La risposta alle sollecitazioni avviene individualmente, ogni alunno lavora per sé.

Accanto a queste due forme tradizionali di educazione ce n'è una terza: l'insegnamento individualizzato. Quest'ultimo «intende utilizzare le opportunità delle due tradizionali modalità educative neutralizzandone i difetti»¹⁵. L'insegnamento individualizzato si realizza in due momenti: nella prima fase l'educatore offre uno stimolo comune a tutti per poi prestare attenzione al processo di apprendimento che avviene nel singolo individuo. Nel corso degli anni l'educazione individualizzata si è trasformata in educazione personalizzata «dove l'attenzione all'individuo non si presenta come opposta alle esigenze sociali, ma piuttosto come una via per rafforzare interiormente la persona, rendendola così più efficiente per la società»¹⁶. L'educazione personalizzata si basa sulla considerazione dell'uomo come essere attivo che osserva e modifica il mondo che lo circonda. «Il più profondo significato dell'educazione personalizzata consiste non nell'essere un modo o un metodo nuovo e più efficace di insegnamento, ma nel convertire il lavoro di apprendimento in un elemento di formazione personale attraverso la scelta di compiti e l'accettazione di responsabilità da parte dell'alunno stesso»¹⁷. Personalizzare l'educazione vuol dire tenere conto delle peculiarità di ciascun allievo e stimolarne lo sviluppo. Per poter agire in questo senso l'educatore ha bisogno di avere una diagnosi del soggetto in modo da avere chiare le possibilità e i limiti che il soggetto presenta nel suo sviluppo educativo. «L'educazione personalizzata si basa su una duplice convinzione: quella secondo cui ogni uomo, nonostante i suoi limiti, può dare un senso alla sua vita; e quella secondo cui un rendimento, anche se è riconosciuto come sufficiente dalla società,

¹⁵ *Ivi* p. 26

¹⁶ *Ivi* p. 27

¹⁷ *Ibidem*

non può essere accettato come tale se il soggetto è capace di dare di più di quanto ha dato»¹⁸.

«L'educazione raggiunge la sua massima qualità quando riesce a scoprire e a sviluppare ciò che, con un'espressione classica, si può definire «eccellenza personale»»¹⁹.

1.1 Concetto di didattica

La didattica, intesa come disciplina di studio, è una parte della pedagogia che ha per oggetto l'insegnamento e le relative metodologie. Insegnare deriva dal latino con il significato di "far conoscere". In italiano significa «rendere qualcuno partecipe delle conoscenze disponibili in un determinato campo [...] Indica inoltre l'insieme di conoscenze degno di essere appreso [...] e il bagaglio di conoscenze apprese e non innate»²⁰.

Si distinguono tre diverse accezioni di insegnamento. La prima, è un'interpretazione centrata sul docente e considera l'insegnamento come «reazione o come sequenza di risposte a stimoli condizionati e incondizionati, un'immagine della mente concepita come tabula rasa, plasmabile e influenzabile dall'esterno»²¹. L'insegnamento sarebbe così determinato esclusivamente dall'azione didattica in grado di trasmettere conoscenze e contenuti come risposta a determinati stimoli.

La seconda accezione vede l'insegnamento come un'attività volta a promuovere «l'apprendimento di conoscenze, strategie e processi»²² riconoscendo l'attività della mente. Pertanto «sebbene l'insegnamento miri alla promozione dell'apprendimento, di fatto predispone, costruisce e organizza le condizioni affinché esso si realizzi, ma non può determinarlo»²³. L'attivazione dei processi e il loro sviluppo dipendono dalle condizioni del discente.

L'ultima accezione si propone «di osservare e di potenziare la riflessione dell'allievo, giudicata fondamentale per gestire, monitorare, controllare e auto dirigere l'apprendimento»²⁴. Tutte queste accezioni di insegnamento prevedono la trasmissione,

¹⁸ *Ivi* p. 41

¹⁹ *Ivi* p. 44

²⁰ G. Bertagna, P. Triani (eds.) *Dizionario di Didattica - Concetti e dimensioni operative*, Scholé, 2019, p.222, G. Amenta

²¹ *Ivi* p. 223

²² *Ivi* p. 224

²³ *Ivi* pp. 224-225

²⁴ *Ivi* p. 225

diretta o indiretta, della conoscenza attraverso l'azione didattica. In questo senso, il sapere viene visto come un cumulo di nozioni trasferibili dal docente al discente. Il docente è considerato, così, il principale responsabile dell'apprendimento in quanto, attraverso una scrupolosa programmazione delle attività, è in grado di infondere le conoscenze nella mente dell'allievo. Questo tipo di descrizioni entrano in conflitto con l'attuale idea che l'apprendimento scaturisca «da processi di costruzione realizzati dal soggetto che apprende»²⁵. La conoscenza, pertanto, non deriva dall'esterno ma viene costruita all'interno del soggetto che apprende, le conoscenze non possono essere trasferite se non trovano le condizioni opportune per l'apprendimento all'interno del discente. L'apprendimento «costituisce l'esito di attività, di operazioni e di processi costruttivi compiuti da ciascun discente che, pertanto, nessuno può realizzare al suo posto»²⁶. In questa accezione, l'insegnamento si incentra sulla costruzione delle conoscenze, su come il docente possa aiutare l'allievo a individuare, tra le teorie in suo possesso, quelle valide e quelle errate e lo possa guidare nella costruzione di teorie più efficaci che gli permettano di orientarsi nella realtà. «Il ruolo dell'educatore [...] si traduce in quello di guida non direttiva, di facilitatore e di mediatore delle relazioni [...] Il docente nella fattispecie è chiamato a rispettare i ritmi, i tempi, l'autonomia, i bisogni e le preferenze dell'alunno, a realizzare interventi delicati e attenti, a evitare di passivizzare l'allievo e a non interferire nei suoi processi di crescita, di apprendimento, di cambiamento»²⁷. A tal riguardo si parla di individualizzazione e di personalizzazione della didattica. Queste due modalità di insegnamento non sono sempre semplici da attuare in quanto l'individualizzazione implica una serie di difficoltà legate all'eterogeneità delle classi che non permette di attuare percorsi individuali per ogni singolo alunno e la personalizzazione porta con sé il rischio di non costruire conoscenza ma di limitarsi a prendere atto e affermare la situazione iniziale dell'allievo.

«In ambito didattico, si parla di individualizzazione quando un'attività di insegnamento comune ad un gruppo classe si diversifica in base ad alcuni aspetti particolari dell'apprendimento di un singolo allievo»²⁸. Il concetto di individualizzazione viene inserito ufficialmente nelle politiche scolastiche italiane con l'introduzione del concetto

²⁵ *Ivi* p. 226

²⁶ *Ivi* p. 227

²⁷ *Ivi* p. 234

²⁸ *Ivi* p. 210, G. Sandrone

di programmazione dell'attività didattica tesa al raggiungimento di obiettivi comuni, nei Decreti Delegati del 1974. Con la Legge n. 517/1977 si pone maggior rilievo all'individualizzazione a partire dalla valutazione, successivamente si fa riferimento all'individualizzazione nella *Premessa ai programmi della scuola media* del 1979 in cui si sottolinea che per rimuovere i condizionamenti sociali bisogna garantire a tutti gli stessi traguardi utilizzando come strategia di intervento l'individualizzazione in modo da permettere ai docenti di intervenire con modalità e tempi differenti sull'apprendimento dell'allievo per raggiungere gli stessi obiettivi. Da sottolineare che l'esigenza di individualizzare i percorsi di apprendimento non modifica il raggiungimento dei traguardi che rimangono comuni al gruppo classe, lo scopo della didattica individualizzata è quello di superare le diversità individuali per permettere al singolo di poter trovare la propria identità e funzione all'interno della società in cui è inserito.

La personalizzazione «esprime il modo con cui la persona, mentre si manifesta agli altri o si riconosce a sé sul piano storico ed empirico [...], scopre, al contempo, di non potersi mai esaurire in queste molteplici manifestazioni perché, in realtà, le fonde unitariamente e le rende possibili»²⁹. In questo senso, l'azione didattica è vista come «il processo educativo attraverso il quale ogni essere umano riconosce progressivamente sé stesso e gli altri esseri umani»³⁰. L'educazione personalizzata mette in rilievo il fatto che il compito di ascoltare non è solo proprio dell'alunno ma anche l'insegnante ha il compito di farlo. La personalizzazione si può declinare in tre diversi livelli didattici. Nel primo livello si è consapevoli che l'insegnamento non ha come fine la trasmissione dei contenuti delle singole discipline ma l'utilizzo di questi contenuti per mettere in risalto le qualità di ogni persona. Nel secondo livello personalizzare vuol dire agire in modo da superare la rigidità dovuta all'imposizione di regole istituzionali differenziando e rendendo flessibile l'organizzazione istituzionale per fare in modo che si adatti all'esercizio della libertà personale del singolo individuo. Nel terzo livello la personalizzazione si riferisce alla crescita individuale e mira a far discernere le routine meccaniche e non interiorizzate da quanto è frutto di azioni vere e proprie.

Con la legge n. 170/2010 relativa agli allievi con Disturbi specifici di Apprendimento (DSA) i due concetti di individualizzazione e personalizzazione vengono accostati.

²⁹ *Ivi* p. 284, G. Sandrone

³⁰ *Ivi* p. 285

«Nello specifico contesto dei DSA, si scopre così che, secondo il Ministero dell'Istruzione, la didattica individualizzata si identificerebbe «con attività di recupero individuale volte a potenziare determinate abilità o per acquisire specifiche competenze, anche in presenza di strategie compensative», mentre la didattica personalizzata si sostanzierebbe «attraverso l'impiego di una varietà di metodologie e strategie didattiche, atte a promuovere le potenzialità e il successo formativo in ogni alunno»»³¹.

«Concretamente, occorre realizzare attività didattiche in grado di garantire l'accesso al patrimonio di conoscenze comuni e di abilità sociali, ancorché attraverso la diversificazione dei percorsi adatti a ciascuno, e di assicurare considerazione e risposte qualificate ai bisogni formativi personali e individuali»³².

Le attività didattiche hanno il fine ultimo di generare apprendimento. L'apprendimento si concretizza nella costruzione di nuove conoscenze e nella trasformazione di quelle già possedute e «determina il cambiamento delle strutture cognitive e dei conseguenti processi interpretativi della realtà»³³. Questa definizione di apprendimento abbraccia l'orientamento secondo il quale «l'apprendimento non consiste nella trasmissione o nell'acquisizione di conoscenze statiche, oggettive, derivanti dall'esterno. Al contrario, consiste nella modifica delle strutture e dei processi preposti alla comprensione della realtà, ovvero consta nel cambiamento della persona, del suo modo di pensare e della sua capacità di considerare le cose da differenti punti di vista, sulla base del processo di adattamento tra individuo ed ambiente»³⁴. Questa interpretazione si avvicina alla definizione di apprendimento per scoperta, secondo la quale l'apprendimento avviene per tentativi ed errori in cui il soggetto è ritenuto capace di dirigere intenzionalmente il proprio apprendimento. «L'apprendimento è interpretato, inoltre, come il risultato della pratica, delle ripetizioni, dell'esperienza»³⁵. In questa concezione si riconosce l'importanza della rielaborazione personale e di un'interazione di tipo simmetrico tra chi insegna e chi impara.

Contrapposta alla prima, c'è la definizione secondo la quale la mente è una tabula rasa che si riempie e si modella man mano che entra in contatto con le situazioni che

³¹ G. Bertagna, P. Triani (eds.) *Dizionario di Didattica- Concetti e dimensioni operative*, cit. pp. 217-218, G. Sandrone

³² *Ivi* p. 237, G. Amenta

³³ *Ivi* p. 41, G. Amenta

³⁴ *Ibidem*

³⁵ *Ivi* p. 47

permettono di formare nuovi nessi mentali. In questa prospettiva il sapere «scaturirebbe dall'aggregare conoscenze ritenute per lo più statiche, oggettive, imm modificabili»³⁶. Questo tipo di apprendimento implica dei processi di natura imitativa, assimilativa e riproduttiva. Il discente è considerato un contenitore passivo in cui trasferire la conoscenza nella stessa misura in cui è presente nel docente.

Sono diverse le situazioni apprenditive davanti alle quali può trovarsi un discente che deve riuscire a riconoscere quale metodologia di apprendimento sia più efficace in quella determinata situazione, abbandonando l'idea di assumere a priori che ci siano modelli di apprendimento migliori di altri. Il discente deve essere in grado di utilizzare il modello di apprendimento più consono alla situazione davanti la quale si trova. Per raggiungere tale autonomia ha bisogno di essere guidato dall'educatore, che attraverso un metodo gli suggerisca la strada da percorrere per arrivare alla destinazione prefissata.

In letteratura si fa distinzione tra metodo didattico e metodo educativo: il primo indica l'atto di insegnare principalmente all'interno del contesto scolastico, il secondo si riferisce agli interventi messi in atto intenzionalmente da una qualunque figura educativa e quindi in un contesto extrascolastico. Un processo educativo dipende, però, da alcuni fattori come l'educando stesso e le operazioni cognitive che egli compie, la forma che assume il rapporto tra educatore ed educando, la forma che assume un gruppo di discenti che condivide la stessa esperienza educativa, il lavoro che svolge l'educatore, l'insieme dei contenuti del processo educativo, le pratiche messe in atto per svolgere l'attività educativa e infine gli spazi, i tempi, il linguaggio attraverso i quali avviene l'intervento educativo. Le operazioni cognitive compiute dall'allievo per apprendere e le pratiche messe in atto dall'educatore rientrano nella categoria pedagogica delle azioni umane. L'azione umana non è solamente movimento ma vuol dire produrre, far sorgere qualcosa «anche una “misteriosa” ed esclusiva qualità che accompagnerebbe sia il movimento umano, sia le operazioni volte alla realizzazione di uno scopo: ovvero la consapevolezza che ambedue queste dimensioni starebbero generando qualcosa che fa crescere chi le compie e rende umanamente migliori, pure più felici»³⁷. Pertanto, l'azione umana è un movimento volto alla realizzazione di uno scopo caratterizzato da intenzionalità, ragione, libertà e responsabilità.

³⁶ *Ivi* p. 43

³⁷ *Ivi* p. 56, G. Bertagna

«L'assunzione di una prospettiva metodologica che consideri come punto focale, ma non unico, il soggetto discente e che intenda il metodo come realtà dinamica finalizzata alla formazione integrale della persona, comporta la scelta di due principi regolativi»³⁸: il primo mette al centro dell'attività didattica il coinvolgimento attivo dell'educando, il secondo è quello di adeguare l'intervento educativo alla singola persona e non al profilo del discente medio. L'apprendimento permette al discente l'acquisizione di conoscenze, abilità, competenze e capacità.

«Il processo conoscitivo e le conoscenze sono per l'insegnamento condizione, in quanto non sarebbe possibile insegnare qualcosa se non ci fosse nulla di insegnabile e se il soggetto non avesse alcuna capacità di conoscere. Sono inoltre oggetto, in quanto insegnare in quanto tale è cercare di rendere determinate conoscenze acquisite dalla cultura umana [...] patrimonio conoscitivo dei singoli alunni. [...] Sono, in terzo luogo, obiettivo dell'azione didattica, poiché il conoscere e le conoscenze, [...] sono il risultato [...] di un processo di interazione tra il discente e la realtà, mediato dalle forme del soggetto, dell'oggetto, dell'azione didattica»³⁹.

Conoscenze e abilità formano una prima coppia categoriale che «coinvolge il di e per tutti. Riguardando il sapere e il saper fare ed essendo qualcosa di concettuale, essa astrae per definizione dai casi concreti personali e si propone come un universale intersoggettivo indipendente dai soggetti, da condividere e da trasmettere a tutti i cittadini»⁴⁰.

L'abilità nella sua accezione semantica indica colui che acquisisce qualcosa per poi usarla con destrezza, «è fare sempre meglio ciò che si vuole e si può fare»⁴¹. In didattica l'abilità è considerata «l'insieme degli specifici tratti che permettono alla persona l'esecuzione qualitativamente eccellente dei compiti»⁴². Per raggiungere questa eccellenza bisogna che il discente si alleni sulla stessa azione con esercizi ripetuti: senza ripetizione non si può sviluppare abilità. Le abilità possono avere diversa natura; ci sono abilità cognitive, affettive, psicomotorie e di studio. Per definire in maniera completa il concetto di abilità è opportuno tenere in considerazione che questa implica più dimensioni: emulazione, utilità e cooperazione. Infatti «Non c'è abilità possibile dove non c'è *zèlos*, l'emulazione

³⁸ *Ivi* p. 268, P. Triani

³⁹ *Ivi* p.123, P. Triani

⁴⁰ G. Bertagna. *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, La Scuola, 2004, p. 21

⁴¹ G. Bertagna, P. Triani (eds.) *Dizionario di Didattica - Concetti e dimensioni operative*, cit. p.16, L. Perla

⁴² *Ivi* p. 17

positiva»⁴³; non c'è abilità senza competizione. La seconda dimensione è l'utilità. «È abile chi fa, produce, crea qualcosa che dura nel tempo e che è apprezzata da chi lo impiega perché ne ha bisogno: gli è utile»⁴⁴. La terza è la cooperazione, «produrre qualsiasi cosa, d'altra parte, senza coordinarsi con le azioni di altri soggetti risulta impossibile. E ciò non può certo realizzarsi nel disordine di chi non rispetta le parti assegnate e non distribuisce a ciascuno il suo compito»⁴⁵.

Capacità e competenze formano un'altra coppia categoriale che «si riferisce alla persona, e coinvolge il suo essere, il suo vivere unico ed irripetibile nei rapporti particolari che instaura, nei luoghi che frequenta, nei problemi che affronta e risolve. Coinvolge in ultima analisi il ciascuno.»⁴⁶ Al contrario dell'abilità che può essere acquisita, per capacità «si può intendere una potenzialità e una propensione attiva della persona umana»⁴⁷ senza che per forza abbia trasformato questa potenzialità in realtà. Si può quindi sostenere che il termine capacità indichi «ciò che una persona sarebbe in grado di fare, pensare, e agire se fosse posta nelle condizioni ambientali e sociali di farlo»⁴⁸. «Non esiste altra strada, allora sul piano pedagogico, diversa da quella di attribuire a ciascun essere umano che, in quanto soggetto è unico ed esclusivo, tutte le capacità che qualificano in generale gli esseri umani in quanto uomini»⁴⁹. Sarà poi compito dell'azione didattica definire degli obiettivi educativi ben precisi «per interrogare e scoprire sempre più e meglio i livelli e le forme delle specifiche capacità di ciascuno nei vari campi della sua umanità, così da favorirne [...] il più alto ed armonico dispiegamento possibile»⁵⁰. «Non bisogna far coincidere la competenza (che resta in atto) con la capacità (che resta una potenza): le due dimensioni sono tra di loro correlate ma distinte»⁵¹.

È considerato competente «colui che ha trasformato le proprie capacità in un agire consapevole, autonomo e responsabile, che gli permette di affrontare [...] la risoluzione di problemi, l'esecuzione di compiti, l'elaborazione di progetti, utilizzando al meglio tutto

⁴³ G. Bertagna. *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, cit. p. 63

⁴⁴ *Ibidem*

⁴⁵ *Ivi* p. 64

⁴⁶ *Ivi* p. 21

⁴⁷ *Ivi* p. 23

⁴⁸ G. Bertagna, P. Triani (eds.) *Dizionario di Didattica- Concetti e dimensioni operative*, cit. p.73, G. Sandrone

⁴⁹ Id. *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, cit. p. 25

⁵⁰ *Ibidem*

⁵¹ G. Bertagna, P. Triani (eds.) *Dizionario di Didattica - Concetti e dimensioni operative*, cit. p.75, G. Sandrone

il sapere posseduto e le risorse interne ed esterne che sono a sua disposizione»⁵². La competenza può essere vista, dunque come la «ricomposizione finale delle prestazioni analitiche apprese»⁵³. La competenza non viene accertata solo in contesto scolastico ma anche in contesti esterni alla scuola ma comunque facenti parte della vita dello studente. «È, infatti, nei luoghi di vita reale degli studenti e nelle modalità con cui questi affrontano problemi, compiti o progetti altrettanto reali che si può osservare quanto una competenza si mostra esperta e diventa davvero modo di essere ordinario di una persona»⁵⁴. Pertanto, le competenze personali influenzano il comportamento del discente. Il comportamento umano è infatti, secondo la concezione comportamentista, interpretabile «come risposta osservabile e misurabile a specifici stimoli situazionali»⁵⁵. Si riconosce così l'importanza dell'interazione tra la persona e la situazione e il comportamento è interpretato «come l'esito dell'interazione tra due sottoinsiemi complessi [...] in cui il comportamento è considerato funzione dell'interdipendenza tra variabili appartenenti sia alla persona, sia all'ambiente o situazione»⁵⁶. In ambito educativo la situazione viene creata dall'educatore o è data dalla relazione stessa tra educando e educatore e/o tra educando e classe. «Oggi si assiste ad un'ulteriore rivalutazione del rapporto interumano pensando ad una relazionalità che assume una modularità circolare [...] Colui che apprende, benché immaturo, incide sul comportamento di colui che educa, lo sollecita a rivedere le sue posizioni e i suoi modelli comportamentali»⁵⁷. Dal punto di vista propriamente didattico la parola relazione consente qualche tratto semantico della relazione didattica rispetto a quella educativa: il primo tratto riguarda la connessione «fra chi per ruolo genera apprendimento e chi per ruolo lo riceve in vista di una crescita, maturazione e strutturazione personale. Un tipo di connessione che favorisce il passaggio dal piano della semplice socializzazione a quello della reciprocità, a quello della collaborazione per la condivisione di obiettivi comuni»⁵⁸; il secondo tratto riguarda la dimensione comunicativa. «Nella relazione didattica è possibile riconoscere (attribuire) a colui che insegna il compito di risolvere la “dissonanza cognitiva” utilizzando il processo

⁵² *Ivi* p. 82

⁵³ G. Bertagna. *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, cit. p. 33

⁵⁴ G. Bertagna, P. Triani (eds.), *Dizionario di Didattica - Concetti e dimensioni operative*, cit. p.92, G. Sandrone

⁵⁵ *Ivi* p. 97, G. Amenta

⁵⁶ *Ivi* p. 99

⁵⁷ *Ivi* pp. 339-340, C. Gemma

⁵⁸ *Ivi* p. 340

comunicativo della spiegazione [...] crea le premesse per un tipo di relazione che consente al soggetto in apprendimento di ottenere i necessari chiarimenti per dipanare il disorientamento e la confusione che sovente si manifestano in una nuova conoscenza»⁵⁹. Per fare in modo che l'apprendimento avvenga correttamente «la spiegazione deve essere puntuale dal punto di vista contenutistico e comunicativo, oltre che adeguata alle reali possibilità e alle effettive capacità di chi deve apprendere. Nella consapevolezza che una mancata comprensione alla spiegazione non è sempre da attribuire all'allievo, bensì allo stesso insegnante e alla modalità relazionale instaurata»⁶⁰. Il successo o l'insuccesso apprenditivo dipendono, quindi, dalle dinamiche sociali e in particolar modo dal rapporto che si instaura tra docente e allievo. «La relazione è la discriminante della persona. Quando si perde fa perdere addirittura la persona stessa in quanto «io»»⁶¹. La relazione tra docente e allievo si instaura in particolar modo durante la lezione. «Non si può educare ed educarsi, infatti, nascendo, crescendo e restando soli, non instaurando una relazione con nessuno. Bisogna sempre almeno essere in due»⁶². In ambito pedagogico-didattico si individuano due accezioni del termine lezione. La prima accezione è quella della lezione frontale che ha carattere prevalentemente verbale in cui il docente ha il compito di comunicare e l'allievo quello di comprendere. Questo tipo di lezione non permette a docente e allievo di instaurare una relazione ma corre il rischio di collocare l'allievo in posizione passiva, subordinata. La seconda accezione è quella che vede la lezione come veicolo di approcci innovativi «che includono attività finalizzate a favorire una partecipazione più attiva e critica da parte della classe, anche attraverso lo scambio in gruppo e con l'insegnante, la valorizzazione delle rappresentazioni mentali degli allievi, riferimenti relativamente diretti alla realtà»⁶³. La lezione intesa come relazione non è facilmente programmabile anzi la sua conduzione può avere un andamento imprevisto in base alle risposte e alle reazioni degli studenti. «Una lezione non si risolve con la proposta di saperi, ma include un insieme articolato di aspetti, quali una fase di preparazione al compito, in cui l'insegnante, da solo o con il coinvolgimento degli allievi, introduce

⁵⁹ *Ivi* p. 341

⁶⁰ *Ivi* p. 342

⁶¹ G. Bertagna, *Dall'educazione alla pedagogia, avvio al lessico pedagogico e alla teoria dell'educazione*, cit. p. 370

⁶² *Ivi* p. 371-372

⁶³ G. Bertagna, P. Triani (eds.), *Dizionario di Didattica - Concetti e dimensioni operative*, cit. p. 241, D. Maccario

l'attività, creando disposizione ad apprendere [...], la specificazione dello scopo, [...] una fase di vera e propria presentazione di fatti, concetti, teorie, procedure, con forme di dimostrazione di quanto deve essere acquisito, momenti di verifica, esercitazioni per aiutare i discenti ad impossessarsi dei nuovi apprendimenti»⁶⁴. «L'insegnante dovrebbe farsi carico del successo formativo dei discenti riservando loro un'attenzione personale [...] il loro sforzo e il loro impegno devono essere il più possibile valorizzati e sollecitati; gli allievi dovrebbero percepire che il docente è interessato a ciò che fanno»⁶⁵. Non è possibile educare una persona, cioè renderla libera e responsabile dei suoi atti, senza farle acquisire adeguate conoscenze e abilità che lo accompagnino ad una volontaria partecipazione al proprio processo di apprendimento. «Quando si promuove nell'alunno l'apprendimento responsabile e la correlata capacità di autoregolazione lo si sta aiutando indirettamente a porsi in un rapporto adeguato con la realtà, ad affrontarla per come essa è, in ultima analisi, a sviluppare quella capacità umana che gli permette di saper prendere decisioni autonome e di assumersene le relative responsabilità»⁶⁶. Il docente ha il compito di pianificare le attività previste in modo dinamico e flessibile a seconda dei casi che gli si presentano davanti. «Prima di pretendere che ogni alunno risponda del proprio operato, occorre chiedersi se gli erano stati comunicati correttamente gli obiettivi che era chiamato a perseguire perché la carenza di definizione e condivisione degli obiettivi è la più frequente causa di situazioni caratterizzate da scarsa assunzione di responsabilità»⁶⁷. Nel modello didattico finalizzato allo sviluppo della responsabilità l'alunno viene messo davanti ad una situazione reale da affrontare e deve essere capace di confrontare e valutare le alternative possibili alla risoluzione della situazione e di prendere una decisione. «Saper passare in modo coerente dal pensiero all'azione, dalla scelta teorica all'attuazione pratica, dall'individuazione della soluzione alla sua applicazione al caso concreto, costituisce la fase finale di un processo di apprendimento responsabilizzante, che è la base indispensabile per agire abitualmente con libertà e responsabilità nelle più diverse situazioni della vita umana»⁶⁸. Un processo di insegnamento per essere completo ed efficace non può e non deve limitarsi solo agli aspetti intellettuali «ma deve essere aperto

⁶⁴ *Ivi* p. 246

⁶⁵ *Ivi* p. 248

⁶⁶ *Ivi* p. 358, A. La Marca

⁶⁷ *Ivi* p. 360

⁶⁸ *Ivi* p. 364

all'educazione della persona nella sua interezza, compresa la dimensione affettiva»⁶⁹. Infatti, l'affettività incide in maniera significativa sul processo di apprendimento. È stato dimostrato che le emozioni negative più forti risultano associate alla percezione di essere incapaci di padroneggiare le situazioni di apprendimento. «Nascono così sentimenti di ansietà, rabbia e frustrazione»⁷⁰. L'immagine che il soggetto ha di sé è influenzata in buona parte dal successo scolastico. Uno studente apprezzato da insegnanti e compagni di classe tenderà a stimarsi, chi è considerato un fallito dagli altri, tenderà a considerarsi tale. «Il ruolo dell'insegnante è quello di interpretare comportamenti, reazioni e improvvisi cambiamenti di umore e di aiutare il discente a prendere coscienza di quello che gli sta avvenendo, mettendolo in condizione di riflettere, capire, parlare»⁷¹. Soffermandoci sul termine riflettere, questo esprime una qualità della mente umana. La riflessività è definita come tendenza ad una scrupolosa ponderazione, è quindi, tipica delle persone che non agiscono d'istinto. La didattica identifica tre declinazioni concettuali di riflessività: riflessività in didattica, riflessività sulla didattica e didattica della riflessività. La riflessività in didattica «costituisce l'«azione intelligente», che emancipa la ragione dal procedere impulsivo»⁷². La riflessività sulla didattica «è finalizzata all'avanzamento della conoscenza didattica e, in tal senso, è il dispositivo d'elezione del pensare teorico»⁷³. Infine, la didattica della riflessività è considerata come «l'insieme delle metodologie che assumono la riflessività come mediatore per il conoscere l'esperienza ma anche per la costruzione di un sapere che viene dall'esperienza. Uno degli sviluppi più importanti della didattica della riflessività è la didattica metacognitiva. «La didattica metacognitiva chiede allo studente lo sviluppo di un atteggiamento responsabile rispetto all'apprendimento: l'allievo “metacognitivo” costruisce il proprio bagaglio intellettuale attraverso domande, investigazioni, problemi posti e problemi da risolvere»⁷⁴. Questo tipo di modelli basati sulla riflessività hanno un limite principale che consiste nella difficoltà di «distinguere fra fatti e interpretazioni, cioè tra ciò che emerge dalle pratiche e ciò che viene attribuito alle pratiche dallo sguardo riflessivo dell'interprete»⁷⁵. Per guidare lo sguardo

⁶⁹ *Ivi* p. 36

⁷⁰ *Ivi* p. 34

⁷¹ *Ivi* p. 37

⁷² *Ivi* p. 383, L. Perla

⁷³ *Ibidem*

⁷⁴ *Ivi* p. 387

⁷⁵ *Ivi* p. 389

dell'interprete c'è la necessità di seguire un metodo di ricerca che sia quanto più oggettivo possibile: la ricerca scientifica. «Il sapere scientifico è un sapere in grado di spiegare, interpretare, prevedere i fenomeni osservati o osservabili con teorie prive di contraddizioni logiche interne e che prendono in considerazione solo gli elementi strettamente necessari a tali operazioni concettuali»⁷⁶. Il sapere scientifico è un sapere incerto e documentato, incerto in quanto è modificabile in base a nuove osservazioni, documentato in quanto «caratterizzato da trasparenza nelle procedure che portano alla costruzione, il che lo rende riproducibile anche da parte di altri ricercatori»⁷⁷. Ci sono diversi modi di fare ricerca; nello specifico della didattica «fare ricerca significa per l'insegnante rendersi disponibile al cambiamento delle proprie prassi operative allo scopo di promuovere un miglioramento continuo della propria professionalità. [...] Il "porsi in osservazione e in ascolto" della realtà intorno a sé dovrebbe essere la prima delle competenze di un buon insegnante/educatore»⁷⁸. Fare ricerca significa essere aperti all'innovazione, mettere in discussione il proprio operato, limitare la propria soggettività nelle scelte e nel giudizio, significa far parte di un gruppo con cui condividere obiettivi e principi. «Utilizzare i risultati di ricerca nella scuola, e fare ricerca in essa e su di essa, consente non solo di capire quali interventi hanno un effettivo impatto sulla realtà e quali invece non raggiungono i risultati attesi, ma anche di capire perché un dato intervento funziona o no in quel determinato contesto e con quei determinati allievi, individuando le ragioni che portano al successo o all'insuccesso e fornendo una base conoscitiva utile per riprogettare interventi ad hoc, che andranno poi testati in un successivo ciclo di ricerca»⁷⁹.

1.2 Concetto di competenza

Per dare senso a ogni atto educativo è fondamentale conoscere la finalità che si desidera perseguire. «La finalità è una cosa abbastanza complessa, per cui non c'è da meravigliarsi se si utilizzano termini differenti per indicarla. [...] i più precisi sono fine e obiettivo. Per chiarire meglio l'espressione, si deve intendere come fine ciò che si cerca di raggiungere al termine di un processo completo di attività»⁸⁰. Per raggiungere il fine è utile

⁷⁶ *Ivi* p. 369, R. Trincherò

⁷⁷ *Ibidem*

⁷⁸ *Ivi* p. 378

⁷⁹ *Ivi* p. 379

⁸⁰ V. Garcia Hoz, *L'educazione personalizzata*, cit. pp. 123-124

suddividere il percorso in tappe intermedie che possiamo definire obiettivi. Pertanto, utilizziamo la parola fine per indicare il fine ultimo, cioè lo scopo della nostra azione e la parola obiettivo per indicare ognuno degli scopi immediati che ci permetteranno di raggiungere il fine ultimo. Gli obiettivi si possono dividere in obiettivi di base o principali e obiettivi subordinati o secondari. Gli obiettivi di base «costituirebbero la prima diversificazione del fine generale e la cui realizzazione darebbe origine alla parte stabile dei programmi di attività di una istituzione scolastica»⁸¹. Gli obiettivi subordinati permettono il raggiungimento degli obiettivi di base tramite programmi parziali. È in base agli obiettivi da raggiungere che si rende necessaria la distinzione tra programmazione a breve termine e programmazione a lungo termine. La programmazione a lungo termine si riferisce a periodi ampi mentre la programmazione a breve termine si riferisce ad attività che si concludono in tempi più brevi. «Il contenuto proprio della programmazione a lungo termine è un settore o area culturale oppure un tipo di attività espressiva, mentre il contenuto proprio della programmazione a breve termine è un'unità didattica. [...] La programmazione lunga deve indicare i criteri generali da applicare e sviluppare successivamente nella programmazione breve»⁸².

Il termine programmazione compare per la prima volta nel D.P.R. n. 416, 31 maggio 1974 per indicare il processo «di ideazione, realizzazione e valutazione di un intervento educativo con finalità, destinatari, contenuti e confini circoscritti»⁸³. Il termine programmazione è stato declinato «sempre di più con una impostazione maggiormente sistemica, attenta al raccordo continuo tra le diverse fasi del processo stesso. Questa impostazione ha dato maggiore rilievo al concetto di progetto che compare nelle Legge n. 59/1997 e nel D.P.R. n. 275/1999. Il significato del termine progetto esprime «l'intreccio e la connessione tra la costruzione di un'azione razionalmente ordinata, l'adattamento ad una precisa situazione, la risposta creativa ad un problema o ad una sfida»⁸⁴. Il progetto, inteso come modalità organizzativa può riguardare sia un ambito macro sia un ambito micro. Nell'ambito macro, la progettazione è di tipo pedagogico e si riferisce sia alla definizione «delle finalità, dei contenuti fondamentali e delle regole di funzionamento di sistemi scolastici ed educativi che coinvolgono tutte le realtà formative

⁸¹ *Ivi* p. 125

⁸² *Ivi* p. 153

⁸³ G. Bertagna, P. Triani (eds.) *Dizionario di Didattica - Concetti e dimensioni operative*, cit. p. 324, P. Triani

⁸⁴ *Ivi* p. 325

di un determinato territorio, sia la determinazione delle caratteristiche pedagogiche e metodologiche di un singolo istituto scolastico»⁸⁵. Nell'ambito micro la progettazione diventa didattica e descrive «gli obiettivi da perseguire, i contenuti su cui operare, i metodi utilizzabili in riferimento ad una situazione precisa e delimitata»⁸⁶.

Il fine dell'educazione non è altro che «la capacità di un soggetto di formulare e realizzare il suo progetto di vita»⁸⁷. Questo progetto deve necessariamente nascere all'interno del soggetto stesso, in quanto persona e per la sua realizzazione è necessario che il soggetto acquisisca conoscenze, attitudini e valori che sono «le tre componenti di ogni obiettivo educativo»⁸⁸. Spesso, però, questo non accade e l'insegnante si limita a fare in modo che gli alunni acquisiscano gli apprendimenti previsti dai programmi ma non si preoccupa della formazione degli aspetti della personalità umana. «La dispersione e la mancanza di attenzione verso determinati tipi di obiettivi hanno come conseguenza un'enorme perdita di efficacia delle attività scolastiche. Una perdita di valore educativo, perché nella vita e nell'attività dell'uomo, e di conseguenza degli studenti, i diversi obiettivi sono strettamente correlati tra loro»⁸⁹.

Per poter formulare il proprio progetto di vita lo studente, come persona umana⁹⁰, deve necessariamente acquisire le competenze necessarie alla realizzazione di questo progetto. Possiamo quindi concludere che il fine ultimo dell'atto educativo è quello di generare competenze. All'interno della costituzione del *Quadro Europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente* (EQF) il termine competenza viene definito come «comprovata capacità di utilizzare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e personale. Nel contesto del Quadro europeo delle qualifiche le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia»⁹¹.

⁸⁵ *Ivi* p. 330

⁸⁶ *Ibidem*

⁸⁷ V. Garcia Hoz, *L'educazione personalizzata* a cura di Giuseppe Zanniello, *cit.* p. 125

⁸⁸ *Ivi* p. 127

⁸⁹ *Ivi* pp. 129-130

⁹⁰ Il personalismo è una corrente filosofica che ha le sue origini in Francia nel 1930 circa. Si afferma come visione realistica dell'uomo in contrasto e in alternativa sia all'individualismo che ai totalitarismi che si stavano affermando in quell'epoca. Uno dei principali rappresentanti di questa corrente è il filosofo Emmanuel Mounier, in particolare nella sua opera *Le personalisme*, Paris, Presses Universitaires de France, 1950

⁹¹ *Quadro europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente* (EQF), Comunità Europea 2009, p.

In letteratura si distinguono, tra le altre, tre fondamentali versioni del significato del termine competenza: una oggettualistica di matrice *job-skill*, una di matrice innatistico-soggettivistica, l'ultima, di matrice personalista.

Secondo la prima versione «la competenza è centrata sull'analisi del lavoro-oggetto a cui il soggetto è chiamato ad adeguarsi»⁹². Questa interpretazione è nata nell'ambito dell'economia e della sociologia del lavoro e vede la competenza come un «insieme di tante performance segmentate, accumulabili secondo un ordine modulare che non sempre vede coincidere il logico (*che cosa*), il cronologico (*quando*), e il topologico (*dove*)»⁹³. In sintesi, secondo questa versione, è competente colui che osservando un lavoro già svolto, riesce a frammentarne le parti della lavorazione e a saperle riprodurre anche se non nello stesso ordine. «Competente sarebbe, alla fine, chi è stato ripetutamente esposto a stimoli positivi condizionanti che lo hanno portato ad acquisire in modo stabile e sistematico (training) determinati comportamenti misurabili ed osservabili ritenuti validi per la risoluzione di particolari problemi»⁹⁴. Questo concetto di competenza ha numerose relazioni con la didattica per obiettivi «in cui lo scopo (l'obiettivo) che si intende raggiungere viene formulato in modo operazionalizzato, cioè corrispondente a comportamenti precisi, oggettivi, misurabili. [...] In campo educativo e didattico, è competente chi dimostra, avendola acquisita, una stabile padronanza di determinati contenuti culturali, dei processi che hanno permesso tale acquisizione e dei comportamenti che la testimoniano»⁹⁵. La scomposizione delle cosiddette “competenze esperte” porta all'individuazione di alcuni «comportamenti durevoli e sistematici»⁹⁶ comuni. Questi comportamenti si distinguono in comportamenti di base, trasversali e tecnico professionali. I comportamenti di base riguardano determinati contenuti culturali, come la padronanza della lingua madre; i comportamenti trasversali si riferiscono ai processi necessari per acquisire i comportamenti di base, come il *problem-solving*; i comportamenti tecnico professionali sono invece riferiti ad una determinata professione. La somma di queste competenze «darebbe come risultato la competenza esperta»⁹⁷.

⁹² G. Bertagna. *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, cit. p. 33

⁹³ *Ibidem*

⁹⁴ *Ivi* pp. 34-35

⁹⁵ G. Bertagna, P. Triani (eds.) *Dizionario di Didattica - Concetti e dimensioni operative*, cit. pp. 85-86, G. Sandrone

⁹⁶ G. Bertagna, *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, cit. p. 35

⁹⁷ *Ivi* p. 35

La versione di matrice innatistico-soggettivista sposta l'attenzione «dall'oggetto (prestazione lavorativa esperta) al chi esercita la competenza. [...] Le competenze, quindi, sarebbero un insieme predeterminato di proprietà razionali, operative, motivazionali, emotive, relazionali ed espressive interne al soggetto, che egli mostra di possedere indipendentemente dalla natura del compito specifico che è chiamato ad affrontare e dalle caratteristiche della situazione concreta (stati, materiali, vincoli) in cui viene a trovarsi»⁹⁸. Nella terza versione si esalta l'interazione tra soggetto e ambiente. «Per dimostrare competenza, in questa prospettiva, non basta applicare regole in situazioni semplificate e artificiali [...] serve farlo ogni volta, con originalità e adattamento, nelle situazioni concrete, legate a contesti reali in cui si viene a trovare»⁹⁹.

Bisogna essere consapevoli che dai significati attribuiti al termine “competenza”, derivano diversi modi di fare didattica. A livello di progettazione, aderendo alla concezione oggettualistica è possibile parlare di programmazione per competenze che «sarebbero trattate alla stregua degli obiettivi educativi e didattici»¹⁰⁰. Nella concezione personalistica è necessario distinguere «i momenti della progettazione da quelli della programmazione»¹⁰¹, nei momenti di progettazione il personale preposto ha il compito di tracciare le linee guida «che chiariscano la cornice, i contenuti e il senso all'interno dei quali sono da promuovere le competenze. Nei momenti della programmazione, invece, ovvero nel passaggio dalla progettazione all'azione didattica, entra in campo la libertà e la responsabilità delle persone competenti (i dirigenti o i docenti). Ogni attore professionale [...] deve dimostrare in situazione, perciò di possedere la “competenza di promuovere le competenze degli allievi”»¹⁰². Quando si passa dalla progettazione e programmazione all'esecuzione, cioè all'attività didattica, nella prima concezione «l'attenzione si concentra sui comportamenti ritenuti prova delle competenze attese e sulle tecniche relative al loro consolidamento e rinforzo»¹⁰³; nella seconda l'attenzione si concentra sulla costruzione delle conoscenze e delle strutture concettuali che contraddistinguono i diversi settori disciplinari; nella concezione personalista

⁹⁸ *Ivi* p. 36

⁹⁹ *Ivi* p. 37

¹⁰⁰ G. Bertagna, P. Triani (eds.), *Dizionario di Didattica - Concetti e dimensioni operative*, cit. p. 90, G. Sandrone

¹⁰¹ *Ibidem*

¹⁰² *Ibidem*

¹⁰³ *Ivi* p. 91

l'attenzione si concentra sulle azioni intraprese dagli studenti per risolvere problemi e per svolgere «attività per loro natura sempre aperte al contributo strumentale di più discipline e nelle quali si esplora quanto, fino a che punto e perché i comportamenti manifestati dagli studenti e le conoscenze da loro memorizzate sono frutto di automatismi e di routine invece che di intenzionalità, *lógos*, libertà e responsabilità»¹⁰⁴.

Sul piano pedagogico, le competenze «sono l'insieme delle buone capacità potenziali di ciascuno portate effettivamente al miglior compimento nelle particolari situazioni date: ovvero indicano quello che siamo, adesso, nell'unità della nostra persona, dinnanzi all'unità complessa dei problemi e delle situazioni di un certo tipo (professionali e non professionali) che siamo chiamati ad affrontare e risolvere»¹⁰⁵.

A scuola solitamente vengono posti problemi ben strutturati da risolvere con procedure standardizzate e note. Al contrario, nella vita i problemi che ci si presentano sono spesso mal strutturati e non c'è un modo univoco per risolverli, spesso sono richieste competenze trasversali e le soluzioni possono essere rimesse in discussione. Il termine problema viene elaborato in campo matematico «per indicare una proposizione che, da certe condizioni note, va alla ricerca di qualcosa di ignoto»¹⁰⁶. «In senso ampio, ci troviamo di fronte ad un problema ogni volta che, rispetto ad un obiettivo, ci accorgiamo che i mezzi di cui disponiamo per raggiungerlo non sono adeguati, o che il nostro sapere è incoerente, carente o inadatto rispetto a quanto ci suggerisce una certa situazione»¹⁰⁷. La didattica per problemi è una metodologia utilizzata per generare apprendimento in maniera dinamica. È un modello di didattica che richiede un impegno non indifferente di risorse da parte del docente che ha il compito di guidare l'allievo al raggiungimento degli obiettivi. In questo approccio gli studenti ricoprono un ruolo centrale. «Confrontandosi con il problema essi divengono via via più consapevoli non solo del suo spessore, ma anche di ciò che sanno e di ciò che dovrebbero/hanno bisogno di sapere»¹⁰⁸. In questo modo le conoscenze non vengono trasmesse dal docente al discente ma è quest'ultimo che costruisce nuove conoscenze in base all'approccio che ha nei confronti del problema. «È convinzione diffusa che apprendere per problemi consenta di maturare competenze di carattere

¹⁰⁴ *Ibidem*

¹⁰⁵ G. Bertagna. *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, cit. p. 42

¹⁰⁶ G. Bertagna, P. Triani (eds.), *Dizionario di Didattica - Concetti e dimensioni operative*, cit. p. 309, O. Zanato Orlandini

¹⁰⁷ *Ivi* p. 310

¹⁰⁸ *Ivi* p. 315

generale spendibili in ambiti diversi da quelli iniziali»¹⁰⁹. La capacità di risolvere i problemi è uno dei meccanismi coinvolto nello studio e fa parte della tipologia di studio creativo-critico in quanto lo studente ha la possibilità di assumere iniziative personali. Questa tipologia di studio «mette al centro dell'attività conoscitiva la persona con le sue domande. Questo tipo di studio viene sostenuto solo dalla presenza di adeguate ragioni personali, che tengano conto delle esigenze di verità e felicità»¹¹⁰. In generale, la difficoltà nel portare a termine un impegno di studio è dovuta allo scarso interesse dello studente nei confronti della materia. «Lo studio, come del resto la vita, comporta sempre un rischio: l'inizio di un'avventura, che non si sa come andrà a finire. [...] Il vero studio, in altre parole, richiede coraggio. Bisogna, infatti, essere coraggiosi per superare pregiudizi e per imparare da tutti e da tutto: occorre avere il coraggio di stupirsi ed accogliere»¹¹¹. Lo studente è tanto più motivato allo studio quanto più ne trae soddisfazione perché questa genera desiderio di conoscere. L'apprendimento scolastico svolge un ruolo fondamentale in questo, bisogna insegnare a studiare. «Uno studio serio e “professionale” richiede la capacità, e il corrispettivo impegno, di collegare tra loro le materie studiate, superando lo studio “a compartimenti stagni”, in parallelo, considerando il fatto che si cresce in cultura “per la vita”, e non solo per superare gli esami»¹¹². Gli insegnanti hanno il compito di aiutare gli studenti ad «affrontare lo studio con un atteggiamento volto alla comprensione e alla soluzione dei problemi concreti; i giovani desiderano sapere a cosa serve quanto viene proposto loro di imparare»¹¹³. Attraverso la didattica per problemi lo studente si trova ad affrontare problemi che simulano la realtà e deve cercarne la soluzione, che non è sempre facile da trovare. Questo processo aiuta gli studenti a comprendere che «il lavoro è un'attività il cui valore non può ridursi al successo, questi scopriranno in che modo realmente lo studio può essere un mezzo per contribuire al progresso della società intera»¹¹⁴.

Possiamo concludere che le competenze sono i comportamenti che una persona manifesta davanti ad un determinato problema; questi comportamenti non possono essere separati. La competenza, cioè, non è solamente un sapere o un saper applicare determinate

¹⁰⁹ *Ivi* p. 318

¹¹⁰ *Ivi* p. 394, A. La Marca

¹¹¹ *Ivi* p. 395

¹¹² *Ivi* p. 401

¹¹³ *Ivi* p. 402

¹¹⁴ *Ivi* p. 403

procedure per risolvere un problema ma è «la dimostrazione dell'unità inscindibile di tutti questi aspetti in noi, quando si affronta qualsiasi problema specifico della vita (sociale, professionale, personale), e non solo si è in grado di scegliere le soluzioni da tutti i punti di vista migliori rispetto alla realizzazione del compito che ci è stato affidato, ma si è anche nelle condizioni di modificarle e sostituirle, a mano a mano, se serve, perché ciò, peraltro, non solo risolve meglio il problema nelle forme nuove che abbiamo dinanzi, ma soprattutto perché ciò ci perfeziona e ci matura come soggetti»¹¹⁵. Pertanto, non è possibile certificare il raggiungimento di determinate conoscenze, scelte a priori, attraverso un test o delle prove oggettive. Queste dovrebbero essere integrate con l'osservazione diretta e indiretta dell'approccio dello studente in determinate situazioni di vita reale, solo in questo modo ci si può rendere conto di quali sono le competenze che possiede il singolo. «È competente chi è sempre tutto sé stesso ed affronta qualsiasi compito dando il meglio di tutto se stesso»¹¹⁶.

1.3 Concetto di valutazione

Il termine valutazione deriva dal latino *validus* con il significato di essere forte, sano, robusto. In italiano assume diversi significati, tra cui «determinazione del valore di cose e fatti di cui si debba tenere conto ai fini di un giudizio o di una decisione, di una classifica o graduatoria»¹¹⁷. Quando si affronta il tema della valutazione, in ambito scolastico, si pensa alla valutazione del rendimento degli alunni. Questa è ritenuta ben fatta se tiene conto di alcuni obiettivi stabiliti in precedenza. «L'idea che la valutazione debba essere collocata alla fine del processo educativo, potendo anche essere separata da esso, è strettamente legata alla preoccupazione di valutare il rendimento»¹¹⁸. Di fatto, però, il tema della valutazione è molto più ampio ed è per questo che il Governo ha cercato di regolamentarla. L'errore più frequente che si può compiere durante il processo di valutazione è quello di adattare le persone agli obiettivi e non il contrario. «L'educazione agisce in noi ma non senza di noi e l'impegno degli educatori non ha mai garanzie di successo perché nulla può accadere senza il consenso dell'educando»¹¹⁹. Le *Indicazioni*

¹¹⁵ G. Bertagna, *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, cit. p. 44

¹¹⁶ *Ivi* p. 42

¹¹⁷ Cfr. Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.A.

¹¹⁸ V. Garcia Hoz, *L'educazione personalizzata* a cura di Giuseppe Zanniello, cit. p. 188

¹¹⁹ L. Perla, M.G. Riva, *L'agire educativo. Manuale per educatori e operatori socio - assistenziali*, La Scuola, Brescia, 2016, p. 30

nazionali per i piani di studio personalizzati «sembrano addirittura moltiplicare i momenti e le pratiche della valutazione. Attribuiscono, infatti, un ruolo notevole alla valutazione interna ed esterna alla scuola, e, dentro la prima e la seconda, sia alla valutazione di sistema sia alla valutazione degli apprendimenti»¹²⁰. «Tra gli elementi da valutare all'inizio del processo educativo i più importanti sono quelli di carattere personale: gli alunni e gli insegnanti»¹²¹.

Nell'art. 3 co. 1 della legge n. 53/03 si è cercato di rendere complementari la valutazione degli apprendimenti e della qualità del sistema educativo di istruzione e di formazione, cioè la valutazione interna alla scuola e quella esterna. Per quanto riguarda la valutazione interna, «i docenti sono chiamati, da un lato, a valutare gli apprendimenti e il comportamento degli allievi e, dall'altro, a procedere a questa valutazione non in sé e per sé, ma allo scopo di poter concretizzare quella delle competenze acquisite»¹²². La valutazione degli apprendimenti si fa attraverso verifiche scritte e/o orali, ha un carattere oggettivo e quantitativo e si riferisce agli «standard raggiunti dagli allievi nelle conoscenze/abilità contenute negli obiettivi formativi formulati dai docenti»¹²³. La valutazione dei comportamenti si effettua attraverso l'osservazione e il colloquio in quanto «rammenta l'unità inscindibile di logica ed etica, nel senso che non esiste conoscenza ed abilità umana possibile che non implichi sempre, allo stesso tempo, una responsabilità morale, un giudizio, un impegno, un coinvolgimento e un comportamento personale; e viceversa. Pensare, fare e agire si intrecciano sempre»¹²⁴. La valutazione delle competenze non può essere separata da quella degli apprendimenti e del comportamento ma, al contempo non può essere ridotta solo a questo. Per poter affermare di aver acquisito delle competenze è necessario prima un riconoscimento pubblico; infatti, la competenza coinvolge «nell'unità della persona, dimensioni razionali, affettive, morali, estetiche, motorie, sociali, espressive, ecc., tutti questi fattori, insomma, implicano per forza di cose l'adozione di strumenti di analisi più qualitativi che quantitativi, più storici, ermeneutici e narrativi che statistici e docimologici, più sintetici che analitici»¹²⁵. Inoltre, l'apprendere «consiste oggi nella formazione situata di competenze inedite, ancora

¹²⁰ G. Bertagna. *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, cit. p. 135

¹²¹ V. Garcia Hoz, *L'educazione personalizzata* a cura di Giuseppe Zanniello, cit. p. 191

¹²² G. Bertagna. *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, cit. p. 138

¹²³ *Ibidem*

¹²⁴ *Ivi* p. 139

¹²⁵ *Ivi* p. 140

praticamente assenti nei curricula educativi: saper decidere, saper prevedere, saper risolvere problemi, saper empatizzare, saper creare mondi e relazioni»¹²⁶. Le valutazioni così descritte permettono ai docenti di valutare il rendimento degli alunni. «Si valuta il rendimento di tutti gli alunni che costituiscono un insieme - per esempio, un corso scolastico- rispetto a un «livello» di conoscenze, precedentemente stabilito, che deve essere raggiunto e superato da qualunque alunno per ottenere una valutazione positiva. [...] In questa nozione di rendimento non c'è posto per la considerazione personale di ogni alunno»¹²⁷. Infatti, per valutare il rendimento si usano i termini “sufficiente” e “insufficiente” che corrispondono ad una valutazione positiva e negativa circa il raggiungimento degli obiettivi prefissati. Questi termini «derivano dal paragonare il livello raggiunto da un qualsiasi studente con il livello stabilito precedentemente»¹²⁸. Quando, invece, la valutazione viene riferita alla capacità di un alunno è opportuno utilizzare i termini “soddisfacente” e “insoddisfacente” per sottolineare il risultato della constatazione di un rendimento rispetto a quella stessa capacità.

La valutazione effettuata tramite prove oggettive ha come punto di riferimento e di confronto una norma stabilita in precedenza. «Nel caso degli esami tradizionali, la norma stabilita l'ha «in mente» l'insegnante che esamina, il quale in modo intuitivo utilizza la propria esperienza di insegnante per stabilire il *livello* che deve raggiungere un soggetto perché il suo rendimento si possa considerare accettabile»¹²⁹. Nasce così il concetto di “alunno medio” che, in realtà, è un alunno astratto e si arriva «al paradosso che l'«alunno medio» che serve da norma per valutare tutti gli altri è un alunno che non esiste»¹³⁰. Questa valutazione serve a classificare gli alunni ma non corrisponde al fine pedagogico di ogni valutazione che è quello di «aiutare un soggetto nel processo della sua educazione»¹³¹. Pertanto, si presenta la necessità di fare in modo che la valutazione tenga conto delle reali possibilità del soggetto, cioè che sia una valutazione personalizzata. Per poter realizzare una valutazione personalizzata è necessario conoscere a fondo le possibilità dell'allievo, è necessaria una diagnosi che permetta al docente di «pronosticare

¹²⁶ L. Perla, M.G. Riva, *L'agire educativo. Manuale per educatori e operatori socio - assistenziali*, cit. p. 31

¹²⁷ V. Garcia Hoz, *L'educazione personalizzata* a cura di Giuseppe Zanniello, cit. p. 195

¹²⁸ *Ibidem*

¹²⁹ *Ivi* p. 197

¹³⁰ *Ibidem*

¹³¹ *Ibidem*

quale sarà il suo rendimento educativo»¹³². «Va ricordato che per personalizzare l'attività in una istituzione scolastica è assolutamente indispensabile tenere presente che la personalizzazione educativa è una sintesi dell'individualizzazione e della socializzazione. Ciò equivale a dire che nella programmazione delle attività va tenuta presente la necessità che l'alunno svolga alcune attività comuni all'intera classe e alcune attività particolari, indipendenti, individuali in senso stretto»¹³³. È per questo che vengono indicati due tipi di obiettivi da valutare: gli obiettivi comuni o minimi e gli obiettivi facoltativi. Gli obiettivi minimi sono quelli che ogni alunno deve raggiungere, quelli facoltativi sono invece quelli che il singolo alunno può raggiungere in base alle proprie capacità personali. «La valutazione è, infatti, fondata sull'uso di metodi e strumenti propri della ricerca empirica e sperimentale e comporta un'attività riflessivo/regolativa che accompagni le fasi della formazione. Il tutto a partire dalla definizione di un piano (o disegno) valutativo del quale, tuttavia, non possono essere indicate a-priori regole valide per tutti i contesti e tutte le situazioni»¹³⁴.

«Da un punto di vista strettamente educativo, non c'è motivo di paragonare il rendimento di un alunno al rendimento degli altri; il paragone si deve fare fra gli obiettivi assegnati a quell'alunno e i progressi da lui fatti»¹³⁵. Per mantenere traccia dei progressi fatti da uno studente nelle *Indicazioni nazionali per i piani di studio personalizzati* allegate al Dlgs. N. 59/04 viene introdotto uno strumento unitario, il *Portfolio delle competenze individuali*, «che raccoglie ordinatamente e stabilmente le documentazioni più significative del percorso scolastico dell'alunno, registrandone esiti e modalità di svolgimento del suo processo formativo, e accompagnandolo dalla scuola dell'infanzia fino alla conclusione del 1° ciclo di istruzione per tracciare la sua "storia" e per offrirsi in ogni momento a supporto di analisi ragionate e condivise dei risultati ottenuti per i docenti, per l'alunno e per i suoi genitori»¹³⁶. Il *Portfolio* in ambito educativo «viene apprezzato soprattutto per la sua potenzialità di essere nello stesso tempo un prodotto e un processo. Il portfolio come prodotto, infatti presenta in maniera efficace le competenze e le abilità possedute da un soggetto, mentre, come processo, si focalizza sul mettere in

¹³² *Ivi* p. 199

¹³³ *Ivi* p. 205

¹³⁴ L. Perla, M.G. Riva, *L'agire educativo. Manuale per educatori e operatori socio - assistenziali*, cit. p. 201

¹³⁵ *Ivi* p. 211

¹³⁶ <https://archivio.pubblica.istruzione.it/argomenti/portfolio.shtml>

luce la relazione tra i vissuti del soggetto e l'elaborazione dell'esperienza ai fini di una sempre maggiore consapevolezza personale e lavorativa»¹³⁷. Il *Portfolio* contiene due sezioni: una relativa alla valutazione e una relativa all'orientamento. «La prima, con lo scopo di stimolare gli allievi a riflettere sul proprio lavoro, sugli esiti e sui processi e, soprattutto di maturare la competenza di autovalutarli, anche confrontandosi con le valutazioni ottenute dai docenti. La seconda volta a rendere manifesto a sé e ad eventuali soggetti esterni il percorso della propria crescita, i suoi punti di forza, ma anche di debolezza, così da poter costruire un proprio, realistico progetto di vita.

La prima dove si certificano le competenze personali acquisite, specificando anche il livello delle conoscenze e delle abilità che esse hanno incorporato [...] La seconda dove si identificano, invece, le capacità del ragazzo e quindi le sue migliori potenzialità nel complesso delle attività formative»¹³⁸.

La valutazione esterna ha il compito di raccogliere e informare il Paese circa lo stato complessivo del sistema. Si articola anch'essa in due direzioni: la valutazione di sistema e la valutazione degli apprendimenti degli allievi. La valutazione di sistema riguarda gli «aspetti istituzionali, organizzativi e strutturali del sistema educativo nazionale di istruzione e di formazione»¹³⁹ ed è condotta dall'*Invalsi*. L'*Invalsi* raccoglie i dati provenienti dalle strutture, li rielabora e li restituisce. «La restituzione dei dati va condotta non soltanto a livello di scuola, ma anche a livello di regione, di provincia e di comune [...] è necessario produrre, in questo senso, indicatori tesi ad evidenziare l'eventuale squilibrio territoriale, a livello di piccola area, anche in rapporto ai parametri europei di riferimento per i diversi gradi di istruzione, al fine di garantire l'equità dell'accesso»¹⁴⁰. Per quanto riguarda la valutazione esterna degli apprendimenti, ciò che l'accomuna alla valutazione interna è «l'accertamento delle conoscenze e abilità e dei relativi livelli e standard di prestazione»¹⁴¹. La differenza è che per la valutazione esterna conoscenze e abilità sono il dato primario, per la valutazione interna sono un dato secondario. «Può succedere di conseguenza che all'interno di scuole diverse ci siano accentuazioni diverse quanto al peso da assegnare a certe conoscenze e abilità. Se il 'prodotto' finale è vero

¹³⁷L. Perla, M.G. Riva, *L'agire educativo. Manuale per educatori e operatori socio - assistenziali*, cit. p. 288

¹³⁸G. Bertagna, *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, cit. p. 148

¹³⁹*Ivi* p. 158

¹⁴⁰*Ivi* pp. 159-160

¹⁴¹*Ivi* p. 164

della scuola sono e devono essere le competenze personali, sembra logico pensare che la qualità delle istituzioni scolastiche e formative si debba valutare sulle competenze personali, non su ciò che è necessario ma non sufficiente alla loro produzione»¹⁴². La valutazione esterna non ha gli strumenti per valutare le competenze personali in quanto per la sua struttura si serve di prove oggettive e quantitative, il suo compito è quello di valutare le conoscenze e abilità. La valutazione delle competenze rimane un compito esclusivo della valutazione interna. Bisogna osservare che le conoscenze e le abilità sono importanti, «ma lo sono nella prospettiva della trasformazione delle capacità di ciascuno in competenze personali»¹⁴³. Pertanto, l'*Invalsi* ha un ruolo importante nella promozione delle competenze personali di ciascuno ma bisogna considerare che queste si sviluppano all'interno della società e quindi attraverso una cooperazione sistematica tra allievo, genitori, scuola e comunità locale.

Sottolineiamo, pertanto, che «la valutazione in ambito educativo non è mai un compito che coinvolge il singolo educatore, ma richiede il coordinamento e la partecipazione di un gruppo nutrito di soggetti che a diversi livelli contribuiscono a definire gli obiettivi, pianificare, strutturare, implementare, coordinare e valutare piccole e grandi azioni, attività socio-educative, processi e progetti di sviluppo»¹⁴⁴

Possiamo concludere che per lo sviluppo delle competenze nel singolo individuo, che risultano essere il fine di un processo educativo, è necessaria la collaborazione di tutti gli enti che compongono la società di cui fa parte e che abbiano chiaro che lo sviluppo delle competenze garantisce all'uomo la realizzazione del proprio progetto di vita.

«L'uomo è come un albero. Se ti metti di fronte a un albero e lo guardi incessantemente per vedere se cresce e di quanto sia cresciuto, non vedrai nulla. Ma curalo in ogni momento, liberalo dal superfluo e tienilo pulito [...] ed esso, a tempo debito, comincerà a crescere. Lo stesso vale anche per l'uomo: l'unica cosa che gli serve è superare lacci e impedimenti, e non mancherà di svilupparsi e crescere. Ma è sbagliato esaminarlo in continuazione per scoprire quanto sia cresciuto»¹⁴⁵.

¹⁴² *Ivi* p. 165

¹⁴³ *Ivi* p. 180

¹⁴⁴ L. Perla, M.G. Riva, *L'agire educativo. Manuale per educatori e operatori socio - assistenziali*, cit. p. 281

¹⁴⁵ M. Buber, *Racconti chassidici. I dieci gradini della saggezza*, Red, Como, 1997, p. 63

1.4 Strumenti per la matematica

La didattica della matematica non può prescindere dalla didattica generale. Bisogna, però, distinguere tra matematica, didattica della matematica e didattica generale come tre discipline diverse. I didatti generali provengono da studi di carattere pedagogico e stentano a capire l'articolazione della matematica come disciplina. I didatti della matematica, invece, provengono da studi di carattere matematico e stentano «a capire il senso stesso degli studi dei primi, abituati come sono a produrre prove logiche, dimostrazioni inconfutabili, a ragionare sulla base di assiomi, regole, deduzioni. I primi considerano riunite in un colpo solo tutte le numerose e variegata poliedricità di studio dei secondi, ma i secondi non riescono ad apprezzare il lavoro analitico e sintetico dei primi, dato che si rivolge ad argomenti troppo lontani alla pratica scientifica dei matematici»¹⁴⁶. Questa contrapposizione tra didattica generale e didattica specifica sembra nascere dall'uso della terminologia e dal significato attribuito al termine didattica. Quest'ultimo può essere inteso «come “teoria della didattica” desunta dalla pragmatica osservata e dai risultati ottenuti; [...] in senso filosofico e teoretico; [...] come qualche cosa di molto più specifico»¹⁴⁷. La didattica generale può essere vista «come un ampio terreno di studio e ricerca, alimentato dalle dinamiche specifiche: i problemi di queste ultime, ogni volta che sono generalizzabili, costituiscono oggetto di studio e ricerca all'interno della didattica generale, anche se non si identificano con essa. Eventuali risultati generali ottenuti nella teoria della didattica sono utilizzabili in ciascun ambito specifico. Il rapporto tra didattica generale e didattiche specifiche è e deve essere dunque fecondo, ed oggetto a sua volta di studio e ricerca»¹⁴⁸. Una conciliazione tra didattica generale e didattica specifica prevede che l'insegnante abbia una solida preparazione culturale ed altrettanto una solida preparazione nel campo educativo. Pertanto, matematica, didattica della matematica e didattica generale «sono necessarie alla preparazione di un docente di matematica, ma nessuna delle tre è sufficiente; insieme concorrono a tale preparazione, anche se la prima riveste per così dire un ruolo primario: non è pensabile di poter insegnare matematica senza una previa solida preparazione in matematica; non è pensabile di poter sviluppare questioni critiche di carattere

¹⁴⁶ B. D'Amore, *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna, 1999, p. 372

¹⁴⁷ *Ivi* p. 375

¹⁴⁸ *Ivi* p. 376

epistemologico e didattico sulla matematica, se non si è ben ferrati in matematica; di fatto, non si può capire il senso di una didattica disciplinare, se non si possiede in profondità quella disciplina»¹⁴⁹.

Per quanto riguarda la didattica della matematica questa può essere definita come «lo studio dei processi di trasmissione e di acquisizione dei diversi contenuti di questa scienza (la matematica) [e] si propone di descrivere e spiegare i fenomeni relativi ai rapporti tra il suo insegnamento ed il suo apprendimento. Essa non si riduce affatto a cercare una buona maniera di insegnare una data nozione»¹⁵⁰. È, però, riduttivo pensare che per insegnare matematica basti conoscere la matematica.

Si potrebbe ipotizzare un duplice modo di vedere la didattica della matematica: come divulgazione delle idee o come ricerca empirica. Nella didattica della matematica come divulgazione delle idee l'attenzione viene fissata sull'insegnamento e ha come obiettivo «creare situazioni (sotto forma di lezioni, attività, oggetti, ambienti, giochi, ...) per un insegnamento migliore della matematica. L'assunto più o meno esplicito sembrava essere il seguente: se migliora l'insegnamento, migliorerà anche l'apprendimento»¹⁵¹. In questo tipo di didattica il peso dell'attività è tutto sulle spalle del docente. Questo tipo di didattica «può servire ad impostare e talvolta a risolvere problemi di grande importanza come: migliorare l'immagine della matematica, migliorare l'attenzione, attivare interesse e motivazione»¹⁵².

Nella didattica della matematica come ricerca empirica l'attenzione è fissata sull'apprendimento. A questo proposito bisogna tener conto di alcune problematiche, in particolare «la specificità della conoscenza matematica; ciò porta di conseguenza lo studio dei processi cognitivi degli studenti al posto di quelle che di solito vengono indicate come le loro capacità o i risultati raggiunti. [...] La dimensione sociale dell'apprendimento della matematica all'interno di un contesto specifico»¹⁵³.

I contributi allo studio dell'apprendimento matematico sono da ricercare nelle differenti teorie dell'apprendimento.

¹⁴⁹ *Ivi* p. 383

¹⁵⁰ *Ivi* p. 29

¹⁵¹ *Ivi* p. 31

¹⁵² *Ivi* p. 35

¹⁵³ *Ivi* p. 71

Una prima teoria «tende a spezzettare il curriculum in parti, ciascuna delle quali è vista come tema di apprendimento a sé stante; all'apprendimento si giunge attraverso rafforzamenti appropriati; il primo passo di ogni segmento curricolare consiste in temi e concetti di base, sui quali fondare il seguito della conoscenza»¹⁵⁴.

Una seconda teoria dell'apprendimento matematico ha come assunto di base «che l'allievo costruisce, in modo attivo, una sua propria conoscenza interagendo con l'ambiente ed organizzando le sue costruzioni mentali. L'istruzione influenza ciò che l'allievo apprende, ma non determina tale apprendimento. L'allievo cioè non si limita a recepire passivamente la conoscenza, ma la rielabora costantemente in modo autonomo»¹⁵⁵.

L'ultima teoria si fonda su due principi: «la conoscenza non è recepita passivamente, ma costruita attivamente dal soggetto che apprende; conoscere è un processo di adattamento grazie al quale il soggetto che apprende organizza il proprio dominio di esperienze»¹⁵⁶.

Pertanto, la didattica della matematica è concepita come «una scienza che si interessa alla produzione e comunicazione delle conoscenze matematiche, ed in che cosa questa produzione e questa comunicazione hanno di specifico, una scienza che ha come oggetti specifici di studio: le operazioni essenziali della diffusione delle conoscenze, le condizioni di questa diffusione e le trasformazioni che essa produce, sia sulle conoscenze sia sui suoi utilizzatori; le istituzioni e le attività che hanno come scopo quello di facilitare queste operazioni»¹⁵⁷. Ha senso parlare di sistema didattico «formato da tre componenti: insegnante, allievo e sapere insegnato; ma, naturalmente, c'è un mondo esterno, la società in genere, i genitori, i matematici, eccetera. Tra i due sistemi c'è una sorta di zona intermedia, la noosfera: in essa si articolano i rapporti tra i due sistemi, in un tutto unico, con i loro conflitti»¹⁵⁸.

L'argomento principale di studio della didattica della matematica è costituito dai diversi tipi di sistemi didattici. «In queste condizioni il sapere non è assoluto perché dipende dalle istituzioni nelle quali si trova il soggetto. Conoscere una certa teoria matematica è una frase che ha senso se si specifica qual è l'istituzione alla quale ci si riferisce come livello

¹⁵⁴ *Ivi* p. 73

¹⁵⁵ *Ibidem*

¹⁵⁶ *Ibidem*

¹⁵⁷ *Ivi* p. 76

¹⁵⁸ *Ivi* p. 77

di competenza»¹⁵⁹. Questa relatività del sapere rispetto all'istituzione alla quale si riferisce ha portato allo sviluppo del concetto di trasposizione didattica inteso come adattamento della conoscenza matematica per essere trasformata in conoscenza da insegnare. «Dapprima ci si preoccupa del passaggio dal sapere matematico al sapere da insegnare (questo passaggio è ricchissimo di implicazioni; tra tutte segnaliamo la necessaria ricontestualizzazione del concetto in esame, dal contesto matematico cui appartiene, in base al sapere cui l'insegnante si ispira, al contesto scuola, programma, curricolo, nel quale deve rientrare). Poi, una volta realizzata l'introduzione del concetto, ci se ne impossessa per farne qualche cosa; questa immersione nel sapere insegnato permette la ricontestualizzazione dell'oggetto del sapere. Ma ciò non permetterà di ricostruire il motivo di esistenza originale della nozione, né le ridarà tutte e sole le funzioni per le quali tale nozione era stata introdotta»¹⁶⁰.

La complessità del sistema globale dell'insegnamento della matematica si può decomporre in Pratica, Sviluppo e Teoria «per notare come l'educazione matematica sia un sistema sociale eterogeneo e complesso, nel quale si distinguono tre ambiti: l'azione pratica e riflessiva sui processi di insegnamento e di apprendimento della matematica; la tecnologia didattica, che si propone di mettere a punto materiali per migliorare l'efficacia dell'istruzione matematica, usando le conoscenze scientifiche disponibili; la ricerca scientifica che si occupa di comprendere il funzionamento della matematica, nel suo insieme, così come quello dei sistemi didattici speciali»¹⁶¹. Ciascuno degli ambiti appena descritti si distingue per tempi, obiettivi, risorse, etc. In particolare, il primo riguarda l'insegnante e il suo tentativo di migliorare l'efficacia didattica dell'insegnamento, il secondo riguarda coloro che scrivono i curricula e i materiali didattici, il terzo riguarda la ricerca. Si può affermare che la didattica della matematica è legata al terzo ambito, mentre i primi due sono legati a quella che si può definire "educazione matematica".

Per studiare le cause del fallimento elettivo in matematica, «cioè di quel tipico fallimento riservato al solo dominio della matematica, da parte di studenti che invece, più o meno, sembrano...arrangiarsi nelle altre materie»¹⁶² nasce il concetto di "contratto didattico".

¹⁵⁹ *Ivi* p. 82

¹⁶⁰ *Ivi* p. 83

¹⁶¹ *Ivi* p. 93

¹⁶² *Ivi* p. 97

«In una situazione di insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere il problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico»¹⁶³. Queste attese non sono sempre dovute ad accordi espliciti, anzi, spesso provengono dalla concezione che si ha della scuola più in generale e della matematica in particolare. Concezioni che derivano dalle modalità di ripetizione delle attività svolte in classe e che vengono assunte dagli studenti come verità assolute. Come ad esempio la convinzione, da parte dello studente, che la risoluzione di un problema di matematica richiede l'uso dei calcoli e di tutti e soli i dati numerici presenti nel testo. È necessario sottolineare che il contratto didattico «non è una realtà stabile, statica, stabilita una volta per tutte; al contrario, esso è una realtà in divenire che s'accompagna alla storia di classe»¹⁶⁴.

Negli ultimi anni stanno emergendo nuovi argomenti di studio della didattica della matematica che riguardano i conflitti, le misconcezioni ed i modelli intuitivi. «Lo studente nel tempo costruisce un concetto e se ne fa un'immagine [...] questa immagine può essere stata validata e rinforzata nel corso del suo curriculum scolastico da prove, esperienze ripetute, figure, esercizi risolti ed accettati dall'insegnante come corretti»¹⁶⁵. Questa immagine, che lo studente crede definitiva, può rivelarsi inadeguata rispetto ad un'altra dello stesso concetto, proposta dall'insegnante stesso o appresa in un altro contesto. È così che si crea un conflitto tra l'immagine precedente di quel concetto e la nuova. «Ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva»¹⁶⁶. Legata alle idee di concetto e conflitto c'è la misconcezione. «Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce generalmente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione

¹⁶³ *Ivi* p. 99

¹⁶⁴ *Ivi* p. 105

¹⁶⁵ *Ivi* p. 124

¹⁶⁶ *Ibidem*

momentanea, ma in corso di sistemazione»¹⁶⁷. Lo studente costruisce un'immagine di un concetto e la crede definitiva ma, ad un certo punto della sua storia cognitiva riceve delle informazioni sul concetto che non appartengono all'immagine che aveva. A questo punto, lo studente è costretto ad ampliare questa immagine conservando le informazioni che conteneva e aggiungendo quelle nuove. Molti dei concetti matematici vengono raggiunti grazie all'ampliamento di immagini successive. «Durante questa successione di immagini, c'è un momento in cui l'immagine cui si è pervenuti "resiste" a sollecitazioni diverse, si dimostra abbastanza "forte" da includere tutte le argomentazioni e informazioni nuove del concetto che rappresenta»¹⁶⁸. Pertanto, le nuove sollecitazioni, invece di distruggere l'immagine che si ha di un concetto la confermano come quella giusta. Un'immagine di questo tipo si può chiamare modello relativo al concetto. «Dunque il modello di un concetto sarebbe, tra le immagini, la definitiva, quella che racchiude il massimo delle informazioni e che si dimostra stabile rispetto ad un buon numero di sollecitazioni»¹⁶⁹. Pertanto, bisogna tenere conto che l'errore non è sempre frutto di ignoranza «ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successi, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali. Dunque, non si tratta sempre di errori di origine sconosciuta, imprevedibili, ma di ostacoli»¹⁷⁰.

«Forse l'errore principale [...] sta nel modo dogmatico di concepire la dimostrazione matematica: [egli] pensa che una dimostrazione debba dimostrare quello che si era prefissato. Il mio modo di concepire una dimostrazione autorizza a "dimostrare" una congettura falsa, cioè a scomporla in sottocongetture. Se la congettura è falsa, sicuramente mi aspetto che sia falsa almeno una delle sottocongetture. Ma tale scomposizione può essere egualmente interessante! Non mi turba imbartermi in un controesempio a una congettura "dimostrata"; mi accingo addirittura di "dimostrare" una congettura falsa!».¹⁷¹
«Le mostruosità non esistono, esistono solo le interpretazioni mostruose. Si deve purgare la mente dalle illusioni perverse, si deve imparare a osservare e definire esattamente

¹⁶⁷ *Ibidem*

¹⁶⁸ *Ivi* p. 128

¹⁶⁹ *Ivi* p. 129

¹⁷⁰ *Ivi* p. 216

¹⁷¹ I. Lakatos, *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*, a cura di J. Worrall e E. Zahar, edizione italiana a cura di G. Gioiello, Feltrinelli Editore, Milano, 1979, p. 63

quello che si vede. Il mio metodo è terapeutico: dove tu - erroneamente - "vedi " un controesempio, io ti insegno come riconoscere - correttamente - un esempio».¹⁷²

Le misconcezioni e gli errori sono le principali problematiche legate alla comunicazione. La matematica, di per sé stessa, è un linguaggio in quanto dotata di una sintassi, una semantica e una pragmatica proprie. Ma l'atto dell'insegnamento ricade nelle assai più ampie problematiche della comunicazione, infatti, il "linguaggio matematico" e, più in generale il linguaggio scientifico, è influenzato dalla "lingua comune" ben più di quanto potrebbe sembrare. «L'insegnamento è comunicazione ed uno dei suoi scopi è favorire l'apprendimento degli allievi; per prima cosa, allora, chi comunica deve far sì che il linguaggio utilizzato non sia esso stesso fonte di ostacoli alla comprensione; [...] la matematica ha un suo linguaggio specifico (o addirittura è un linguaggio specifico); uno dei principali obiettivi di chi la insegna è quello di far apprendere agli allievi non solo a capire, ma anche a far proprio quel linguaggio specialistico; dunque non si può evitare di far entrare a contatto gli allievi con quel linguaggio specifico, anzi al contrario occorre presentarlo (imporlo?) perché lo facciano proprio»¹⁷³. Spesso durante l'insegnamento si commettono errori di comunicazione dovuti all'utilizzo del linguaggio matematico insieme al linguaggio comune e al linguaggio utilizzato nei libri di testo; inoltre, gli studenti non hanno ancora acquisito del tutto la padronanza della lingua comune e devono fare i conti con il linguaggio specifico della matematica che non è solo esplicativo ma è anche formale. «Il coordinamento di registri è la condizione per la padronanza della comprensione in quanto essa è la condizione per una differenziazione reale tra gli oggetti matematici e la loro rappresentazione»¹⁷⁴.

Pertanto, si può concludere considerando il processo di apprendimento della matematica come «una successione di avvenimenti dovuti a diversi livelli di comunicazione, diverse logiche di rappresentazione e di competenze, ma il processo stesso induce a questi livelli di comunicazione, alle diverse logiche ed alle diverse acquisizioni»¹⁷⁵. Tutto ciò costituisce la "costruzione dei significati". «Questa costruzione non è affatto una progressione lineare ma, come abbiamo più volte visto, contiene rotture, procede a tentoni, fugge rapidamente in avanti, si arresta e retrocede; per l'allievo l'apprendimento

¹⁷² *Ivi* p. 71

¹⁷³ B. D'Amore, *Elementi di didattica della matematica*, cit. pp. 247-248

¹⁷⁴ *Ivi* p. 263

¹⁷⁵ *Ivi* p. 323

non è altro che una continua *riorganizzazione cognitiva*: i significati formati vengono continuamente messi in discussione e subiscono modificazioni costanti all'interno di questa "storia della classe"»¹⁷⁶.

1.5 Alternanza Formativa

La difficoltà principale dell'educare i giovani di oggi è che questi, più di tutti, hanno bisogno di concretezza. Non è possibile insegnare loro una disciplina giustificandone l'utilità in maniera astratta, cercando di convincerli a imparare qualcosa che gli servirà in futuro, nel lavoro, nella vita. Gli studenti, oggi, hanno bisogno di evidenze.

La matematica rappresenta la materia scolastica che più di tutte si presta ad essere astratta trasmessa, attraverso la didattica tradizionale, come un insieme di regole e concetti da imparare. Emerge la necessità di una didattica che riesca a rendere concreto e spendibile nell'immediato il sapere matematico. Una risposta a questa necessità si trova nell'alternanza formativa, attraverso la quale gli studenti possono fare esperienza dei saperi appresi e/o di quelli da apprendere attraverso il riscontro con la realtà lavorativa inerente il percorso di studi scelto. Attraverso l'alternanza formativa non ci si limita solamente all'insegnamento della disciplina ma si ha la possibilità di "formare" la persona attraverso la connessione tra studio e lavoro, tra teoria e pratica.

Fino agli anni Cinquanta del secolo scorso il termine "formare" si riferiva alle attività di fabbricare, modellare, plasmare, costruire. In questa visione formare voleva dire dare forma a qualcosa di passivo, malleabile. «Quasi che il «formare un uomo o gli uomini» non fosse cosa molto diversa dal modellare (la creta) con impronte intenzionali o per forze funzionali allo scopo; uno scolpire (la roccia, il legno, ecc.) per ricavare una figura, un oggetto; un costruire (qualcosa) che non si trova in natura e che chi «forma», quale demiurgo, farebbe essere, grazie al suo cervello e alle sue mani»¹⁷⁷. Questi significati nascevano dall'esperienza delle botteghe, dove un maestro "formava" l'apprendista al suo lavoro, dall'addestramento militare e dall'addestramento ideologico - politico del dopoguerra. «Il «formare», verbo, che da questi tre ambiti semantici fu traslato, alla fine degli anni Cinquanta del Novecento, nel campo pedagogico a significare i fenomeni del processo educativo in generale, enfatizzava, dunque, in maniera peculiare i gesti

¹⁷⁶ Ivi p. 324

¹⁷⁷ G. Bertagna, *Dall'educazione alla pedagogia, avvio al lessico pedagogico e alla teoria dell'educazione*, cit. p. 377

dell'etero-direzione e del modellamento ideologico-autoritario, quando non del plagio, compiuti da «formatori» nei confronti di «formandi» ritenuti kantianamente minori. Oppure compiuti dai dispositivi naturali, familiari, comunitari, artificiali e professionali appositamente costruiti per la «formazione»¹⁷⁸. Con il “miracolo economico” degli anni Cinquanta e Sessanta del secolo scorso la formazione dell'uomo si fece coincidere con la sua formazione professionale, per soddisfare l'esigenza di personale qualificato nel mercato del lavoro. «Per influsso della cultura tedesca, tuttavia, il formare, alla fine degli anni Sessanta, soprattutto nel campo linguistico della pedagogia accademica, abbandona anche da noi le referenze semantiche prima ricordate e diventa, quasi rovesciandosi, il «*formar-si*» in generale del soggetto: non più il ricevere dall'esterno attributi che si «aggiungono» alla sua natura, ma lo «scegliere» criticamente, come e in quanto uomini, in tutti i campi della vita e dell'esperienza umana (lavoro compreso, ovviamente), nei modelli di umanità resi disponibili dalla storia e dalla cultura, la propria peculiare «forma» nella quale realizzarsi, in intenzionalità, *lógos*, libertà, responsabilità. *Formar-si* come *trasformar-si* in maniera antagonista nel mondo, in altre parole per decisione e maturazione personali»¹⁷⁹. «Il processo formativo dell'uomo non può essere identificato solo con la crescita biologica del giovane, né esclusivamente con la dimensione di consapevolezza interiore dell'uomo, ma con il processo di sviluppo che porta ogni persona a tentare di mettere in atto le proprie potenzialità, manifestando il più possibile, in modo integrale, sé stessa»¹⁸⁰.

«I due aspetti che caratterizzano l'alternanza formativa si identificano nelle dimensioni fondative che costituiscono l'essere umano: esperienza e ragionamento, prassi e teoria, lavoro e studio»¹⁸¹. Questi rappresentano i due aspetti generali dell'uomo nel suo rapportarsi con la società. «Il principio dell'alternanza formativa ha la finalità di pensare pratica e teoria, corpo e mente, esperienza e ragione al di fuori di ogni gerarchia e tenta di metterne in evidenza le caratteristiche specifiche all'interno di un processo unitario di formazione dell'uomo. Infatti, l'alternanza formativa descrive il movimento della forma umana [...] Da un lato, è la forma umana che procede soggettivamente e si costituisce

¹⁷⁸ *Ivi* p. 378

¹⁷⁹ *Ivi* pp. 380- 381

¹⁸⁰ A. Potestio, *Alternanza formativa. Radici storiche e attualità di un principio pedagogico*, Studium, Roma, 2020 p. 23

¹⁸¹ *Ibidem*

come un movimento alternato di corpo e ragione, esperienza e riflessione, pratica e teorica che, sempre in relazione e con gradi diversi di accelerazione, rappresentano le dimensioni essenziali dell'uomo. Dall'altro, la stessa forma umana è oggetto del movimento e di alternanza, in quanto non può che manifestarsi pienamente attraverso la crescita delle polarità che la compongono»¹⁸². L'alternanza formativa costituisce il principio che consente di descrivere lo sviluppo delle potenzialità dell'essere umano, considerando tutte le fasi del progresso di ciascuno, anche quelle che apparentemente potrebbero sembrare di "non progresso". Infatti, il principio dell'alternanza formativa si basa su due polarità: esperienza e ragione. L'esperienza è «intesa come l'insieme degli aspetti che riguardano il prendere forma del soggetto a partire e attraverso i propri sensi»¹⁸³. Il termine esperienza indica da un lato, il superamento di una determinata situazione, dall'altro, l'attraversamento di una diversa situazione affrontata utilizzando l'esperienza vissuta nella situazione precedente. «L'esperienza appartiene all'orizzonte della contingenza, del far toccare due elementi/situazioni che iniziano e finiscono, lasciando sempre, su chi li vive un resto. Ne consegue che l'esperienza avviene nel divenire temporale e lo scandisce come un costante provenire da qualcosa e attraversare qualche altra cosa. Il riuscire a compiere un'esperienza [...] significa la morte stessa di quella esperienza e, allo stesso tempo, la sua rinascita in un'altra esperienza collocata in uno snodo spazio-temporale differente»¹⁸⁴. «L'esperire è un atto relazionale»¹⁸⁵ cioè mette in relazione colui che esperisce con la realtà esterna, ma anche l'esperienza vissuta con quella che si sta attraversando. «L'esperienza dimostra la propria precarietà assoluta perché l'uomo non può esperire la propria fine, il venir meno della coscienza e la propria morte. Gli attraversamenti dell'esperienza rimangono nell'orizzonte della vita e ne costituiscono la forza trasformatrice, ma, nel momento in cui si attraversa un'ultima esperienza e manca quella successiva, la struttura stessa dell'esperire viene meno proprio perché nessun uomo può sperimentare la propria morte»¹⁸⁶. La forza dell'esperienza consiste nella memoria, quest'ultima riesce a tenere traccia delle esperienze già vissute e che rappresentano il nostro mondo. Anche le esperienze degli altri uomini sono

¹⁸² *Ivi* pp. 25-26

¹⁸³ *Ivi* p. 43

¹⁸⁴ *Ivi* pp. 44-45

¹⁸⁵ *Ivi* p. 45

¹⁸⁶ *Ibidem*

fondamentali in quanto possono confermare le nostre e diventare permanenze della realtà. Le esperienze altrui si possono trasmettere attraverso il linguaggio e sottolineano la dimensione intersoggettiva dell'esperienza. A proposito della valenza intersoggettiva dell'esperienza, «diversi autori della contemporaneità hanno riflettuto sulla perdita di valore dell'esperienza nel mondo moderno»¹⁸⁷, «noi sappiamo però oggi che, per la distruzione dell'esperienza, una catastrofe non è in alcun modo necessaria e che la pacifica esistenza quotidiana in una grande città è, a questo fine, perfettamente sufficiente. Poiché la giornata dell'uomo contemporaneo non contiene quasi più nulla che sia ancora traducibile in esperienza: non la lettura del giornale, così ricca di notizie che lo riguardano da un'incoltabile lontananza, né i minuti trascorsi al volante di un'automobile in un ingorgo, non il viaggio agli inferi nelle vetture della metropolitana, né la manifestazione che blocca improvvisamente la strada [...], né i momenti eterni di muta promiscuità con degli sconosciuti in ascensore o nell'autobus. L'uomo moderno torna a casa alla sera sfinito di una farragine di eventi [...] nessuno dei quali è diventato esperienza»¹⁸⁸.

Possiamo concludere che esistono due dimensioni distinte che operano all'interno dell'idea di esperienza. «Da un lato, la forza dell'esperienza e il suo carattere intersoggettivo che confermano le permanenze e le analogie rispetto al costante fluire della realtà evidenziano che essa non si presenta mai in forma pura, in quanto la coscienza e la ragione le appartengono e si mescolano con il sentire, tipico del suo modo di manifestarsi. Nel toccare e collegare i due momenti che vengono esperiti, la memoria del soggetto trattiene qualcosa, che costituisce una sua specifica acquisizione formativa, un residuo che diviene parte del suo apprendimento e del suo processo identitario»¹⁸⁹. La seconda dimensione non può essere completamente separata dalla prima e «indica il prendere parte dell'uomo al divenire della realtà e alla sua precarietà continua e necessitata. Pur non coincidendo completamente con il divenire in quanto è un relazionare, un toccare, un mettere in contatto due elementi materiali e concreti che si trasformano, l'esperienza è qualcosa che mostra sempre un carattere singolare e irripetibile»¹⁹⁰.

¹⁸⁷ *Ivi* p. 47

¹⁸⁸ G. Agamben, *Infanzia e storia. Distruzione dell'esperienza e origine della storia*, Einaudi, Torino, 1998, pp. 6-7.

¹⁸⁹ A. Potestio, *Alternanza formativa. Radici storiche e attualità di un principio pedagogico*, cit. p. 50

¹⁹⁰ *Ivi* p. 51

Una modalità specifica di esperienza e quindi di apprendimento è data dal lavoro. In quest'ottica «l'impoverimento dell'idea di esperienza che si è progressivamente sviluppato nella modernità ha generato, come conseguenza, anche lo svuotamento dell'idea di lavoro»¹⁹¹. «Il lavoro è considerato, in modo ampio, come l'insieme delle attività operose dell'uomo che, in diversi ambiti, caratterizzano la sua vita. Queste attività si configurano come esperienze e presentano tutte le caratteristiche che appartengono all'esperienza umana. Essendo esperienza, le attività lavorative si collocano nella dimensione contingente della realtà, consentono di tenere unita la dimensione passata e futura dell'uomo nell'atto produttivo e presentano aspetti di singolarità e originalità»¹⁹². Sono proprio le caratteristiche appena descritte che rendono il lavoro attrattivo per i bambini, questi ultimi imparano molto di più dall'imitazione del lavoro che dai giochi appositamente creati per loro, questo accade perché il lavoro nasce come strumento per soddisfare i bisogni dell'uomo. «Il lavoratore esperisce nella sua attività tutta la forza dei dispositivi, naturali e sociali, la necessità delle condizioni contingenti nelle quali si trova, la violenza delle imposizioni di altri, la ripetitività di molti suoi atti e la precarietà di ciò che compie, ma esperisce anche, in forme più o meno forti, gli spazi di apertura verso ciò che non si è ancora compiuto, il consolidamento della sua identità professionale e personale, la possibilità di impiegare le proprie potenzialità nel fare qualcosa di utile e buono per sé e per gli altri»¹⁹³.

Per assicurare ai giovani l'acquisizione di competenze spendibili nel mondo del lavoro, il Presidente della Repubblica emana il decreto legislativo del 15 aprile 2005, n. 77 in cui disciplina l'alternanza scuola-lavoro per i corsi di formazione secondaria di secondo grado. «I percorsi in alternanza hanno una struttura flessibile e si articolano in periodi di formazione in aula e in periodi di apprendimento mediante esperienze di lavoro, che le istituzioni scolastiche e formative progettano e attuano sulla base delle convenzioni di cui all'articolo 3. I periodi di apprendimento mediante esperienze di lavoro fanno parte integrante dei percorsi formativi personalizzati volti alla realizzazione del profilo educativo, culturale professionale del corso di studi e degli obiettivi generali e specifici di apprendimento stabiliti a livello nazionale e regionale. I periodi di apprendimento mediante esperienze di lavoro sono articolati secondo criteri di gradualità e progressività

¹⁹¹ *Ivi* p. 56

¹⁹² *Ivi* p. 57

¹⁹³ *Ivi* p. 63

che rispettino lo sviluppo personale, culturale e professionale degli studenti in relazione alla loro età, e sono dimensionati tenendo conto degli obiettivi formativi dei diversi percorsi del sistema dei licei e del sistema dell'istruzione e della formazione professionale, nonché sulla base delle capacità di accoglienza dei soggetti di cui all'articolo 1, comma 2»¹⁹⁴.

Per quanto riguarda la scuola secondaria di secondo grado, in Italia esiste ancora una gerarchia per la scelta del percorso da seguire. «I giovani comparativamente vincenti, protagonisti della serie A, infatti, da noi, starebbero, nel grado scolastico secondario, al liceo [...], quelli della serie B si ritroverebbero negli istituti tecnici [...], quelli della serie C negli istituti professionali [...], e le poche cifre percentuali restanti in serie D, ovvero nei “percorsi di istruzione e formazione professionale” delle Regioni»¹⁹⁵. Da questa classifica rimane fuori chi frequenta un percorso in apprendistato. Infatti, il percorso di apprendistato, da noi, è considerato come quel percorso da far seguire agli studenti che non sono ritenuti in grado di frequentare un percorso formativo tradizionale.

L'alternanza formativa permette allo studente di comprendere le sue attitudini al lavoro nella consapevolezza che «l'occupazione è il solo elemento che armonizzi le capacità specifiche di un individuo e la sua funzione sociale»¹⁹⁶ e che «chiave della felicità è lo scoprire che cosa uno è adatto a fare e il dargli l'opportunità di farlo»¹⁹⁷. Si deve, però, prendere atto del fatto che «è finita l'epoca in cui, prima, ci si preparava a svolgere un lavoro e, poi, dopo la fase della preparazione, si esercitava questo lavoro, magari per l'intera vita»¹⁹⁸. Inoltre, nella visione odierna del lavoro «non resta spazio che per relazioni interpersonali superficiali e legami istituzionali deboli. Per cui affezionarsi al lavoro inteso sia come processo sia come luogo in cui si esercita appare, nell'attuale contesto socio - economico, non solo pare difficile sul piano strutturale, ma persino controproducente per lo stesso equilibrio di personalità del lavoratore»¹⁹⁹. Un'ultima considerazione va fatta sulla perdita di valore del lavoro manuale di cui, oggi, si registra

¹⁹⁴ Decreto Legislativo 15 aprile 2005, n. 77, Art. 4

¹⁹⁵ G. Bertagna (ed.), *Fare laboratorio. Scenari culturali ed esperienze di ricerca nelle scuole del secondo ciclo*, La Scuola, Brescia, 2012 pp. 11-12, G. Bertagna

¹⁹⁶ J. Dewey, *Democrazia e educazione* (1916), tr. It. di E. Enriques Agnoletti e P. Paduano, a cura di A. Granese, La Nuova Italia, Firenze, 1992, p. 367

¹⁹⁷ *Ibidem*

¹⁹⁸ G. Bertagna (ed.), *Fare laboratorio. Scenari culturali ed esperienze di ricerca nelle scuole del secondo ciclo*, cit. p. 17, G. Bertagna

¹⁹⁹ *Ivi* p. 22

una scarsa considerazione. «Non ci sarebbe nulla di strano e di provocatorio, perciò nel rilanciare anche oggi il valore educativo e culturale del lavoro manuale e dell'invitare a riscoprirne le potenzialità formative. In questo contesto, non ci deve allora preoccupare il fatto che così tanti bambini di 2-5 anni e anche tanti giovani siano “nativi digitali” e che abbiano la testa, il cuore e le mani da “nativi digitali” [...]. Ci deve preoccupare, al contrario, il fatto che abbiano solo “questa” testa, “questo” cuore e “queste” mani digitali, con i loro pregi e con i loro difetti. E non capiscano più altro, come ad esempio i problemi posti da un diverso tipo di manualità, semplicemente perché non l'hanno mai “praticata” e non sono stati messi dalle istituzioni formative nelle condizioni di scoprirlo e di poterlo fare»²⁰⁰.

Emerge la necessità di rivalutare l'azione formativa dell'impresa che con le rivoluzioni industriali aveva assunto la dimensione dell'addestramento, privando l'uomo dell'intelletto e trattandolo alla stregua di una macchina. Oggi la situazione è cambiata radicalmente. Il prodotto non si può separare dalla mente e dal contesto sociale di coloro che lo hanno creato. «Qualcosa vuol pur dire, insomma, il fatto che, oggi, si riconosca che ogni manifattura sia sempre più anche il risultato di una mentofattura (e viceversa); che ogni manufatto sia sempre più anche cognitariato (e viceversa); e che ogni “prestazione”, a qualsiasi livello di responsabilità professionale si riferisca [...] per apparire “adeguata e ben fatta”, non può prescindere dal contesto che la circonda»²⁰¹. Non esistono “scuole” in cui si possano trasmettere le conoscenze in maniera astratta, a prescindere dal contesto socioculturale e dalle relazioni che si instaurano tra i soggetti coinvolti. È nell'impresa «che si impara a crescere, a mettere in gioco se stessi, i propri cari, gli altri e il dar-si la forma possibile che si reputa migliore, tenendo conto di quella che gli altri o le situazioni pretendono magari di imporci. Non c'è scuola migliore di questa»²⁰². «Il problema, dunque, non è negare che l'azienda, la fabbrica, come esperienze di “impresa comune”, possano essere a pieno titolo esperienze formative, ma è mettere a fuoco le consapevolezza che possono permettere loro di poter rivendicare e, soprattutto, avvalorare progressivamente questa qualificazione, convinte che più la garantiscono meglio producono e restano sul mercato, nel medio e lungo periodo»²⁰³. Queste

²⁰⁰ *Ivi* pp. 31-32

²⁰¹ *Ivi* p. 44

²⁰² *Ivi* p. 46

²⁰³ *Ivi* p. 47

consapevolezze sono l'organizzazione, la conoscenza pratica e la presenza di un "mastro". Per quanto riguarda l'organizzazione, questa non va intesa come un modello organizzativo stabilito a priori ma come «una serie di relazioni vissute tra persone, orientate ad uno scopo comune, in uno spazio e in un tempo determinato»²⁰⁴. La seconda consapevolezza, la conoscenza pratica, si basa sul presupposto che nessuno diventa esperto in una disciplina solamente facendo corsi teorici sulla stessa. «Per questo è molto importante che, in un'impresa che vuol essere formativa, si parta dalle azioni e si giunga alle riflessioni critiche su di esse. Si praticino, cioè, i reali processi di lavoro, prima in osservazione, poi in affiancamento e, infine, in autonomia. E, contemporaneamente, ma sempre a fianco o dopo l'azione, si abbiano gli stimoli [...] adeguati per analizzare questi processi nelle tre fasi che si sono indicate»²⁰⁵. L'ultima consapevolezza è che le due precedenti non possono esistere senza l'esistenza di un "mastro" che svolge «le funzioni di tutor nei confronti dei neofiti (apprendisti e non), assumendosi quattro ruoli strategici, e precisamente di facilitator, instigator, coach e assessor (colui che riconosce valore al lavoro dei soggetti)»²⁰⁶. Il mastro però, può guidare il neofita allo svolgimento del lavoro, può trasmettergli le conoscenze utili alla realizzazione dello stesso, ma non può insegnarli il "lavorare bene". Infatti «lavorare bene è molto più che avere le conoscenze per renderlo possibile. Coinvolge sempre l'intera esperienza personale, l'essere globale stesso di chi lavora, chiamato sempre ad essere vigile e presente, dando in ogni momento il meglio di sé nelle relazioni che è chiamato ad instaurare»²⁰⁷.

Il problema principale della nostra società è che l'apprendistato, come modalità di formazione degli studenti, continua a essere considerata poco adeguata. «Continuiamo allora a pensare che la società della conoscenza e dell'innovazione che esalta la giustizia e rispetti i diritti delle persone significhi, tutto sommato, avere sempre più diplomati e laureati che non hanno mai lavorato in un'impresa durante il loro percorso di studio; che, nella loro formazione, hanno imparato in maniera diretta o subliminale che è destinato a lavorare soltanto chi fallisce nello studiare [...] che qualsiasi "mestiere ben fatto" sia

²⁰⁴ *Ivi* p. 48

²⁰⁵ *Ivi* p. 53

²⁰⁶ *Ivi* p. 55

²⁰⁷ *Ivi* p. 57

insegnabile con adeguate istruzioni “scolastiche” e non rimandi, invece, sia per chi lo insegna sia per chi lo sta apprendendo alla responsabilità morale personale»²⁰⁸.

Pertanto, bisogna che i nostri giovani riconoscano il valore del lavoro per poterlo apprezzare e svolgere nella sua totalità. Jean- Jacques Rousseau nell’*Emilio* afferma «state certi che un’ora di lavoro gli insegnerà più cose di quante ne terrebbe a mente in un giorno di spiegazioni. [...] Non siamo soltanto apprendisti operai, siamo apprendisti uomini, e il tirocinio di questo mestiere è più faticoso e più lungo del primo»²⁰⁹.

²⁰⁸ *Ivi* p. 61

²⁰⁹ Jean-Jeaque Rousseau, *Émile ou del l’éducation* [1762], III, tr. It. *Emilio o dell’educazione*, Studium, Roma 2016, pp. 299-323

Capitolo 2. La didattica della matematica

2.1 Cos'è la matematica?

«...Che cos'è la matematica? Una questione spinosa. Non guardate su un dizionario! Dovunque io abbia cercato, la risposta era sbagliata»²¹⁰. Una definizione del termine matematica è estremamente difficile da enunciare, in quanto la matematica non è una semplice materia oggetto di studio ma una scienza che coinvolge più discipline. Non a caso un tempo, e ancora oggi in alcune lingue straniere come l'inglese, il termine che indica la matematica era plurale: matematiche. Con tale termine si intendeva indicare quattro arti liberali: l'aritmetica, la geometria, l'astronomia e la musica. Inoltre, le definizioni "classiche" del termine matematica risultano, oggi, estremamente generiche e al tempo stesso restrittive perché «mai come negli ultimi decenni, la matematica ha avuto uno sviluppo così rapido e intenso, e difficilmente una singola definizione potrà tenerne insieme tutti i suoi molteplici aspetti»²¹¹.

Ogni volta che ci si avvicina alla matematica, certe domande sono ricorrenti «Che cos'è la matematica? A cosa serve? Di cosa si occupano i matematici di adesso? Non era già stato tutto dimostrato? E in ogni modo quanti nuovi numeri possono ancora essere inventati? La matematica odierna è fatta solo di lunghi calcoli, con i matematici ridotti a semplici custodi dello zoo, che assicurano che i loro preziosi computer siano sempre ben nutriti? E se non è così, che cosa c'è al di là dell'incomprensibile espressione di alcuni geni straordinari con la testa fra le nuvole e i piedi che pendono dai nobili balconi delle loro torri d'avorio? La matematica un po' è così, e un po' non lo è per niente. Per lo più è semplicemente diversa. È quello che non vi aspettate che sia, vi voltate un attimo ed è già cambiata. Sicuramente non è un corpo immutabile di conoscenze, il suo sviluppo non si limita all'invenzione di nuovi numeri, le sue diramazioni nascoste pervadono ogni aspetto della vita moderna»²¹². Dalle precedenti domande si deduce che la matematica a livello scolastico è presentata come qualcosa di statico ed immutabile. «La matematica che si impara a scuola è infatti molto spesso fatta da un insieme, a volte non completamente omogeneo, di nozioni di base, assiomi, definizioni e regole, che vengono date

²¹⁰ H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, a cura di C.F. Manara, La Scuola, Brescia, 1994, p. 21

²¹¹ AA. VV., *Didattica della matematica*, Mondadori Università, Milano 2018, p. 1

²¹² I. Steward, *From here to infinity: A Guide to Today's Mathematics*, Oxford Paperbacks, Oxford, 1996, p. vii

dall'insegnante e su cui è praticamente impossibile discutere»²¹³. Dall'altra parte, l'esperienza dei matematici è molto diversa, il termine che loro stessi apprezzano di più per definire la matematica è l'olandese “*Wiskunde*”, coniato da Simone Stevino²¹⁴, che letteralmente significa “la scienza del certo”. «I matematici si sono comportati come se questa fosse la vera definizione della matematica; ma poiché si presentava come una pretesa piuttosto che come una definizione, non ha trovato grazia presso gli autori dei dizionari. Anche se può sembrare una pretesa, è stato un colpo di fortuna di Stevino quello che lo ha condotto a dare il nome ad una scienza [...] secondo quella che egli considerava la sua principale caratteristica, e non secondo i suoi oggetti. La caratteristica principale della matematica è la certezza, o almeno così lui credeva»²¹⁵. La certezza scientifica non viene soddisfatta con l'accettazione delle cose come garantite e in matematica questa certezza viene ottenuta con un'attività mentale. «Dovremmo considerare la matematica come un'attività mentale la quale, per certe misteriose ragioni, crea la certezza e fa questo, sembra, in modo che sfida ogni confronto»²¹⁶.

Infatti, mentre qualsiasi teoria scientifica venga elaborata ricorre all'esperienza e all'osservazione diretta dei fenomeni naturali nei procedimenti di verifica delle proposizioni, «la matematica è l'insieme di tutte le teorie per le quali i procedimenti di verifica non richiedono l'esperienza»²¹⁷. Questo non vuol dire che il ricorso all'esperienza è escluso dai processi di formazione dei concetti matematici, «si intende soltanto dire che l'esperienza sensibile è estranea ai procedimenti di verifica della verità delle proposizioni matematiche. [...] Il criterio di verificabilità della matematica consiste essenzialmente ad un ricorso continuo a determinate strutture concettuali. Queste vengono indubbiamente costruite con un lavoro [...] di organizzazione dell'esperienza sensibile, ma una volta costituite queste strutture la matematica deve la sua verità ad esse e non più al ricorso all'esperienza sensibile che sta alla loro radice»²¹⁸. Il processo di astrazione e l'attività mentale che ne consegue rendono la matematica «un qualcosa di

²¹³ AA. VV., *Didattica della matematica*, cit., p. 2

²¹⁴ Simone Stevino (Bruges, 1548 – L'Aia, 1620) ingegnere, fisico e matematico fiammingo pre-galileiano al quale si deve l'introduzione di una nuova notazione per i numeri decimali. Tale innovazione ha aperto la strada alla notazione decimale moderna e al concetto di “numero reale”. Stevino riteneva che la lingua olandese fosse eccellente per scrivere di scienza, tradusse quindi moltissimi termini matematici in olandese che risulta una delle poche lingue europee a possedere molti termini matematici non derivati dal latino.

²¹⁵ H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, a cura di C.F. Manara, cit. pp. 21-22

²¹⁶ *Ivi* p. 22

²¹⁷ G. Melzi, *Perché la matematica*, La Scuola, Brescia, 1978 p. 32

²¹⁸ *Ivi* p. 33

estremamente mutevole nel tempo, in cui le cose che non conosciamo sono molto di più di quelle che conosciamo. In cui il nostro punto di vista può cambiare in ogni momento a seconda del problema che stiamo considerando. E in cui i risultati che riusciamo ad ottenere sono frutto di duro lavoro, false piste, dibattiti e controversie, e non nascono certo puliti e levigati come appare nei libri di matematica. Le idee in matematica nascono per dare risposte a problemi spesso molto pratici, a volte profondi, a volte posti da altri settori della stessa matematica [...]. E nella quasi totalità dei casi, gli assiomi e le definizioni, che nei libri vengono per primi, nella realtà vengono solo alla fine, quando si è capita bene la struttura del problema e della soluzione e vogliamo presentare le nostre scoperte alla comunità matematica in modo organizzato e facilmente comprensibile»²¹⁹. Nell'antichità la matematica veniva utilizzata per costruire edifici, consultare gli astri e per fare molte altre cose, ma la sua conoscenza era limitata ad un piccolo gruppo di persone dell'alta società. Nella società odierna la matematica ha una quantità enorme di connessioni e di scopi che rende ancora più difficile darne una definizione. «La matematica è presente e indispensabile in quasi tutte le applicazioni più innovative, dagli algoritmi di Google al sequenziamento del genoma umano [...] le scienze matematiche sono parte integrante della nostra vita quotidiana e si espandono costantemente per trattare sempre nuovi settori della scienza e della tecnologia, risultando così cruciali per lo sviluppo economico e la competitività del sistema produttivo»²²⁰. Pertanto, nella società moderna la matematica trova applicazione in una vastità di campi, più di quanto si pensi. «La verità è che noi incontriamo matematici dappertutto, ogni giorno, ma difficilmente ce ne accorgiamo [...] Semplicemente non ci viene in mente che chi si occupa nella nostra banca del rischio finanziario possa avere una laurea in matematica, o che quelli che hanno inventato o prodotto i lettori DVD o MP3 abbiano tra i loro impiegati un gran numero di matematici [...]. Spesso penso che la maniera migliore di cambiare il modo con cui la gente guarda alla matematica, sarebbe di incollare un'etichetta rossa su ogni cosa che usi la matematica. «Math Inside». Ci sarebbe un'etichetta su ogni computer, certamente [...]. Ma dovremmo anche mettere un adesivo rosso matematico su ogni biglietto aereo, ogni telefono, ogni automobile, ogni aeroplano, ogni semaforo, ogni ortaggio [...]. Tutta la nostra vita galleggia come una barchetta su di un vasto oceano di

²¹⁹ AA. VV., *Didattica della matematica*, cit. p. 2

²²⁰ Ivi p. 4

matematica. Ma difficilmente qualcuno lo nota. E questo è una vergogna. La gente pensa che la matematica non serva a niente, che non c'entri niente, che sia solo un gioco intellettuale senza alcun significato. Questo è il motivo per cui mi piacerebbe vedere questi adesivi rossi. In realtà, la miglior ragione per non usarli è che coprirebbero la maggior parte del pianeta»²²¹.

Si potrebbe pensare che la matematica sia sostanzialmente una tecnica per poter rappresentare l'esperienza sensibile ma «è ben altro: è una forma completa e autonoma di conoscenza. Si può dire che riesce ad essere una tecnica di tremenda efficacia per l'intervento sul mondo, proprio perché anzitutto è una forma autentica di conoscenza. Essa rivela l'esistenza di un mondo posto al di là di quello sensibile e ancora più ordinato e complesso [...]. In questo senso la matematica diventa, ben più che una tecnica, un modo di pensare e perfino [...] un modo di vivere»²²². A questo proposito è bene sottolineare che buona parte delle ricerche in matematica, ancora oggi, non sono motivate dalle applicazioni ma nascono all'interno della disciplina stessa. «Spesso il ricercatore matematico è mosso dalla sua personale curiosità, da un desiderio di capire in profondità le connessioni tra settori diversi, o semplicemente dal desiderio di una visione più semplice e fondamentale di certe idee»²²³.

Ci chiediamo: come facciamo ad essere sicuri che la matematica sia lo strumento giusto per descrivere la realtà anche in relazione alle sue applicazioni nelle altre scienze? Ci sono due principali scuole di pensiero filosofico: l'approccio formalista e quello platonista. Il primo approccio «pretende che la matematica sia un gioco formale in cui si fissano regole e assiomi, da cui si derivano i teoremi matematici, senza curarci minimamente del mondo esterno. [...] In questa visione la matematica appare però come un gioco che non deve avere necessariamente un riscontro nella realtà. Questo libera il matematico da molte domande e responsabilità, ma lascia completamente intatto il problema del rapporto con le altre scienze e con le applicazioni»²²⁴. L'approccio platonista vede la matematica separata dal mondo reale, «il lavoro del matematico consiste di esplorazioni e scoperte di un mondo indipendente»²²⁵. Entrambi gli approcci

²²¹ I. Stewart, *Letters to a young mathematician*, Basic Books, New York, 2006, pp. 13-14

²²² G. Melzi, *Perché la matematica*, cit. p. 35

²²³ AA. VV., *Didattica della matematica*, cit. p. 5

²²⁴ *Ivi* p. 6

²²⁵ *Ibidem*

hanno difficoltà a spiegare come in concreto la matematica si applichi alla vita reale e alle scienze. «Se rinunciamo a dare uno status di realtà alla matematica al di fuori dell'intuizione personale, allora diventa centrale il ruolo dei modelli matematici nel cercare di descrivere alcune parti molto limitate della realtà. [...] Il rapporto tra matematica e realtà diventa meno esclusivo e normativo»²²⁶. La matematica ha, quindi, la capacità di astrarre la realtà e questo avviene in modi differenti. «In primo luogo astraiamo le caratteristiche di un problema per studiarlo meglio facendone un modello. Il secondo modo in cui usiamo l'astrazione è avere a che fare con oggetti astratti: punti, rette, volumi, forze, relazioni, funzioni. Infine, e questo è il senso che rende la matematica uno strumento estremamente potente, una volta che un problema è stato tradotto in modo astratto, per capire cosa succede non dobbiamo più ricordarci da dove siamo partiti»²²⁷. Prima di trattare di insegnamento e apprendimento della matematica ritengo utile accennare al linguaggio matematico, come mezzo di trasmissione dei contenuti. È bene sottolineare che il ruolo del linguaggio non è quello di trasmettitore di significati ma quello di costruttore dei significati. «La matematica studia concetti astratti quali i numeri, le rette (illimitate e dotate di una sola dimensione), gli insiemi e avanti a partire da questi. Ciascuno di noi produce intuizioni mentali personali di un concetto astratto e, in base alla propria intuizione, sviluppa nella propria mente una rappresentazione specifica di tale concetto e agisce su di esso matematicamente, cioè seguendo regole coerenti (almeno possibilmente tali) per ottenere altre intuizioni»²²⁸. La costruzione dei concetti, le azioni su di essi e il controllo del risultato avvengono introspektivamente. Nel momento in cui il soggetto decide di comunicare ad altri le proprie convinzioni diventano necessari un mezzo di trasmissione ovvero il linguaggio che può essere formale, scientifico, etc. e canoni di uso quali sillogismi e teorie matematiche. «I sillogismi determinano l'uso e il significato delle affermazioni universali [...] e delle affermazioni particolari [...] indipendentemente dalla verità o meno di quanto affermato»²²⁹. Del resto, la matematica è strutturata in teorie. Ogni teoria matematica contiene assiomi, definizioni e teoremi.

²²⁶ *Ivi* p.7

²²⁷ *Ivi* p.8

²²⁸ *Ivi* p. 14

²²⁹ *Ivi* p.15

Gli assiomi dichiarano le nostre consapevolezze sui concetti iniziali. «È perfettamente accettabile che un soggetto non trovi nulla di intuitivo in un assioma, del resto chi era arrivato a formulare l'assioma aveva realizzato un proprio percorso mentale che non può essere ricostruito. Proprio per questo, è di fondamentale importanza avere ben presente la genesi storica di una teoria matematica»²³⁰.

La definizione descrive un concetto ausiliario utile per l'organizzazione della teoria. «Per la sua natura di utilità «oggettiva», una definizione è quasi sempre imposta al soggetto che sviluppa la matematica»²³¹.

Infine, ci sono i teoremi cioè enunciati che richiedono di essere verificati tramite una dimostrazione. «Una dimostrazione è un argomento razionale basato soltanto su argomentazioni logiche, che assicura la correttezza dell'enunciato. La potenza di una dimostrazione sta nel fatto che, accettati gli assiomi della teoria, non può avvenire di trovare un'incongruenza accettando anche il teorema. La dimostrazione è l'atto finale della comunicazione tra i soggetti che hanno immaginato la teoria e stanno cercando di collegare le proprie intuizioni. Proprio perché una dimostrazione è proprio l'anello tra più intuizioni personali, la comunicazione di una dimostrazione deve non essere ambigua. Questa comodità di trasmissione viene interpretata spesso come aridità della matematica, quando invece è soltanto la realizzazione esplicita del rispetto reciproco tra i soggetti coinvolti nella comunicazione»²³².

La matematica è parte della vita di tutti i giorni e proprio per questo avviene che parte del linguaggio matematico venga utilizzato nel linguaggio quotidiano, ma nel linguaggio matematico molte parole di uso comune assumono diversa denotazione. «È dunque importante riuscire a separare il linguaggio matematico dal linguaggio quotidiano; la pratica dimostrativa serve esattamente a questo. Permette di confrontare le proprie opinioni con quelle degli altri su un piano di totale uguaglianza sviluppando le capacità argomentative. Ma per fare questo è necessario capire quanto il linguaggio matematico sia una cosa separata dal linguaggio quotidiano e che, quando si trattano argomenti scientifici, il linguaggio matematico diventa lo strumento fondamentale»²³³.

²³⁰ *Ivi* p.16

²³¹ *Ivi* p.17

²³² *Ivi* p.19

²³³ *Ivi* p.25

2.2 L'insegnamento- apprendimento della matematica

Se nel cercare di rispondere alla domanda “Che cos’è la matematica” ci si imbatte in elementi di difficoltà evidenti, cercare di definire che cos’è la Didattica della Matematica non è meno complesso. La didattica della matematica non ha un inizio ben definito anche se il problema di insegnare la matematica è presente già nell’antichità. «Il papiro Rhind, che risale a quasi 4000 anni fa, riporta dei problemi di matematica: domande, a cui qualcuno (evidentemente un allievo) doveva rispondere. Lo scriba Ahmes, che lo ha trascritto nel 1650 a.C., ne parla come di un mezzo per scoprire e indagare fatti, misteri, segreti...»²³⁴. Anche i grandi pensatori dell’antica Grecia si posero il problema di quali fossero il ruolo, le forme e gli obiettivi dell’educazione matematica, elaborando teorie anche molto diverse tra loro. In tempi più recenti, agli inizi del XX secolo cominciano a porsi delle domande su certi aspetti legati all’insegnamento della matematica e intorno al 1930 nascono le prime riviste specifiche per l’educazione matematica. Senza farne una storia dettagliata, la didattica della matematica è una scienza giovane che «ha visto evolversi nel corso degli anni i propri interessi di ricerca e le proprie metodologie»²³⁵. «È bene ricordare quanto giovane sia la didattica della matematica come campo di ricerca. I matematici sono abituati a misurare i progressi della matematica in secoli se non in millenni, mentre per la didattica della matematica si ragiona in termini di decenni»²³⁶. È quindi questo essere “giovane” che distingue la didattica della matematica dalla matematica. «L’attenzione dei primi lavori interessati alle dinamiche dell’insegnamento della matematica era completamente focalizzata sul contenuto matematico e sugli eventuali nodi epistemologici dello stesso. L’ingenua assunzione -presto accantonata- era che presentare bene i contenuti [...] risolvesse i problemi del processo di insegnamento/apprendimento. Lo sviluppo di una vera e propria disciplina, la didattica della matematica, è coinciso praticamente con il momento nel quale lo studio delle difficoltà concettuali dei contenuti matematici è stato affiancato dalla considerazione della *variabile studente*. Solo successivamente è stato riconosciuto anche il ruolo chiave

²³⁴ AA. VV., *Perché studiare la matematica*, a cura di G. Bolondi, Pearson, Milano, 2012, p. vii

²³⁵ AA. VV., *Didattica della matematica*, cit. p. 28

²³⁶ A. Schoenfeld, *Purposes and methods of research in mathematics education*, in «Notice of AMS. June/July 2000», p. 649

della *variabile insegnante*»²³⁷. La trasmissione della conoscenza è un fenomeno complesso in cui bisogna sempre tener conto del maestro, del sapere e dell'allievo. La ricerca in didattica della matematica ha due scopi principali: uno detto puro e l'altro applicato. «Il primo mira a comprendere la natura del pensiero matematico, e del processo di insegnamento e apprendimento della matematica»²³⁸, il secondo mira ad «usare la conoscenza generata per migliorare la qualità dell'educazione matematica. Un aspetto essenziale da condividere è che i due scopi sono indissolubilmente intrecciati: senza una profonda analisi del pensiero matematico e del processo di apprendimento - insegnamento non ci può essere nessun significativo progresso dal punto di vista applicativo»²³⁹.

Ogni società è regolata da norme che ne definiscono diritti e doveri di chi vi appartiene, cioè si stabilisce un “*contratto sociale*”²⁴⁰. Anche nella società scuola/classe ci sono norme specifiche che disciplinano la situazione didattica, l'insieme di queste norme è chiamato “*contratto didattico*”. «Il contratto didattico rappresenta il sistema di diritti e doveri (essenzialmente impliciti) che allievi e insegnante accettano e rispettano a proposito degli aspetti del sapere matematico che è insegnato. L'insieme di regole esplicite ma soprattutto implicite, che assegna e limita le responsabilità di ciascuno (insegnante e allievo(i)) rispetto ad un ben determinato sapere matematico insegnato. Nel corso di una sequenza didattica che ha come obiettivo l'insegnamento di una certa conoscenza (situazione didattica) l'allievo interpreta la situazione che gli viene proposta, le domande che gli sono poste, le informazioni che gli sono fornite, i vincoli che gli sono imposti in funzione di ciò che il professore produce, in modo consapevole o meno, in modo ripetitivo nella sua pratica di insegnamento»²⁴¹. Pertanto, quando l'insegnante pone un problema, gli allievi cercano in tutti i modi di dare una risposta alla domanda, utilizzando tutti i dati a loro disposizione, senza tenere conto della possibilità che con i

²³⁷ AA. VV., *Didattica della matematica*, cit. pp. 28-29

²³⁸ *Ivi* p. 30

²³⁹ *Ibidem*

²⁴⁰ Uno dei principali esponenti del contrattualismo sociale è Jean-Jacques Rousseau (Ginevra 1712 - Ermenonville, Oise, 1778) con il suo trattato “*Le Contrat social*”, pubblicata nel 1762 a conclusione di un lavoro più ampio sulla politica. Il “contratto sociale” è inteso come un patto attraverso il quale gli individui che abbandonano lo stato di natura per dare vita allo Stato, cedono tutti i loro diritti alla comunità di cui entrano a far parte. Essi diventano, così, cittadini, e costituiscono l'assemblea sovrana che approva le leggi. Rousseau distingue la “volontà di tutti”, che è la somma delle volontà dei singoli cittadini, dalla “volontà generale”, che persegue l'utile pubblico. La libertà consiste nell'obbedire alla legge che ci si è prescritta. L'opera costituisce il manifesto teorico delle ideologie rivoluzionarie della fine del XVIII secolo.

²⁴¹ *Ivi* pp. 38-39

dati che il problema mette a disposizione non ci sia una risposta alla domanda posta. Gli studenti danno la risposta che credono che l'insegnante si aspetti. Allo stesso modo, l'insegnante valuta gli allievi basandosi sulla risposta che si attende che questi diano alla sua domanda e non sulla effettiva validità matematica della risposta ottenuta. «Il contratto didattico, quindi, dirige i comportamenti dell'allievo e addirittura può dirigere l'interpretazione di un testo, di un problema, di un'attività; ma dirige anche i comportamenti e le valutazioni dell'insegnante. Infatti il contratto didattico permette di spiegare certi comportamenti osservati (fenomeni) e perfino di prevederli»²⁴². L'insegnante tende a "guidare" lo studente nel suo processo di apprendimento, descrivendo in modo più chiaro e dettagliato possibile cosa fare. In questo modo l'insegnante crede di facilitare il processo di apprendimento dell'alunno; invece, rischia di non vedere realizzato l'apprendimento desiderato. Questo accade perché «tutto ciò che l'insegnante fa per produrre nell'allievo i comportamenti attesi tende a far scomparire le condizioni necessarie all'apprendimento. Se l'allievo accetta che l'insegnante gli sveli i risultati e non trova lui stesso come trovarli non apprende la matematica [...] non se ne appropria. Al contrario, se rifiuta tutte le informazioni che vengono dall'insegnante allora la relazione didattica si rompe»²⁴³. È da questa rottura, e quindi dal superamento della relazione didattica che si genera l'apprendimento.

«L'apprendimento della matematica avviene per salti (ovviamente intellettuali), cioè dà luogo a stati mentali distinti e discontinui»²⁴⁴. L'apprendimento della matematica può essere visto come «una appropriazione di strutture e di procedure che avviene attraverso la re-invenzione da parte di ogni soggetto; e l'attività del matematizzare si esplica e si realizza sostanzialmente quando il soggetto si appropria delle idee e delle strutture reinventandole in modo attivo»²⁴⁵. Nello sviluppo cognitivo del bambino, alcuni concetti della matematica sembrano essere innati, come la similitudine o il numero intero. I bambini reinventano per conto loro l'aritmetica, ma questo processo di reinvenzione viene spesso fermato nell'insegnamento istituzionalizzato che in qualche modo impone al bambino le conoscenze da apprendere. «Nessun individuo deve ripercorrere tutta la

²⁴² *Ivi* p. 41

²⁴³ *Ibidem*

²⁴⁴ H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, a cura di C.F. Manara, *cit.*, p. 11

²⁴⁵ *Ivi* pp. 11-12

gerarchia concettuale di conoscenze e di abilità che sono state costruite e sono cresciute con il continuo scambio di forma e di contenuto. [...] Vi deve essere, in qualunque direzione, un certo livello che è alla portata di tutti. [...] È questo un modo di vedere le cose del tutto diverso da quello di coloro che pretendono di stabilire a priori alla gente la matematica che deve imparare. Il discente deve essere libero di trovare il proprio livello, e di esplorare i cammini che vi conducono, con il minimo di guida richiesta per ogni caso particolare. Vi sono dei buoni argomenti pedagogici a favore di questa tesi. Anzitutto le conoscenze e le abilità, quando sono acquisite con l'attività personale, si dimenticano meno facilmente e vengono utilizzate con maggiore facilità e prontezza di quelle che sono state imposte dagli altri. In secondo luogo, la scoperta può dare soddisfazione, e quindi l'imparare con la reinvenzione può essere fondato sulle motivazioni personali. In terzo luogo questo atteggiamento incoraggia l'attività di sperimentare la matematica come una attività umana. Tradizionalmente la matematica viene insegnata come qualcosa di bell'e fatto. Agli studenti si danno le definizioni, le leggi, gli algoritmi, secondo i quali ci si aspetta che si comportino. Soltanto una infima minoranza impara la matematica in questo modo»²⁴⁶. «Guidare la reinvenzione significa trovare un delicato equilibrio tra la libertà dell'inventare e la forza del guidare, tra il permettere al discente di divertirsi e il chiedergli di compiacere al docente. [...] Il discente deve inventare qualcosa che per lui è nuovo, ma che è ben conosciuto da chi guida»²⁴⁷. «Il guidare implica la ricerca di un delicato equilibrio tra la forza di chi insegna e la libertà di chi impara»²⁴⁸. Per molti docenti bisogna prima imparare e poi capire. In realtà questo processo su cui si basa l'istruzione è la principale causa del mancato apprendimento della matematica e delle difficoltà che gli studenti incontrano. Perché spesso si impara anche senza capire ma, la mancanza di comprensione rende sterile il concetto imparato. Capire vuol dire rendere proprio un sapere, esserne in possesso. È questo possesso che permette al discente di identificare e correggere i propri errori e soprattutto di riutilizzare il concetto compreso in situazioni differenti da quella in cui si è appreso.

La matematica nasce dall'attività del matematizzare. «Matematizzare significa matematizzare la realtà o pezzi di realtà»²⁴⁹. La matematizzazione può essere orizzontale

²⁴⁶ *Ivi* p. 74

²⁴⁷ *Ivi* p. 75

²⁴⁸ *Ivi* p. 83

²⁴⁹ *Ivi* p. 95

o verticale. La matematizzazione orizzontale «rende un problema accessibile ad essere trattato matematicamente»²⁵⁰. Nella matematizzazione verticale «si realizza la procedura matematica, più o meno sofisticata»²⁵¹. In sintesi, la matematizzazione orizzontale astrae i concetti reali e li fa diventare oggetti matematici, la matematizzazione verticale è data dalla manipolazione dei simboli con cui è stata astratta la realtà. Non c'è una distinzione netta tra le due anzi, questa «dipende dalla situazione specifica, dalla persona coinvolta e dall'ambiente in cui si trova»²⁵². «Ma la realtà non è una cosa sola: è tante cose quante persone esistono, ed anche per una sola persona può significare tante cose quanti stati interni di comprensione esistono, oppure quante circostanze esterne»²⁵³.

Bisogna tenere sempre a mente che la matematica deriva da un certo contesto che ci aiuta a risolvere il problema. Spesso si insegna la matematica come una serie di algoritmi senza tenere conto del contesto e questo genera la maggior parte delle difficoltà che gli allievi si trovano ad affrontare quando devono applicare i concetti imparati come fini a sé stessi perché privati del proprio contesto nel processo di insegnamento. È necessario che l'insegnante sia consapevole «che l'apprendimento non è sollecitato da quello che diciamo agli studenti, dai contenuti a cui li avviciniamo nei nostri discorsi. È soprattutto il tipo di lavoro a cui li chiamiamo che mette in moto nei ragazzi processi di appropriazione di conoscenza»²⁵⁴. «Per insegnare matematica bisogna insegnare non le parole, ma a parlarne, non le dimostrazioni, ma a dimostrare, non i formalismi, ma a formalizzare [...]. Perciò osservare, immaginare, sbagliare... sono azioni che riguardano la matematica ancora prima del contare o del misurare, la riguardano in quanto sapere e in quanto azione ragionevole e ragionata. La scommessa è che, sviluppando l'abitudine a questo tipo di azioni, tutti siano in grado di avvicinarsi alla matematica come a un ricco campo di senso»²⁵⁵.

Spesso la matematica viene associata al gioco. «C'è chi considera la matematica in sé come una sorta di gioco mentale, contraddistinto da un insieme di regole abbastanza semplici, e che via via diviene sempre più complicato. Oppure, si parla di giochi matematici, sottolineando che, almeno in una certa misura, la matematica non è solo uno

²⁵⁰ *Ivi* p. 67

²⁵¹ *Ibidem*

²⁵² *Ibidem*

²⁵³ *Ivi* pp. 95-96

²⁵⁴ R. Manara, *La Matematica e la Realtà. Linee di Metodo*, Marietti 1820, Milano, 2011, p. 10

²⁵⁵ *Ivi* pp. 12-13

strumento da manipolare, ma è un'attività piacevole, nella quale ci si può divertire e si può competere»²⁵⁶. Tuttavia, il legame tra matematica e gioco è più profondo. I bambini non giocano per passare il tempo, giocare per loro è entrare in rapporto con la realtà. I bambini chiedono spiegazioni su quello che li circonda proprio perché hanno bisogno di dare un senso alla realtà. I bambini nel gioco trasfigurano questa realtà per attribuirgli significati straordinari ma sono consapevoli che quella del gioco non è la realtà. «La funzione simbolica è importante per la conoscenza in generale, per la matematica in modo particolare. Lasciare aperta nei bambini la capacità di trasfigurare la realtà si rivelerà in seguito un grande aiuto anche nel comprendere la matematica. Infatti, i più seri problemi nel suo apprendimento nascono quando essa si presenta come un insieme di segni senza significati: un bambino non accetta di trattare segni senza significati, piuttosto attribuisce significati fantastici. I bambini non accettano le cose prive di senso»²⁵⁷. Si può usare il gioco scegliendolo consapevolmente come metodologia di insegnamento. L'efficacia del gioco sta nel fatto che utilizza modalità che si discostano dall'apprendimento scolastico formale e può quindi essere utile per consentire l'acquisizione di concetti o per recuperare le difficoltà. «Con il gioco è possibile apprendere in una situazione meno rischiosa e quindi meno soggetta a frustrazioni rispetto a quelle che si presentano nella realtà. [...] Inoltre nel gioco non è necessaria una motivazione esterna per l'apprendimento»²⁵⁸. «Nel gioco si può spezzare il circolo vizioso regola-applicazione, problema- schema risolutivo che avvilisce l'apprendimento matematico ad addestramento, e si possono reintrodurre invece elementi di intuizione, creatività, prefigurazione, competizione e infine divertimento, che non dovrebbero mancare in nessuna attività matematica»²⁵⁹.

Comunemente si ritiene che la matematica sia un'attività puramente mentale, in realtà l'attività matematica parte da un'azione molto concreta che è quella dell'osservare. «Osservare sarebbe come fotografare la realtà, [...] una tecnica di rilevamento dei dati, che non influenza in alcun modo la situazione»²⁶⁰. Osservare vuol dire essere capaci di saper scegliere quali informazioni ci interessano cioè, l'osservare determina il punto di vista con cui guardare qualcosa. «Osservare insomma è un procedimento inscindibile di

²⁵⁶ *Ivi* p. 15

²⁵⁷ *Ivi* p. 19

²⁵⁸ *Gioco e matematica*, Atti del Convegno, Bologna novembre 1986, Cappelli, Bologna, 1986 p. 44

²⁵⁹ R. Manara, *La Matematica e la Realtà. Linee di Metodo*, cit. pag. 33

²⁶⁰ *Ivi* p. 36

analisi e di sintesi»²⁶¹. In senso analitico, osservare vuol dire raccogliere informazioni cioè cogliere le differenze, le contraddizioni, le invarianze; riconoscere oggetti uguali in contesti diversi e lo stesso oggetto in diverse funzioni. «In generale, si tratta di capacità profondamente coinvolte ovunque sia necessario utilizzare dei simboli, quindi in particolare in matematica»²⁶². Per quanto riguarda la sintesi, «per saper osservare è necessario riconoscere nella realtà i nessi che la rendono significativa»²⁶³. L'origine dei concetti matematici «può essere ricondotta alle esperienze elementari di ogni persona, relative alla percezione del contesto spaziale in cui si colloca – genesi dei concetti geometrici fondamentali- o alla successione temporale che sottende la seriazione e il conteggio – concetti base dell'aritmetica. In generale, poi, i concetti matematici di ogni natura sgorgano dalla necessità di razionalizzare esperienze della vita comune, di elaborare le acquisizioni del senso comune, i problemi della pratica abituale, schematizzandoli e modellizzandoli secondo certe procedure, usando certi simboli»²⁶⁴. Legata all'attività di osservazione c'è la descrizione, si osserva per descrivere e riprodurre. La descrizione è sempre una forma di schematizzazione della realtà che dipende dal soggetto che la osserva e dal perché la osserva. Esiste la “descrizione scientifica” che sembra essere impersonale, perché utilizza forme e strumenti che prediligono lo scopo alla forma. La descrizione scientifica comunica il proprio contenuto in modo intersoggettivo e privo di ambiguità perché tende a rendere comprensibili i propri contenuti al maggior numero possibile di soggetti. La matematica «utilizza una modalità specifica di rappresentazione, un proprio strumento per descrivere la realtà nel modo che le interessa, per codificarla adeguatamente. Si tratta dei simboli [...]. Le forme della rappresentazione simbolica della matematica possono infatti apparire piuttosto rigide, e non devono venire imposte ma conquistate gradualmente nel loro significato e nella loro funzione»²⁶⁵. La matematica per rappresentare e descrivere un oggetto usa le definizioni che, nonostante siano espresse in un linguaggio apparentemente semplice, non vengono imparate e capite facilmente dagli studenti. Ci sono studenti che capiscono il concetto e non sanno enunciare la definizione e studenti che conoscono perfettamente la definizione

²⁶¹ *Ivi* p. 37

²⁶² *Ivi* p. 39

²⁶³ *Ivi* p. 40

²⁶⁴ *Ivi* p. 42

²⁶⁵ *Ivi* p. 58

ma non hanno compreso il concetto. Questo è un problema di linguaggio. Il linguaggio della matematica è diverso da quello del senso comune in quanto ha esigenze diverse da quelle per cui si usa il linguaggio comune. La definizione matematica è prima di tutto una descrizione oggettiva dell'oggetto di studio, è anche un'abbreviazione in quanto il linguaggio matematico ci permette di sostituire un intero giro di parole con un termine. Un'altra caratteristica della definizione matematica è il suo carattere operativo, cioè essa può essere considerata la descrizione di un procedimento. «Nella didattica, è particolarmente importante arrivare con i ragazzi a formulare le definizioni, non partire dalla loro enunciazione. [...] La definizione, infatti, deve essere la sintesi di un processo di comprensione, non ne può essere l'origine»²⁶⁶. La definizione può essere vista come la fine di un percorso operativo che parte da un'osservazione, procede con il formulare altre osservazioni (ipotesi) e giunge ad una risposta. «Durante questo percorso è possibile, talvolta anche necessario, utilizzare un linguaggio improprio o approssimato, avvalersi di termini non strettamente tecnici, magari immaginifici, ma suggestivi dei significati in gioco. Talvolta sono i ragazzi stessi ad inventare espressioni molto significative. Ciò favorisce la comprensione, e aiuta a conquistare consapevolmente la formulazione corretta della definizione di un termine. Da quel momento è giusto pretenderne la ripetizione nei termini rigorosi, che a quel punto sono accessibili quasi a tutti»²⁶⁷.

Il fatto che la matematica aiuti a ragionare è considerato un buon motivo per insegnarla e apprenderla. Un ruolo importante nel ragionamento è, infatti, svolto dalla geometria che possiede una struttura assiomatico-deduttiva. «Nella concezione moderna della matematica, la correlazione con la logica si è ampliata, ha superato l'ambito preferenziale della geometria, permeando altrettanti aspetti fondamentali della matematica. La logica formale oggi è addirittura considerata come un capitolo della matematica, ed è infatti comparsa nei curricula e nei libri di testo, fin dalle prime classi di scolarità. Si è fatta strada l'idea che, per insegnare a ragionare correttamente, sia necessario insegnare logica»²⁶⁸. Gli argomenti della logica elementare sono appresi senza troppe difficoltà dagli allievi, in quanto appaiono come un gioco, ma trattati in maniera così teorica non riescono ad influenzare il modo di ragionare dell'individuo. Attraverso l'insegnamento della logica formale si fornisce uno strumento che aiuta ad essere consapevoli dei propri

²⁶⁶ *Ivi* p. 73

²⁶⁷ *Ibidem*

²⁶⁸ *Ivi* p. 79

ragionamenti ma non si può insegnare a ragionare. Le tre forme di ragionamento più utilizzate sono l'induzione, l'abduzione e la deduzione. «Tutte e tre le forme sono necessarie alla nostra ragione per avere “presa” sul reale, per trarre dall'esperienza giudizi significativi»²⁶⁹.

Il ragionamento induttivo è quello che dall'osservazione di un numero finito di fatti porta a formulare proposizioni di validità generale; l'abduzione è il ragionamento attraverso il quale, partendo dai fatti che si vogliono spiegare, si cerca di individuare una possibile ipotesi che li spieghi; il ragionamento deduttivo richiede di garantire la verità delle proprie proposizioni attraverso la dimostrazione, è per questo che è il tipo di ragionamento che la matematica predilige. «Le materie scientifiche in generale possono proporre la riflessione sul metodo e sul ragionamento in qualunque momento e in qualunque tipo di attività. La matematica poi è in causa direttamente. Può agire su diversi livelli. C'è un lavoro che possiamo chiamare preparatorio, adatto ai ragazzi più giovani, in cui si possono utilizzare quesiti logici non simbolizzati, sui quali si può ragionare a livello puramente verbale, avendo cura di esplicitare correttamente i percorsi seguiti. [...] Quando poi si entra nello specifico, in qualunque attività matematica [...] si può far trasparire la coesistenza dei diversi tipi di ragionamento, e giungere, con una gradualità che dipende dall'età, ad acquisire quella specifica struttura di deduzione, che la matematica chiama dimostrazione»²⁷⁰.

La componente intuitiva del pensiero fondamentale per la generazione dei concetti matematici è l'inconscio. L'insegnamento della matematica dovrebbe riuscire a valorizzare e stimolare l'immaginazione e la fantasia. Tuttavia, questo non accade anzi, la maggior parte degli insegnamenti scolastici prediligono il formalismo. «Molto può dipendere da come si viene educati, perciò un insegnante può decidere se seguire un metodo che lasci spazio e chiami in causa l'immaginazione e la fantasia, piuttosto che uno più “direttivo”, tendente ad imbrigliarle, se non a estrometterle.

Decisivo è l'atteggiamento che l'insegnante stesso ha verso la matematica e il suo apprendimento: se è lui il primo a concepirla come un repertorio di nozioni e formule, di schemi e formalismi, sarà difficile che questo non generi anche un “metodologismo” didattico, che confonde l'apprendimento con l'addestramento. Se, al contrario, il maestro

²⁶⁹ *Ivi* pp. 92-93

²⁷⁰ *Ivi* p. 98

è personalmente consapevole della ricchezza di elaborazione immaginativa e fantastica che la matematica presuppone, sarà capace di trovare e inventare spazi di lavoro che spalanchino e stimolino l'impiego di tali facoltà»²⁷¹. Bisogna però trovare il giusto compromesso tra il formalismo e l'immaginazione. Se si trascura la possibilità immaginativa si corre il rischio di ostacolare la comprensione e l'apprendimento della matematica, riducendolo alla ripetizione di procedimenti senza significato. Al contrario se si esalta l'intuizione e l'immaginazione possono venire meno nel soggetto che apprende le capacità di riflessione e di strutturazione dei nessi logici.

Una delle azioni più significative dell'apprendimento è quella del progettare. «In generale, progettare qualcosa comporta anzitutto scegliere come “dare forma” a ciò che si immagina interiormente»²⁷². Il ruolo dell'adulto è quello di guidare l'immaginazione dell'allievo senza imporre i propri schemi mentali. «Se gli adulti non si riservano solo la funzione di freno, sotto la loro guida i giovani possono conquistare il metodo che ogni realizzazione richiede, e che possiamo chiamare, con termine ampio, razionalità, cioè la capacità di giudizio globale su un progetto»²⁷³. «È attraverso la razionalità che la persona può selezionare, nella propria capacità di progettare con l'immaginazione, ciò che è poi effettivamente realizzabile. Il passaggio dall'adolescenza alla giovinezza e poi alla maturità nella sensibilità comune viene fatto coincidere con l'abbandonare i sogni. Dovremmo invece pensare che esso consista nel non accontentarsi più dei sogni, nello spingere il proprio desiderio a non fermarsi solo a ciò che si immagina, ma a tradursi in una realizzazione»²⁷⁴.

Il progettare riguarda la matematica in quanto progettare è l'orizzonte nel quale si colloca lo stimolo psicologico e intellettuale a risolvere i problemi. «Un problema non richiede mai solo una “esecuzione”: per sua natura richiede di orientare le scelte, di sviluppare strategie, di immaginare e prefigurare un percorso risolutivo. Per questo risolvere problemi è una delle azioni didattiche più importanti nell'insegnamento della matematica, e in questo senso una risoluzione, pur se a diversi livelli di complessità, può essere considerata un “progetto”»²⁷⁵.

²⁷¹ *Ivi* pp. 105-106

²⁷² *Ivi* p. 135

²⁷³ *Ivi* p. 137

²⁷⁴ *Ivi* pp. 137-138

²⁷⁵ *Ivi* p. 141

Le fasi di un progetto hanno una corrispondenza con le fasi risolutive di un problema. Per prima cosa bisogna analizzare e comprendere il testo cioè, bisogna decodificare il problema utilizzando l'osservazione e l'interpretazione. Questa fase richiede conoscenze linguistiche prima ancora di quelle matematiche. Dopo aver analizzato il problema è necessario rappresentarlo, in questa fase bisogna staccarsi dal contesto linguistico ed avvicinarsi a quello matematico utilizzando quindi il linguaggio aritmetico, algebrico o geometrico, a seconda del problema che si sta analizzando. «Rappresentare è di solito la condizione per “matematizzare”»²⁷⁶. La terza fase è quella dell'elaborazione di una strategia risolutiva. Spesso, di fronte ad un problema nuovo bisogna muoversi per tentativi, ma questi tentativi non devono essere fatti a caso. «Sarebbe un buon risultato per ogni insegnante abituare i suoi alunni a non fare passi, senza avere prima chiarito completamente il percorso risolutivo che intendono seguire, senza aver tracciato una schema logico dei procedimenti»²⁷⁷. La quarta fase è quella esecutiva cioè, l'utilizzare le risorse necessarie ad eseguire il percorso immaginato. L'ultima fase è la verifica. «La soluzione di un problema non si conclude con il risultato: anche quando si è certi di aver raggiunto l'obiettivo, è fondamentale aprire una fase di verifica, o meglio, di critica. Non si tratta solo di abituarsi a controllare le azioni fatte, ma di ripensare complessivamente quanto si è messo in opera, esaminandone la coerenza e l'adeguatezza»²⁷⁸.

Il problema nell'insegnamento può essere usato come stimolo per sollecitare la curiosità dei ragazzi. «Partire da un problema, anche riferito a un contesto non strettamente matematico, per avvicinare un nuovo concetto, per conquistare una definizione, per operare una sintesi tra diversi argomenti, è generalmente una modalità di lavoro vantaggiosa rispetto alla semplice spiegazione»²⁷⁹.

Nel procedere per tentativi sicuramente si commetteranno degli errori, ma è proprio dall'errore che si genera l'apprendimento. «Nel momento dell'esplorazione, della scoperta, dello slancio in avanti verso la conoscenza, l'errore si presenta in modo quasi inevitabile, diremmo auspicabile. In queste occasioni, sbagliare è un'azione connessa ad attività positive, a un movimento di apertura della mente e della persona. Sbagliare è conseguenza di provare, ricercare, intraprendere, tentare, intuire, ipotizzare, riconoscere,

²⁷⁶ *Ivi* p. 143

²⁷⁷ *Ivi* p. 144-145

²⁷⁸ *Ivi* p. 147

²⁷⁹ *Ivi* p. 148

collegare: in sintesi, è il segnale che la persona sta mettendo in campo le proprie risorse, per affrontare qualcosa di ancora ignoto. Sbagliare in tale situazione è in fondo equiparabile a domandare»²⁸⁰.

L'ultima fase dell'apprendimento è quella del ricordare. Spesso gli insegnanti si lamentano della scarsa memoria dei propri alunni, eppure i ragazzi hanno un'ottima memoria, per quello che veramente gli interessa. Il problema è che a scuola si chiede ai ragazzi di memorizzare senza preoccuparsi della comprensione di quello che si è memorizzato. «Conta la modalità dell'insegnamento, la scelta di contenuti significativi, la chiarificazione nelle diverse parti di un programma o di un percorso di nuclei concettuali, che devono risultare lo scheletro a cui tutto il resto si appoggia. Si può vedere la matematica come una ricca rete, che si sviluppa a partire da pochi concetti forti, la cui ricchezza genera i diversi ambiti e i diversi linguaggi con cui si indagano. La memorizzazione in matematica allora non dovrà richiedere la ripetizione di parole disgregate o procedimenti scoordinati tra loro: si realizzerà come connessione di tanti elementi su grandi pilastri e, [...] è di queste connessioni che conserviamo memoria. I contenuti possono anche essere dimenticati, quando sono facilmente ricostruibili, al momento opportuno, attraverso i nessi concettuali. Se il punto di partenza dell'insegnamento è ben posto, l'esperienza di lavoro scolastico in cui un ragazzo è coinvolto è una conquista attiva e personale di certi contenuti concettuali: allora ha senso ed è opportuno insistere anche su una specifica memorizzazione, attraverso la ripetizione a memoria delle definizioni, degli enunciati, talvolta anche delle dimostrazioni dei teoremi»²⁸¹. È dopo aver compreso completamente il concetto, la formula, la dimostrazione, etc. che, attraverso una sintesi personale del percorso fatto, avviene la memorizzazione. L'insegnante deve aiutare i ragazzi a tenere traccia del loro percorso di comprensione, deve, cioè trasmettergli il metodo proprio del fare matematica.

²⁸⁰ *Ivi* p. 160

²⁸¹ *Ivi* p. 179- 180

2.3 Le difficoltà nell'apprendimento e nell'insegnamento della matematica

Nel contesto dell'apprendimento della matematica il termine “difficoltà” è usato molto spesso per evocare tante realtà diverse, o tanti modi diversi di guardare la stessa realtà. L'interpretazione del termine “difficoltà” è diretta dall'espressione in cui viene inserito. «Se si parla di *allievo con difficoltà* l'attenzione è alle difficoltà *dell'allievo*: nell'esplicitare la natura di tali difficoltà si riconoscono diverse categorie che per lo più rimandano alle loro cause, quali deficit sensoriali o psichici, deprivazione socio-culturale, ecc.

Quando si parla di *difficoltà della matematica* si fa riferimento a caratteristiche della disciplina, quali l'astrazione ed il linguaggio, o anche a specifici argomenti o concetti [...]. Le *difficoltà di un allievo in matematica* richiamano invece esplicitamente sia l'allievo che la matematica, in altre parole fanno riferimento alla relazione tra allievo e disciplina»²⁸².

Quando si affronta un problema didattico bisogna prendere in considerazione la complessità del processo di insegnamento e le relazioni tra i poli allievo, insegnante e matematica.

«Affrontare il problema delle difficoltà dal polo della matematica significa chiedersi: ci sono delle difficoltà intrinseche alla matematica? O anche: perché la matematica è difficile?»²⁸³. Tra le difficoltà intrinseche alla matematica vi sono la terminologia, il simbolismo, la sequenzialità, l'astrazione, il rigore, ecc.

«Affrontare il problema delle difficoltà concentrando l'attenzione sul polo dell'allievo significa chiedersi: quali caratteristiche dell'allievo ostacolano il successo in matematica?»²⁸⁴. A questa domanda si risponde facendo riferimento alle disabilità dell'allievo.

Mentre le difficoltà legate alla matematica e all'allievo sono fissate, è la relazione fra queste «che valorizza il ruolo dell'insegnante come mediatore tra allievo e disciplina, e ne sottolinea la responsabilità di agente decisionale. È proprio su questa relazione infatti che l'insegnante si sente chiamato in causa nella sua specificità fin dalla diagnosi stessa

²⁸² R. Zan, *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Springer-Verlag, Italia, 2007, pp. 5-6

²⁸³ *Ivi* p. 6

²⁸⁴ *Ivi* p. 7

di difficoltà: è l'insegnante di matematica che fa tale diagnosi a posteriori, cioè dopo aver osservato i comportamenti dell'allievo in attività matematiche, e non a priori, a prescindere dalla matematica [...] o invece a prescindere dall'allievo»²⁸⁵.

«La matematica indubbiamente ha delle caratteristiche che possono essere motivo intrinseco di difficoltà. È astratta, nel senso che studia le relazioni tra gli oggetti più che gli oggetti [...]. Poi utilizza un linguaggio molto specifico, in molti aspetti distante da quello quotidiano, e perdipiù carico di simboli. Inoltre è una materia autoreferenziale, cioè non cerca riscontri nella realtà per validarsi [...] le conoscenze in matematica sono caratterizzate da una rete fittissima di relazioni: è quella che in genere viene definita consequenzialità della matematica»²⁸⁶. Queste caratteristiche della matematica sono considerate ostacoli epistemologici per sottolineare che fanno parte della natura stessa della disciplina. Le difficoltà che gli allievi incontrano a scuola con la matematica sono solo «indirettamente dovute agli ostacoli epistemologici, il cui superamento del resto è un obiettivo a lungo termine dell'educazione matematica. Invece troppo spesso essi vengono intesi come una specie di filtro che taglia fuori gli allievi che non sono già sufficientemente competenti: per motivare il fallimento di un allievo si dice che “non ha capacità logica”, che “non ha capacità di astrazione”, che “non usa correttamente il linguaggio”, assumendo in questo modo come prerequisiti quelli che sono invece gli obiettivi dell'insegnamento»²⁸⁷. Ci si dimentica che il ruolo dell'insegnante è proprio quello di mediatore tra la disciplina e l'allievo.

Nella pratica didattica la matematica è presentata, spesso, come una disciplina statica, già sistemata e organizzata. Non si tiene conto dei processi che portano alla sistematizzazione della materia. «Troppo spesso infatti l'insegnante [...] evita di coinvolgere gli allievi proprio in quelle attività che renderebbero sensata la richiesta di rigore, dell'uso di un linguaggio specifico, di ragionamenti deduttivi, dell'astrazione... richieste che però non rinuncia a fare. In questo modo allo studente non viene data la possibilità di orientarsi in questa disciplina così diversa dalle altre, per meglio comprendere la natura di questa diversità e quindi per assecondarla: lo si costringe a subire rituali di cui non percepisce il senso. Quelle che sono caratteristiche importanti della matematica, che hanno senso al suo interno, vengono quindi appiattite e banalizzate, in quanto dissociate dagli scopi, e

²⁸⁵ *Ivi* pp.7-8

²⁸⁶ AA. VV., *Perché studiare la matematica*, a cura di G. Bolondi, *cit.*, pp. 2-3

²⁸⁷ *Ivi* p. 3

quindi dal senso»²⁸⁸. Si evita di far sperimentare agli allievi i processi che giustificano le pretese intrinseche alla disciplina pensando di rendere la matematica più semplice. Questo porta gli insegnanti a presentare il prodotto dei processi matematici che spesso vengono identificati come regole; regole che servono a risolvere esercizi tutti uguali, ripetitivi e fini a sé stessi. «Il risultato è che molti ragazzi nel corso della loro esperienza scolastica costruiscono una visione della matematica come materia fatta di regole da ricordare e applicare: è quella che in educazione matematica si chiama visione “strumentale”, contrapposta a una visione “relazionale”, in cui si evidenziano le relazioni fra i vari fatti matematici, e quindi ci si chiede anche perché le regole funzionano, o in generale i perché dei vari fatti matematici. Ed è proprio una matematica ridotta a regole da memorizzare che in genere è chiamata in causa per giustificare un rapporto negativo con la disciplina»²⁸⁹.

Spesso si tende ad attribuire alla disciplina difficoltà che invece sono dovute al ruolo di mediazione dell'insegnante. Quest'ultimo dovrebbe far sperimentare agli allievi i processi tipici della matematica, fin dalla scuola elementare, per consentire il superamento degli ostacoli epistemologici. I risultati si avranno in tempi lunghi, ma questo è l'unico modo per ottenerli. «È l'insegnante che fa la differenza [...]: certamente per le strategie didattiche che mette in atto e quindi per le competenze che riesce a costruire, ma anche per la serenità dell'ambiente che passa attraverso un continuo incoraggiamento e un approccio positivo agli errori, e per la capacità di trasmettere entusiasmo e passione attraverso un certo modo di fare matematica»²⁹⁰.

Un altro elemento considerato come un ostacolo dagli alunni è l'errore, quest'ultimo è spesso visto dall'insegnante come indicatore privilegiato di difficoltà. «La paura di sbagliare è presente fin dall'inizio dell'esperienza con la matematica. L'errore in genere è vissuto come indicatore di fallimento, addirittura va cancellato a tutti i costi, in modo che non ne rimanga traccia»²⁹¹. Questa visione è in contrapposizione con l'epistemologia dell'errore che esalta il ruolo positivo dell'errore nello sviluppo della scienza. «L'errore può essere non solo un'occasione (e quindi causa) di apprendimento, ma anche una conseguenza dell'aver accettato una sfida significativa [...]. Da una parte l'errore avviene

²⁸⁸ *Ivi* p. 5

²⁸⁹ *Ivi* p. 6

²⁹⁰ *Ivi* p. 11

²⁹¹ *Ivi* p. 13

in un certo momento ed in un certo contesto storico, dall'altra il progresso di oggi si può vedere come il superamento dell'errore di ieri. In ambito didattico la storia cui facciamo riferimento è la storia della classe, ma anche del singolo allievo. Il progresso dell'allievo, ogni suo apprendimento, è il superamento di idee o conoscenze precedenti, che può essere percepito quindi proprio attraverso il confronto con tali idee e conoscenze. Ma le idee e conoscenze di ieri sono in particolare quelle che hanno portato a commettere errori. In questo modo l'errore commesso ieri e che oggi viene riconosciuto come tale assume una valenza molto forte sul piano psicologico: sta infatti a testimoniare concretamente un cambiamento, un progresso. [...] Questo sottolinea l'importanza didattica di lasciare le tracce dell'errore come in un diario che accompagna la storia di crescita individuale. [...] Da un lato ci ricorda, che la storia della matematica, come quella di ogni altra scienza, comprende anche errori. Dal punto di vista didattico la consapevolezza di questa fallibilità, in una disciplina percepita in genere come immutabile e fuori dal tempo, può favorire nell'allievo e nell'insegnante un approccio più positivo rispettivamente all'apprendimento e all'insegnamento: nell'allievo può favorire una visione della matematica come disciplina più viva e più umana, nell'insegnante una maggiore tolleranza sia per gli errori dell'allievo che per i propri»²⁹².

La paura di sbagliare non è insita nell'essere umano ma si sviluppa in età scolastica in quanto, spesso, l'errore è punito. «La paura di sbagliare sta alla base di tutte le emozioni tipicamente associate alla matematica: ansia, panico, rabbia, frustrazione, vergogna. Potremmo dire che quello che distingue queste emozioni è proprio la “cronologia” rispetto all'errore: se l'ansia in genere precede l'esperienza di errore, il panico l'accompagna, mentre la frustrazione, la rabbia e la vergogna la seguono»²⁹³. Questo accade perché a livello scolastico, la presenza dell'errore è vista come indicatore di difficoltà mentre l'assenza garantisce comprensione. Si valorizza cioè la correttezza dei prodotti più che dei processi e nel contratto didattico si inserisce il così detto “compromesso delle risposte corrette” secondo il quale la risposta corretta garantisce la comprensione, anche se per ottenerla il docente azzera le difficoltà nella richiesta.

La paura di sbagliare è dovuta al fatto che l'errore assume sempre una connotazione negativa, è visto come indicatore di difficoltà. In questo processo è fondamentale la

²⁹² R. Zan, *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, cit. p. 25

²⁹³ AA. VV., *Perché studiare la matematica*, a cura di G. Bolondi, cit. p.15

convinzione che l'errore in matematica sia oggettivo, indipendente dall'insegnante e questo dovrebbe garantire una più oggettiva diagnosi di difficoltà. In realtà, «il fatto che l'errore sia oggettivo, nel senso che testimonia l'infrazione di norme esplicitate, non significa necessariamente che sia un indicatore oggettivo di difficoltà: viene scelto come indicatore, ed in questa scelta sono presenti notevoli elementi di soggettività, sia a livello di osservazione che di interpretazione»²⁹⁴.

«I ripetuti fallimenti in matematica, uniti a un confronto con gli altri che si percepisce come perdente, generano negli allievi la convinzione di non essere adeguati, addirittura di non essere “portati”. Purtroppo a volte la famiglia o la scuola invece di cercare di sradicare questa convinzione collaborano nel consolidarla»²⁹⁵.

Il ruolo dell'insegnante nel superamento di queste difficoltà è cruciale. L'insegnante deve cercare di comprendere i motivi che generano nell'alunno un atteggiamento negativo nei confronti della matematica e in base all'interpretazione dei comportamenti dell'allievo deve predisporre azioni mirate al superamento degli ostacoli.

«L'insegnante deve quindi agire su due piani diversi ma entrambi necessari. Da una parte deve promuovere una visione della matematica come disciplina viva, non ridotta a regole da memorizzare e applicare a esercizi ripetitivi, in cui il successo non è associato alla risposta corretta data in poco tempo, ma a ragionamenti sensati che prendono tutto il tempo necessario. Dall'altra deve vigilare sul rischio che la percezione di fallimento si trasformi in senso di inadeguatezza. Anche qui l'idea di successo che l'insegnante ha e quindi passa agli allievi è cruciale. Ma è anche importante educare gli allievi a interpretare il fallimento, in modo da trarne indicazioni per modificare il proprio comportamento. [...] Il nodo [...] è proporre attività significative, che facciano sentire l'allievo protagonista di quello che fa, in particolare libero di esplorare e quindi di sbagliare»²⁹⁶.

Un altro grande problema che l'insegnamento e l'apprendimento della matematica devono affrontare è quello della motivazione, o meglio della mancanza di motivazione. Ogni insegnante di matematica si è trovato a cercare di dare una risposta convincente alla fatidica domanda: “Prof, perché dobbiamo studiare la matematica?”, nella consapevolezza che qualsiasi sia la risposta che darà, ci sarà sempre almeno uno studente che non ne rimarrà soddisfatto.

²⁹⁴ R. Zan, *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, cit. p. 33

²⁹⁵ AA. VV., *Perché studiare la matematica*, a cura di G. Bolondi, cit. p.16

²⁹⁶ *Ivi* pp. 23-24

«Chiedere perché studiare la matematica significa infatti chiedere perché dover fare qualcosa che richiede molta fatica senza essere immediatamente ricompensati dal piacere o senza che si riesca in qualche modo a intravedere un'utilità per la propria vita»²⁹⁷.

Alla tanto temuta domanda, di solito, l'insegnante risponde seguendo tre argomentazioni. La prima riguarda l'utilità della matematica: il docente cerca di convincere lo studente che lo studio della matematica gli sarà utile in un futuro. La seconda riguarda la convinzione che la matematica è bella di per sé stessa; convincere di questo l'alunno che si chiede il perché gli si impone di studiare la matematica è un tentativo che fallisce ancor prima di cominciare. La terza ed ultima argomentazione riguarda il senso del dovere: la matematica va studiata perché studiare è un dovere dell'allievo.

Qualsiasi sia la risposta del docente, questa si scontrerà con le convinzioni dell'allievo e spesso anche della famiglia. La maggior parte degli allievi che presentano difficoltà nell'approccio con la disciplina si sentono giustificati da un fattore "genetico", dichiarano di non essere "portati" per la matematica così come non lo sono i propri genitori. «Credo che per la maggior parte delle volte siano delle scuse o delle false credenze che si sono consolidate nel tempo, dei meccanismi di giustificazione per evitare le fatiche della vita. Spesso, sono l'esito di errori imperdonabili di adulti, come professori e genitori, che hanno convinto gli studenti di avere dei problemi e che non potranno mai capire la matematica»²⁹⁸.

Analizziamo le tre categorie di risposte alla domanda "perché dobbiamo studiare la matematica" e l'etica che c'è dietro tali risposte.

La prima, che riguarda l'utilità della matematica, cerca di convincere gli alunni a studiare la matematica perché è utile, perché prima o poi riceveranno una ricompensa per questo studio. Il docente che formula questo tipo di risposta viene definito da Casartelli "prof-utilitarista" e dovrà scontrarsi con le obiezioni dei ragazzi che «credono che nulla di quello che desiderano si debba raggiungere attraverso lo studio della matematica e nulla di quello che si raggiunge attraverso lo studio della matematica sia desiderabile. La matematica è inutile. Si può vivere anche senza»²⁹⁹. Il docente deve quindi provare a convincere l'alunno che ciò che desidera è raggiungibile attraverso la matematica ovvero

²⁹⁷ G. Casartelli, *"Prof, perché dobbiamo studiare la matematica?" La teoria ortogonale dell'educazione e alcune idee per una nudo-didattica-pudica*, Mimesis Edizioni, Milano, 2020, p.12

²⁹⁸ *Ivi* p. 13

²⁹⁹ *Ivi* p. 14

deve inventarsi un obiettivo che possa essere appetibile allo studente e che richieda lo studio della matematica per essere raggiunto. Il docente ha quindi il compito di fare in modo che il ragazzo voglia a tutti i costi raggiungere un obiettivo e che quindi sia disposto anche a superare la fatica di studiare la matematica. Ma lo studente non vuole fare fatica, preferisce ottenere ciò che vuole con il minimo sforzo e nel minor tempo possibile. «Stiamo, in tal senso affermando che la motivazione dell'alunno a impegnarsi nello studio della matematica dipende, da un lato, dai suoi desideri, dalle sue ambizioni, dai suoi sogni, da ciò che reputa essere un premio valido che possa giustificare la fatica: dall'altro dipende dalle sue credenze circa la difficoltà dell'impresa, dalla sua tendenza a minimizzare o ingigantire la fatica dello studio della matematica e, infine, dalla sua percezione della durata del tempo»³⁰⁰. Spesso, il docente riesce a convincere i discenti dell'utilità della matematica per raggiungere determinati obiettivi, ma può essere che l'alunno non nutra così tanto interesse per l'obiettivo in questione e quindi non si impegni a raggiungerlo. «Finché il prof-utilitarista si limiterà a istruire circa l'utilità della materia, non otterrà alcun risultato. Egli dovrebbe anche agire sull'intensità del desiderio nei confronti di tale premio, sulla percezione della difficoltà dello studio, che dipende, da un lato dall'idea che l'alunno si è fatto della matematica e, dall'altro, dalla sua autostima, e sulla percezione del tempo»³⁰¹.

La seconda categoria abbraccia l'etica del dovere, in questo caso il professore viene definito "moralista". «Il professore moralista non promette nulla. Non inventa premi, né addolcisce la pillola: la matematica rimane una materia difficile, impegnativa, magari noiosa e, molto probabilmente, inutile agli occhi dell'alunno. Questo, tuttavia, non importa. Per lui il ragazzo la deve studiare a prescindere da tutto ciò. La deve studiare perché è un suo dovere. Egli è uno studente e, in quanto studente, deve studiare tutte le materie, anche se non gli piacciono. E, se l'obiezione fosse che non ha scelto liberamente la sua condizione di studente, vorrà dire che sarà stato un volere dei suoi genitori e un figlio deve obbedire ai propri genitori. Ognuno di noi ha dei doveri ed è tenuto a rispettarli. Ognuno ha i propri. Uno studente deve studiare tutte le materie»³⁰².

Questo tipo di etica può essere efficace in quello studente che ha senso del dovere e che quindi proverà un senso di colpa dal non studiare la matematica. Questa etica ricade, così,

³⁰⁰ *Ivi* p. 18

³⁰¹ *Ivi* p. 21

³⁰² *Ivi* p. 22

in quella precedente: il premio da raggiungere è il non sentirsi in colpa. Qualcun altro, invece, potrebbe avvertire il senso di colpa ma continuare a non studiarla. In questo caso si fa strada il problema della motivazione allo studio della matematica, che in molti studenti è carente. «Emerge, così, tutta l'ingenuità della risposta doveristica, che trascura che l'esistenza stessa della domanda dell'alunno neghi la possibilità di poter fare appello al suo senso del dovere. Un ulteriore problema di tale etica consiste nel fatto che se un alunno studiasse la matematica esclusivamente perché è un dovere tra tanti, potrebbe continuare a farlo per tutta la sua carriera per questo motivo e non appassionarsi mai effettivamente alla disciplina. L'atteggiamento doveristico, soprattutto all'inizio dello studio della materia, è di grande aiuto in quanto garantisce impegno e disposizione alla fatica disinteressati dall'appagamento [...], ma, se protratto a lungo, potrebbe non far entrare mai in contatto l'alunno con il contenuto di ciò che sta studiando»³⁰³.

L'ultima etica è quella del piacere: la matematica va studiata perché è bella. Questa etica si scontra subito con l'essenza stessa della domanda. Se l'alunno si chiede perché deve studiare la matematica vuol dire che non la trova bella. Allora il compito del docente diventa quello di modificare la rappresentazione che l'alunno si è fatto della matematica, di trasformarla da qualcosa di noioso e inutile a qualcosa di affascinante. Per tentare questa inversione nell'ideale dell'alunno, i docenti spesso propongono la matematica sotto forma di gioco perché, si sa, il gioco fa crescere la motivazione e l'attenzione. Il rischio è quello di snaturare la disciplina e di ridurre i contenuti. La strada giusta da percorrere è quella di trasmettere il gusto per la matematica senza ridurla ad altro.

«La triste verità è che la domanda non è fatta per avere una risposta. Non sarà una risposta a generare la motivazione. La domanda sul perché studiare la matematica contiene già in sé il rifiuto di qualsiasi risposta. Non saranno le parole del prof a far cambiare idea a ragazzi demotivati»³⁰⁴. Per questo motivo, ogni tentativo di risposta alla domanda produce fallimento, non si riesce a motivare i ragazzi attraverso un elenco di buone ragioni. Gli studenti continueranno a non studiare. Allora, «esclusa la possibilità di trasmettere anche una sola goccia di entusiasmo, gettata la spugna sul fronte della motivazione, [il docente] si preoccupa dell'unica cosa che rimane da fare: riempire! Riempiere a tutti i costi!»³⁰⁵. A questo punto, non importa come, ciò che importa è

³⁰³ *Ivi* p. 26

³⁰⁴ *Ivi* p. 34

³⁰⁵ *Ivi* p. 36

travasare le conoscenze, riempire le menti, anche contro voglia. «Ecco il fraintendimento: il vero compito non è nutrire, ma far nascere l'appetito. [...] Al posto di tentare di lavorare sul disgusto per trasformarlo in gusto abbiamo preferito agire nonostante esso. Abbiamo deciso di assecondare il disgusto. [...] Vi è stata una sorta di deviazione, evolutivamente patologica, dell'attenzione educativa: dal fornire gli strumenti per adattarsi all'ambiente (compito evolutivo fondamentale) al fornire direttamente ciò di cui un individuo ha bisogno, rendendolo però poi incapace di affrontare il mondo»³⁰⁶. Non tutti gli insegnanti, però, si rassegnano al fallimento. Il docente vede quindi come causa del fallimento il modo in cui la matematica è proposta ai ragazzi ed è disposto a mettersi in gioco programmando nei dettagli la lezione, riprogettando le sue parole e i suoi comportamenti, inserendo l'uso delle nuove tecnologie nella sua didattica, per rendere la lezione più accattivante. «Vi è, però, in tale argomento, una premessa sottesa [...]. Si tratta del credere che il linguaggio determini in modo sufficiente l'esito dell'azione didattica. Significa pensare che il linguaggio, la parola, il programmabile, sia il responsabile esclusivo [...] dell'esito educativo. [...] Le innovazioni didattiche, dunque, [...] non costituiscono di per sé un errore di direzione, un inutile stravolgimento di buone abitudini: il grande fraintendimento consiste nel credere che esse possano essere la risposta alla mancanza di motivazione e di entusiasmo degli alunni. In questo consiste l'ingenuità dell'attuale rivoluzione della didattica»³⁰⁷.

Per quanto un docente possa progettare la sua lezione, cercando di non lasciare nulla al caso, egli in quanto persona lascerà sempre trasparire il suo modo di essere, il suo mondo. «Presentarsi di fronte agli altri significa, dunque, sempre, mostrare il proprio stile e raccontare attraverso di esso ciò che non avevamo progettato di dire. Essere osservati significa esporsi a questa comunicazione segreta: una fuga di informazioni che avviene a nostra insaputa. Tra le righe dei nostri discorsi, nevroticamente razionali, il nostro stile parla. E parla una lingua più diretta del nostro sofisticato linguaggio progettato. Una lingua capace di trasmettere un mondo attraverso le sfumature del nostro agire. [...] Così, in quelle aule non entrano banalmente dei professionisti, entrano mondi. Sulle schiene ricurve, chi varca quell'uscio porta con sé uno zaino stracolmo, non di verifiche, libri e appunti, ma di tutte le sue esperienze, da quelle di cui va fiero a quelle di cui si vergogna,

³⁰⁶ *Ivi* pp. 38-39

³⁰⁷ *Ivi* p. 44

dalla sua infanzia alla sera precedente»³⁰⁸. È proprio lo stile implicito di ognuno di noi a costituire il luogo di incontro con gli altri, in questo modo il mondo del docente entra in contatto con quello degli alunni.

Questo stile relazionale implicito è costituito da quattro funzioni. La prima «è quella di costruire uno spazio intersoggettivo nel quale i soggetti in relazione vivano la sensazione di essere uno con l'altro»³⁰⁹. Questa prima funzione ha lo scopo di essere propedeutica alla relazione, abilita, cioè, i contenuti della relazione.

La seconda funzione «è quella di rendere chi educa significativo, per due aspetti: in quanto capace di significare e in quanto dotato di un significato all'interno dell'esperienza di chi lo percepisce. In un senso, dunque, lo stile dona voce all'educatore e nell'altro dona luminosità agli occhi di chi lo guarda»³¹⁰. Grazie al dono della voce, le parole, le tecniche e i metodi che usano tutti senza sortire alcun effetto, diventano ricche di significato. «Non si tratta dunque di ricercare compulsivamente nuove tecniche per generare l'interesse e motivare i ragazzi. Si tratta piuttosto di abilitare le proprie tecniche attraverso il proprio stile, in modo che inizino a essere significative e dicano qualcosa agli alunni. Ogni tecnica, se impregnata di uno stile fecondo, diviene contagiosa. Il problema non è stare in cattedra o in fondo all'aula, il vero problema è la qualità del nostro mondo che traspare (in cattedra o in fondo all'aula) tra le pieghe del nostro agire»³¹¹. Con il tema dell'illuminazione ci si riferisce all'interazione tra il mondo del docente e quello dell'allievo.

La terza funzione è la testimonianza implicita che rende gli educatori testimoni inconsapevoli del proprio mondo. È l'insieme dei gesti inconsapevoli dell'educatore che raccontano la propria realizzazione e la propria felicità.

L'ultima funzione è «il ruolo abilitante dell'educatore nei confronti di chi ha di fronte. Una forma di abilitazione a essere sé stesso, l'autorizzazione a imboccare la propria strada. [...] È una questione di sguardi. È il trasparire di una rappresentazione implicita, che l'educatore ha dell'altro, come potenzialità inespressa. Attraverso il suo stile, l'educatore dice segretamente di una stima profonda verso chi è educato e della certezza

³⁰⁸ *Ivi* p. 48

³⁰⁹ *Ivi* p. 52

³¹⁰ *Ivi* p. 53

³¹¹ *Ivi* p. 54

di una possibilità di realizzazione»³¹². È attraverso lo sguardo abilitante che il soggetto viene liberato da false rappresentazioni di sé e può sentirsi autorizzato alla ricerca della propria felicità.

Concludendo, «la relazione educativa è fondata su una comunicazione che ha luogo tra le righe dei discorsi, nel non detto, nel colore delle azioni e nella loro luminosità. Tale sostrato relazionale implicito mette in contatto gli altri con il nostro mondo, raccontando ciò che siamo. La bellezza di questo racconto dipende dalla bellezza del nostro mondo e dal senso di cui esso è intriso. Per educare bisogna essere felici.

Ecco dunque la risposta che dobbiamo ai nostri ragazzi: il senso positivo della nostra vita, la bellezza del nostro mondo che riverbera nella nostra voce e nei nostri sorrisi»³¹³.

2.4 Disturbi dell'apprendimento e gestione della discalculia

Nella direttiva ministeriale del 27 dicembre 2012 si parla di integrazione degli alunni con disabilità. Si specifica che nel contesto scolastico ci sono vari tipi di disabilità, alcune certificate, altre no. Si definiscono così i Bisogni Educativi Speciali (BES) precisando che «ogni alunno, con continuità o per determinati periodi, può manifestare Bisogni Educativi Speciali: o per motivi fisici, biologici, fisiologici o anche per motivi psicologici, sociali, rispetto ai quali è necessario che le scuole offrano adeguata e personalizzata risposta»³¹⁴. «In particolare, i BES vengono ripartiti in tre macro aree: la più ampia riguarda svantaggi socio-economici, linguistici e culturali, che include bisogni derivanti dalla non conoscenza della cultura e della lingua italiana per appartenenza a culture diverse; una seconda area riguarda la disabilità visiva, uditiva, motoria, intellettiva o di altro tipo [...]; e una terza area che riguarda i disturbi specifici di apprendimento (DSA) [...], deficit di linguaggio, deficit delle abilità non verbali, deficit della coordinazione motoria, deficit di attenzione e di iperattività»³¹⁵.

«Il Bisogno Educativo Speciale è qualsiasi difficoltà evolutiva, in ambito educativo ed apprenditivo, espressa in un funzionamento [...] problematico per il soggetto, in termini di danno, ostacolo o stigma sociale, indipendentemente dall'eziologia, e che necessita di

³¹² Ivi p. 57

³¹³ Ivi pp. 50-51

³¹⁴ Ministero della Pubblica Istruzione, Direttiva ministeriale *Strumenti di intervento per alunni con Bisogni Educativi Speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica*, 27 dicembre 2012, p. 1

³¹⁵ AA. VV., *Didattica della matematica*, cit. pp. 80-81

educazione speciale individualizzata»³¹⁶. Un bisogno educativo speciale rappresenta una difficoltà che «si evidenzia negli ambiti di vita dell'educazione e dell'apprendimento. Coinvolge le relazioni educative, formali e/o informali, lo sviluppo di competenze e di comportamenti adattivi, gli apprendimenti scolastici e di vita quotidiana, lo sviluppo di attività personali e di partecipazioni ai vari ruoli sociali»³¹⁷. Nella nostra lingua il concetto di bisogno porta con sé una connotazione negativa, uno stato di mancanza, di fatto, però, si può pensare al bisogno come ad una «condizione ordinaria e fisiologica di interdipendenza della persona dai suoi ecosistemi, una relazione di interdipendenza necessaria a crescere e vivere. [...] In alcune situazioni però un bisogno educativo normale diventa speciale. Ad esempio, può accadere, in alcune condizioni di funzionamento umano, che alcuni bisogni incontrino difficoltà ad ottenere risposte adeguate».³¹⁸ In questo modo un bisogno educativo diventa speciale. Questa condizione «può essere del tutto transitoria, se cambiano le condizioni che l'hanno originata, e dunque da essa si può uscire [...]. La condizione di BES, se affrontata adeguatamente, porta il soggetto ad una situazione di “funzionamento unico”, in cui, con modalità anche assolutamente originali e diverse, egli trova adeguato alimento ai suoi bisogni».³¹⁹

«La definizione di BES porta quindi con sé proprio questo senso di provvisorietà e di reversibilità, non in tutti i casi, ma certo di più che non le etichette diagnostiche tradizionali, più rigide e più stabili. Questa reversibilità evidentemente facilita la famiglia e il soggetto stesso ad accettare un percorso di conoscenza e di approfondimento della difficoltà e di successivo intervento di individualizzazione/personalizzazione»³²⁰.

La *Convenzione delle Nazioni Unite sui diritti delle persone con disabilità* definisce la disabilità come il «risultato dell'interazione tra persone con menomazioni e barriere comportamentali e ambientali, che impediscono la loro piena ed effettiva partecipazione alla società su base di uguaglianza con gli altri»³²¹. La Convenzione definisce la disabilità come un concetto in costante evoluzione; infatti, «essa si contraddistingue per il suo

³¹⁶ L. D'Alonzo (ed.), *Dizionario di pedagogia speciale*, Scholé, Brescia, 2019, p. 48, D. Ianes

³¹⁷ *Ibidem*

³¹⁸ *Ivi* p. 50

³¹⁹ *Ivi* p. 51

³²⁰ *Ivi* p. 52

³²¹ *Convenzione delle Nazioni Unite sui diritti delle persone con disabilità*, a cura della Direzione Generale della Comunicazione e della Direzione Generale per l'Inclusione e i diritti sociali e la responsabilità sociale delle imprese, Preambolo, lettera e.

carattere di relazionalità, di interscambio tra l'individuo e l'ambiente e si concretizza quando un individuo incontra barriere ambientali [...] e sociali»³²².

Quando si parla di Disturbi Specifici dell'Apprendimento si fa riferimento alla specifica disabilità in uno o più processi relativi alla lettura, alla scrittura o al calcolo. Si parla di specificità perché «si ritiene che i DSA siano dovuti a un deficit neuropsicologico a livello dei meccanismi deputati all'apprendimento, quindi non possono essere attribuiti a svantaggi socio-culturali, allo scarso impegno o a un insegnamento inappropriato»³²³.

Una diagnosi di DSA si ha «quando a test standardizzati di lettura, scrittura e calcolo, il livello di una o più di queste tre competenze risulta di almeno due deviazioni standard inferiore ai risultati medi prevedibili, oppure l'età di lettura e/o scrittura e/o di calcolo è inferiore di almeno due anni in rapporto all'età cronologica del soggetto, e/o all'età mentale, misurata con test psicometrici standardizzati, nonostante un'adeguata scolarizzazione. Tali disturbi sono denominati dislessia, disortografia e disgrafia, discalculia e sono sottesi da specifiche disfunzioni neuropsicologiche, isolate o combinate»³²⁴. Il DSA che più interferisce con l'apprendimento della matematica è la discalculia evolutiva, definita come «un disturbo caratterizzato da una ridotta capacità di apprendimento numerico e del calcolo in rapporto alla classe frequentata»³²⁵. La discalculia è «un disturbo che si esprime ben oltre le attività di calcolo, per interessare invece tutte le funzioni del pensiero matematico quanto a: attività pre-numerica, costruzione del numero, calcolo, comprensione e soluzione di problemi matematici, composizione di figure geometriche»³²⁶

Si distinguono tre tipi di discalculia: la dislessia per le cifre, la discalculia procedurale e la discalculia per i fatti aritmetici. La dislessia per le cifre è caratterizzata da errori nella lettura dei numeri. La discalculia procedurale è caratterizzata dal fatto che l'alunno non riesce a svolgere le procedure necessarie ad eseguire il calcolo, nonostante non presenti difficoltà nella lettura dei numeri e abbia compreso il significato dei termini legati al calcolo (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, etc.). La discalculia per i fatti aritmetici è caratterizzata dal fatto che l'alunno conosce le procedure di calcolo ma ha

³²² L. D'Alonzo (ed.), *Dizionario di pedagogia speciale*, cit. p. 127, A. Valenti

³²³ AA. VV., *Didattica della matematica*, cit. p. 81

³²⁴ G. Bolondi, M.I. Fandiño Pinilla, *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*, Edises, Napoli, 2016, p. 213

³²⁵ *Ivi* p. 214

³²⁶ L. D'Alonzo (ed.), *Dizionario di pedagogia speciale*, cit. p. 204, P. Crispiani

difficoltà a reperire i fatti aritmetici, come le tabelline o le operazioni di base che non richiedono un calcolo vero e proprio.

«Per qualificarsi come sintomi di discalculia le difficoltà di calcolo non devono dipendere da un insegnamento inadeguato né ricollegarsi a deficit visivi, uditivi o neurologici, né devono essere state acquisite come risultato di patologie neurologiche, psichiatriche o di altro genere. [...] Il disturbo, in quanto congenito, purtroppo non “guarisce”. L’obiettivo dell’intervento rieducativo è fare in modo che il discalculico possa procedere nella concettualizzazione della matematica e nella capacità di risolvere problemi matematici riducendo al minimo l’incidenza della propria disabilità»³²⁷.

La discalculia, secondo le disposizioni ministeriali, va trattata a livello dell’istituzione scolastica che dovrà attuare una didattica inclusiva attraverso la personalizzazione e l’individualizzazione dell’intervento didattico/educativo per permettere allo studente con DSA il raggiungimento degli obiettivi di apprendimento. È necessario avere la consapevolezza «che gli allievi a scuola non sono tutti uguali, ma diversi, dissimili, non solo per quanto riguarda la sfera del genere, ma anche perché mostrano differenze nelle modalità di apprendimento, nelle abilità, nelle problematiche, nella potenzialità e nelle risposte [...]. Ci sono voluti lunghi anni di esperienze educativo-didattiche per comprendere che gli allievi a scuola non sono tutti uguali e non hanno “un’unica testa”, ma in classe ognuno di loro ha il diritto di essere riconosciuto nel rispetto della propria dignità e umanità come persona unica e irripetibile»³²⁸.

«La didattica inclusiva consiste nella progettazione, nella realizzazione e nella valutazione di azioni educative che attivano i processi di apprendimento e partecipazione di *tutti* gli alunni e di *tutte* le alunne»³²⁹. La didattica inclusiva si caratterizza «per l’orientamento valoriale e la ricerca di una pluralità di pratiche tese al successo formativo di tutti i discenti, nella valorizzazione delle differenze individuali di ciascuno, e alla costruzione di una comunità scolastica partecipata e democratica»³³⁰.

La normativa sui BES e DSA che introduce la diagnosi di uno specialista esterno alla scuola per il riconoscimento del DSA «impone, di fatto, agli insegnanti un piano di lavoro

³²⁷ G. Bolondi, M.I. Fandiño Pinilla, *Metodi e strumenti per l’insegnamento e l’apprendimento della matematica*, cit. pp. 215-216

³²⁸ L. D’Alonzo (ed.), *Dizionario di pedagogia speciale*, cit. p. 121, L. D’Alonzo

³²⁹ L. D’Alonzo (ed.), *Dizionario di pedagogia speciale*, cit. p. 109, H. Demo

³³⁰ *Ibidem*

in cui vengano previste misure compensative e dispensative utili a promuovere il successo a scuola dell'allievo con DSA»³³¹.

«Gli strumenti compensativi sono strumenti didattici che sostituiscono o facilitano la prestazione richiesta nell'abilità deficitaria. Fra i più diffusi strumenti per la facilitazione delle abilità di calcolo: calcolatrice, tabelle, formulari e naturalmente software specifici facilitano lo studente con DSA da una prestazione resa difficoltosa dal disturbo, senza peraltro facilitargli il compito dal punto di vista cognitivo. [...] Le misure dispensative sono invece interventi che consentono all'alunno o allo studente di non svolgere alcune prestazioni che, a causa del disturbo, risultano particolarmente difficoltose e che non migliorano l'apprendimento»³³². Inoltre, il docente è tenuto ad utilizzare metodologie didattiche che permettano lo sviluppo delle abilità di calcolo nel rispetto delle capacità individuali degli studenti. Gli strumenti compensativi e le misure dispensative non sono uguali per tutti gli studenti con diagnosi di DSA ma vanno personalizzati a seconda delle esigenze del singolo alunno. Per ogni studente con DSA viene redatto un Piano Didattico Personalizzato (PDP) che contiene le informazioni sulla diagnosi, le difficoltà dell'allievo e gli strumenti compensativi e dispensativi di cui necessita.

Per ottenere il successo formativo di ogni singolo alunno non basta seguire le indicazioni riportate sul PDP, non bisogna dimenticare che «la relazione insegnante-allievo è la strada maestra per creare un clima adeguato per l'apprendimento [...] occorre impostare un'azione educativo-didattica basata sulla promozione del coinvolgimento personale, dal quale passa la sollecitazione motivazionale del singolo e del gruppo. Molto importante in questo senso è lavorare sulle risorse dell'individuo, rafforzando le doti, le abilità e le qualità della persona invece di limitare i problemi, le difficoltà, le mancanze. La proposta formativa ha necessità di essere condotta pensando al successo dei singoli allievi»³³³. «Il successo scolastico non nasce solamente dal singolo allievo, dalle sue abilità, dalla sua volontà di impegnarsi nei processi di apprendimento e nello studio, dalla sua propensione ad adattarsi alle regole e alle norme di istituto, ma è promosso dall'insegnante, dalla sua abilità di condurre gli allievi, di gestire il gruppo classe in modo che ogni individuo

³³¹ L. D'Alonzo (ed.), *Dizionario di pedagogia speciale*, cit. p. 123, L. D'Alonzo

³³² G. Bolondi, M.I. Fandiño Pinilla, *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*, cit. pp. 221-222

³³³ L. D'Alonzo (ed.), *Dizionario di pedagogia speciale*, cit. p. 124, L. D'Alonzo

presente in esso possa esprimere tutte le proprie potenzialità, in un clima educativo permeato di attenzioni alla persona e alle sue necessità»³³⁴.

2.5 Competenze matematiche

La competenza è definita come «la capacità di far fronte a un compito o a un insieme di compiti, riuscendo a mettere in moto e orchestrare le proprie risorse interne, cognitive, affettive e volitive e a utilizzare le risorse esterne disponibili in modo coerente e fecondo»³³⁵.

Una delle innovazioni di questa definizione è costituita dal fatto di prendere in considerazione i fattori affettivi nella costruzione delle competenze e non solo quelli cognitivi. Un'altra innovazione è la capacità di utilizzare le risorse esterne disponibili e quindi di aprirsi al contatto con l'esterno e di non confinare la competenza all'interno dei processi propri della mente umana. Il termine competenza è nato per indicare competenze generiche in ambito educativo, gli studi sulla competenza disciplinare ed in particolare sulla competenza matematica sono molto più recenti.

Lo studio disciplinare riguardo la competenza matematica deriva da «esigenze tipiche della ricerca didattica, posizionate su piani distinti, ma tra loro intrecciate:

- un'esigenza didattica, la necessità di riflettere sulle difficoltà degli studenti di tutti i livelli scolari con la matematica e con il suo insegnamento tradizionale;
- un'esigenza di politica educativa, legata alla necessità di una riflessione sul senso dell'educazione matematica del nuovo millennio;
- un'esigenza epistemologica, legata alla necessità di definire cosa voglia dire padroneggiare la matematica.»³³⁶.

Spesso ci si chiede se la matematica sia raggiungibile a tutti e se sia veramente necessario insegnarla a tutti i livelli scolari. Come abbiamo visto, la risposta circa l'utilità della matematica non è convincente, agli studenti non basta sapere che è utile per affrontare la fatica legata al suo studio.

³³⁴ L. D'Alonzo (ed.), *Dizionario di pedagogia speciale*, cit. p. 249, L. D'Alonzo

³³⁵ M. Pellerrey, *Le competenze individuali e il portfolio*, La Nuova Italia, Firenze, 2004, p. 12

³³⁶ AA. VV., *Didattica della matematica*, cit. p. 93

Negli anni 2000 la ricerca sulle competenze matematiche è passata attraverso due principali studi: il progetto educativo KOM³³⁷, promosso dal Ministero dell'educazione danese e l'indagine internazionale PISA³³⁸, promossa dall'OCSE.

Il progetto KOM, acronimo del danese “competenze e apprendimento della matematica”, fu diretto dal ricercatore in educazione matematica Mogen Niss. L'idea fondamentale del progetto è di basare la descrizione dei programmi di matematica sulla nozione di “competenze matematiche”, sostituendoli ai programmi tradizionali fatti di liste di argomenti, concetti e risultati. Questo permetterebbe di avere una visione globale dell'insegnamento e dell'apprendimento della matematica ad ogni livello scolastico.

Il progetto KOM nasce come tentativo di risposta alle difficoltà e alle sfide educative di ogni livello scolastico. Alcune di queste difficoltà si identificano con quello che viene chiamato il *justification problem* che si manifesta sia a livello sociale che a livello individuale. Niss sostiene che la Danimarca ha bisogno di una società in cui gli individui sappiano utilizzare le competenze matematiche in molteplici situazioni e in diversi contesti. Nonostante la maggior parte delle persone sia convinta che la matematica sia importante per la società, molte di queste persone hanno difficoltà a comprendere l'importanza che la matematica può avere per loro stessi, intesi come individui.

Comincia, così, a essere messa in discussione l'idea della “matematica insegnata a tutti”, con proposte che limitano l'insegnamento della matematica a livelli alti solo a coloro che ambiscono a tale conoscenza, destinando, invece, a tutti solo la matematica strettamente necessaria allo svolgimento delle azioni quotidiane.

«Il ruolo della matematica nella società attuale è indubbio e innegabile, ma a livello di risposta al *justification problem* non basta. [...] La risposta al *justification problem* deve essere su due livelli. Da una parte, a livello sociale, giustificando il senso della matematica per tutti e giustificando perché la società debba investire sforzi e soldi per garantire l'insegnamento della matematica a tutti. Dall'altra, a livello individuale, giustificando al singolo perché debba studiare matematica in tutto il suo percorso scolastico a prescindere dalle sue aspirazioni future»³³⁹.

³³⁷ M. Niss, *Mathematical Competencies and the learning of Mathematics: The danish KOM Project*, in A. Gagaris- S. Papastavridis (eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, 2003 pp. 115-124

³³⁸ OECD, *The PISA 2003 assessment Framework- Mathematics, Readings, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*

³³⁹ AA. VV., *Didattica della matematica*, cit. p. 94

La ricerca del KOM Project vuole rispondere alla domanda: “Cosa vuol dire padroneggiare la matematica?”.

Per rispondere, Niss propone un’analogia con la padronanza del linguaggio. Egli afferma che per padroneggiare un linguaggio bisogna essere capaci di: capire e interpretare i discorsi delle altre persone, capire e interpretare testi scritti da altri, parlare e esprimersi oralmente e esprimere sé stessi in testi scritti; tutto questo in differenti registri linguistici e riferiti a diversi campi di testi scritti e orali.

Da queste componenti, derivano aspetti molto importanti dal punto di vista della didattica della matematica: la necessità di presentare gli strumenti matematici e di mettere alla prova gli studenti in differenti contesti; la necessità di lavorare in verticale tra i vari livelli scolari; il sottolineare come conoscenze e abilità siano fondamentali per avere padronanza della matematica, ma da sole non siano sufficienti. La competenza non è scollegata da conoscenze e abilità, ma è qualcosa di più e che può prescindere da queste. A partire da tali convinzioni la competenza matematica viene definita come l’abilità di capire, giudicare, fare e usare la matematica in una varietà di contesti e situazioni intra ed extra matematici, in cui la matematica gioca o potrebbe giocare un ruolo. Prerequisiti necessari ma non sufficienti per avere competenza matematica sono un certo numero di conoscenze di base e abilità tecniche.

Questa definizione è molto generale, pertanto, all’interno della competenza matematica, si identificano otto sotto-competenze che possono essere suddivise in due gruppi. Il primo gruppo è costituito dall’abilità di “porre e rispondere a domande in e con la matematica”. A questo gruppo appartengono le seguenti quattro competenze: pensare matematicamente; *problem-posing* e *problem-solving*; modellizzare; ragionare matematicamente. Il secondo gruppo è costituito dall’abilità di “padroneggiare il linguaggio e gli strumenti matematici”. A questo secondo gruppo appartengono le seguenti quattro competenze: rappresentare oggetti e situazioni matematiche; maneggiare i simboli e il formalismo matematico; comunicare in, con e riguardo la matematica; fare uso di sussidi e strumenti.

Tutte queste otto competenze hanno a che fare con processi mentali e fisici, attività e comportamenti. L’obiettivo è incentrato su cosa l’individuo può fare.

Il possesso individuale di una data competenza matematica si sviluppa in tre dimensioni: il *degree of coverage* che è il grado di approfondimento che l’individuo ha degli aspetti

caratteristici della competenza; il *radius of action* che indica lo spettro dei contesti in cui l'individuo può attivare la competenza; il *technical level* indica quanto sono tecnicamente e concettualmente avanzati gli oggetti e gli strumenti matematici che permettono all'individuo di attivare la competenza.

Possedere una competenza matematica consiste, quindi, nell'essere preparati e capaci di agire matematicamente sulla base della conoscenza e dell'intuizione.³⁴⁰

Al *KOM Project* si ispira anche l'indagine internazionale PISA (*Program for International Student Assessment*) promossa dall'OCSE (Organizzazione per la Cooperazione e lo Sviluppo Economico). Questo tipo di indagine ha lo scopo di verificare l'acquisizione di determinate competenze, ritenute fondamentali, negli ambiti di lettura, matematica e scienze da parte dei quindicenni scolarizzati delle nazioni che partecipano all'indagine. Ogni edizione dell'indagine PISA approfondisce in modo particolare uno dei tre ambiti. Nel 2003 è stata approfondita l'alfabetizzazione matematica, definita come la capacità degli studenti di identificare, capire e impegnarsi in matematica e di operare valutazioni fondate sul ruolo che la matematica ha nella vita. A questa definizione è stata aggiunta nell'indagine PISA la capacità di *problem-solving*, definita come l'abilità degli studenti di utilizzare i processi cognitivi per risolvere problemi reali interdisciplinari il cui procedimento di risoluzione non è ovvio.

L'indagine PISA valuta l'alfabetizzazione matematica in relazione ai contenuti, ai processi e alle situazioni in cui la matematica viene utilizzata. Per quanto riguarda i contenuti, sono suddivisi in primo luogo in quattro categorie: quantità, spazio e forme, relazioni e incertezza. In secondo luogo, vengono suddivise nelle categorie previste dai curricula scolastici.

I processi matematici sono definiti attraverso le competenze matematiche generali che includono l'uso del linguaggio matematico, il modellizzare e il *problem-solving*. Le situazioni in cui viene utilizzata la matematica sono basate sulla distanza che queste situazioni hanno dalla vita dello studente. Vengono identificate cinque situazioni: personali, educative, occupazionali, pubbliche e scientifiche.

Il *problem-solving* viene definito in base alla tipologia, al processo e al contesto. La tipologia di *problem-solving* include i processi di *decision making* e *system analysis and*

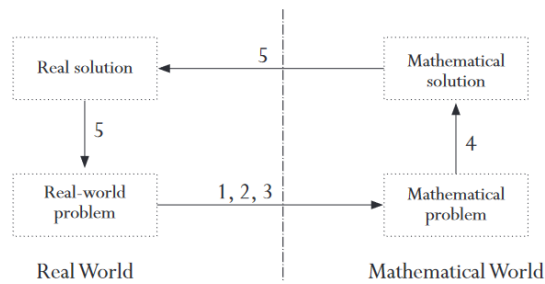
³⁴⁰ M. Niss, *Mathematical Competencies and the learning of Mathematics: The danish KOM Project*, cit., libera traduzione dell'autore.

design. Il processo include il riconoscimento della natura del problema, la sua caratterizzazione, rappresentazione e soluzione e la comunicazione dei risultati. Il contesto riguarda l'astrazione del problema, dal contesto di vita reale alla modellizzazione del problema.

L'indagine PISA propone ai ragazzi problemi di vita quotidiana che posso essere risolti utilizzando le tecniche tipiche del contesto scolastico. La novità sta nel fatto che agli studenti non vengono date indicazioni così complete come succede per risolvere i problemi che si trovano nei testi scolastici ed è lo studente a prendere decisioni riguardo le conoscenze, le metodologie e le abilità da utilizzare nella risoluzione.

Il problema sociale che viene posto, per essere risolto, va prima "matematizzato".

Il matematizzare comprende cinque aspetti: partire da un problema ambientato nella realtà, trasformare gli elementi del problema in concetti matematici, trasformare il problema reale in un problema matematico, risolvere il problema matematico e trasformare la soluzione matematica del problema nella soluzione del problema reale. Questo processo è lo stesso che utilizzano i matematici nelle loro ricerche ed è chiamato ciclo di modellizzazione ed è raffigurato in *Figura*



- (1) Starting with a problem situated in reality;
- (2) Organising it according to mathematical concepts and identifying the relevant mathematics;
- (3) Gradually trimming away the reality through processes such as making assumptions, generalising and formalising, which promote the mathematical features of the situation and transform the real-world problem into a mathematical problem that faithfully represents the situation;
- (4) Solving the mathematical problem; and
- (5) Making sense of the mathematical solution in terms of the real situation, including identifying the limitations of the solution.

Figura 2.1 Il ciclo di modellizzazione³⁴¹

«La critica che spesso viene rivolta all'educazione matematica di base, in particolare in contesto italiano, è che lavori esclusivamente sulla parte destra del ciclo di modellizzazione: dal problema matematico al risultato matematico»³⁴².

È questo il motivo per il quale la maggior parte degli studenti non riescono a comprendere l'utilità della matematica; a scuola la matematica si impara in maniera slegata dalla realtà. Si fa strada la necessità di presentare la matematica a partire da contesti reali per permettere agli studenti di comprenderne l'utilità e di saper sfruttare le competenze acquisite in campo matematico per diventare cittadini del mondo.

Un cittadino matematicamente alfabetizzato deve essere in grado di adattarsi in modo creativo, pratico e flessibile ai cambiamenti e alle situazioni che deve affrontare quotidianamente.³⁴³

«È riconosciuto a livello internazionale il contributo fondamentale che l'educazione matematica offre nella formazione dei giovani, cittadini del domani. Infatti, l'educazione matematica contribuisce, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale

³⁴¹ OECD, *The PISA 2003 assessment Framework- Mathematics, Readings, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*

³⁴² AA. VV., *Didattica della matematica*, cit. p. 101

³⁴³ OECD, *The PISA 2003 assessment Framework- Mathematics, Readings, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*, cit. libera traduzione dell'autore.

del cittadino, in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenze del cittadino, al cui raggiungimento concorre l'educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni d'incertezza. La conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio. In particolare, l'insegnamento della matematica avvia gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del linguaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale, e non può costituire unicamente un bagaglio astratto di nozioni»³⁴⁴.

2.6 Valutazione interna ed esterna degli apprendimenti matematici

La valutazione degli apprendimenti è un compito primario dell'insegnante che conosce il percorso della classe in generale e dello studente in particolare. Nonostante si pensi che la valutazione in matematica sia oggettiva, questo non è del tutto vero. Anche in matematica la valutazione è soggettiva, è l'insegnante che ha il compito di valutare la gravità di un errore e lo fa in base alle sue esperienze e credenze. Non c'è una linea comune a tutti gli insegnanti per uniformare la valutazione e non credo che questo possa essere possibile perché si toglierebbe all'insegnante il ruolo di mediatore tra la disciplina e gli allievi.

Pertanto, più che di valutazione interna alle classi, si può parlare di valutazione esterna che a livello internazionale è effettuata dall'indagine PISA, come abbiamo già visto nel paragrafo precedente.

«I dati di questa indagine permettono infatti di riflettere su come la spesa in istruzione porti (o non porti) a risultati di apprendimento (in termini di competenze), di come i diversi sistemi offrano opportunità a studenti socialmente svantaggiati, di come le scelte effettuate [...] abbiano influenza sul servizio erogato agli studenti e alla società»³⁴⁵.

³⁴⁴ AA. VV., *Progetto "m@t.abel. Matematica. Apprendimenti di base con e-learning.*, 2006, p. 5

³⁴⁵ G. Bolondi, M.I. Fandiño Pinilla, *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica, cit.*, p. 191

L'indagine PISA ha, quindi, il compito di valutare il sistema scolastico e non il singolo studente. Da questa indagine nel campo della matematica è emerso che «il risultato medio dei ragazzi italiani è al di sotto della media dei Paesi OCSE. [...] L'indagine ha rilevato inoltre forti differenze di genere [...] e territoriali [...]. Infine, per la matematica, emerge un dato molto significativo, che “fotografa” in maniera sintetica lo stile di insegnamento e le caratteristiche dell'apprendimento delle nostre scuole [...]. La nostra scuola raggiunge risultati discreti (nella media) quando si tratta di fare matematica in contesto matematico, ma non riesce a mettere in grado i ragazzi di utilizzare la matematica come strumento per comprendere il mondo, descriverlo, operare su di esso»³⁴⁶.

A livello nazionale, anche l'Italia ha realizzato un Sistema Nazionale di Valutazione di cui assume il coordinamento funzionale l'INVALSI (Istituto Nazionale per la Valutazione del Sistema Educativo di Istruzione e di Formazione). «Lo scopo principale delle prove INVALSI è fornire strumenti e dati per la valutazione. Va subito detto che questa parola, valutazione, comprende significati molto diversi: è importante avere una valutazione del funzionamento del sistema scolastico, ed è importante avere una valutazione degli apprendimenti degli studenti. In base alle attuali disposizioni di legge, l'INVALSI deve fare entrambe le cose. [...] L'obiettivo finale però è fornire strumenti per il miglioramento della scuola, e questo si può realizzare solo attraverso l'azione e l'impegno di ogni singolo insegnante, che quotidianamente deve sottoporre ad autovalutazione la propria azione didattica»³⁴⁷.

Attualmente gli studenti che vengono valutati attraverso le prove INVALSI sono gli studenti in entrata e in uscita dai vari percorsi scolastici in modo da poter valutare quale è stato il valore aggiunto, cioè quanto la scuola è riuscita a far crescere e maturare i ragazzi. Questo tipo di valutazioni sono esterne alla didattica e quindi alle valutazioni dell'insegnante, ma apportano un contributo essenziale circa la valutazione oggettiva degli apprendimenti, valutazione che i ragazzi si ritroveranno a ricevere nel corso degli studi universitari. Infatti, «la valutazione che gli insegnanti fanno del singolo studente, lungo tutto il suo percorso scolastico, evolve progressivamente da soggettiva a oggettiva. All'inizio della scuola primaria è completamente soggettiva, cioè dipende dai soggetti in gioco (l'insegnante e l'allievo, la sua provenienza, la sua storia personale, le sue

³⁴⁶ *Ivi* pp. 196-197

³⁴⁷ *Ivi* pp. 200-201

condizioni di studio, le sue vicende familiari, le sue malattie, etc.). Al termine del percorso, ad esempio al momento della laurea, la valutazione si pretende oggettiva: il diploma di laurea [...] non dovrebbe essere stato rilasciato in base a considerazioni sulle vicende personali dello studente, ma oggettivamente certificare la competenza acquisita»³⁴⁸.

³⁴⁸ *Ivi* p. 204

Capitolo 3. Insegnare matematica in Cometa

In questo capitolo verrà esposto in modo dettagliato cosa vuol dire insegnare matematica in Cometa Formazione riportando degli esempi di lezioni svolte presso il Liceo Artigianale e nei tre corsi di Formazione professionale, sottolineandone gli aspetti positivi e i limiti. Viene analizzato il metodo pedagogico utilizzato in questa scuola in quanto rappresenta una valida soluzione al problema motivazionale sempre più frequente negli studenti di oggi, e un'opportunità concreta di sviluppare competenze, non solo disciplinari ma anche e soprattutto competenze reali, ovvero competenze spendibili nelle attività quotidiane e non vincolate alla risoluzione di criticità legate alla singola disciplina. Il metodo utilizzato è denominato *dal fare al sapere* perché la disciplina viene trasmessa tramite l'esperienza. Questo avviene in entrambi gli indirizzi presenti. È attraverso l'esperienza del reale che gli studenti si trovano davanti alla necessità di essere in possesso di un determinato sapere. Sono gli studenti stessi a chiedere ai docenti di aiutarli nel raggiungere il loro obiettivo, che può essere la risoluzione di un problema reale nel momento in cui si presenta e, nel lungo termine, l'acquisizione delle competenze necessarie per inserirsi nel mondo del lavoro e più in generale nella società.

Lo scopo del metodo utilizzato è quello di stimolare gli studenti all'apprendimento. Attraverso l'alternanza formativa e la didattica per problemi e progetti, gli studenti fanno esperienza reale del mondo lavorativo e, provando soddisfazione nella risoluzione delle criticità e nella riuscita dei compiti loro assegnati, vengono motivati allo studio e all'approfondimento dei saperi utili al raggiungimento del successo. Questa metodologia, inoltre, permette di attuare una didattica inclusiva in quanto è possibile personalizzare la proposta didattica, di modo che ogni allievo possa raggiungere il proprio livello, senza forzature. Attraverso l'esperienza, anche i ragazzi con difficoltà e che presentano diagnosi di DSA, possono sviluppare le conoscenze, le abilità e le competenze necessarie perché legate ad un compito concreto. In questo modo l'apprendimento avviene in modo naturale e senza forzature.

Questo processo, che parte dall'esperienza, richiede un lavoro interdisciplinare molto approfondito e la collaborazione tra i docenti delle varie discipline è fondamentale, anche se non sempre possibile. Un ostacolo all'apprendimento dei processi matematici è la possibilità che lo studente non acquisisca la capacità di astrazione, fondamentale per la disciplina, in quanto il legame di un determinato sapere con l'esperienza da cui ne

scaturisce la necessità può influenzarne l'apprendimento, finalizzandolo solo alla risoluzione di quella esperienza senza vederne la pluralità degli impieghi. Il compito delicato dell'insegnante è quello di aiutare i ragazzi in questo passaggio, aiutarli ad astrarre, così che ciò che si è appreso tramite un'esperienza possa essere riutilizzato per la risoluzione di altre esperienze, anche non analoghe. Attraverso questo metodo i ragazzi hanno l'opportunità di comprendere che i processi matematici possono essere utilizzati anche e soprattutto per risolvere problemi reali e non solamente problemi appartenenti al contesto matematico, superando la difficoltà della "matematizzazione" di un problema reale sottolineata dall'indagine OCSE-Pisa e dall'INVALSI.

Cometa Formazione s.c.s. nasce nel 2003 con lo scopo di dare un'opportunità concreta a ragazzi in dispersione scolastica e senza prospettive lavorative. Nel tempo questo progetto è cresciuto ed ha dato vita nel 2009 alla Scuola Oliver Twist, un istituto professionale in cui il modello didattico è quello della scuola-impresa. Nel 2016 ai corsi di formazione professionale viene affiancato un corso liceale: il Liceo Scientifico Artigianale.

Lo scopo principale dei percorsi di istruzione e formazione presenti in Cometa Formazione è quello di favorire lo sviluppo delle capacità e dei talenti di ciascuno studente, offrendo un contesto stimolante e creativo, dove ogni allievo si senta valorizzato e possa sviluppare le proprie specifiche capacità e la propria funzione sociale.

Nei corsi di formazione professionale, l'insegnamento della disciplina si realizza attraverso l'alternanza formativa. Gli studenti svolgono attività di tirocinio interno, nei laboratori della scuola, e esterno, presso le aziende del territorio. Imparano facendo, sperimentando la necessità di essere in possesso di un determinato sapere. In questo modo si stimola la curiosità e si rafforza la motivazione allo studio.

Il liceo è un liceo scientifico delle scienze applicate, denominato Artigianale, in quanto lo studente costruisce il sapere come l'artigiano costruisce il proprio prodotto. Si utilizza una didattica per progetti e per problemi a partire dall'esperienza. La didattica è rafforzata da attività di laboratorio che sono per gli studenti ambito di esperienza dove acquisire in modo induttivo le competenze delle diverse discipline.

Questa ricerca si pone l'obiettivo di proporre degli esempi di attività di insegnamento-apprendimento della matematica tramite il modello della scuola-impresa, utilizzato nei

corsi di formazione professionale, e tramite la didattica per problemi e progetti sperimentata nel percorso liceale.

3.1 La matematica al liceo artigianale

3.1.1 La struttura del Liceo Scientifico Artigianale

Il Liceo Scientifico Artigianale è un liceo scientifico - opzione delle scienze applicate dell'ordinamento statale di Istruzione (DPR n. 89/2010). Il carattere innovativo di tale percorso risiede nella capacità di assumere e sviluppare l'integrazione tra scuola e lavoro, caratterizzata da periodi di formazione in aula e di apprendimento attraverso l'esperienza lavorativa nelle aziende del territorio, che permette di assicurare l'acquisizione di competenze generali e tecnico-professionali, spendibili nel mercato del lavoro e per il pieno sviluppo della persona.

Lo scopo del Liceo Scientifico Artigianale è, quindi, dotare gli studenti di un metodo di studio, che sia anche un metodo di lavoro, tipico della ricerca scientifica. Nello specifico, sul piano culturale si vuole sviluppare nello studente una predisposizione all'indagine scientifica; sul piano lavorativo lo studente acquisisce competenze professionali operative ma anche inerenti al campo della progettazione e della gestione.

Dunque, il Liceo Artigianale concretizza una proposta educativa che formi l'uomo nella sua totalità, attraverso una metodologia didattica che coniuga il fare e il sapere.

Per favorire lo sviluppo delle competenze tecnico professionali gli studenti hanno a disposizione un monte ore dedicato all'alternanza scuola- lavoro. Per il primo anno si tratta di 240 ore, in cui i ragazzi partecipano a laboratori interni. Per gli anni successivi al primo le ore di alternanza sono 280 e sono svolte presso le aziende del territorio.

La novità sta nel fatto che questi momenti di alternanza formativa saranno il fulcro del lavoro di apprendimento degli studenti. Infatti, le discipline diventano uno strumento di indagine circa le pratiche lavorative messe in atto.

La struttura del Liceo Artigianale si articola nel modo seguente: ogni anno affronta un tema generale che sviluppa una o più competenze. Per affrontare il tema nella sua totalità, l'anno è diviso in quattro bimestri, ognuno dei quali è caratterizzato da una domanda guida che permette una didattica interdisciplinare che sviluppa le competenze richieste

dalla domanda stessa. Al termine di ogni bimestre gli studenti devono affrontare degli esami per competenze, che coinvolgono più materie.

Ogni lezione comincia con il *Do Now*, cioè un esercizio, un problema, una domanda a cui i ragazzi devono dare una risposta. Il *Do Now* può essere utilizzato per introdurre un nuovo argomento o per consolidarne uno già affrontato. Al termine della lezione viene proposto un nuovo esercizio, l'*Exit ticket*, che mira a verificare che l'argomento trattato sia stato compreso da ciascun ragazzo. Le attività in classe sono progettate in modo che gli studenti possano mettersi in gioco e possano costruire, con il minimo di guida necessaria, le conoscenze, abilità e competenze previste per quella lezione. Vengono utilizzate diverse tecniche di insegnamento-apprendimento, quali il *cooperative learning*, la *flipped classroom*, la lezione dialogata, minimizzando il più possibile i momenti di lezione frontale.

Per completezza riporto le tabelle che riassumono il tema, le domande guida e la struttura dei primi tre anni (di cui ho esperienza diretta) del Liceo Artigianale estrapolate dal lavoro di ricerca dal titolo "*Il Liceo Artigianale, la creazione di un nuovo modello di scuola al servizio di una concezione unitaria dell'uomo nel mondo*" della mia collega Letizia Ferri³⁴⁹.

³⁴⁹ L.Ferri, *Il Liceo Artigianale, la creazione di un nuovo modello di scuola al servizio di una concezione unitaria dell'uomo nel mondo*, Tesi di Dottorato, Università degli studi di Bergamo, a.a. 2019/20, relatore Chiarissimo prof. G. Bertagna.

TEMA DEL I ANNO: <u>IL MONDO</u>			
COMPETENZA ANNO: costruire un metodo per <u>OSSERVARE</u>			
	DOMANDA	COMPETENZA/E	ESAME/I
I BIMESTRE	Come si osserva?	Raccolta dati	Fiumelatte
II BIMESTRE	A che scopo osservo?	Progettazione	Città
III BIMESTRE	Come dico ciò che osservo?	Comunicazione	Tipologie di comunicazione
IV BIMESTRE	Cosa c'è dietro?	Rilettura del processo	Capolavoro di bottega
Laboratori artigianali di tessile, legno e uscite in realtà artigianali del territorio			

TEMA DEL II ANNO: <u>L'UOMO</u>			
COMPETENZA ANNO: costruire un metodo per <u>RIFLETTERE</u> e <u>ANALIZZARE</u>			
	DOMANDA	COMPETENZA/E	ESAME/I
I BIMESTRE	Come si formalizza?	Astrarre	I segni e i simboli

II BIMESTRE	Come le relazioni influiscono?	Relazionarsi	La relazione e le relazioni
III BIMESTRE	Come si cambia?	Cambiare	Rilettura dello stage e del bimestre a partire dalle <i>soft skills</i>
IV BIMESTRE	Cosa c'è dentro?	Rileggere un processo	Capolavoro con il maestro

TEMA DEL III ANNO: <u>L'UOMO NEL MONDO</u>			
COMPETENZA ANNO: applicare un metodo di <u>OSSERVAZIONE-ANALISI-RIFLESSIONE</u>			
	DOMANDA	COMPETENZA/E	ESAME/I
I BIMESTRE	Cosa vedi?	Analizzare	Corni di Canzo
II BIMESTRE	Perché è così?	Comprendere	Rilettura dello stage e del bimestre a partire dalle <i>soft skills</i>
III BIMESTRE	Qual è la mia proposta?	Argomentare	Saggio breve
IV BIMESTRE	Funziona?	Valutare	Maturità
Commessa			

Figura 3.2 La struttura del Liceo Artigianale³⁵⁰

³⁵⁰ L.Ferri, *Il Liceo Artigianale, la creazione di un nuovo modello di scuola al servizio di una concezione unitaria dell'uomo nel mondo*, cit. pp. 47-48

3.1.2 Dal fare al sapere: il Progetto Terra, gli stage e la commessa

Dalle tabelle precedenti si può osservare come l'alternanza formativa è presente fin dal primo anno e si realizza attraverso i laboratori artigianali, gli stage nelle aziende del territorio e la commessa del terzo anno.

I laboratori artigianali variano di anno in anno a seconda delle esigenze del territorio, degli studenti e della scuola stessa. Durante il mio lavoro di ricerca, il laboratorio artigianale, denominato *Progetto Terra*, si pone come obiettivo di sviluppare le competenze richieste dalle discipline e le competenze trasversali tramite la realizzazione di un orto presso il giardino della scuola. Il *Progetto Terra* promuove un processo di sintesi tra il lavoro scientifico e quello artigianale: attraverso un percorso di co-progettazione, i ragazzi trasformano l'idea del fare l'orto nella realtà concreta raccogliendone i frutti. Hanno l'opportunità di cimentarsi con il lavoro, di sviluppare la propria creatività nel formulare ipotesi, di imparare ad ascoltare ed aspettare gli altri. Attraverso lo stare insieme e la cooperazione gli studenti hanno avuto l'opportunità di sperimentare come la propria personalità li possa aiutare nella loro vita sociale e lavorativa. Il percorso è strutturato in co-docenze, si inserisce a supporto dell'attività didattica tradizionale e vuole fornire ai ragazzi uno spazio in cui fare esperienza di sé e sperimentare modalità di apprendimento diverse. Vengono posti problemi da risolvere, situazioni da gestire, prodotti da realizzare. Le attività sono strutturate in modo che ci sia sempre una fase di riflessione, una di auto-valutazione e una di valutazione collettiva per giustificare e trovare significato al proprio procedere e per costruire il proprio sapere e il saper fare attraverso il confronto con gli altri in un dialogo continuo con i compagni e con gli adulti di riferimento.

Gli stage nelle aziende del territorio hanno una durata di cinque settimane e prevedono un rientro settimanale a scuola per permettere agli studenti di fare un'attenta riflessione circa le conoscenze, abilità e competenze richieste dal lavoro svolto durante tale periodo. Gli obiettivi che si pone lo stage sono i seguenti: *“Orientamento a lungo termine (lavoro/studio); esperienza reale (domande); apprendere un metodo di apprendimento (dal bisogno/domanda al maestro, imparare osservando il maestro); vedere come è il mondo (rispondere a qualcuno, valutazione continua, collaborazione, trovare soluzioni a problemi); valutazione della spendibilità di competenze; consapevolezza di sé (scoperta*

di talenti, criticità); crescere nel desiderio di costruzione bene comune; per conoscere mestieri artigianali”³⁵¹.

Nello specifico riporto la tabella in cui gli obiettivi vengono definiti per ogni annualità.

Anno	Cosa fanno?	Come lo fanno?	Perché?
2 COME SI CAMBIA?	Stage in settori artigianali	Terzo bimestre 5 settimane (1 rientro a settimana, 1^a ora tutor 4 ore docenti)	Competenze trasversali (conoscenza di sé, comunicazione, relazioni, problem solving e orientamento) Sperimentare un lavoro e la fatica
3 PERCHE' E' COSI'?	Stage in settori artigianali	Secondo bimestre (1 rientro a settimana, 1^a ora tutor 4 ore docenti)	Riprendere in maniera dettagliata le competenze trasversali già viste, declinandole in strumenti lavorativi

Figura 3.3. Obiettivi stage³⁵²

Per gli studenti del terzo anno, allo stage si aggiunge la “Commessa” che, come per il professionale, è un compito reale che gli studenti devono progettare e realizzare nella sua interezza, utilizzando tutte le necessarie conoscenze, abilità e competenze derivanti dallo studio delle discipline. Nel caso specifico della commessa del terzo anno per l’anno scolastico 2018/2019, si trattava di allestire un’esposizione all’interno della mostra “La Luna di Seta” realizzata presso il Museo Didattico della Seta di Como, in occasione del

³⁵¹ L.Ferri, *Il Liceo Artigianale, la creazione di un nuovo modello di scuola al servizio di una concezione unitaria dell’uomo nel mondo*, cit. p. 51

³⁵² L.Ferri, *Il Liceo Artigianale, la creazione di un nuovo modello di scuola al servizio di una concezione unitaria dell’uomo nel mondo*, cit. pp. 51-52

cinquantenario dello sbarco dell'uomo sulla Luna. Alla mostra erano presenti alcune fotografie della collezione "mossi di Luna" di Edoardo Romagnoli e l'exhibit realizzato dai ragazzi del Liceo Artigianale.

3.1.3 La programmazione didattica e i riferimenti alle Indicazioni Nazionali per i licei

La programmazione didattica avviene attraverso momenti di condivisione in cui, partendo dal tema dell'anno e dalle domande inerenti i singoli bimestri, i docenti cercano le connessioni tra le materie per permettere che queste si intreccino e che lo studente abbia una formazione che va al di là del programma delle singole materie e che gli permetta di sviluppare le competenze richieste dalla disciplina ma anche e soprattutto le competenze trasversali per lo sviluppo dell'uomo come cittadino.

La programmazione delle discipline avviene in linea con le Indicazioni Nazionali per i licei³⁵³. Riporto le Linee Guida e Competenze per la Matematica:

“Al termine del percorso del liceo scientifico lo studente conoscerà i concetti e i metodi elementari della matematica, sia interni alla disciplina in sé considerata, sia rilevanti per la descrizione e la previsione di fenomeni, in particolare del mondo fisico. Egli saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha

³⁵³ Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca con il Ministero dell'Economia e delle Finanze, "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento".

https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf

cambiato il volto della conoscenza scientifica. Di qui i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio:

- 1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);*
- 2) gli elementi del calcolo algebrico, gli elementi della geometria analitica cartesiana, una buona conoscenza delle funzioni elementari dell'analisi, le nozioni elementari del calcolo differenziale e integrale;*
- 3) gli strumenti matematici di base per lo studio dei fenomeni fisici, con particolare riguardo al calcolo vettoriale e alle equazioni differenziali, in particolare l'equazione di Newton e le sue applicazioni elementari;*
- 4) la conoscenza elementare di alcuni sviluppi della matematica moderna, in particolare degli elementi del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica;*
- 5) il concetto di modello matematico e un'idea chiara della differenza tra la visione della matematizzazione caratteristica della fisica classica (corrispondenza univoca tra matematica e natura) e quello della modellistica (possibilità di rappresentare la stessa classe di fenomeni mediante differenti approcci);*
- 6) costruzione e analisi di semplici modelli matematici di classi di fenomeni, anche utilizzando strumenti informatici per la descrizione e il calcolo;*
- 7) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;*
- 8) una conoscenza del principio di induzione matematica e la capacità di saperlo applicare, avendo inoltre un'idea chiara del significato filosofico di questo principio ("invarianza delle leggi del pensiero"), della sua diversità con l'induzione fisica ("invarianza delle leggi dei fenomeni") e di come esso costituisca un esempio elementare del carattere non strettamente deduttivo del ragionamento matematico.*

Questa articolazione di temi e di approcci costituirà la base per istituire collegamenti e confronti concettuali e di metodo con altre discipline come la fisica, le scienze naturali e sociali, la filosofia e la storia. Al termine del percorso didattico lo studente avrà approfondito i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, formalizzazioni), conoscerà le metodologie di base per

la costruzione di un modello matematico di un insieme di fenomeni, saprà applicare quanto appreso per la soluzione di problemi, anche utilizzando strumenti informatici di rappresentazione geometrica e di calcolo. Tali capacità operative saranno particolarmente accentuate nel percorso del liceo scientifico, con particolare riguardo per quel che riguarda la conoscenza del calcolo infinitesimale e dei metodi probabilistici di base. Gli strumenti informatici oggi disponibili offrono contesti idonei per rappresentare e manipolare oggetti matematici. L'insegnamento della matematica offre numerose occasioni per acquisire familiarità con tali strumenti e per comprenderne il valore metodologico. Il percorso, quando ciò si rivelerà opportuno, favorirà l'uso di questi strumenti, anche in vista del loro uso per il trattamento dei dati nelle altre discipline scientifiche. L'uso degli strumenti informatici è una risorsa importante che sarà introdotta in modo critico, senza creare l'illusione che essa sia un mezzo automatico di risoluzione di problemi e senza compromettere la necessaria acquisizione di capacità di calcolo mentale. L'ampio spettro dei contenuti che saranno affrontati dallo studente richiederà che l'insegnante sia consapevole della necessità di un buon impiego del tempo disponibile. Ferma restando l'importanza dell'acquisizione delle tecniche, verranno evitate dispersioni in tecnicismi ripetitivi o casistiche sterili che non contribuiscono in modo significativo alla comprensione dei problemi. L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale è: pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità."³⁵⁴

A queste indicazioni generiche segue la descrizione degli apprendimenti da raggiungere nel primo e nel secondo biennio e nel quinto anno, divisi per ambito tematico.

Seguendo le Indicazioni Nazionali e dopo gli incontri con il consiglio di classe, ho elaborato la programmazione di matematica per le prime tre classi di Liceo Artigianale.

Gli esiti da raggiungere, comuni ai tre anni sono riportati nella seguente tabella:

³⁵⁴ Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca con il Ministero dell'Economia e delle Finanze, "Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali di cui all'articolo 10, comma 3, del decreto del Presidente della Repubblica 15 marzo 2010, n. 89, in relazione all'articolo 2, commi 1 e 3, del medesimo regolamento", cit. pp. 337-338.

M0	Padroneggiare concetti matematici e scientifici fondamentali, semplici procedure di calcolo e di analisi per descrivere e interpretare sistemi, processi, fenomeni e per risolvere situazioni problematiche di vario tipo legate al proprio contesto di vita quotidiano e professionale
M1	Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica
	Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.
M3	Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi
M4	Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Tabella 3.1 Esiti da raggiungere per l'asse matematico³⁵⁵

Riporto di seguito la programmazione dettagliata di matematica dei primi tre anni del Liceo Artigianale Quinquennale:

PRIMO ANNO

- Primo bimestre

Titolo UF: Come si osserva?

Obiettivo comune: L'unità formativa ha lo scopo di rendere consapevoli gli alunni che nel rapporto dell'uomo con il mondo si generano vari tipi di domande e bisogni, materiali e spirituali, che sono il motore del generarsi delle varie discipline con le loro specificità pratiche e teoriche. In particolare, per la classe I del liceo artigianale, l'unità ha lo scopo di guidare gli studenti ad una maggior consapevolezza del mondo attraverso l'osservazione, ed a una iniziale consapevolezza della propria capacità di manipolare la materia, dopo averla conosciuta, attraverso il proprio lavoro.

Esame finale: Nel contesto di un'uscita sul territorio agli studenti sarà richiesto di osservare un fenomeno da diversi punti di vista, dimostrando di sapersi porre le domande adeguate per intraprendere una ricerca del fenomeno di natura scientifica (fisica, matematica, naturalistica, informatica), umanistica (artistica, mitologica) e linguistica.

Competenze matematiche da raggiungere: Utilizzo del linguaggio matematico per descrivere i fenomeni osservati, attraverso domande e ipotesi.

³⁵⁵ *Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019. Per la consultazione completa si rimanda ai documenti d'istituto*

Programma di matematica previsto:

Disciplina	Unità	Domanda	Contenuto	Competenza	attività	Evidenze di apprendimento
Algebra	1	Come rappresento una quantità?	Le operazioni con i numeri naturali. Operazioni con i numeri interi e razionali,	Utilizzare tecniche di calcolo aritmetiche e algebriche	Il docente, partendo da un'attività che richiede l'osservazione di ciò che ci circonda, introduce l'importanza del saper contare conducendo il ripasso delle tecniche e proprietà di calcolo.	Lo studente utilizzerà il calcolo per risolvere una situazione problematica.
Algebra	2	Come rappresento ciò che mi circonda?	Proporzioni e percentuali	Utilizzare tecniche di calcolo algebriche	Partendo dall'esigenza di rappresentare un oggetto di uso comune per realizzare un progetto il docente spiegherà come utilizzare il calcolo algebrico perché questa esigenza possa essere soddisfatta	Rappresentazione in scala di un oggetto
Geometria	1	Quali sono gli elementi che costituiscono il mondo?	Gli elementi fondamentali e la geometria euclidea.	Riconoscere i principali enti geometrici individuandone le relazioni.	Il docente espone le principali tecniche per rappresentare gli elementi fondamentali della geometria chiarendo la loro importanza per lo sviluppo	Risoluzione di semplici problemi

Tabella 3.2: programma di matematica primo bimestre I Liceo Artigianale³⁵⁶

- Secondo bimestre

Titolo UF: A che scopo osservo?

Obiettivo comune: L'unità formativa ha lo scopo di far riflettere gli alunni su due componenti fondamentali della loro esistenza e del loro lavoro: lo spazio e la progettazione. La programmazione delle varie materie sarà, dunque, un tentativo di accompagnare i ragazzi a rispondere alle domande, che sorgono relativamente a questi due aspetti del vivere umano. Un particolare contributo in questo percorso verrà fornito dalla progettazione di un orto didattico. Si analizzeranno le tipologie primarie di progettazione dello spazio: la città.

Esame finale: Allo studente sarà richiesto di leggere, interpretare e rielaborare dei dati di diverso tipo (fonti storiche, dati geografici, dati naturali) al fine di progettare una città.

Competenze matematiche da raggiungere: Costruzione di modelli algebrici per l'elaborazione di diverse ipotesi di preventivo per una stessa classe di prodotto.

Programma di matematica previsto:

Disciplina	Unità	Domanda	Contenuto	Competenza	attività	Evidenze di apprendimento
Algebra	1	Come posso indicare le quantità?	Monomi: operazioni algebriche	Utilizzare le tecniche e le proprietà di calcolo algebriche applicate al calcolo letterale.	Il docente condurrà gli studenti all'importanza delle espressioni algebriche come modello di calcolo, al fine di ricostruire fogli di calcolo per uso professionale	Risoluzione di situazioni problematiche che richiedono l'uso del calcolo algebrico di monomi
Algebra	2	In che modo utilizzo le informazioni che ho per ottenere quella che mi serve?	Le equazioni di primo grado e le loro proprietà. Risoluzione di problemi attraverso le equazioni	Utilizzare le tecniche di calcolo algebriche e aritmetiche. Saper riconoscere l'incognita. Impostare e risolvere un'equazione	Il docente, partendo da situazioni concrete, condurrà gli studenti all'impostazione e alla risoluzione di semplici equazioni di primo grado	Risoluzione di problemi che richiedono l'uso delle equazioni di primo grado.
Algebra	3	Come posso indicare le quantità?	Rappresentazione simbolica di un oggetto attraverso una lettera. Definizione di monomio. Grado di un monomio e monomi simili.	Saper utilizzare un linguaggio simbolico per indicare ciò che si osserva. Comprendere il significato di grado di un monomio e di monomi simili.	Comprendere l'utilità di schematizzare una situazione problematica e di utilizzare una lettera per indicare una stessa categoria di oggetti. Saper utilizzare il grado di un monomio nella rappresentazione simbolica e saper riconoscere monomi simili.	Rappresentazione scritta di un problema attraverso l'uso dei monomi.
Geometria	1	Come rappresento ciò che mi circonda?	I triangoli: caratteristiche e proprietà	Saper distinguere i triangoli e conoscerne le proprietà	Il docente presenterà gli elementi geometrici e le proprietà dei triangoli e come dimostrare le	Rappresentazione grafica di oggetti che contengano forme

Tabella 3.3: programma di matematica secondo bimestre I Liceo Artigianale³⁵⁷

³⁵⁶ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

³⁵⁷ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

- Terzo bimestre

Titolo UF: Come dico ciò osservo?

Obiettivo comune: L'unità formativa ha lo scopo di far riflettere gli alunni su due dimensioni fondamentali: la semplicità e la complessità. La programmazione delle varie materie sarà dunque un tentativo per guidare i ragazzi alla conoscenza delle materie prime, dei componenti fondamentali, delle nozioni di base delle varie discipline e, a partire da questi ultimi, arrivare, attraverso le varie modalità della loro composizione, a ragionare su sostanze, composizioni, problemi e modelli culturali. La cucina, ambito artigianale su cui si focalizza questo bimestre, sarà un chiaro esempio di questa modalità di conoscenza e apprendimento: dagli alimenti semplici alle ricette complesse.

Esame finale: Agli studenti sarà richiesto di presentare un contenuto specifico e noto utilizzando strumenti e metodi a scelta; sarà inoltre richiesto loro di giustificare la scelta comunicativa relazionandola al destinatario, al messaggio e ai contenuti didattici appresi (relazione scientifica, presentazione PowerPoint, ...).

Competenze matematiche da raggiungere: Risoluzione di problematiche relative alla costituzione di un giardino utilizzando la risoluzione di sistemi lineari e il calcolo polinomiale.

Programma di matematica previsto:

Algebra	5	Come utilizzo le informazioni che ho per ottenerne più di una che non conosco?	Più incognite e più equazioni: i sistemi	Riconoscere il metodo più efficace per la risoluzione.	Il docente spiegherà, utilizzando degli esempi pratici in cucina, come combinare le informazioni che si hanno a disposizione per ricavare più incognite e quindi risolvere i sistemi di equazioni	Risolvere problematiche relative alla cucina utilizzando le equazioni e i sistemi di equazioni
Algebra	6	Come posso operare con elementi tra differenti tra di loro?	Operazioni algebriche tra polinomi. Prodotti notevoli	Saper riconoscere i polinomi simili ed utilizzare le tecniche di calcolo algebrico su di essi. Saper riconoscere quando un'espressione algebrica è un prodotto notevole e svilupparlo	Il docente spiegherà, utilizzando elementi utili nella costruzione dell'orto didattico le operazioni con i polinomi e lo sviluppo dei prodotti notevoli come semplificazione di elementi più complessi.	Risolvere problematiche di realtà utilizzando il calcolo polinomiale
Geometria	3	Come rappresento quello che mi circonda?	Il parallelismo: dalle rette ai poligoni	Saper riconoscere la posizione di due rette nello spazio	Prendendo spunto dall'allestimento di una sala il docente introdurrà le principali figure geometriche e le loro proprietà	Risolvere problemi utilizzando le proprietà dei quadrilateri

Tabella 3.4: programma di matematica terzo bimestre I Liceo Artigianale ³⁵⁸

- Quarto bimestre

Titolo UF: Cosa c'è dietro?

Obiettivo comune: Durante questo bimestre gli alunni saranno guidati a scoprire il percorso di conoscenza che a partire dagli oggetti concreti porta alla scoperta della loro storia, origine, costituzione. Ogni disciplina, applicando il metodo che le è proprio, e partendo dagli oggetti che la riguardano più da vicino, diventerà il tramite attraverso cui

³⁵⁸ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

gli alunni saranno guidati alle metodologie ermeneutiche. Alla fine del percorso si auspica che la classe abbia sviluppato modalità e tecniche adeguate ad approfondire la conoscenza di qualsiasi oggetto della realtà si trovi ad affrontare o la interessi.

Esame finale: Allo studente viene chiesto di presentare il proprio "capolavoro" insistendo sui punti di originalità del proprio lavoro rispetto alle domande emerse da una prima osservazione; lo studente applicherà in questo modo approfonditamente un metodo di osservazione specifico, progetterà un percorso di ricerca a partire dalle prime domande, individuerà gli strumenti comunicativi più adatti a presentare il lavoro.

Competenze matematiche da raggiungere: Approfondimento a partire da un oggetto, un apprendimento o una passione, attraverso i metodi di ricerca appresi e le conoscenze acquisite.

Programma di matematica previsto:

Disciplina	Unità	Domanda	Contenuto	Competenza	attività	Evidenze di apprendimento
Algebra	7	Cosa c'è dietro una struttura complessa?	Le frazioni algebriche e la divisione tra polinomi	Dividere tra di loro due polinomi	L'insegnante guiderà gli studenti nella scomposizione dei polinomi attraverso la divisione tra di essi	Semplificare problematiche attraverso la divisione polinomiale
Algebra	8	Cosa c'è dietro la matematica?	Gli insiemi: caratteristiche e operazioni con gli insiemi	Saper riconoscere gli elementi di un insieme ed effettuare le operazioni di unione ed intersezione tra più insiemi	Il docente definirà gli insiemi e le operazioni tra di essi, creando il filo conduttore di tutto il programma svolto in precedenza	Realizzazione di una ricetta (es. crostata con ingredienti per la base e ingredienti per la farcia) intersecando e unendo gli ingredienti
Statistica	1	Cosa c'è dietro una previsione?	Elementi di statistica, rappresentazione grafica dei dati e i principali indici statistici	Saper interpretare i dati e rappresentarli graficamente	Il docente definirà gli ingredienti fondamentali della statistica.	Elaborazione di una distribuzione di frequenze (es. piatti preferiti dai clienti)
Geometria	4	Cosa c'è dietro una figura?	Il piano cartesiano	Individuare i punti e rappresentare rette su un piano cartesiano	Il docente definirà il piano cartesiano e la rappresentazione di elementi geometrici	Rappresentazione grafica di figure geometriche

Tabella 3.5: programma di matematica quarto bimestre I Liceo Artigianale³⁵⁹

SECONDO ANNO.

- Primo bimestre

Titolo UF: Come si formalizza?

Obiettivo comune: L'unità didattica si pone l'obiettivo di iniziare a far familiarizzare gli studenti con il processo di astrazione, cominciando dalla formalizzazione. Elementi necessari al processo risultano essere simboli e segni, a creare codici che permettono la lettura e interpretazione corretta di situazioni concrete; il primo bimestre si propone perciò di guidare gli studenti nel percorso di appropriazione di codici specifici, necessari alle discipline. Per permettere di scendere in profondità in ogni disciplina, se sullo sfondo della didattica del bimestre si deve leggere un percorso comune, all'esame la competenza di utilizzo dei diversi codici e formalizzazioni sarà valutata per ogni disciplina.

³⁵⁹ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

Esame finale: Decifrare ed utilizzare codici e simbolizzazioni.

Competenze matematiche da raggiungere: Risoluzione di un problema di scelta mediante metodo grafico e analitico.

Programma di matematica previsto:

Disciplina	Unità	Domanda	Contenuto	Competenza	attività	Evidenze di apprendimento
Matematica	1	Perché uso le frazioni?	Le frazioni algebriche e le equazioni fratte	Calcolare le condizioni di esistenza. Trovare il minimo comune denominatore tra polinomi. Saper risolvere le equazioni fratte.	Ripasso delle proprietà delle frazioni algebriche e risoluzione di equazioni fratte. Risoluzione di equazioni fratte.	Utilizzare quanto imparato sui polinomi per risolvere problemi con equazioni fratte.
Matematica	2	Quali sono le informazioni che posso ricavare dal grafico di una funzione lineare?	Disequazioni di 1° grado. Principi di equivalenza. Risoluzione algebrica e geometrica delle disequazioni. Problemi riconducibili a disequazioni di 1° grado. Sistemi di disequazioni.	Saper utilizzare i principi di equivalenza per arrivare alla soluzione delle disequazioni di primo grado. Saper risolvere algebricamente sistemi di disequazioni di 1° grado.	In riferimento alla natura dell'uomo di mettersi a confronto con ciò che lo circonda, il docente introdurrà la simbologia del confronto tra più grandezze come diseuguaglianza e quindi disequazione. Introdurrà il confronto tra due disequazioni conduendo alla risoluzione algebrica dei sistemi.	Risolvere situazioni problematiche utilizzando le disequazioni di 1° grado.
Matematica	3	Come utilizzo i dati a mia disposizione?	Dati e variabili. Distribuzione di frequenza. Frequenza assoluta, relativa e percentuale. Diagrammi a barre e a torta.	Saper distinguere i dati e rappresentarli in una tabella di frequenze e tramite rappresentazione grafica.	Si richiederà agli studenti di ricercare e raccogliere dati su una situazione reale e verranno raccolti in tabelle e rappresentati tramite grafici statistici.	Elaborazione di una distribuzione di frequenze e rappresentazione grafica.
Geometria	1	Cosa riesco a capire osservando un'immagine?	Le trasformazioni geometriche, le isometrie: simmetrie, simmetria centrale, simmetria assiale, proprietà delle simmetrie. Figure e simmetrie. Composizione di simmetrie. Traslazione. Rotazioni.	Saper riconoscere le trasformazioni geometriche. Saper rappresentare figure geometriche tramite isometrie.	Dall'osservazione di immagini che contengono motivi ripetuti, si introdurrà il concetto di trasformazione geometrica. Verranno dimostrati i principali teoremi sulle isometrie e verranno utilizzate le metodologie apprese dalle dimostrazioni per costruire nuove figure a partire da quelle date.	Utilizzo di quanto appreso per dimostrare teoremi e risolvere esercizi.

Tabella 3.6: programma di matematica primo bimestre II Liceo Artigianale³⁶⁰

- Secondo bimestre.

Titolo UF: Come le relazioni influiscono?

Obiettivo comune: L'unità di apprendimento si pone l'obiettivo di sviluppare le competenze trasversali relative all'ambito relazionale; la didattica risulta quindi volta a supportare l'acquisizione e interiorizzazione di tali competenze. Particolare rilievo viene posto all'apprendimento delle modalità di lavoro cooperativo, finalizzato a sostenere un esame orale di presentazione di un lavoro sviluppato in piccoli gruppi.

Esame finale: Riconoscere e adattarsi a un contesto relazionale.

Competenze matematiche da raggiungere: Lavoro di gruppo sugli argomenti trattati.

³⁶⁰ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

Programma di matematica previsto:

Disciplina	Unità	Domanda	Contenuto	Competenza	attività	Evidenze di apprendimento
Matematica	1	Esiste una corrispondenza tra le relazioni tra i numeri e le relazioni tra me e gli altri?	Rappresentazione dei numeri reali sulla retta e l'esistenza dei radicali. Operazioni con i radicali. Razionalizzazione.	Comprendere le regole di calcolo dei radicali. Saper effettuare operazioni con i radicali e comprendere il processo di razionalizzazione di una frazione.	Riprendendo la rappresentazione dei numeri reali sulla retta verrà presentato il caso particolare dei numeri irrazionali e verranno presentate le operazioni con i numeri irrazionali.	Comprendere il significato di numero irrazionale. Risolvere espressioni contenenti numeri irrazionali.
Matematica	2	Come la matematica mi aiuta a comprendere le relazioni con ciò che mi circonda?	Gli insiemi e la loro rappresentazione, confronto tra insiemi, le relazioni di appartenenza e inclusione, insieme universo e insieme complementare. Le operazioni con gli insiemi: unione e intersezione.	Comprendere la struttura degli insiemi e saper effettuare operazioni tra di essi.	Il docente introduce l'insiemistica utilizzando realtà vicine agli studenti per poi generalizzarne le caratteristiche e comprenderne l'applicazione in matematica e in ogni ambito di osservazione.	Rappresentazione degli insiemi e delle operazioni tra di essi.
Matematica	3	Come la matematica mi aiuta a comprendere le relazioni con ciò che mi circonda?	Le relazioni tra gli insiemi. Le proprietà di una relazione. Le relazioni di equivalenza e di ordine. Relazioni inverse. Rappresentazione delle relazioni.	Conoscere le relazioni che legano gli insiemi. Saper invertire una relazione e rappresentare le relazioni graficamente.	Il docente definirà le relazioni tra gli insiemi e le loro proprietà e verranno analizzate attraverso lavori di gruppo le corrispondenze tra le relazioni tra gli insiemi e le relazioni tra le persone.	Realizzare una rappresentazione delle relazioni tra più insiemi.
Matematica	4	Che relazione c'è tra equazione e funzione?	Definizione di funzione. Funzione iniettiva, suriettiva e biiettiva. Rappresentazione grafica di una funzione lineare. Simmetrie nel piano cartesiano. Traslazione. Misura di un segmento. Punto medio e simmetria rispetto a un punto. Coefficiente angolare di una retta. Rette per l'origine. Rette parallele e perpendicolari. Retta passante per due punti. Retta dato un punto e il coefficiente angolare.	Distinguere le coordinate cartesiane. Saper rappresentare punti e comprendere il significato di simmetria di un punto rispetto agli assi e rispetto all'origine. Saper rappresentare graficamente una funzione lineare. Saper riconoscere parallelismo e perpendicolarità tra rette.	Ripasso del piano cartesiano e della rappresentazione di punti e rette. Differenza tra relazione e funzione. Rappresentazione grafica di una funzione lineare.	Risoluzione di un problema complesso utilizzando la forma algebrica e geometrica di una o più funzioni lineari.
Geometria	1	Che relazione c'è tra la forma di una figura e la sua area?	Figure equiestese. Equiscomponibilità dei poligoni. Teoremi di Pitagora e di Euclide	Saper scomporre e/o comporre una figura geometrica in figure geometriche equivalenti.	Attraverso un'attività di gruppo (tangram) il docente introdurrà il concetto di equiscomponibilità dei poligoni e condurrà lo studente alla scoperta, dimostrazione e applicazione dei teoremi di Pitagora ed Euclide.	Lavoro di gruppo. Creazione di un tangram.
Geometria	2	Che relazione c'è tra più misure?	Elementi per misurare. Grandezze geometriche. Grandezze continue. Grandezze commensurabili. Grandezze proporzionali. Criterio di proporzionalità. Rappresentazione della proporzionalità. Teorema di Talete. Teoremi sulla bisettrice. Misure nei poligoni. Aree dei poligoni. Unità di misura. Misura nel cerchio. Misure degli angoli.	Saper riconoscere le diverse tipologie di grandezze attraverso le proprietà e caratteristiche. Saper dimostrare i principali teoremi.	Attraverso attività di gruppo gli studenti lavoreranno sullo studio e la scoperta delle proprietà delle figure geometriche da un punto di vista superiore.	Dimostrazione di teoremi relativi alle proprietà scoperte.

Tabella 3.7: programma di matematica secondo bimestre II Liceo Artigianale³⁶¹

- Terzo bimestre.

Titolo UF: Come si cambia?

Obiettivo comune: In questo bimestre si concentra l'attività svolta dagli studenti in alternanza scuola-lavoro in aziende esterne. La didattica offre, a supporto del tirocinio, strumenti e metodi per il potenziamento delle competenze trasversali: comunicazione, problem solving, (...).

Esame finale: Saper riconoscere i processi in atto (nello specifico ambito lavorativo) per individuare i cambiamenti in gioco e prospettabili.

Competenze matematiche da raggiungere: Risoluzione di un problema complesso.

³⁶¹ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

Programma di matematica previsto:

Disciplina	Unità	Domanda	Contenuto	Competenza	attività	Evidenze di apprendimento
Matematica	1	Come si trasformano le funzioni?	Funzioni quadratiche, nuove situazioni geometriche	Studiare il grafico di un'equazione di secondo grado e descrivere analogie e differenze con il grafico di una retta.	Attraverso domande guida e l'uso del programma desmos, comprendere il passaggio da retta a parabola.	Descrivere il cambiamento che avviene nel grafico di un'equazione aggiungendo/togliendo parametri.

Tabella 3.8: programma di matematica terzo bimestre II Liceo Artigianale³⁶²

- Quarto bimestre

Titolo UF: Cosa c'è dentro?

Obiettivo comune: L'unità di apprendimento si propone l'obiettivo di far sperimentare agli studenti il metodo di lavoro di una disciplina specifica attraverso un lavoro originale capace di ricapitolare in sé le fasi del processo di osservazione - progettazione - astrazione - comunicazione, percorse nel corso dei due anni iniziali di liceo. Parallelamente si offre agli studenti l'occasione di riflettere sulle condizioni che originano un cambiamento (in senso storico, linguistico, scientifico, fisico, ...).

Esame finale: Saper fare ricerca a partire da un ambito approfondendo le motivazioni personali delle scelte e cercando in autonomia risorse e contributi con il coordinamento, il confronto e la guida di un "tutor".

Competenze matematiche da raggiungere: Approfondimento di un argomento anche non trattato in classe.

Programma di matematica previsto:

Disciplina	Unità	Domanda	Contenuto	Competenza	attività	Evidenze di apprendimento
Matematica	1	Cosa c'è dentro una equazione di secondo grado?	La funzione quadrata e il suo grafico. Equazioni di secondo grado pure, spurie e complete e metodi risolutivi.	Rappresentazione geometrica e algebrica di una parabola. Saper utilizzare il metodo risolutivo adatto al tipo di equazione e saper risolvere le equazioni di secondo grado.	Utilizzando la rappresentazione grafica il docente introdurrà le equazioni di secondo grado come conseguenza della trasformazione di una funzione lineare in una funzione quadratica.	Risoluzione di equazioni di secondo grado
Matematica	2	Cosa c'è dentro l'algebra?	Gli sviluppi dell'algebra: equazioni a coefficienti letterali, parametriche, irrazionali. Sistemi di secondo grado.	Calcolare le condizioni di esistenza. Trovare il minimo comune denominatore tra polinomi. Saper risolvere le equazioni fratte. Distinguere l'incognita dal parametro. Risolvere le equazioni parametriche, calcolare il valore del parametro. Saper risolvere le equazioni irrazionali.	Il docente introdurrà le tecniche di calcolo e risoluzione delle equazioni fratte, parametriche e irrazionali come approfondimento sull'algebra. Presenterà anche la soluzione di sistemi contenenti questo tipo di equazioni.	Risoluzione di situazioni problematiche attraverso l'uso di equazioni e disequazioni fratte, parametriche e irrazionali.
Matematica	3	Cosa c'è dentro una previsione?	Probabilità: gli eventi certi, probabili, impossibili, definizione di probabilità. Evento contrario. Somma di probabilità. Probabilità condizionata.	Comprendere il significato di evento matematico. Calcolare la probabilità del verificarsi di un evento. Calcolare la probabilità che si verifichino più eventi. Calcolare la probabilità di un evento rispetto al verificarsi di un altro evento.	Attraverso attività ludiche di gruppo, il docente presenterà agli studenti gli elementi della probabilità e le principali modalità di calcolo delle probabilità. Introdurrà la somma di probabilità e la probabilità condizionata.	Calcolo delle probabilità del verificarsi di eventi legati alla vita quotidiana per la gestione di situazioni problematiche.
Geometria	1	Cosa c'è dentro una relazione?	Triangoli simili. Criteri di similitudine dei triangoli. Poligoni simili. Perimetri e aree dei poligoni simili. Corde, secanti e tangenti. La sezione aurea e il rapporto aureo.	Saper riconoscere triangoli simili tra di loro attraverso l'uso dei tre criteri di similitudine. Saper utilizzare le conseguenze dei criteri di similitudine per riconoscere triangoli simili tra di loro.	Il docente presenterà i tre criteri di similitudine dei triangoli e le loro conseguenze. Verrà spiegata la correlazione tra la similitudine e i teoremi di Euclide. Dalla similitudine dei triangoli verrà introdotta la similitudine tra poligoni. Infine il docente introdurrà la sezione aurea utilizzando il rapporto tra i segmenti.	Dimostrazione e risoluzione di esercizi utilizzando i principali teoremi.

Tabella 3.9: programma di matematica secondo bimestre II Liceo Artigianale³⁶³

³⁶² Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

³⁶³ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

TERZO ANNO.

- Primo bimestre

Titolo UF: Cosa vedi?

Obiettivo comune: Il primo bimestre si propone di accompagnare gli studenti nella (ri)scoperta della prima fase del processo scientifico-sperimentale, processo che si dipanerà per tutto l'anno guidando lo sviluppo di una commessa reale. Nei primi due mesi ci si concentrerà sulla fase dell'ideazione, momento propulsore di qualsiasi lavoro; ideazione che, declinata nelle varie forme del sapere umano, si traduce in: ispirarsi, immaginare, ipotizzare, ampliare gli orizzonti delle proprie conoscenze ponendosi domande nuove.

Esame finale: Ricerca fonti di ispirazione e di conoscenza dei contesti.

Competenze matematiche da raggiungere: Valutazione del contenuto scientifico presentato insieme al mood board per la commessa e approfondimento.

Programma di matematica previsto:

Matematica	1	A cosa serve una disequazione?	Disequazioni di secondo grado complete, Disequazioni di grado superiore al secondo scomponibili in fattori.	Saper utilizzare le tecniche di calcolo algebrico per la risoluzione di disequazioni di grado maggiore o uguale al secondo. Conoscere il significato geometrico di una disequazione.	Dal ripasso delle equazioni di secondo grado verranno introdotte le disequazioni di secondo grado e i metodi risolutivi. Comprendere il significato di disequazione graficamente.	Verifica scritta.
Matematica	2	Come misuro la Terra?	Definizione di circonferenza, equazione, grafico. Posizioni reciproche tra retta e circonferenza. Equazione di una circonferenza dati il centro e un punto. Posizione tra due circonferenze. Fasci di circonferenze.	Utilizzare quanto appreso sullo studio delle funzioni per scoprire una nuova, comprendere il significato geometrico di un'equazione. Saper utilizzare i dati a disposizione per ricavare informazioni.	Lavoro di gruppo guidato alla scoperta di nuove funzioni. Rappresentare sottoforma di funzione un elemento geometrico già noto. Capire le caratteristiche e proprietà.	Verifica scritta.
Matematica	3	Cosa descrive la Terra nel suo moto intorno al sole?	Definizione di ellisse. Equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse x e sull'asse y, coordinate dei fuochi. Rappresentazione di un'ellisse. Eccentricità. Posizioni reciproche tra ellisse e rette. Formula di sdoppiamento. Ellisse e trasformazioni geometriche.	Saper interpretare i dati a disposizione dal punto di vista algebrico e geometrico. Comprendere come al variare di alcuni parametri, varia il grafico di una funzione.	Lavoro di gruppo, supportato da spiegazione frontale e utilizzo di software didattici (geogebra, derive..)	Presentazione del moto della Terra e della sua posizione rispetto all'universo.

Tabella 3.10: programma di matematica primo bimestre III Liceo Artigianale³⁶⁴

- Secondo bimestre

Titolo UF: Cosa puoi fare?

Obiettivo comune: In questo bimestre la didattica è orientata a supportare l'esperienza lavorativa degli studenti nell'ambito dei progetti di alternanza scuola-lavoro. In particolare, le discipline offriranno occasioni, spunti e metodologie per sviluppare le competenze trasversali: presentazione di sé, comunicazione, *problem solving*, relazione tra pari e con adulti. L'esperienza dello stage, non configurandosi più come novità, sarà

³⁶⁴ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

focalizzata alla comprensione dei processi e degli elementi che contraddistinguono l'attività dell'azienda allo scopo di far apprendere le relazioni esistenti fra bisogni del territorio e attività lavorativa.

Esame finale: L'esame finale consisterà in una presentazione, sottoforma di video inchiesta, dell'azienda ospitante.

Competenze matematiche da raggiungere: Risoluzione di un problema complesso.

Programma di matematica previsto:

Disciplina	Unità	Domanda	Contenuto	Competenza	attività	Evidenze di apprendimento
Matematica	1	Come utilizzo i dati a mia disposizione?	Dati e variabili. Distribuzione di frequenza. Frequenza assoluta, relativa e percentuale. Diagrammi a barre e a torta. Indici di posizione e variabilità. Efficacia, efficienza e qualità.	Saper distinguere i dati e rappresentarli in una tabella di frequenze e tramite rappresentazione grafica. Fare previsioni. Raccolta e analisi dati	Si richiederà agli studenti di ricercare e raccogliere dati relativi alle aziende e verranno raccolti in tabelle e rappresentati tramite grafici statistici e si richiederà loro di analizzare i dati raccolti con gli strumenti a disposizione.	Elaborazione di una distribuzione di frequenze e rappresentazione grafica.

Tabella 3.11: programma di matematica secondo bimestre III Liceo Artigianale³⁶⁵

- Terzo bimestre

Titolo UF: Qual è la mia proposta?

Obiettivo comune: Dopo la fase di raccolta di idee e dopo la progettazione, in ogni processo di sperimentazione scientifica o di produzione artigianale viene il momento della realizzazione: gli studenti sperimenteranno questa fase del processo sviluppando la commessa. A latere, la didattica offre spunti di riflessione sul processo di generalizzazione che in ogni disciplina ed epoca avviene quando, alzando lo sguardo dal "già noto", ci si volge verso problemi e questioni inedite, tentando un approccio che si fonda sulle conoscenze e competenze acquisite, per ampliarle.

Esame finale: Progettazione della commessa.

Competenze matematiche da raggiungere: Utilizzare le sezioni coniche per risolvere problemi complessi.

³⁶⁵ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

Programma di matematica previsto:

Disciplina	Unità	Domanda	Contenuto	Competenza	attività	Evidenze di apprendimento
Matematica	1	Come si trasforma un'ellisse?	Definizione di iperbole, equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse x e sull'asse y, coordinante dei fuochi, simmetrie, rappresentazione grafica, eccentricità. Posizione reciproca tra iperbole e rette. Formula di sdoppiamento. Iperbole traslata, iperbole equilatera.	Saper interpretare i dati a disposizione dal punto di vista algebrico e geometrico. Comprendere come al variare di alcuni parametri, varia il grafico di una funzione.	Lavoro di gruppo. Utilizzo di software didattici per la rappresentazione grafica dell'iperbole.	Presentazione lavoro di gruppo.
Matematica	2	Come si fa a sezionare un cono a due falde?	Sezioni coniche.	Saper ricavare da un cono a due falde le coniche viste precedentemente.	Costruzione delle coniche sezionando un cono a due falde. Utilizzo di software didattici.	Verifica orale.
Matematica	3	Come si risolve un'equazione "particolare"?	Equazioni parametriche, a coefficienti letterali, binomi e trinomie.	Utilizzare le tecniche di calcolo algebrico per risolvere diverse tipologie di equazione. Utilizzare, quando possibile, anche metodi geometrici.	Ripasso delle tecniche algebriche e geometriche di risoluzioni delle equazioni. Introduzione di nuove tecniche di risoluzione delle equazioni.	Verifica scritta.

Tabella 3.12: programma di matematica terzo bimestre III Liceo Artigianale³⁶⁶

- Quarto bimestre

Titolo UF: Funziona?

Obiettivo comune: Ultima fase del metodo scientifico e del lavoro artigianale è la valutazione, momento che arricchisce il prodotto di un'analisi volta a comprendere il valore, i pregi e i difetti di quanto prodotto (nel contesto del lavoro), oppure avente l'obiettivo di sviluppare delle conclusioni circa la bontà delle ipotesi fatte (nel contesto della ricerca scientifica). Gli studenti saranno guidati nell'appropriazione di questo metodo attraverso la conclusione del loro progetto.

Esame finale: Realizzazione della commessa

Competenze matematiche da raggiungere: Realizzazione di un articolo divulgativo che metta in risalto il contenuto matematico utilizzato per la commessa.

Programma di matematica previsto:

Disciplina	Unità	Domanda	Contenuto	Competenza	attività	Evidenze di apprendimento
Matematica	1	Che dati posso ricavare da una funzione?	Potenze con esponente intero o razionale, con esponente reale. Proprietà delle potenze con esponente reale. Funzione esponenziale, grafico della funzione esponenziale. Equazioni e disequazioni esponenziali.	Conoscere la definizione di potenza ad esponente reale. Conoscere le caratteristiche della funzione esponenziale. Saper rappresentare graficamente le funzioni esponenziali.	Esercizi guidati allo scopo di individuare una nuova funzione, quella esponenziale per risolvere problemi e analizzare dati reali.	Verifica scritta.
Matematica	2	Che dati posso ricavare da una funzione?	Definizione di logaritmo. Proprietà dei logaritmi. Formula del cambiamento di base. Grafico di funzioni logaritmiche. Equazioni logaritmiche. Disequazioni logaritmiche. Logaritmi ed equazioni e disequazioni esponenziali. Coordinate logaritmiche.	Conoscere la definizione di logaritmo, saper rappresentare graficamente la funzione logaritmo e saper ricavare dati utili alla risoluzione di problemi reali. Saper operare con i logaritmi.	Logaritmi come funzione inversa delle funzioni esponenziali. Esercizi sulle proprietà dei logaritmi. Studio dei dati ricavati da una funzione logaritmica per la risoluzione di problemi.	Verifica scritta.

Tabella 3.13: programma di matematica quarto bimestre III Liceo Artigianale³⁶⁷

³⁶⁶ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

³⁶⁷ Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019, cit.

3.1.4 Esempi di apprendimento della matematica attraverso l'alternanza formativa

In questo paragrafo riporto tre attività, una per ogni anno del Liceo Artigianale, esemplificative del metodo utilizzato nello svolgimento delle lezioni con riferimento a situazioni concrete.

Il primo esempio riguarda l'Unità 6 del programma di algebra del primo anno: i polinomi.

I prerequisiti sono: operazioni tra i numeri reali conoscenza del concetto di monomio e delle operazioni tra monomi.

Gli obiettivi sono: riconoscere un polinomio, saper svolgere operazioni tra polinomi e prodotti notevoli, saper utilizzare i polinomi in contesti di realtà.

L'attività viene introdotta a partire dalla necessità derivata dalla semina di quattro diverse tipologie di verdure all'interno dell'orto didattico. Ai ragazzi è stato chiesto di calcolare il perimetro delle quattro zone in cui era stata precedentemente suddivisa l'aiuola a disposizione. L'aiuola era stata suddivisa in rettangoli aventi tutti la stessa base e la stessa altezza, in modo da poter delimitare le quattro zone in cui piantare i semi delle differenti tipologie di verdure.

Per portare a termine il compito, gli studenti, divisi in gruppi, dopo aver misurato l'aiuola e diviso una delle due dimensioni in quattro parti, hanno calcolato il perimetro di ognuna delle quattro zone.

Successivamente, in classe mantenendo invariati i gruppi, è stato proposto loro di generalizzare il problema in modo da renderlo efficace in ogni possibile situazione.

Per portare a termine questo compito sono stati dati agli studenti 30 minuti di tempo. In questo tempo ogni gruppo ha lavorato in maniera attiva e propositiva. Al termine del tempo a disposizione c'è stato un confronto, guidato dall'insegnante, riguardo i ragionamenti che avevano portato ciascun gruppo a formulare la propria generalizzazione. Infine, insieme, si è giunti alla formulazione del seguente problema:

“In un orto si vogliono delimitare le zone nelle quali sono state piantate diverse tipologie di verdure. Le aiuole, di forma rettangolare hanno tutte le seguenti dimensioni: la base misura b , l'altezza misura h . Calcola il perimetro di ogni aiuola.”

Dopo aver generalizzato il problema, ho dato 15 minuti ad ogni gruppo per trasformarlo in formula. A questo punto la risposta è stata quasi immediata, in quanto si trattava di riscrivere la formula del calcolo del perimetro di un rettangolo:

$$P = 2b + 2h$$

Ed ecco, che conoscendo già il significato delle variabili, è stato semplice per loro comprendere la definizione di polinomio come somma di più monomi.

A questo punto, si è passati alle definizioni formali del grado di un polinomio, di polinomio omogeneo e di polinomio ridotto in forma normale, che sono state rapidamente comprese dagli studenti.

L'attività che ha permesso l'introduzione del significato di polinomio è stata svolta in una lezione di 2 ore.

Nella successiva, dopo aver constatato il reale grado di apprendimento della definizione di polinomio tramite l'esercizio del *Do now*, si è passati ad un'attività che ha permesso di rendere naturale la comprensione delle operazioni tra di essi.

Rimanendo sempre sul tema della suddivisione delle aiuole, ho proposto agli studenti il seguente problema:

“Un'aiuola rettangolare è stata suddivisa in tre parti rettangolari, aventi la misura delle basi rispettivamente di $2x$, $\frac{1}{2}x$, $3y$ e aventi l'altezza di misura $2y + 3x$. Calcola la misura dell'area e del perimetro dell'aiuola.”

Sempre suddivisi in gruppi, gli studenti hanno avuto 20 minuti di tempo per risolvere il problema. Gli studenti sono stati in grado, abbastanza velocemente, di impostare la soluzione del problema utilizzando le formule del calcolo dell'area e del perimetro di un rettangolo, arrivando quindi alla scrittura

$$P = 2 \cdot \left(2x + \frac{1}{2}x + 3y \right) + 2 \cdot (2y + 3x)$$

che comprende la somma tra polinomi e il prodotto di uno scalare per un polinomio, e alla scrittura

$$A = 2x(2y + 3x) + \frac{1}{2}x(2y + 3x) + 3y(2y + 3x)$$

che comprende la somma di polinomi e il prodotto di un monomio per un polinomio.

A questo punto, è stato necessario scomporre le varie parti delle formule risolutive per spiegare ai ragazzi il procedimento della somma tra polinomi, del prodotto di uno scalare per un polinomio e del prodotto di un monomio per un polinomio, per poi ritornare al problema principale e a trovarne la soluzione che riporto per completezza:

$$P = 11x + 10y$$

$$A = \frac{15}{2}x^2 + 14xy + 6y^2$$

Con problemi analoghi sono state spiegate le restanti operazioni: differenza, prodotto e quoziente di polinomi.

Per portare a termine l'argomento relativo alle operazioni tra polinomi sono state necessarie tre lezioni di due ore.

Per concludere l'argomento polinomi sono stati introdotti i prodotti notevoli.

Per la trattazione dei prodotti notevoli, l'anno precedente avevo utilizzato la lezione dialogata che, però, aveva richiesto un eccessivo dispendio di energia da parte mia nella spiegazione e da parte dei ragazzi nella memorizzazione. Per cui, dato che in altre occasioni, ho potuto osservare che con argomenti di questo tipo è più funzionale che siano i ragazzi a studiare l'argomento da soli e che l'aiutare gli altri faciliti la memorizzazione, ho scelto di utilizzare le metodologie *flipped classroom* e *peer education*.

La *flipped classroom*, in italiano classe capovolta, nasce dall'esigenza di rendere il processo di insegnamento-apprendimento più funzionale e produttivo, utilizzando le ore di lezione per "risolvere i problemi più complessi, approfondire argomenti, collegare temi e analizzare i contenuti disciplinari, produrre elaborati magari in gruppo e in modalità *peer to peer* (tra pari) in un contesto di laboratorio assistito. Nella *flipped lesson*, il docente non è più un semplice "dispensatore di sapere", ma assume un ruolo di guida e

di tutor fornendo agli studenti la propria assistenza in aula per fare emergere osservazioni e considerazioni significative attraverso esercizi, ricerche e rielaborazioni condivise.”³⁶⁸

La *peer education* “identifica una strategia educativa volta ad attivare un processo spontaneo di passaggio di conoscenze, di emozioni e di esperienze da parte di alcuni membri di un gruppo ad altri membri di pari status; un intervento che mette in moto un processo di comunicazione globale, caratterizzato da un’esperienza profonda ed intensa e da un forte atteggiamento di ricerca di autenticità e di sintonia tra i soggetti coinvolti.”³⁶⁹

Ho diviso i ragazzi in coppie e ho assegnato a ciascuna coppia un prodotto notevole da risolvere utilizzando le operazioni tra polinomi e, in base al confronto dei risultati ottenuti, ricavare la regola generalizzata da presentare ai compagni attraverso una semplice presentazione Power- Point.

A scopo esemplificativo, riporto di seguito l’attività proposta per il prodotto notevole “somma per differenza”:

“Somma per differenza.

Risolvi i seguenti prodotti.

- $(x + 2)(x - 2)$
- $(a + b)(a - b)$
- $(2x + 1)(2x - 1)$

Cosa noti nella loro risoluzione? Cosa hanno in comune?

Scrivi la regola generalizzata per la risoluzione della somma per differenza.”

Di seguito riporto il Power-Point utilizzato dai ragazzi per tenere la loro lezione:

³⁶⁸ [La «flipped classroom» | Pearson](#)

³⁶⁹ [Indire, sito ufficiale](#)

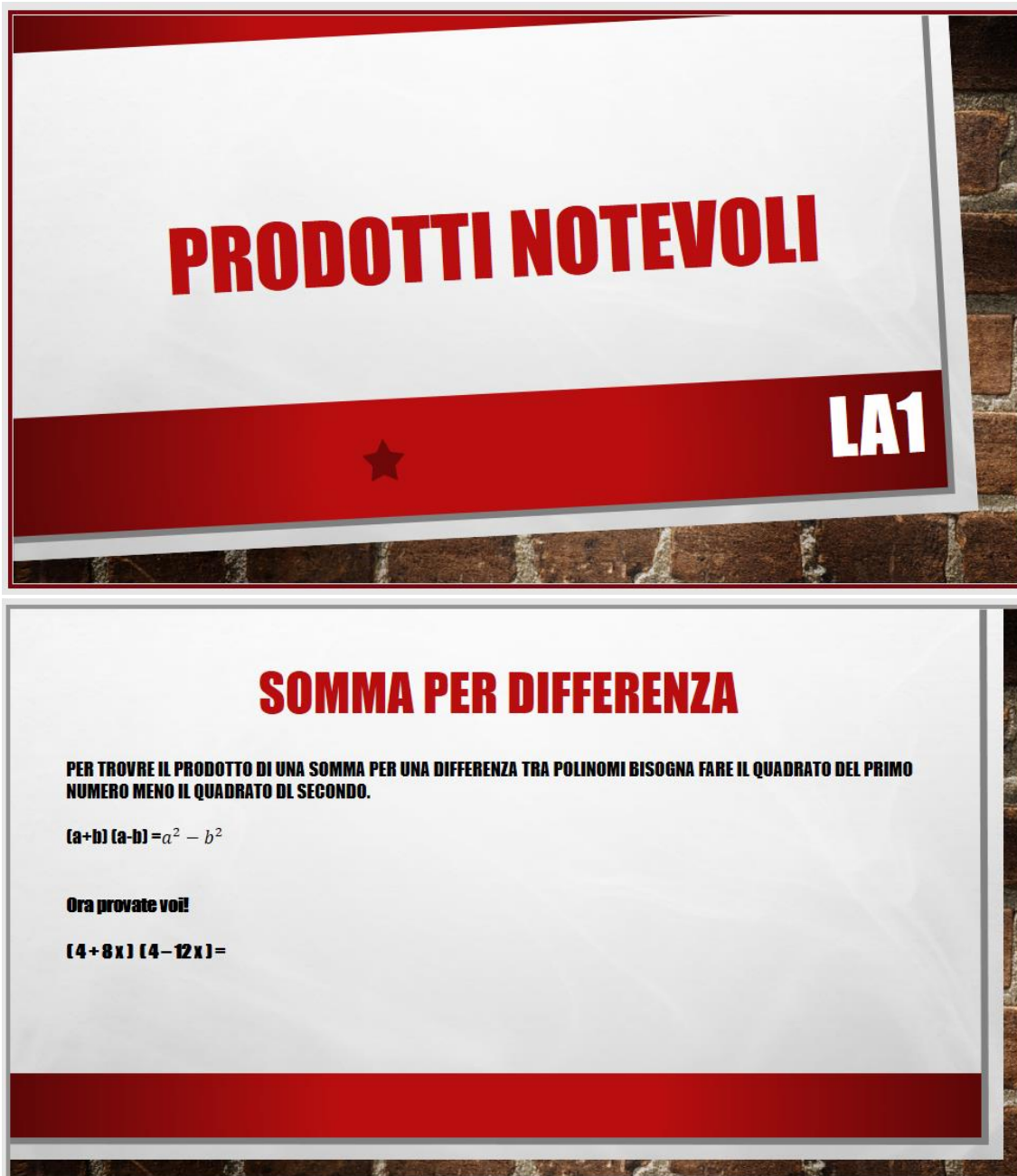


Figura 3.4. Presentazione ppt creata da due studenti del primo anno di Liceo Artigianale

In questo modo, gli studenti si sono sentiti responsabili dell'apprendimento dei loro compagni e in modo responsabile hanno gestito la lezione in modo interattivo, proponendo ai compagni ulteriori esercizi da risolvere e aiutando coloro che dimostravano maggiore fatica nell'apprendimento.

Utilizzando questa metodologia è stato impiegato più tempo di quanto di solito si impiega nella spiegazione dell'argomento ma i ragazzi, sentendosi parte attiva del processo di

apprendimento, hanno interiorizzato tutte le regole che stanno dietro i prodotti notevoli in modo naturale, divertendosi e senza quella sensazione di essere costretti ad imparare a memoria delle regole che, per usare un'espressione a loro molto cara, “*non ci serviranno mai nella vita*”.

Per completezza sull'argomento, riporto la verifica proposta con relativa griglia di correzione. Le verifiche che propongo e le relative griglie di valutazione, sono strutturate in modo che si possa garantire la massima personalizzazione dei risultati ottenuti da ciascuno studente in relazione alle proprie caratteristiche intellettive.

VERIFICA DI MATEMATICA

CLASSE LA1

Esercizio 1.

Calcola i valori richiesti per ogni polinomio

- a) $P(a) = a^2 + a + 1$ $P(2); P(-1)$
 b) $P(x) = x^2 + 1$ $P(1); P(-5)$
 c) $P(a) = a^3 - 8$ $P(2); P(-2)$

Esercizio 2.

Risolvi le seguenti operazioni tra polinomi.

- a) $(3 - a + a^2) + (3 + 2a - 2a^2)$
 b) $(a^2 - 3x + 2) \cdot 3x$
 c) $\left(a + \frac{1}{2}\right)(2b - 6)$
 d) $(12a^4y^5 - 4a^3y^2 + 8ay^4) : (-4ay^2)$
 e) $(4a^3 + 4a^2 - 19a + 6) : (2a^2 + 5a - 2)$
 f) $2\left(a^3 + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{16} - a^3\right) + \left[\left(a - \frac{1}{2}\right)\left(a^4 + \frac{1}{2}a^3 + \frac{1}{4}a^2\right)\left(a^3 + \frac{1}{8}\right)\right] : \left(\frac{1}{2}a^2\right)$

Esercizio 3.

Semplifica i seguenti prodotti notevoli.

- a) $(a + 4)(a - 4)$
 b) $(x + 2)^2$
 c) $(2x + 1)^2$
 d) $(a - 1)(a^2 + a + 1)$
 e) $(x - 2)(x + 5)$
 f) $(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$

Esercizio 4.

Trasforma in prodotti notevoli i seguenti sviluppi.

- a) $b^2 - a^2$
 b) $8a^3 + 12a^2 + 6a + 1$
 c) $4 - 12y + 9y^2$
 d) $a^3 + b^3$
 e) $x^2 - 5x + 6$
 f) $b^9 - 8$

Esercizio 5.

Risolvi le seguenti espressioni utilizzando i prodotti notevoli.

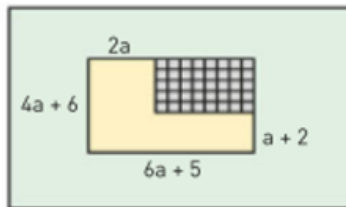
- a) $(x + y + z)^2 + (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2$
- b) $(x + y)^3 - (x + y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy(x + y)$
- c) $\left[\left(x - \frac{1}{3}a\right)\left(x + \frac{1}{3}a\right) + \frac{10}{9}a^2 \right]^2 - 4(a^2 + 1)(x^2 - 1) - (a^2 - x^2 + 2)^2$

Esercizio 6.

Risolvi i seguenti problemi.

Problema 1.

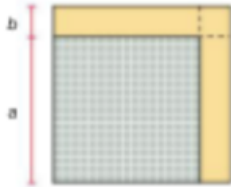
In un'area di 2500 m^2 l'architetto vuole costruire un edificio lasciando spazio per un parcheggio e un giardino. Nella pianta della figura le dimensioni sono espresse in metri.



- a) Scrivi la superficie $P(a)$ occupata dal parcheggio (area quadrettata) esprimendola, in funzione di a , con un polinomio ridotto.
- b) Se $a = 6$, il giardino occupa più spazio del parcheggio? Quali sono le percentuali rispetto all'area complessiva?
- c) Se $a = 8$, quanto spazio è dedicato al giardino?
- d) Se $a = 10$, il progetto si può realizzare?

Problema 2.

All'angolo di un edificio storico sulla piazza comunale di un paese si trova un bar. La superficie interna del bar è quadrata, con pareti lunghe a metri. Il Comune ha concesso al gestore di ampliare lo spazio a



disposizione con una veranda sulla piazza, tutta intorno al bar e larga b metri. Quanto spazio ha a disposizione il bar per poter sistemare i tavoli, considerando sia l'interno che la veranda?

Figura 3.5. Verifica sui polinomi per la classe LA1

GRIGLIA DI CORREZIONE

GRIGLIA DI CORREZIONE MATEMATICA	gravemente insufficiente (3-4)	insufficiente (5-5,5)	contenuti sufficienti, molti errori (6-6,5)	qualche errore più o meno grave non di sostanza (7- 8)	buono- ottimo (8,5- 10)
Conosce il significato di polinomio					
Effettua operazioni con i polinomi					
Risolve espressioni con i polinomi					
Risolve i prodotti notevoli					
Riconosce lo sviluppo dei prodotti notevoli					
Utilizza i prodotti notevoli nella risoluzione di espressioni con i polinomi					
Risolve problemi di realità					

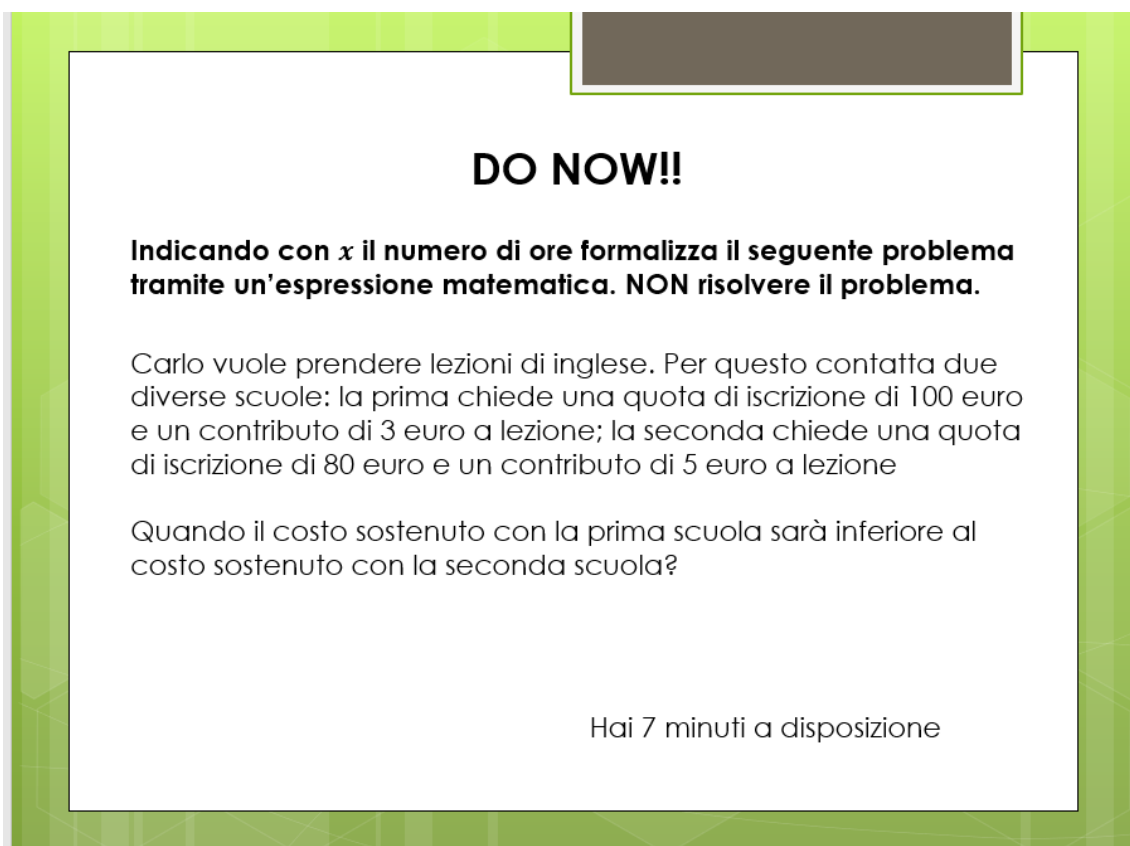
Figura 3.6. Griglia di correzione

Il secondo esempio riguarda l'Unità 2 di algebra del primo bimestre del secondo anno di Liceo Artigianale: le disequazioni di primo grado.

I prerequisiti sono: saper operare con i numeri reali, saper risolvere un'equazione di primo grado, saper rappresentare i numeri sulla retta reale.

Gli obiettivi sono: saper risolvere disequazioni di primo grado, saper risolvere sistemi di disequazioni di primo grado, saper risolvere disequazioni fratte di primo grado, saper risolvere problemi di scelta tramite disequazioni di primo grado.

Ho introdotto l'argomento servendomi del *Do now*, nel quale ho proposto ai ragazzi un problema di scelta, chiedendogli di impostarne la risoluzione senza risolverlo:



DO NOW!!

Indicando con x il numero di ore formalizza il seguente problema tramite un'espressione matematica. NON risolvere il problema.

Carlo vuole prendere lezioni di inglese. Per questo contatta due diverse scuole: la prima chiede una quota di iscrizione di 100 euro e un contributo di 3 euro a lezione; la seconda chiede una quota di iscrizione di 80 euro e un contributo di 5 euro a lezione

Quando il costo sostenuto con la prima scuola sarà inferiore al costo sostenuto con la seconda scuola?

Hai 7 minuti a disposizione

Figura 3.7. Diapositiva proiettata alla classe tramite la LIM

Terminato il tempo concesso per rispondere al quesito del *Do now*, è seguita una discussione sulla modalità in cui ogni ragazzo ha impostato il problema e gli è stato

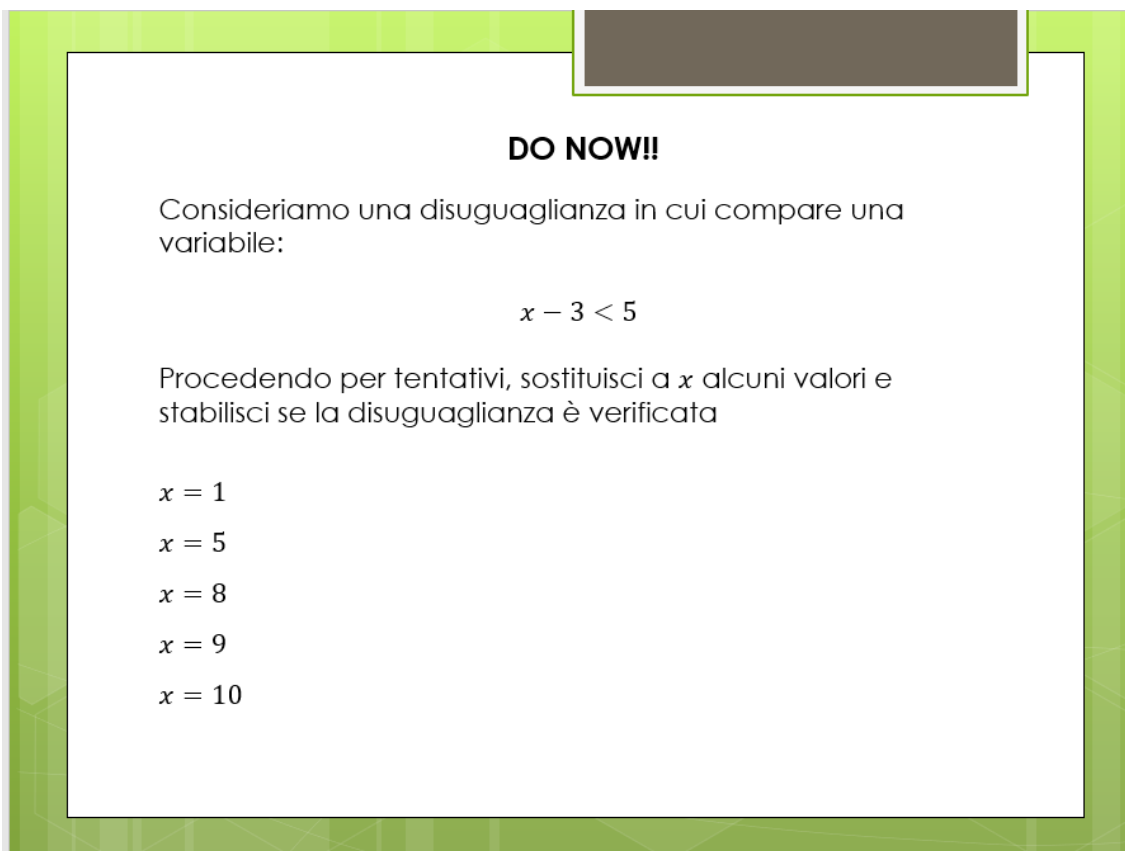
chiesto di esplicitare il ragionamento che ha portato ciascuno di loro a dare la propria risposta. Infine, abbiamo elaborato insieme l'impostazione del problema, data dalla seguente disequazione:

$$100 + 3x < 80 + 5x.$$

Prima di passare alla risoluzione della disequazione abbiamo ripreso il concetto di disuguaglianza, concentrandoci sul significato della parola stessa e sul significato dei simboli matematici utilizzati per definire la disuguaglianza ($\neq, <, >, \leq, \geq$) e sulle proprietà di cui godono le disuguaglianze.

Per questa attività sono state impiegate due ore.

La lezione successiva, mira alla risoluzione delle disequazioni di primo grado. Ho scelto di far comprendere agli studenti, attraverso esercizi e domande mirate, il significato di soluzione di una disequazione, rappresentato da un intervallo di numeri reali, e la differenza con la soluzione (unica) di una disequazione. Anche questa volta mi sono servita del *Don now* per introdurre l'argomento



DO NOW!!

Consideriamo una disuguaglianza in cui compare una variabile:

$$x - 3 < 5$$

Procedendo per tentativi, sostituisci a x alcuni valori e stabilisci se la disuguaglianza è verificata

$x = 1$
 $x = 5$
 $x = 8$
 $x = 9$
 $x = 10$

Figura 3.8. Diapositiva proiettata alla classe tramite la LIM

Al *Do now* è seguita la domanda “*Per quali valori di x è vera la disuguaglianza?*” allo scopo di far comprendere ai ragazzi che la disequazione può ammettere un insieme di soluzioni.

Successivamente, ho spiegato quanti e quali sono i modi in cui può essere rappresentato l'insieme delle soluzioni di una disequazione. Infine, ho spiegato il procedimento di risoluzione delle disequazioni attraverso i principi di equivalenza e facendo vedere loro le analogie e le differenze con il procedimento di risoluzione delle equazioni di primo grado.

A questa lezione introduttiva è seguita una lezione di esercitazione dove sono stati proposti esercizi di risoluzione immediata e problemi di realtà come il seguente:

“Il noleggio di un furgone per un trasloco ha un costo fisso di € 70,00. Superata la soglia dei 100 km, alla tariffa vengono aggiunti € 0,80 al km. Avendo a disposizione € 90,00 quanti chilometri si possono percorrere al massimo?”

Pertanto, sono servite quattro ore di lezione per trattare e consolidare la risoluzione delle disequazioni di primo grado.

Per introdurre la risoluzione dei sistemi di disequazioni ho proposto alla classe di provare a risolverne uno.

Prova a risolvere il seguente sistema di disequazioni di primo grado:

$$\begin{cases} x + 4 > 0 \\ x - 3 > 0 \end{cases}$$

Figura 3.9. Diapositiva proiettata alla classe tramite la LIM

I ragazzi hanno cominciato meccanicamente a risolvere l'esercizio come se fosse un sistema lineare, esplicitando quindi la variabile x in entrambe le disequazioni, per poi notare che la variabile di cui ricercare il valore è una sola e non due come succede per le equazioni. Allora hanno esposto diverse ipotesi risolutive, tra cui quella di sostituire, nella prima equazione, al valore dell'incognita l'espressione ricavata dall'esplicitazione dell'incognita nella seconda disuguaglianza.

Così, attraverso tentativi ed errori, si è arrivati alla conclusione che in un sistema di disequazioni queste vanno risolte separatamente, per poi confrontarne l'insieme delle soluzioni. A questa lezione ne è seguita una di esercitazione per un totale di quattro ore di lezione.

Analogamente alla risoluzione dei sistemi di disequazioni è stata trattata la risoluzione delle disequazioni fratte.

Come è facilmente osservabile, l'unità sulle disequazioni contiene molti elementi di teoria e di astrazione tipici della matematica, ma questi sono stati trattati ponendo domande agli studenti e facendoli ragionare sulle soluzioni proposte, lasciandoli liberi di provare e di sbagliare. In questo modo ho permesso loro di scoprire la risoluzione, partendo, però, dal ragionamento di ognuno e guidandolo in modo che questo potesse comunque arrivare al raggiungimento dell'obiettivo dell'unità didattica.

Riporto la verifica relativa all'argomento e la sua griglia di correzione.

Nome e Cognome: _____

Data: _____

VERIFICA DI MATEMATICA

Classe LA2

ESERCIZIO 1.

Risolvi le seguenti disequazioni di primo grado.

a) $3x - 2 > 4x + 1$

b) $4 - 5(x - 1) < 1 - 2(x + 2)$

c) $(2x - 1)^2 + (2x + 1)^2 \leq (1 - 2x)^2 + (-2x - 1)^2 + 10$

d) $\frac{1}{5}x - \frac{x-1}{2} \leq \frac{1}{15}x - \frac{1}{10}$

e) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq (x + 2)(x - 2) - (x + 1)(x - 3)$

ESERCIZIO 2.

Risolvi i seguenti sistemi di equazioni:

1. $\begin{cases} 6x - 3 < 2x + 1 \\ 4x + 4 \leq x - 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 1 > 2x - 3 \\ 4x - 6 \leq 3x - 10 \end{cases}$

ESERCIZIO 3.

Risolvi la seguente equazione fratta

$$\frac{x}{4x - 12} \leq \frac{x + 1}{2x - 6} + \frac{1}{12}$$

ESERCIZIO 4.

Risolvi il seguente problema

Luca ha avuto 76, 78, 79, 81 nei primi 4 test; quando deve prendere all'ultimo per avere una media superiore a 80?

Figura 3.10. Verifica sulle disequazioni di primo grado proposta alla classe LA2

GRIGLIA DI CORREZIONE

GRIGLIA DI CORREZIONE MATEMATICA	gravemente insufficiente (3-4)	insufficiente (5-5,5)	contenuti sufficienti, molti errori (6-6,5)	qualche errore più o meno grave non di sostanza (7- 8)	buono- ottimo (8,5- 10)
Effettua le operazioni con i numeri reali					
Applica i principi di equivalenza delle disequazioni					
Risolve disequazioni di primo grado					
Risolve sistemi di disequazioni di primo grado					
Risolve disequazioni fratte					
Risolve problemi di realtà con l'uso delle disequazioni					

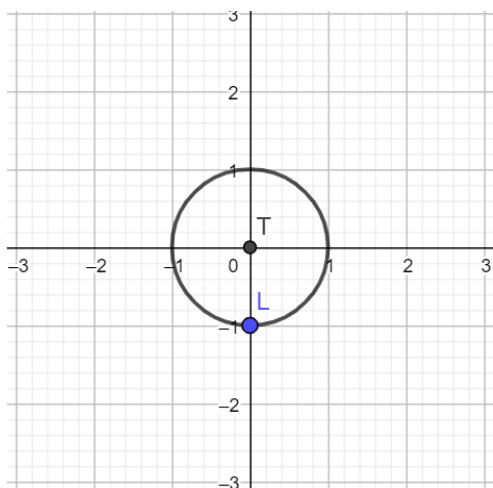
Figura 3.11. Griglia di correzione

Nel terzo esempio riporto la trattazione dell'Unità 2 di Algebra del primo bimestre del terzo anno di Liceo Artigianale: la circonferenza.

I prerequisiti sono: saper operare nel piano cartesiano, saper operare con i numeri reali, conoscere l'equazione generale di una conica, saper operare con la parabola.

Gli obiettivi sono: saper ricavare l'equazione di una circonferenza e saperla rappresentare graficamente, saper riconoscere le posizioni reciproche tra una circonferenza e una retta e tra due circonferenze, saper operare con i fasci di circonferenze, modellizzare situazioni reali attraverso l'equazione della circonferenza.

Ho introdotto l'argomento utilizzando un problema sulla Luna per incuriosire gli studenti e per avvicinarli a quello che sarà il tema della commessa. Il problema è il seguente:



“Nella figura a fianco è rappresentata una approssimazione circolare dell’orbita della Luna. Considerando la Terra al centro degli assi cartesiani (T) e la Luna corrispondente al punto L, determina:

- *Le coordinate dei punti T e L;*
- *La misura del raggio dell’orbita della Luna*
- *L’equazione dell’orbita.”*

Figura 3.12. Immagine rappresentativa dell’esercizio proposto alla classe

Gli studenti non sono a conoscenza delle formule per ricavare l'equazione di una circonferenza, pertanto il problema posto è una sfida che gli permette di mettersi in gioco, di provare senza avere la paura di sbagliare, di andare per tentativi e perché no, di raggiungere l'obiettivo.

La classe terza era composta di soli 7 alunni e i banchi erano disposti a formare un grande tavolo comune di lavoro, per questo spesso li lasciavo liberi di interagire tra loro, senza la “forzatura” del gruppo.

I ragazzi sono stati in grado di soddisfare le prime due richieste in maniera veloce e precisa ma, come mi aspettavo, si sono trovati in difficoltà nel dare una risposta al terzo quesito. Per tentativi e cercando le analogie con l'equazione della parabola e dall'equazione generale di una conica, abbiamo ricavato l'equazione di una circonferenza di centro l'origine degli assi cartesiani e di raggio unitario:

$$x^2 + y^2 = 1$$

E la sua generalizzazione a equazione di una circonferenza di centro l'origine e raggio r :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

A questo punto ho introdotto la definizione di circonferenza come luogo geometrico dei punti equidistanti dal centro $C(x_0; y_0)$ e l'equazione di una generica circonferenza di centro C e raggio r :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Per questa lezione introduttiva sono state necessarie due ore.

Nella lezione successiva, a partire dall'equazione generica di una circonferenza, ho chiesto ai ragazzi di svolgere i calcoli, facendo trovare loro l'equazione della circonferenza nella sua forma canonica

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

E ho proposto loro alcuni esercizi di rapida risoluzione per consolidare quanto appreso.

Infine, per completare l'argomento ho proposto loro il seguente esercizio:

“Rappresenta graficamente la circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0”$$

In questo modo, gli studenti si sono confrontati con la loro attitudine nell'invertire i procedimenti per poter ottenere le coordinate del centro e la misura del raggio della circonferenza in questione. Abbiamo, così, ricavato le formule che permettono di ricavare le coordinate del centro e la misura del raggio conoscendo l'equazione canonica della circonferenza:

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right) \quad r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c}$$

Queste attività hanno richiesto due lezioni di due ore. Come è possibile osservare, per ognuna delle lezioni fin qui presentate, non ho utilizzato la lezione frontale, ma tutte le equazioni e le formule sono state ricavate dagli studenti. Sicuramente il tempo impiegato è superiore ma, gli studenti in questo modo, hanno fatto già una buona porzione di pratica e facendo la fatica di ricavare tutto ciò di cui hanno avuto bisogno per risolvere i quesiti proposti, hanno memorizzato molto più velocemente formule ed equazioni.

Nella lezione successiva ho trattato le posizioni reciproche tra circonferenza e retta ricordando loro l'analogia con le posizioni reciproche tra circonferenza e parabola. In questo modo, gli studenti sono stati in grado di impostare il sistema, risolverlo ed individuare le possibili posizioni reciproche (retta esterna alla circonferenza, retta secante la circonferenza, retta tangente la circonferenza).

In modo analogo ho presentato le posizioni reciproche tra due circonferenze e i fasci di circonferenze.

Al termine della trattazione dell'unità didattica tutti gli studenti erano in grado di operare con la circonferenza.

La verifica dell'unità didattica è coincisa con l'esame di fine bimestre, esame integrato di matematica e fisica, che riporto di seguito con la relativa griglia di correzione.

ESAME DI MATEMATICA E FISICA

La distanza media fra la Terra e il Sole è di 150 milioni di km = 1 UA (Unità Astronomica).

- [MAT] Immagina di porre il Sole al centro di un sistema di assi cartesiani: scrivi l'equazione dell'orbita della Terra nell'approssimazione di traiettoria circolare.
- [MAT] Rappresenta in un piano cartesiano l'orbita della Terra data dall'equazione che hai ricavato al punto precedente.
- [MAT] Considera di porre la Luna al punto $(-3; 2)$ del piano cartesiano. Ricava l'equazione della retta che unisce il Sole e la Luna.
- [MAT, FIS] In quale punto dell'orbita deve trovarsi la Terra perché si verifichi un'eclisse di Luna?
- [MAT] Completa il grafico cartesiano rappresentando la situazione dell'eclisse.

- [MAT, FIS] L'equazione dell'orbita di un pianeta ignoto è: $x^2 + y^2 + 4x + 6y + 9 = 0$
 Individua di quale pianeta si tratta, basandoti sulla seguente tabella:

pianeta	distanza media (u.a.)	afelio (ua)	perielio (ua)
Venere	0,7	0,65	1,15
Marte	1,5	1	2
Terra	1	0,7	1,3
Cerere (pianeta nano)	2	1,7	2,3
Giove	5	4,2	5,8
Saturno	10	9,5	10,5
Urano	19	18	20
Nettuno	30	27	33
Plutone	39	37	41

- [FIS] Calcola la velocità orbitale della Terra attorno al Sole (nell'approssimazione di traiettoria circolare) in km/s.
- [FIS] Calcola la velocità angolare della Terra attorno al Sole (nell'approssimazione di traiettoria circolare) in °/s o rad/s.
- [FIS] Calcola l'energia cinetica posseduta dalla Terra nel suo moto di rivoluzione.
- [FIS] Quali evidenze, nella vita di tutti i giorni, fanno sì che si debba considerare errata un'interpretazione secondo cui l'orbita della Terra sia circolare?
- [FIS] Immagina che un asteroide di massa pari a un decimo della massa della Terra e avente velocità $v = 75$ km/s impatti contro la Terra (considera la Terra ferma in questo sistema di riferimento). Nell'approssimazione di urto elastico, la Terra risentirà dell'urto?

Figura 3.13. Esame di fine I bimestre proposto alla classe LA3

Griglia di correzione

INDICATORI	DESCRITTORI	PUNTEGGI	
		<i>massimo</i>	<i>conseguito</i>
Conoscenza specifica della disciplina	REGOLE	1	
	METODI E PROCEDURE	1	
Competenza nell'applicazione di concetti e procedure	UTILIZZAZIONE DI CONOSCENZE, REGOLE E PROCEDURE IN CONTESTI OPERATIVI SEMPLICI.	2	
Correttezza dello svolgimento	CORRETTEZZA NEI CALCOLI	1,25	
	CORRETTEZZA NEI PROCEDIMENTI	1,25	
Completezza della risoluzione	RISPETTO DELLA CONSEGNA	1,5	
Capacità logiche	ORGANIZZAZIONE ED UTILIZZAZIONE DELLE CONOSCENZE	1	
	CAPACITA' DI ANALISI	1	
Punteggio totale		10	

Figura 3.14. Griglia di correzione

3.2 La matematica al professionale

La scuola Oliver Twist di Cometa Formazione nasce come Istituto di Formazione Professionale. Attualmente comprende tre percorsi: Corso di Falegnameria, Corso Tessile, Corso Sala Bar e Ristorazione. I corsi sono di durata triennale, che permettono il conseguimento del titolo di Qualifica professionale di operatore, ai quali può essere aggiunto il quarto anno, che permette il conseguimento del titolo di Diploma professionale di tecnico. Ciascun percorso è organizzato come una vera e propria “Bottega Artigianale” in cui i ragazzi acquisiscono competenze e abilità in assetto lavorativo.

L’orario annuale delle lezioni (Figura 3.15) è costituito da 990 ore, delle quali, dedicate alla matematica, sono 132 per gli studenti del primo anno e 99 per gli studenti del secondo e terzo anno (ad eccezione del corso di falegnameria, in cui alla matematica sono dedicate 99 ore anche al primo anno).

Durante il primo anno, gli studenti svolgono l’alternanza formativa solo all’interno della scuola attraverso la *job rotation*: una volta alla settimana, ogni classe svolge attività lavorativa nei laboratori interni alla scuola seguiti e accompagnati dal tutor di classe e dal tutor di laboratorio.

A partire dal secondo anno, ogni allievo svolgerà il tirocinio direttamente in azienda. Il tirocinio ha la durata di circa due mesi, durante i quali è previsto un giorno di rientro settimanale a scuola in cui, con l’aiuto degli insegnanti, i ragazzi possono fare il punto della situazione circa le competenze apprese durante la settimana lavorativa riguardanti le diverse discipline. Anche durante il tirocinio nelle aziende del territorio, gli studenti saranno seguiti dal tutor di classe e dal tutor aziendale. Quest’ultimo, alla fine del percorso, darà una valutazione sulle attività svolte dall’allievo durante il suo percorso sottolineando i punti di forza e di debolezza mostrati in modo tale da permettere al ragazzo e alla scuola di lavorare per migliorarsi personalmente e professionalmente.

Area	Competenze	I anno	II anno	III anno
Insegnamenti di base	• Economia / Diritto	0	2	2
	• Religione	1	1	1
	• Italiano, Letteratura, Storia	4	4	4
	• Matematica	4	3	3
	• Inglese	3	3	3
	• Informatica	1	0	0
	• Ed. Motoria	2	2	1
Materie Tecnico professionali	• Laboratorio Arte	2	0	0
	• Sicurezza	1	0	0
	• Job Rotation	7	7	7
	• Scienze Alimentari	2	2	2
	• Legisl. igie-sanitaria	3	2	1
	• Enologia	0	0	2
Unità formativa STAGE	• Stage e Valutazione	0	4	4
TOTALE	Ore/Settimanali* 33 settimane	30 990	30 990	30 990

Figura 3.15 Orario settimanale delle lezioni

Ancora prima di insegnare agli studenti i contenuti della disciplina, emerge la necessità di far cogliere loro l'utilità e il senso di ciò che gli viene presentato. L'esercizio è considerato uno strumento di allenamento per lo sviluppo ed il consolidamento delle conoscenze, abilità e competenze che il singolo studente può raggiungere. È necessario prestare attenzione al processo di apprendimento del singolo per poter garantire il raggiungimento degli obiettivi prefissati. L'insegnamento della matematica passa, così, attraverso l'alternanza formativa, nello specifico, attraverso il compito lavorativo che lo studente è chiamato a svolgere. L'insegnante ha il compito di accompagnare lo studente nel proprio percorso di apprendimento e di aiutarlo a comprendere l'importanza di quel determinato sapere per lo svolgimento del proprio lavoro.

3.2.2 Dal fare al sapere: la commessa

La commessa è un compito lavorativo reale assegnato agli studenti di ogni classe da un committente esterno alla scuola. In questo modo, gli studenti hanno modo di rapportarsi con il mondo del lavoro già dai primi giorni di scuola e possono così sviluppare le competenze trasversali che questo richiede. Per portare a termine la commessa i ragazzi devono ideare, progettare e realizzare il servizio/prodotto desiderato dal committente, seguendo le direttive ricevute e, anche e soprattutto, devono mettere in campo le proprie capacità per creare un prodotto originale e corrispondente alle esigenze del committente.

Alla realizzazione della commessa concorrono tutte le materie e in maniera preponderante le discipline tecnico pratiche di settore. Così, attraverso la necessità di portare a termine un compito lavorativo, gli studenti si rendono conto delle necessità di acquisire determinate abilità e competenze nei vari ambiti disciplinari. Questo aiuta il processo di insegnamento-apprendimento, in quanto genera nell'alunno motivazione ed interesse per l'argomento in questione e una maggiore propensione e predisposizione all'apprendimento. La commessa viene quindi utilizzata come ponte tra lo studente e le discipline, facendo riacquistare il senso e il gusto dell'apprendere che spesso, in classe, si perde.

3.2.3 La progettazione didattica e i riferimenti agli OSA

Nelle “Linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento” (d.P.R. 15 marzo 2010, n. 87, articolo 8, comma 6)³⁷⁰ si legge:

“I nuovi istituti professionali sono caratterizzati da un riferimento prioritario ai grandi settori in cui si articola il sistema economico nazionale, contraddistinti da applicazioni tecnologiche e organizzative che, in relazione alla filiera di riferimento, possono essere declinate in base alla vocazione del territorio, ai progetti di sviluppo locale e ai relativi fabbisogni formativi. Gli elementi distintivi che caratterizzano gli indirizzi dell'istruzione professionale all'interno del sistema dell'istruzione secondaria superiore si basano, dunque, sull'uso di tecnologie e metodologie tipiche dei diversi contesti applicativi; sulla capacità di rispondere efficacemente alla crescente domanda di personalizzazione dei prodotti e dei servizi, che è alla base del successo di molte piccole e medie imprese del made in Italy; su una cultura del lavoro che si fonda sull'interazione con i sistemi produttivi territoriali e che richiede l'acquisizione di una base di apprendimento polivalente, scientifica, tecnologica ed economica. L'integrazione con il territorio e il mondo produttivo non è solo un metodo di lavoro, è un fattore imprescindibile per l'elaborazione del piano dell'offerta formativa degli istituti professionali. [...]

³⁷⁰ [\(Microsoft Word - LINEE GUIDA ISTITUTI PROFESSIONALI ultima revisione dopo \205\) \(indire.it\)](#)

Tre parole-chiave possono aiutare a sintetizzare i riferimenti progettuali per articolare l'offerta formativa in modo da rispondere ad una pluralità di bisogni: menti d'opera, professionalità e laboratorialità. [...]

In questo quadro, orientato al raggiungimento delle competenze richieste dal mondo del lavoro e delle professioni, le discipline mantengono la loro specificità e sono volte a far acquisire agli studenti i risultati di apprendimento indicati dal Regolamento, ma è molto importante che i docenti scelgano metodologie didattiche coerenti con l'impostazione culturale dell'istruzione professionale e capaci di realizzare il coinvolgimento e la motivazione all'apprendimento degli studenti. Sono assai opportuni, quindi, l'utilizzo di metodi induttivi, di metodologie partecipative, un'intensa e diffusa didattica di laboratorio, da estendere anche alle discipline dell'area di istruzione generale. In particolare, è utile l'uso diffuso delle tecnologie dell'informazione e della comunicazione, il ricorso a metodologie progettuali e alle opportunità offerte dall'alternanza scuola-lavoro per sviluppare il rapporto col territorio e utilizzare a fini formativi le risorse disponibili. [...]

I percorsi degli istituti professionali si caratterizzano per l'integrazione tra una solida base di istruzione generale e la cultura professionale che consente agli studenti di sviluppare i saperi e le competenze necessari ad assumere ruoli tecnici operativi nei settori produttivi e di servizio di riferimento, considerati nella loro dimensione sistemica. Nella progettazione dei percorsi assumono particolare importanza le metodologie che valorizzano, a fini orientativi e formativi, le esperienze di raccordo tra scuola e mondo del lavoro, quali visite aziendali, stage, tirocini, alternanza scuola lavoro. Tali attività permettono di sperimentare una pluralità di soluzioni didattiche per facilitare il collegamento con il territorio e personalizzare l'apprendimento mediante l'inserimento degli studenti in contesti operativi reali.”³⁷¹

Per quanto riguarda l'asse matematico nel D.M. 139/2007 Fioroni, si legge:

³⁷¹ [\(Microsoft Word - LINEE GUIDA ISTITUTI PROFESSIONALI ultima revisione dopo \205\) \(indire.it\)](#)

“L’asse matematico ha l’obiettivo di far acquisire allo studente saperi e competenze che lo pongano nelle condizioni di possedere una corretta capacità di giudizio e di sapersi orientare consapevolmente nei diversi contesti del mondo contemporaneo.

La competenza matematica, che non si esaurisce nel sapere disciplinare e neppure riguarda soltanto gli ambiti operativi di riferimento, consiste nell’abilità di individuare e applicare le procedure che consentono di esprimere e affrontare situazioni problematiche attraverso linguaggi formalizzati.

La competenza matematica comporta la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (dialettico e algoritmico) e di rappresentazione grafica e simbolica (formule, modelli, costrutti, grafici, carte), la capacità di comprendere ed esprimere adeguatamente informazioni qualitative e quantitative, di esplorare situazioni problematiche, di porsi e risolvere problemi, di progettare e costruire modelli di situazioni reali. Finalità dell’asse matematico è l’acquisizione al termine dell’obbligo d’istruzione delle abilità necessarie per applicare i principi e i processi matematici di base nel contesto quotidiano della sfera domestica e sul lavoro, nonché per seguire e vagliare la coerenza logica delle argomentazioni proprie e altrui in molteplici contesti di indagine conoscitiva e di decisione.”³⁷²

Vengono inoltre definite le competenze di base da raggiungere al termine del percorso che, a loro volta, vengono suddivise in capacità e conoscenze. Riporto la tabella delle competenze:

³⁷² [Articolazione delle competenze \(indire.it\)](#), p. 15

Competenze	Abilità/capacità	Conoscenze
<p>Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Comprendere il significato logico-operativo di numeri appartenenti ai diversi sistemi numerici. Utilizzare le diverse notazioni e saper convertire da una all'altra (da frazioni a decimali, da frazioni apparenti ad interi, da percentuali a frazioni..); • Comprendere il significato di potenza; calcolare potenze e applicarne le proprietà. • Risolvere brevi espressioni nei diversi insiemi numerici; rappresentare la soluzione di un problema con un'espressione e calcolarne il valore anche utilizzando una calcolatrice. • Tradurre brevi istruzioni in sequenze simboliche (anche con tabelle); risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici. • Comprendere il significato logico-operativo di rapporto e grandezza derivata; impostare uguaglianze di rapporti per risolvere problemi di proporzionalità e percentuale; risolvere 	<ul style="list-style-type: none"> • Gli insiemi numerici N, Z, Q, R; rappresentazioni, operazioni, ordinamento. • I sistemi di numerazione • Espressioni algebriche; principali operazioni. • Equazioni e disequazioni di primo grado. • Sistemi di equazioni e disequazioni di primo grado.

	<p>semplici problemi diretti e inversi</p> <ul style="list-style-type: none"> • Risolvere equazioni di primo grado e verificare la correttezza dei procedimenti utilizzati. • Rappresentare graficamente equazioni di primo grado; comprendere il concetto di equazione e quello di funzione • Risolvere sistemi di equazioni di primo grado seguendo istruzioni e verificarne la correttezza dei risultati. 	
<p>Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con linguaggio naturale • individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete • Disegnare figure geometriche con semplici tecniche grafiche e operative • Applicare le principali formule relative alla retta e alle figure geometriche sul piano cartesiano • In casi reali di facile leggibilità risolvere problemi di tipo geometrico, e ripercorrerne le procedure di soluzione 	<ul style="list-style-type: none"> • Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini: assioma, teorema, definizione. • Il piano euclideo: relazioni tra rette; congruenza di figure; poligoni e loro proprietà. • Circonferenza e cerchio • Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora. • Teorema di Talete e sue conseguenze • Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano. • Interpretazione geometrica dei sistemi di equazioni. • Trasformazioni geometriche elementari e loro invarianti

	<ul style="list-style-type: none"> • Comprendere i principali passaggi logici di una dimostrazione 	
Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi	<ul style="list-style-type: none"> • Progettare un percorso risolutivo strutturato in tappe • Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici • Convalidare i risultati conseguiti sia empiricamente, sia mediante argomentazioni • Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa 	<ul style="list-style-type: none"> • Le fasi risolutive di un problema e loro rappresentazioni con diagrammi • Principali rappresentazioni di un oggetto matematico. • Tecniche risolutive di un problema che utilizzano frazioni, proporzioni, percentuali, formule geometriche, equazioni e disequazioni di 1° grado.
Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.	<ul style="list-style-type: none"> • Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati. • Rappresentare classi di dati mediante istogrammi e diagrammi a torta. • Leggere e interpretare tabelle e grafici in termini di corrispondenze fra elementi di due insiemi. • Riconoscere una relazione tra variabili, in termini di proporzionalità diretta o inversa e formalizzarla attraverso una funzione matematica. <ul style="list-style-type: none"> • Rappresentare sul 	<ul style="list-style-type: none"> • Significato di analisi e organizzazione di dati numerici. • Il piano cartesiano e il concetto di funzione. • Funzioni di proporzionalità diretta, inversa e relativi grafici, funzione lineare. • Incertezza di una misura e concetto di errore. • La notazione scientifica per i numeri reali. • Il concetto e i metodi di approssimazione

	piano cartesiano il grafico di una funzione.	
	<ul style="list-style-type: none"> • Valutare l'ordine di grandezza di un risultato. • Elaborare e gestire semplici calcoli attraverso un foglio elettronico • Elaborare e gestire un foglio elettronico per rappresentare in forma grafica i risultati dei calcoli eseguiti 	<ul style="list-style-type: none"> • i numeri "macchina" • il concetto di approssimazione • semplici applicazioni che consentono di creare, elaborare un foglio elettronico con le forme grafiche corrispondenti

Figura 3.16. Tavola delle competenze di base dell'asse matematico a conclusione dell'obbligo di istruzione³⁷³

3.2.4 Esempi di apprendimento della matematica attraverso l'alternanza formativa

All'interno dei percorsi di formazione professionale presenti in Cometa, non ho avuto l'opportunità di insegnare con continuità in uno o più dei tre indirizzi. Per questo motivo ho scelto di riportare esempi di attività svolte dai miei colleghi di indirizzo.

Ho scelto, inoltre, di riportare la trattazione di un solo argomento dei corsi di formazione professionale e di analizzare come questo è stato introdotto nei tre settori, a partire dall'esperienza.

L'argomento scelto fa parte della competenza "*Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni*" ed in particolare la conoscenza del perimetro e dell'area dei poligoni.

Corso di Falegnameria.

Per introdurre il calcolo delle aree agli studenti del primo anno di falegnameria è stato proposto di calcolare l'area complessiva del tavolo riportato nella figura sottostante, informazione utile nel caso in cui si voglia decorare il tavolo.

³⁷³ [Articolazione delle competenze \(indire.it\)](#), cit. pp. 16-19

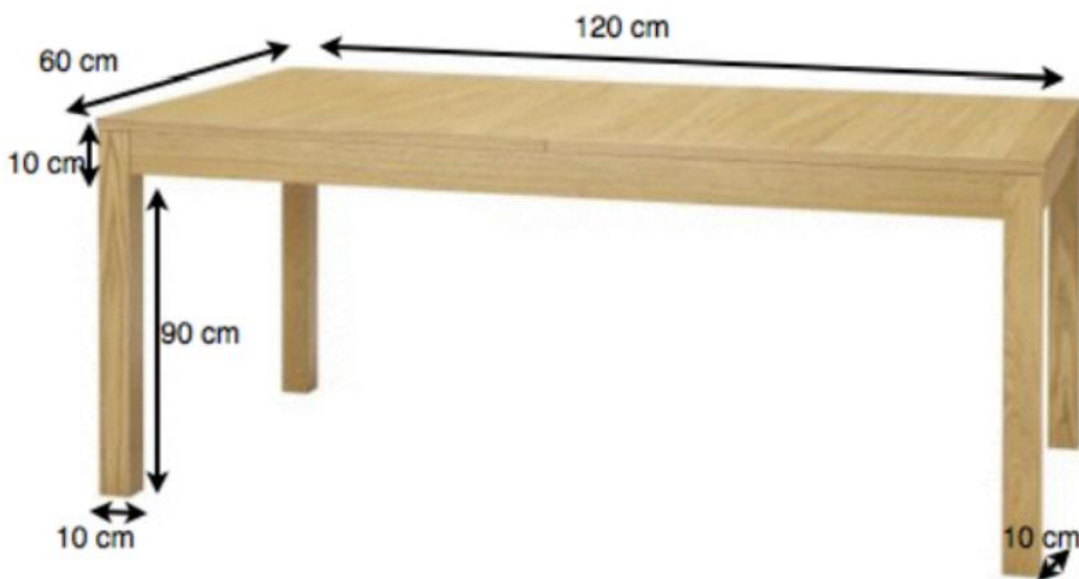


Figura 3.17. Immagine esemplificativa dell'oggetto di cui calcolare l'area³⁷⁴

Questo tipo di attività richiede una certa dimestichezza con il calcolo delle aree e la scomposizione di figure.

Gli studenti, alle prime armi, comprendono la complessità del compito assegnato e cercano come prima cosa di scomporre il tavolo in più parti, lasciandosi aiutare dalle dimensioni riportate in figura. Questa attività richiede la conoscenza dell'equiscomponibilità delle figure piane.

Questo lavoro è stato svolto in gruppi. La difficoltà principale è stata quella di far comprendere agli studenti come la tridimensionalità del tavolo influisce sul calcolo della sua superficie totale.

Successivamente, prima di passare al calcolo dell'area (argomento non nuovo per loro, in quanto fa parte del programma di geometria piana della scuola secondaria di primo grado), è stato necessario riprendere, attraverso domande ed esempi, il concetto di area e le formule del calcolo dell'area del rettangolo e del quadrato.

Solo dopo aver accertato la conoscenza e la padronanza dei suddetti elementi si è passati ad operare sul tavolo. Sempre divisi in gruppi, i ragazzi sono stati lasciati liberi di provare e sperimentare il metodo per loro più semplice, veloce e intuitivo per poter calcolare l'area

³⁷⁴ G. Sinatra, *Dal Fare al Sapere: il ponte della matematica*, Tesi di Dottorato, Università degli studi di Bergamo, a.a. 2013/14, relatore Chiarissimo prof. G. Bertagna, p. 46

del tavolo. Al termine del tempo concesso, si è passati alla presentazione alla classe del lavoro svolto e alla discussione circa le strategie utilizzate.

A questa, sono seguite attività analoghe per il calcolo dell'area delle altre figure piane e per il calcolo delle formule inverse dell'area.

Con questo tipo di lavoro, gli studenti, si rendono conto immediatamente dell'utilità, nel loro campo lavorativo, di essere in possesso del sapere richiesto dall'insegnante. Per quanto per loro possa essere difficile raggiungere l'obiettivo, sono motivati a farlo perché consapevoli che l'acquisizione di determinate conoscenze li faciliterà nel lavoro per il quale hanno scelto di frequentare il Corso di Falegnameria.

Corso Tessile. Il calcolo delle aree nel settore Tessile si affronta al secondo anno. Per presentarlo è stato chiesto agli studenti di calcolare la superficie di stoffa necessaria per poter rivestire il cuscino di una poltrona.



Figura 3.18. Immagine esemplificativa dell'oggetto di cui calcolare l'area

Anche in questo caso la figura va scomposta nei rettangoli che la compongono e quindi anche questa attività richiede la conoscenza del concetto di equiscomponibilità. Inoltre, per rivestire un cuscino non basta ritagliare un pezzo di stoffa che abbia la stessa superficie del cuscino, ma bisogna aggiungere 2 cm di stoffa in corrispondenza delle cuciture, in modo da poter cucire l'orlo del cuscino.

Per l'attività, gli studenti sono stati suddivisi in gruppo e a ciascun gruppo è stata data la possibilità di misurare le dimensioni del cuscino. Inoltre, sono state fornite delle stoffe pronte ad essere ritagliate.

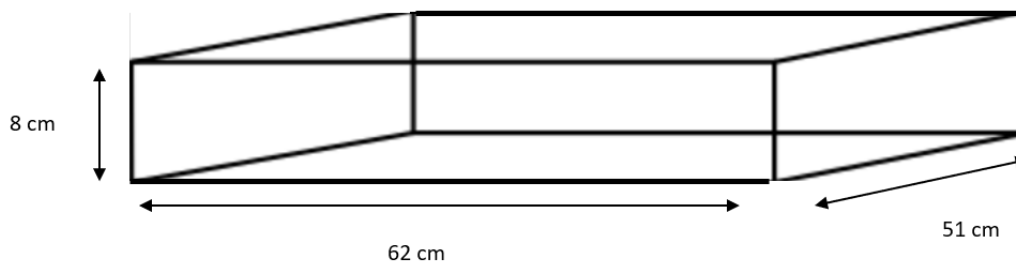


Figura 3.18. Immagine astratta dell'oggetto di cui calcolare l'area

Come per gli studenti del Legno, anche agli studenti del Tessile è stato dato del tempo per individuare di quali e di quante figure piane bisognava calcolare l'area.

Dopo aver effettuato questo passaggio, sono stati ripresi il concetto di area e il calcolo dell'area di un rettangolo. A questo punto è stato chiesto ai ragazzi di calcolare l'area totale della stoffa da ritagliare per poter rivestire il cuscino. La quasi totalità dei gruppi, e quindi degli studenti, non ha aggiunto centimetri nel calcolo delle aree, qualcuno li ha aggiunti a calcolo terminato.

A questo punto è stato chiesto loro di tagliare la stoffa e imbastire il rivestimento del cuscino. È stato durante questo passaggio, che i ragazzi si sono accorti dell'errore, perché il rivestimento risultava "corto".

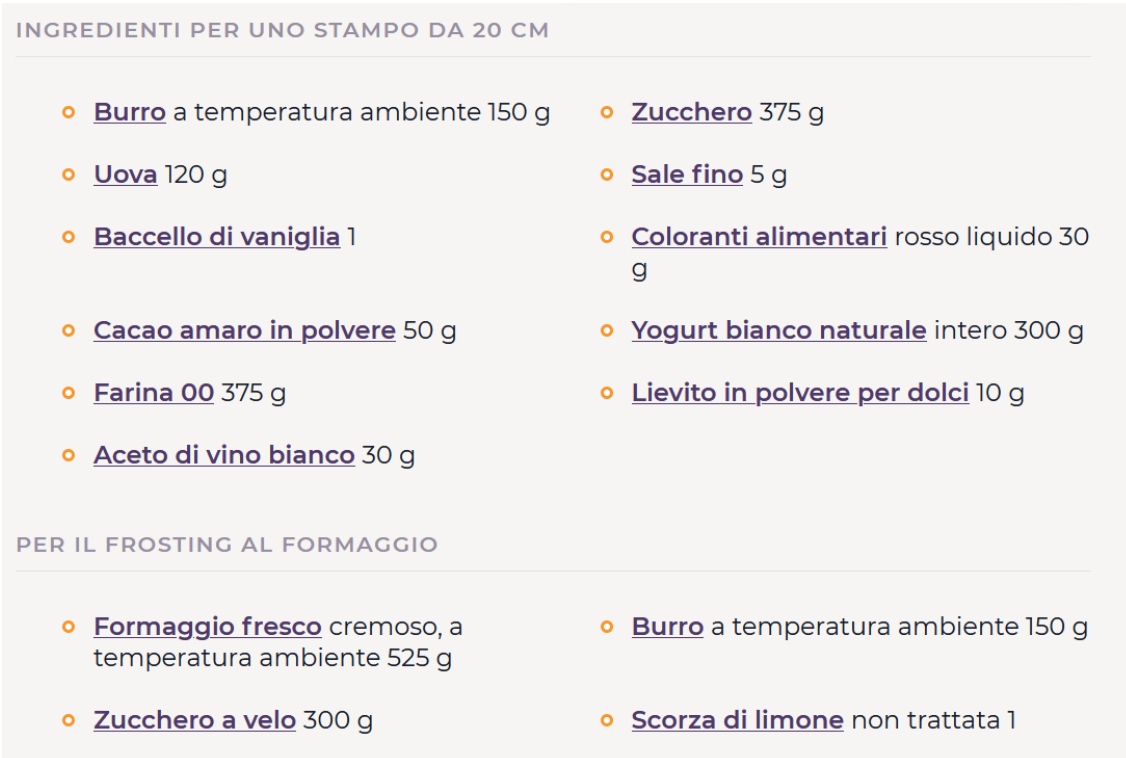
Insieme all'insegnante tecnico è stato spiegato loro il motivo della non riuscita dell'esercizio. L'insegnante tecnico ha esposto le motivazioni per le quali risulta necessario aggiungere dei centimetri di stoffa nel calcolo dell'area totale del rivestimento per permettere di poter rifinire l'orlo.

Si è concordato di aggiungere 2 cm in corrispondenza delle cuciture e a questo punto i ragazzi hanno ricalcolato le aree, ritagliato nuovamente la stoffa e sono stati in grado di imbastire i rivestimenti per il cuscino. È stato necessario guidare gli studenti per far comprendere loro a quali rettangoli aggiungere i 2 cm e le motivazioni che ci sono alla base.

A questa attività ne sono seguite delle analoghe per il calcolo delle aree delle principali figure della geometria piana.

C'è da sottolineare che gli studenti del Tessile sono, in generale, più creativi che tecnici e quindi fanno più fatica in questo tipo di esercitazioni, hanno bisogno di essere più guidati rispetto agli studenti del legno. Anche loro, però, attraverso questo tipo di attività e soprattutto attraverso l'interazione e la collaborazione con i docenti dell'area tecnico professionale, comprendono l'importanza delle conoscenze matematiche anche nel loro percorso di studi e di vita che sembra essere così lontano dal formalismo e dalla tecnicità delle materie scientifiche.

Corso Sala Bar e Ristorazione. Agli studenti del primo anno del corso Sala Bar e Ristorazione il calcolo delle aree è stato presentato in questo modo: è stata proposta la ricetta di una torta, la Red Velvet Cake, le cui dosi sono adatte a realizzare una torta circolare di diametro 20 cm.



INGREDIENTI PER UNO STAMPO DA 20 CM

- **Burro** a temperatura ambiente 150 g
- **Uova** 120 g
- **Baccello di vaniglia** 1
- **Cacao amaro in polvere** 50 g
- **Farina 00** 375 g
- **Aceto di vino bianco** 30 g
- **Zucchero** 375 g
- **Sale fino** 5 g
- **Coloranti alimentari** rosso liquido 30 g
- **Yogurt bianco naturale** intero 300 g
- **Lievito in polvere per dolci** 10 g

PER IL FROSTING AL FORMAGGIO

- **Formaggio fresco** cremoso, a temperatura ambiente 525 g
- **Zucchero a velo** 300 g
- **Burro** a temperatura ambiente 150 g
- **Scorza di limone** non trattata 1

Figura 3.19. Ricetta Red Velvet Cake³⁷⁵

³⁷⁵ <https://ricette.giallozafferano.it/Red-Velvet-Cake.html>

Il problema posto è il seguente:

“Per un evento, è necessario realizzare la stessa torta ma di dimensioni e forma diverse; in particolare è richiesta una torta rettangolare di dimensioni 60×100 . Come si fa?”

Per prima cosa, è stato necessario fisare l'altezza delle torte per riuscire a lavorare solo con le basi, e quindi, con le figure piane. L'altezza è stata fissata a 5 cm che, in generale, rappresenta l'altezza media delle torte.

Per risolvere il problema presentato è necessario impostare delle proporzioni di questo tipo:

quantità ingrediente teglia circolare: superficie teglia circolare = x: superficie teglia rettangolare

Dove x rappresenta l'incognita che è, appunto, la quantità di ingrediente necessaria per la teglia rettangolare.

Il primo passaggio per risolvere l'esercizio è, quindi, quello di calcolare le aree delle due teglie. Si sono ripresi quindi il concetto di area e le principali formule per il calcolo delle aree dei poligoni, con particolare attenzione all'area del cerchio, che risulta essere più complessa da comprendere per gli studenti.

Per portare a termine il lavoro è stato necessario, ingrediente per ingrediente, risolvere le proporzioni e interpretarne il risultato ottenuto.

Il lavoro svolto è stato molto complesso perché richiedeva l'applicazione simultanea di più conoscenze e competenze, però i ragazzi si sono da subito resi conto dell'importanza delle conoscenze matematiche nel loro lavoro e si sono impegnati duramente per riuscire a portare a termine il lavoro assegnatogli.

In conclusione, quanto riportato sono sicuramente esempi significativi del lavoro svolto in Cometa Formazione ma non esaustivi. Attraverso una revisione costante dei programmi e una collaborazione continua tra i docenti di ogni consiglio di classe si riescono a trovare delle connessioni naturali tra la disciplina e il lavoro tecnico professionale che, senza questo tipo di lavoro, sarebbero impossibili da vedere. Gli studenti si accorgono del pensiero che c'è dietro ogni singola lezione, hanno la percezione che ognuna di esse è stata pensata per loro, per il loro lavoro, per il loro futuro. Per questo

dimostrano impegno e voglia di imparare, di fare. Attraverso questa attività si recupera il senso di ciò che si impara a scuola e aumenta la motivazione nei ragazzi che, in questo modo, sono motivati a raggiungere i piccoli obiettivi della didattica da un obiettivo più grande: svolgere il proprio lavoro in maniera eccellente.

Capitolo 4. Conclusione e sviluppi futuri

Questo lavoro di ricerca è nato dal seguente interrogativo:

Come le metodologie didattiche possono influire sulla motivazione nei giovani alla “fatica” dell’apprendimento di una materia apparentemente astratta e fine a sé stessa come la matematica?

In una realtà come Cometa Formazione, è possibile osservare che questa mancanza di motivazione è presente sia nel percorso liceale, nonostante sia un liceo scientifico e quindi c’è una propensione dello studente per le discipline scientifiche, sia nei percorsi di formazione professionale, in cui è evidente che gli studenti preferiscono le discipline tecnico-pratiche a quelle tradizionali. Creare percorsi che possano essere fonte di motivazione per gli studenti diventa, quindi, una sfida molto interessante.

La risposta è stata quella di cercare e utilizzare metodologie didattiche che facciano comprendere la necessità del sapere matematico attraverso lo studio di situazioni concrete. I risultati ottenuti sono stati significativi:

- Sia per i corsi di istruzione professionale che per il liceo, la scelta di partire da situazioni concrete ha permesso agli studenti di comprendere la necessità di essere in possesso del sapere matematico e di percepirne l’utilità nella vita quotidiana e nel lavoro;
- L’esperienza del “matematizzare” come processo di re-invenzione della realtà, guida l’apprendimento alla ricerca di risposte universali agli interrogativi che nascono all’interno del soggetto stesso e, quindi, alla necessità di utilizzare il metodo scientifico in questa ricerca;
- Le metodologie didattiche utilizzate garantiscono l’apprendimento della disciplina anche agli studenti con Bisogni Educativi Speciali (BES);
- Queste metodologie didattiche permettono una migliore organizzazione del sapere, che non viene visto più come utile solo alla risoluzione di una tipologia di esercizio ma viene utilizzato in diversi contesti reali. Questo permette un

maggiore approfondimento dei temi trattati in quanto sono gli studenti, con le loro domande, a guidare il grado di complessità e di approfondimento con cui viene trattato l'argomento.

Un possibile sviluppo del progetto potrebbe essere la stesura di un manuale per l'insegnamento/apprendimento della matematica nei Licei Scientifici, a partire dalle considerazioni fatte e dagli esempi riportati in questo lavoro. Il testo, basato sull'esperienza del Liceo Artigianale, può diventare un valido esempio di didattica per problemi e progetti e di integrazione tra fare e sapere in modo che la motivazione allo studio delle discipline scientifiche sia accompagnata da un continuo riscontro con la realtà e che i ragazzi riscoprano il piacere dello "studio", inteso come scoperta e arricchimento di sé.

Bibliografia

- AA. VV., *Progetto "m@t.abel. Matematica. Apprendimenti di base con e-learning*, 2006
- AA. VV., *Perché studiare la matematica*, a cura di G. Bolondi, Pearson, Milano, 2012
- AA. VV., *Didattica della matematica*, Mondadori Università, Milano 2018
- Agamben G., *Infanzia e storia. Distruzione dell'esperienza e origine della storia*, Einaudi, Torino, 1998
- Bertagna G., *Valutare tutti valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica*, La Scuola, 2004
- Bertagna G., *Dall'educazione alla pedagogia, avvio al lessico pedagogico e alla teoria dell'educazione*, La Scuola, Brescia, 2010
- Bertagna G., (ed.), *Fare laboratorio. Scenari culturali ed esperienze di ricerca nelle scuole del secondo ciclo*, La Scuola, Brescia, 2012
- Bertagna G., Triani P. (eds.), *Dizionario di Didattica- Concetti e dimensioni operative*, Scholé, 2019
- Bolondi G., Fandiño Pinilla M.I., *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica*, Edises, Napoli, 2016
- Buber M., *Racconti chassidici. I dieci gradini della saggezza*, Red, Como, 1997
- Casartelli G., *"Prof, perché dobbiamo studiare la matematica?" La teoria ortogonale dell'educazione e alcune idee per una nudo-didattica-pudica*, Mimesis Edizioni, Milano, 2020
- Convenzione delle Nazioni Unite sui diritti delle persone con disabilità*, a cura della D'Alonzo L. (ed.), *Dizionario di pedagogia speciale*, Scholé, Brescia, 2019
- D'Amore B., *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna, 1999
- Decreto Legislativo 15 aprile 2005, n. 77, Art. 4
- Dewey J., *Democrazia e educazione* (1916), tr. It. Di E. Enriques Agnoletti e P. Paduano, a cura di A. Granese, La Nuova Italia, Firenze, 1992
- Direzione Generale della Comunicazione e della Direzione Generale per l'Inclusione e i diritti sociali e la responsabilità sociale delle imprese

Ferri L., *Il Liceo Artigianale, la creazione di un nuovo modello di scuola al servizio di una concezione unitaria dell'uomo nel mondo*, Tesi di Dottorato, Università degli studi di Bergamo, a.a. 2019/20, relatore Chiarissimo prof. G. Bertagna

Freudenthal H., *Ripensando l'educazione matematica*, a cura di C.F. Manara, La Scuola, Brescia, 1994

Garcia Hoz V., *L'educazione personalizzata* a cura di Giuseppe Zanniello, La Scuola, Brescia, 2009

Gioco e matematica, Atti del Convegno, Bologna novembre 1986, Cappelli, Bologna, 1986

Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani S.p.A.

Lakatos I., *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*, a cura di J. Worrall e E. Zahar, edizione italiana a cura di G. Gioiello, Feltrinelli Editore, Milano, 1979

Manara R., *La Matematica e la Realtà. Linee di Metodo*, Marietti 1820, Milano, 2011

Melzi G., *Perché la matematica*, La Scuola, Brescia, 1978

Ministero della Pubblica Istruzione, Direttiva ministeriale *Strumenti di intervento per alunni con Bisogni Educativi Speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica*, 27 dicembre 2012

Niss M., *Mathematical Competencies and the learning of Mathematics: The danish KOM Project*, in A. Gagaris- S. Papastavridis (eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*, 2003

OECD, *The PISA 2003 assessment Framework- Mathematics, Readings, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*

Pellerey M., *Le competenze individuali e il portfolio*, La Nuova Italia, Firenze, 2004

Perla L., Riva M.G., *L'agire educativo. Manuale per educatori e operatori socio - assistenziali*, La Scuola, Brescia, 2016

Piano di lavoro del Consiglio di Classe A.S. 2018/2019

Potestio A., *Alternanza formativa. Radici storiche e attualità di un principio pedagogico*, Studium, Roma, 2020

Quadro europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente (EQF), Comunità Europea 2009

Rousseau J.J., *Émile ou del l'éducation* [1762], III, tr. It. *Emilio o dell'educazione*, Studium, Roma 2016

Schoenfeld A., *Purposes and methods of research in mathematics education*, in «Notice of AMS. June/July 2000»

Sinatra G., *Dal Fare al Sapere: il ponte della matematica*, Tesi di Dottorato, Università degli studi di Bergamo, a.a. 2013/14, relatore Chiarissimo prof. G. Bertagna

Steward I., *From here to infinity: A Guide to Today's Mathematics*, Oxford Paperbacks, Oxford, 1996

Stewart I., *Letters to a young mathematician*, Basic Books, New York, 2006

Zan R., *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Springer-Verlag, Italia, 2007

Sitografia

<https://archivio.pubblica.istruzione.it/argomenti/portfolio.shtml>

[Articolazione delle competenze \(indire.it\)](#)

<https://ricette.giallozafferano.it/Red-Velvet-Cake.html>

https://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/ decreto_indicazioni_nazionali.pdf

[\(Microsoft Word - LINEE GUIDA ISTITUTI PROFESSIONALI ultima revisione dopo \205\) \(indire.it\)](#)

[Indire, sito ufficiale](#)

[La «flipped classroom» | Pearson](#)

Ringraziamenti

Ringrazio il Prof. Potestio per avermi pazientemente accompagnata al termine del percorso aiutandomi a ricominciare quando io non ci speravo più.

Ringrazio la Dott.ssa Chiara Giberti per i suoi preziosi consigli.

Grazie a mio marito Maurilio perché il modo in cui credi in me mi dà la forza di continuare a lottare per raggiungere i miei obiettivi, anche se questi ci richiedono tanti sacrifici. Perché le mie gioie sono anche tue, perché con te al mio fianco so di poter affrontare qualsiasi cosa, perché mi hai insegnato a non arrendermi mai, perché non c'è me senza te!

Grazie alla mia mamma perché si dice che le mamme hanno i super poteri e, da quando sono diventata mamma anche io, il mio superpotere sei tu!

Grazie al mio papà perché mi ha insegnato che non c'è soddisfazione senza sacrificio. Perché sei sempre stato orgoglioso di ogni mia scelta, di ogni mio traguardo e io sono orgogliosa di essere tua figlia!

Grazie Alessandra perché mi hai sempre capita, perché so che posso sempre contare su di te, perché sono certa che non sarò mai sola.

Grazie alle mie "Soul Sisters" per avermi aiutata, supportata e spesso anche sopportata, grazie perché camminando insieme la strada sembra più breve.

Grazie a tutta la mia famiglia perché, nonostante la pandemia ci abbia diviso per mesi, so che ci siete e che sempre ci sarete e questa è la mia più grande fortuna!

Grazie ai miei colleghi di Cometa perché con voi, anche le giornate più lunghe e difficili le ho affrontate con il sorriso, grazie per essere stati i miei compagni di questo, seppur breve, viaggio!

Grazie a Veronica e Federica che più che colleghe sono diventate amiche, di un'amicizia vera e sincera. Per la vostra presenza e il vostro supporto costante nello studio, nel lavoro e nella vita!

Grazie ai miei studenti del Liceo Artigianale per essere stati le “cavie” della mia sperimentazione, per avermi accompagnata in questo pezzo di vita e per esservi conquistati un pezzo del mio cuore.

Grazie agli studenti della 2D per avermi ascoltata, per avermi assecondata e per aver capito che per voi avevo grandi progetti.