UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO
DOTTORATO IN *ANTROPOLOGIA ED EPISTEMOLOGIA DELLA COMPLESSITÀ*
XXI CICLO

EHESS-PARIS
SPECIALITE : HISTOIRE DES SCIENCES

UN PENSIERO COMPLESSO

RIFLESSIONI STORICHE ED EPISTEMOLOGICHE SULLA SCOPERTA DEL CAOS NELL'OPERA DI JULES HENRI POINCARÉ

UNE PENSEE COMPLEXE

REFLEXIONS HISTORIQUES ET EPISTEMOLOGIQUE SUR LA DECOUVERTE DU CHAOS DANS L'ŒUVRE DE JULES HENRI POINCARE

TESI DI DOTTORATO DI / THÈSE DE M.:

Marco Toscano

RELATORE IN ITALIA: Chiar.mo Prof.
DIRECTEUR DE THESE EN ITALIE: M.

Enrico Giannetto

RELATORE IN FRANCIA: Chiar.mo Prof.
DIRECTEUR DE THESE EN FRANCE: M.

Luciano Boi

ANNO ACCADEMICO / ANNEE UNIVERSITAIRE
2007-2008

con il sostegno finanziario
dell'Università Italo-Francese
(bando Vinci 2007)

Avec le soutien financier
de l'Universite Franco-Italienne
(Programme Vinci 2007)

Sommario

Introduzione

Cercare di comprendere lo spessore epistemologico della nozione di "caos" all'interno del sapere scientifico, e più specificatamente della fisica, pone la necessità di sviluppare una ricerca di ampio respiro, che consenta in primo luogo di far luce sul valore culturale di tale concetto. Lo scopo principale di questo lavoro è quello di sviluppare una tale ricerca all'interno del pensiero scientifico e filosofico di Jules-Henri Poincaré (1854-1912).

Sebbene le riflessioni filosofiche e scientifiche abbiano ampiamente riconosciuto il valore rivoluzionario, all'interno della scienza del XX secolo, della teoria della relatività e della fisica quantistica, solo di recente si è parlato di una rivoluzione del caos che, in ogni caso, gode di fama minore rispetto alle prime due. Il termine "rivoluzione" viene qui inteso in senso sociologico-kuhniano come momento in cui la comunità scientifica riconosce il valore innovativo di una teoria e la sviluppa impiegandola come mezzo per il riorientamento delle ricerche e la costruzione di un nuovo paradigma. Nel caso dei fenomeni caotici, sebbene la loro scoperta a opera di Poincaré risalga già al 1889, il riconoscimento (e la legittimazione) da parte della comunità scientifica avviene solo a partire dagli anni '60 del Novecento con la pubblicazione, nel 1963, dell'articolo di Edward Lorenz *Deterministic Nonperiodic Flow*[1] la cui ricezione è comunque lenta e non priva di attriti. In seguito, nel 1975, James Yorke e Tien Yien Li pubblicano l'articolo *Period Three Implies Chaos*[2] in cui, per la prima volta, compare esplicitamente l'idea di una teoria del caos. L'ultima tappa nella costruzione di una vera e propria

[1] EDWARD LORENZ, "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, 20, 2: 130-141. Durante il suo periodo di studio al MIT, Lorenz è stato inoltre allievo di George D. Birkhoff, unico matematico che nel corso degli anni '20 e '30 ha preso in seria considerazione la "scoperta" di Poincaré dei fenomeni caotici.

[2] TIEN YIEN LI, JAMES A. YORKE, "Period Three Implied Chaos", *The American Mathematical Monthly*, 1975, 82, 20: 985-992. L'articolo dimostra la presenza di cicli caotici all'interno di un sistema unidimensionale in cui compare un ciclo di periodo tre.

scienza del caos è il convegno *Bifurcation Theory and Application in Scientific Disciplines* organizzato a New York nel 1977 e al quale confluiscono ricercatori con diverse formazioni disciplinari che condividono però la scoperta, nel proprio ambito di ricerca, di dinamiche non lineari. Nonostante quindi da un punto di vista strettamente teorico la rivoluzione del caos faccia la sua comparsa in fisica già alla fine dell'Ottocento, si deve aspettare quasi un secolo perché avvenga un suo pieno riconoscimento da parte della comunità scientifica.

Nonostante la lentezza con cui la scoperta del caos si è affermata nella scienza contemporanea non si può negare che una volta avvenuto il suo riconoscimento non vi sia stata, in ambito scientifico, una piena consapevolezza dei suoi effetti all'interno delle diverse discipline; ciò si è tradotto in molti casi nella produzione di scritti divulgativi sul caos, in cui però solo sporadicamente compaiono vere e proprie riflessioni epistemologiche[3].

Solo recentemente il caos ha trovato spazio nella riflessione di quella corrente di pensiero chiamata *epistemologia della complessità*. In questa cornice teorica il caos viene riassorbito all'interno di una riflessione più ampia volta a mettere in

---

[3] Uno dei primi a vedere nell'avvento del caos i tratti di una rivoluzione scientifica, nel senso kuhniano del termine, è James Gleick, giornalista e divulgatore scientifico. Scarseggiano però, nella letteratura critica, ricerche storiche e riflessioni filosofiche sull'argomento e sul suo effettivo contenuto rivoluzionario. Senza dubbio vanno segnalati i diversi testi pubblicati da David Ruelle, Ivar Ekeland e Ilya Prigogine all'interno dei quali possono essere trovati degli spunti epistemologici di notevole interesse. Ciò non toglie che nella maggior parte dei casi la riflessione sul caos si è trasformata in un'opera di alta divulgazione scientifica sui fenomeni caotici nei diversi ambiti in cui essi si sono manifestati. Si segnalano qui inseguito alcuni tra i principali lavori sull'argomento: JAMES GLEICK, *Chaos* (New York: Viking Penguin Inc., 1987), trad. it., *Caos* (Milano: Rizzoli, 1989); DAVID RUELLE, *Hasard e Chaos* (Paris: Odile Jacob 1991), trad. it., *Caso e Caos* (Torino: Bollati Boringhieri, 1992), questo testo costituisce un'ottima introduzione ad alcuni aspetti matematici del caos. AMY DAHAN DALMEDICO, JEAN-LUC CHAMBERT, KUNO CHEMLA (eds.), *Chaos et Déterminisme* (Paris: éditions du seuil, 1992) in questa raccolta è possibile trovare diversi contributi che affrontano, secondo prospettive differenti, l'intreccio caos-determinismo; ILYA PRIGOGINE, ISABELLE STENGERS, *La Nouvelle Alliance, métamorphose de la science* (Paris: Gallimard, 1979 rist. 1986). Questo testo, il più celebre scritto da Prigogine e dalla Stengers, mette in evidenza in che misura i fenomeni caotici abbiano contribuito alla revisione della scienza classica, ponendo la ricomposizione della frattura creatasi in età moderna tra sapere scientifico e sapere umanistico; PRIGOGINE, *Le leggi del caos* (Bari: Laterza, 1993 rist.2003), questo testo raccoglie un ciclo di lezioni tenute da Prigogine presso il corso di filosofia della scienza dell'Università degli studi di Milano nell'anno accademico 1991-92. IVAR EKELAND, *Le Calcul, l'Imprevu, les figures du temps de Kepler à Thom* (Paris: Editions du Seuil, 1984); EKELAND I., *Au Hasard, la chance, la science et le monde* (Paris: éditions du Seuil, 1991) trad. it., *A Caso. La sorte, la scienza e il mondo* (Torino: Bollati Boringhieri, 1993). I testi di Ekeland, di carattere divulgativo, contengono tuttavia interessanti spunti epistemologici e sono tra i pochi che dedicano spazio a Poincaré e alla sua scoperta del caos. CRISTOFORO SERGIO BERTUGLIA, FRANCO VAIO, *Non linearità, Caos, Complessità*, Bollati Boringhieri, Torino, 2003. Questo testo, di recente pubblicazione, oltre a contenere aspetti introduttivi della matematica del caos mette anche in evidenza alcune applicazioni della non linearità nei diversi ambiti disciplinari.

luce alcuni aspetti critici della scienza moderna, tanto sul piano scientifico quanto su quello culturale. Tuttavia, quest'operazione ha talvolta portato al dissolvimento del caos in altre tematiche ritenute a esso affini, impedendo in questo modo lo sviluppo di una riflessione specifica che metta in evidenza i tratti peculiari di tale concetto. A partire da questa constatazione e inserendosi all'interno della prospettiva filosofica della complessità, la presente ricerca si pone come obiettivo quello di sviluppare una riflessione specifica sul caos, sulle sue origini in ambito fisico e sul suo impatto nel pensiero di Poincaré.

La teoria del caos presenta però delle peculiarità che la rendono differente dalle altre più importanti teorie fisiche del Novecento. Mentre nel caso della relatività e della fisica quantistica si ha, infatti, a che fare con rivoluzioni appartenenti a un ambito ben delimitato della ricerca scientifica[4], il caos si è caratterizzato, sin dai primi articoli e dalla conferenza di New York, per il suo carattere transdisciplinare. Nella conferenza del 1977, infatti, scienziati provenienti da ambiti completamente diversi, nella maggior parte dei casi accademicamente affiliati a dipartimenti ben distinti, si sono trovati a discutere un argomento comune che, oltre a porre in dubbio categorie fondamentali del sapere scientifico, ha messo in evidenza l'artificialità delle divisioni disciplinari[5]. La trasversalità e l'eterogeneità del caos hanno quindi avuto come effetto quello di mettere in dialogo discipline solitamente abituate a convivere l'una a fianco all'altra senza mai realmente confrontarsi su un terreno comune. Ciò ha causato inoltre la messa in discussione delle categorie in cui il sapere scientifico è stato suddiviso a partire dal XIX secolo, ponendo in evidenza l'artificialità di distinzioni più accademiche che reali.

Un secondo aspetto può però essere oggetto di riflessione, proprio a partire da quanto messo in luce finora. Il fatto stesso che i fenomeni caotici emergano in

[4] Con ciò non si intende dire che queste rivoluzioni non abbiano poi avuto delle ripercussioni anche in altri ambiti. Ad esempio nel caso della fisica quantistica, essa ha dato certamente un importante contributo alla nascita di nuove logiche, così come di nuove teorie cognitive volte a spiegare il funzionamento della mente umana proprio sulla base delle nuove teorie quantistiche.

[5] Si pensi ai nomi più noti, legati al caos, e ai loro diversi ambiti di provenienza. Escludendo per il momento Poincaré, il caos emerge come fenomeno fisico nei lavori di Lorenz, Feigenbaum, Ruelle e si ritrova tuttavia negli studi di chimica di Prigogine, negli studi sugli aumenti delle popolazioni di May e nelle ricerche biologiche di Huberman e Winfree. Su questi aspetti della rivoluzione del caos si veda: DAVID AUBIN, AMY DAHAN, "Writing the history of Dynamical System and Chaos: Loungue Durée and Revolution, Disiplines and Cultures", *Historia Mathematica*, 2002, 29: 273-339.

ambiti scientifici così differenti segnala come questi ultimi, in fondo, poggino su basi teoriche comuni. Più precisamente permette di comprendere in che termini la meccanica, disciplina che a partire dal '600 occupa un ruolo centrale nello studio dei fenomeni fisici, costituisca la piattaforma teorica sulla quale tutte le altre scienze si sviluppano. Il caos scuote la scienza moderna alle fondamenta proprio perché, come le altre rivoluzioni scientifiche del Novecento, mette in discussione alcuni dei presupposti basilari della meccanica classica e, di conseguenza, buona parte degli assunti filosofici con cui essa ha contaminato ogni ambito del sapere scientifico. Non si tratta semplicemente di riconoscere i limiti di un modello fisico o matematico, ma di interrogarsi sui presupposti stessi del sapere scientifico moderno, inteso come strumento attraverso il quale l'uomo ha cercato di dominare il mutamento, di prevedere il futuro esorcizzandone la sua costitutiva incertezza. A partire da ciò è lecito domandarsi se si possa parlare di una "scienza del caos" o se al contrario quest'espressione, in senso proprio, non sia un ossimoro. Il caos non può forse essere considerato come la negazione stessa della scienza intesa in senso moderno e delle categorie su cui essa si è fondata? Se al contrario è possibile parlare di una scienza del caos, in che termini essa deve essere una scienza riformata e come deve ricollocarsi all'interno delle gerarchie culturali[6]?

Forse proprio la via di una ricostruzione storica e di una comprensione filosofica è quella adatta a comprendere il significato culturale del caos, sganciandosi da considerazioni esclusivamente tecniche e divulgative. Tale percorso esclude la possibilità di approdare a sintesi generali.

Per questo, nelle pagine seguenti, si è deciso di prendere in considerazione un argomento specifico, il problema dei tre corpi, nella riflessione scientifica e filosofica di un singolo autore, Poincaré[7]. Nell'analisi del suo pensiero è infatti

[6] La filosofia contemporanea è stata capace di elaborare critiche radicali del pensiero razionale attraverso il quale la cultura occidentale ha costruito la sua immagine teoretica del mondo. Basti infatti pensare alla filosofia heideggeriana e alla sua critica del *logos* inteso come discorso "sul mondo" e non discorso "del mondo". Queste forme di pensiero radicale non sembrano però aver trovato una reale corrispondenza nella riflessione scientifica. Benché infatti rivoluzioni come quelle della fisica quantistica e del caos pongano in evidenza la necessità di una riforma radicale delle basi teoriche su cui poggia il sapere scientifico, esse vengono nella maggior parte dei casi ricomprese all'interno di quella teoria che, in realtà, mettono in discussione.

[7] Rimandiamo la bibliografia sulla vita e l'opera di Poincaré alla sezione del primo capitolo esplicitamente dedicata all'argomento.

possibile cogliere elementi di notevole interesse epistemologico che, per la loro attualità, aprono la strada a una reale riflessione culturale sul sapere scientifico.

Poincaré si imbatte nel caos per via fortuita quando è un giovane e brillante matematico, ben conosciuto negli ambienti accademici di tutta Europa, ma il cui nome ancora non ha raggiunto il culmine della fama. Certamente egli intuisce la portata della sua scoperta e delle ricadute teoriche che essa può avere. Ciò nonostante, al di là delle riflessioni esposte nel breve articolo del 1907 *Le Hasard* nelle quali trova una prima espressione il principio di instabilità esponenziale, Poincaré non riserva grande spazio al caos nelle sue opere epistemologiche. Tuttavia, ripercorrendo passo dopo passo l'alternarsi delle argomentazioni è possibile scorgere l'immagine di una scienza che è necessariamente condotta e riflettere su sé stessa, a rivedere alcune sue posizioni confrontandosi anche con le critiche intuizioniste e anti-intellettualiste[8]. Si vedrà come negli scritti di Poincaré emerga la necessità di combinare le critiche dell'ambiente filosofico francese e l'incombere di una profonda crisi della scienza moderna (di cui il caos è uno dei campanelli d'allarme), con una prospettiva che cerchi di salvare la scienza come pratica intellettuale attraverso cui si articola la comprensione razionale dei fenomeni. Il tema del caos, quindi, sebbene non venga trattato esplicitamente nei testi di Poincaré ne costituisce in parte lo sfondo, la chiave di lettura attraverso cui sviluppare una possibile interpretazione del suo pensiero.

Del resto l'azione del caos si caratterizza per la sua assenza. Esso, al di là degli aspetti tecnici più superficiali ed espliciti, agisce in profondità, andando a toccare le fondamenta del pensiero razionale, emergendo anche laddove non sia menzionato apertamente. Ciò è dovuto in parte alla definizione negativa[9] che lo

[8] Si avrà modo di vedere in seguito come, la frequentazione del Circolo di Boutroux, renda particolarmente presenti queste critiche nella coscienza filosofica di Poincaré. Nella circolo del cognato Poincaré ha modo di entrare in contatto sia con i fratelli Tannery, la cui prospettiva filosofica lo ha con tutta probabilità influenzato che, appunto, con il pensiero intuizionista di Henri Bergson ed Eduard LeRoy. Proprio dalle strumentalizzazioni di quest'ultimo, Poincaré cercherà sempre di sottrarsi, marcando a più riprese la distanza tra il suo pensiero e il nominalismo di cui LeRoy lo vorrebbe artefice. Nel primo capitolo si prenderà più dettagliatamente in esame questo aspetto. Per il momento, a proposito della frequentazione del circolo di Boutroux, ci limitamo a segnalare: NYE MARY JOE "The Boutroux Circle and the Poincaré's Conventionalism", *Journal of History of Ideas*, 1979, 40, 1:107-120.

[9] Il termine "negativa" non ha qui alcun valore etico. Al contrario vedremo che soprattutto nel pensiero mitico-religioso il caos non ha una connotazione etica marcatamente negativa. Questa Nell'utilizzo che qui si fa del termine si vuole solo indicare che il caos non viene definito sempre come una negazione, una mancanza di qualcosa. Nel primo capitolo verrà approfondito questo

contraddistingue. Sin dalle origini del pensiero occidentale esso si è delineato come mancanza, incompletezza, assenza di ordine e distinzione: il caos è una latenza, la mancanza di qualcosa. In secondo luogo esso assume una serie di connotati che ne rendono forzatamente parziale ogni analisi. Ci sono da un lato aspetti tecnici e matematici, forse quelli più conosciuti a oggi, dall'altro però, come si avrà modo di vedere nelle pagine seguenti, esistono argomentazioni filosofiche, metafisiche e religiose che contraddistinguono il ruolo del caos nell'evoluzione culturale del pensiero occidentale[10]. Nonostante questi soggetti, per esigenze pratiche, debbano essere considerati separatamente all'interno di una ricerca, ciò non toglie che essi siano in realtà profondamente legati e si influenzino vicendevolmente.

Non si ha qui l'ambizione di offrire una ricerca completa, che risulterebbe per forza di cose riduttiva rischiando di livellare sfumature concettuali che al contrario devono essere comprese in tutte le loro articolazioni. La scelta di un argomento specifico, che corrisponde all'origine storica del caos nella contemporaneità, appare invece come la prospettiva ideale attraverso cui cercare di comprendere il peso epistemologico del concetto di caos nel sapere fisico. In un autore come Poincaré, che si colloca esattamente sul confine tra scienza moderna e contemporanea, è ancora possibile trovare le ultime tracce di una fisica intesa come "filosofia della natura". Per questo le sue riflessioni epistemologiche, che si scontrano con temi filosofici che la fisica contemporanea ha abbandonato, appaiono di grande interesse. Senza volersi pronunciare sulla legittimità delle divisioni culturali che hanno portato il sapere filosofico ad allontanarsi sempre più dalla ricerca scientifica è tuttavia indubbio che Poincaré sia uno degli ultimi autori in cui scienza e filosofia si intrecciano profondamente, non come discipline distinte che si confrontano in un dialogo comune, ma come aspetti differenti di un

---

aspetto mettendo in particolare evidenza come nella tradizione mitico religiosa il caos venga in diversi casi associato a uno stato primordiale caratterizzato dall'assenza di ordine e distinzione.

[10] Non è infatti possibile pensare che una riflessione culturale sul ruolo del caos nella scienza contemporanea, e di quanto in essa sopravvive della scienza moderna, non coinvolga necessariamente, tra le altre, nozioni come quelle di causa, catena causale, determinismo e proporzionalità. Tutti questi concetti costituiscono il nocciolo teorico attorno al quale si costruisce la concezione moderna di spiegazione scientifica ed essi non possono essere considerati esternamente al contesto filosofico in cui sono stati discussi. Ciò permette di capire che l'esclusione del caos dal dibattito scientifico ha origine soprattutto sul piano filosofico in un'epoca storica in cui la distinzione tra scienza e filosofia non era ancora così netta.

unico discorso sul mondo. Per questo il tema del caos, in cui Poincaré si imbatte già nella prima parte della sua carriera scientifica, non può non essere considerato nella valutazione delle sue riflessioni filosofiche.

Prima però di passare direttamente all'analisi dei suoi testi si è ritenuto opportuno inserire, a titolo esclusivamente introduttivo e chiarificatore, un primo capitolo contenente una breve sintesi dell'evoluzione del problema dei tre corpi nella scienza moderna seguita da un'introduzione alla figura Poincaré. Queste parti hanno come unico fine quello di favorire una migliore comprensione delle sue riflessioni e contribuire a mettere in luce gli aspetti più innovativi e rivoluzionari del suo pensiero.

Nel secondo capitolo saranno analizzati, da un punto di vista storico ed epistemologico, gli articoli di Poincaré sulle curve definite da un'equazione differenziale. Tali lavori, all'interno dei quali Poincaré sviluppa un approccio geometrico-qualitativo del tutto originale, sono alla base del suo approccio al problema dei tre corpi. Finora essi sono stati per lo più al centro di ricostruzioni matematiche, volte metterne in evidenza le innovazioni di carattere tecnico. Nell'analisi che qui svolgerà, si cercherà invece di sottolineare come l'avvento di un nuovo approccio qualitativo corrisponda in Poincaré a una presa di coscienza dei limiti dei più tradizionali approcci quantitativi e della conseguente esigenza di sviluppare un nuovo metodo matematico che si focalizzi sulle proprietà specifiche della forma. Si vedrà, inoltre, come l'interesse per un metodo geometrico qualitativo possa avere, in Poincaré, un'origine "fisica" essendo egli già consapevole, nel 1881, delle possibili applicazioni di tale metodologia al problema dei tre corpi. Su questo piano sarà inoltre possibile mettere in evidenza un legame teoretico tra la prospettiva epistemologica di Poincaré e Leibniz, autore ben conosciuto dal matematico francese al quale egli dedica anche uno scritto giovanile.

Il terzo capitolo sarà invece incentrato sui lavori di Poincaré sui fluidi in rotazione e sull'articolo riguardante il problema dei tre corpi pubblicato sugli *Acta Mathematica* nel 1890. Anche in questo caso l'analisi si svolgerà su un piano specificatamente epistemologico che metterà in evidenza aspetti talvolta solo accennati dalle analisi di esclusivo interesse matematico. In particolare, oltre a ricostruire i tratti salienti della presunta dimostrazione di stabilità contenuta nella prima versione dell'articolo, si cercherà di mettere in evidenza gli aspetti epistemologici legati all'errore commesso da Poincaré e alla successiva scoperta delle dinamiche caotiche. Il caos, si avrà modo di vedere, emerge nel lavoro di Poincaré dal rigore del ragionamento matematico laddove invece la stabilità e la semplicità rappresentano l'errore. Questa inversione dei criteri che abitualmente accompagnano il ragionamento matematico, nonché la messa in discussione dell'istinto di "eleganza e armonia" che contraddistingue l'intuizione dello scienziato, causano in Poincaré un senso di "angoscia" e "confusione" che apre la strada alla consapevolezza dei limiti contro i quali si infrange l'illusione determinista della scienza moderna. Oltre alle considerazioni epistemologiche, in questa parte della ricerca si darà spazio anche a una ricostruzione storica che consenta di mettere in luce, attraverso la lettura della corrispondenza tra Mittag-Leffler e Poincaré, alcune dinamiche ancora parzialmente inedite della partecipazione di Poincaré al concorso di re Oscar II.

Infine, nel quarto capitolo, saranno prese in considerazione le opere epistemologiche di Poincaré, con particolare riferimento alle parti riguardanti la fisica. Al centro del capitolo sarà l'analisi del già citato *Le Hasard*, pubblicato nel 1907 sulla *Revue du Mois*. Si è cercherà in primo luogo di contestualizzare l'intervento di Poincaré ricostruendo il dibattito sul caso che trova spazio tra le pagine della *Revue*. In un secondo momento si è invece cercato di inserire le argomentazioni esposte da Poincaré in tale articolo all'interno della sua restante produzione epistemologica con particolare riferimento all'utilizzo del calcolo delle probabilità nelle scienze fisiche. Si ritiene infatti che un'operazione di questo tipo consenta di arginare il pericolo, e la tentazione, di offrire un'interpretazione atemporale del principio di instabilità esponenziale formulato da Poincaré. Al contrario, con riferimenti tratti da *La Science et l'Hypothèse* (1902), *La valeur de la Science* (1905) e *Science et Méthode* (1908), tale principio è stato interpretato alla luce di una critica del sapere scientifico di più ampia portata e che vede, sullo sfondo, l'impredicibilità dei fenomeni naturali di cui il caos è un segno.

Nei tre capitoli dedicati alle opere e al pensiero di Poincaré, oltre a un esame dei testi, si è pensato di inserire dei paragrafi di apertura e chiusura di carattere più marcatamente filosofico, al fine di ricavare uno spazio espressamente dedicato alle osservazioni di carattere epistemologico.

Come si è già detto nelle pagine precedenti, la presente ricerca non ha l'ambizione di offrire un'analisi completa, né di tutte le possibili implicazioni della teoria del caos, né del pensiero di Poincaré. Entrambi questi soggetti presentano infatti una quantità tale di spunti e argomenti di riflessione che non è possibile pensare di completarne l'analisi nelle pagine di una singola ricerca. Al contrario una prospettiva realmente complessa impone l'obbligo di un lavoro particolareggiato, che espliciti la propria chiave di interpretazione esorcizzando la tentazione di cadere in sintesi totalizzanti: esse hanno infatti come unico risultato quello di appiattire concetti e pensieri di per sé estremamente ricchi.

Per questo si è qui scelto di leggere l'opera di Poincaré alla luce della sua scoperta del caos, ponendosi come unico obiettivo quello di mostrare come questa prospettiva consenta di individuare nel pensiero del matematico francese gli spunti per una riflessione profonda sulla scienza e su come essa debba essere necessariamente considerata un prodotto della cultura umana.

1 PER UN'INTRODUZIONE
Il problema dei tre Corpi e Poincaré

1.1 *Il problema dei tre corpi*

La legge della gravitazione universale pone, di principio, la possibilità di dedurre tutte le traiettorie dei corpi celesti e di conseguenza di raccogliere in espressione matematica il funzionamento dell'universo. Oltre ad assecondare la visione meccanicista questa possibilità sembra rendere concretamente afferrabile l'obiettivo principale che segna, sin dalle origini, lo sforzo di comprensione della natura da parte dell'uomo: prevederne i fenomeni.

Tuttavia, sebbene Isaac Newton (1642-1727) abbia offerto la soluzione di un sistema a due corpi, già il caso di un sistema a tre corpi pone considerevoli problemi. È infatti necessario considerare, in ogni istante di evoluzione del sistema, la reciproca influenza dei corpi e come essa possa continuamene perturbare la loro orbita.

Il problema dei tre corpi presenta inoltre diverse facce. Da un lato esso è un problema matematico legato alla nascita e sviluppo del calcolo differenziale, dall'altro pone importanti questioni filosofiche in quanto dalla sua risoluzione, e dalla risoluzione di un caso generale a *n* corpi, dipende la dimostrazione matematica della stabilità del sistema solare. Da questo punto di vista il caos appare costantemente sullo sfondo del problema dei tre corpi e il tentativo di risolvere quest'ultimo ha come finalità quella di dimostrare il perfetto equilibrio dell'universo-macchina della scienza moderna.

La storia del problema matematico dei tre corpi è estremamente ricca e vede alternarsi molti tra i più importanti nomi della scienza moderna. Ogni suo passo meriterebbe una ricerca specifica e senza alcun dubbio essa presenta spunti interessanti sia per lo storico della matematica che della fisica e della filosofia. Nostra intenzione, in queste pagine, sarà quella di fare una sintesi di questa storia volta a mettere esclusivamente in evidenza le metodologie utilizzate per affrontare il problema. Ciò permetterà di comprendere, in seguito, l'originalità concettuale e tecnica dell'approccio al problema elaborato da Poincaré.

Proprio Newton è il primo ad affrontare il problema dei tre corpi. Dopo aver infatti trattato il moto della Luna attorno alla Terra e aver ricavato che l'orbita da essa seguita è ellittica, Newton cerca di calcolare in che modo il Sole possa perturbare la traiettoria lunare. Questo tentativo lo vede impegnato in risoluzioni di calcoli estremamente complessi che, peraltro, danno come risultato un valore dell'apside lunare molto distante da quello osservato. Ciò che però Newton riesce a dimostrare per via geometrica sono alcuni teoremi riguardanti il moto del baricentro di un sistema a *n* corpi. Egli ricava infatti che tale moto avviene con velocità uniforme lungo una linea retta[11].

Immediatamente dopo Newton i primi a occuparsi del problema sono Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783)[12], Alexis Clairaut (1713-1765)[13] e Leonhard Euler (1707-1783)[14]. In realtà, i calcoli del valore medio dell'apogeo lunare contenuti nelle loro memorie non si discostano molto da quelli di Newton. Clairaut è addirittura portato a credere che si debbano apportare delle modifiche alla legge di gravitazione universale considerandola valida, così come è stata formulata da Newton, solo per attrazioni a grandi distanze. Egli ritiene infatti che per attrazioni a piccole distanze si debba aggiungere un termine complementare inversamente proporzionale alla quarta potenza delle distanze. Tuttavia questa modifica proposta da Clairaut si scontra con il principio di semplicità delle leggi di natura, secondo il quale esse devono trovare un'espressione unica, capace di

[11] Cfr. JUNE BARROW-GREEN, *Poincaré and the Three Body Problem* (Providence: American Mathematical Society-London American Society, 1997) p. 15; ROBERTO MARCOLONGO, *Il problema dei tre corpi. Da Newton (1686) ai nostri giorni* (Milano: Hoepli, 1919) pp. 6-8.
[12] JEAN-BAPTISTE LE ROND D' ALEMBERT, "Méthode générale pour determiner les orbites et les mouvements de toutes les planets, en ayant égard à leur action mutuelle" in *Histoire de l'Academie Royale des Sciences* (Paris: anno 1745, stampato 1749) pp. 365-390.
[13] ALEXIS CLAIRAUT, "Du système du monde dans les principles de la gravitation universelles" in *Histoire de l'Academie Royale des Sciences* (cit. nota 91) pp. 329-364.
[14] LEONHARD EULER, *Theoria motuum Lunae* (1753); Id. *Theoria motuum Lunae. Nova methodo pertractata* (1772). Questo secondo scritto è rintracciabile in: Id., *Opera Omnia*, ser. 2, 31 Vols, vol. 22 (Lausanne: Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, 1958).

catturare al suo interno le diverse casistiche[15]. Non è dunque possibile pensare che la gravitazione sia regolata da leggi differenti a seconda delle diverse distanze a cui si esercita la forza attrattiva. Da un punto di vista matematico uno dei principali meriti di Clairaut ed Euler è quello di riuscire a determinare le equazioni del moto e gli integrali primi del centro di massa, delle forze vive e delle aree. Ciò consente di stabilire dei limiti entro cui devono restare i valori menzionati (centro di massa delle forze vive e delle aree), ponendo dunque dei vincoli alle soluzioni del sistema studiato.

Euler, con la pubblicazione delle sue due memorie dedicate al moto lunare, è il primo a offrire una soluzione periodica particolare del problema dei tre corpi e a formulare quello che poi sarà chiamato, proprio da Poincaré, il problema ristretto dei tre corpi. In una memoria del 1772, premiata dall'*Académie de Paris*, Euler prende in considerazione il caso in cui i tre corpi vengano allineati su una linea retta e la massa di uno di essi sia considerata trascurabile. Egli, dopo aver impostato le equazioni differenziali del problema considerando come incognite le distanze reciproche tra i corpi, riesce a dimostrare che il rapporto tra tali distanze resta costante e soddisfa un'equazione di quinto grado. In questo modo è possibile risolvere il problema dimostrando che due dei corpi percorrono delle orbite periodiche di forma conica con fuoco nel terzo corpo. Seppure in un caso estremamente astratto e circoscritto a condizioni particolari, Euler è il primo a offrire una soluzione periodica per il problema dei tre corpi[16].

Il premio dell'*Académie de Paris* vinto da Euler viene condiviso con un'altra memoria sul moto lunare redatta da Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)[17]. Egli non si limita al caso dei tre corpi allineati ma si interessa anche a quello in cui essi occupano i vertici di un triangolo equilatero che ruota attorno al suo centro di massa. Anche in questo caso, che al pari del primo presuppone l'invarianza delle distanze, Lagrange riesce a dimostrare l'esistenza di soluzioni periodiche nelle quali i tre corpi percorrono orbite coniche con fuoco nel loro centro di massa. Egli riesce inoltre a stabilire l'esistenza di cinque punti di equilibrio, chiamati poi punti

---

[15] Cfr. MARCOLONGO R., *Il problema dei tre corpi. Da Newton (1686) ai nostri giorni* (cit. nota 11) p. 10.
[16] Cfr. *Ivi*, p. 14-15.
[17] JOSEPH-LOUIS LAGRANGE, "Essai sur le problème des trois corps" in LAGRANGE, *Œuvres completes*, 14 Vols, vol. 6 (Paris: Gauthier-Villars: 1873) pp. 229-234.

di Lagrange, che corrispondono a dei punti in cui le forze agenti sul terzo corpo, quello di massa trascurabile, si compensano[18]. Per quanto concerne il problema generale dei tre corpi, Lagrange intravede la possibilità di ridurlo alla determinazione dei lati del triangolo formato congiungendo i tre corpi e, in definitiva, allo studio delle differenti configurazioni che il sistema assume nella sua evoluzione. Seguendo questa strada egli riduce il sistema di equazioni differenziali con cui il problema viene affrontato dal diciottesimo al settimo ordine.

Nella prima metà dell'Ottocento molti altri sforzi si concentreranno in questa direzione tra cui, ad esempio, quelli di Karl Gustav Jacob Jacobi (1801-1851), matematico tedesco, che in una celebre memoria del 1842 riuscirà a dimostrare un'ulteriore riduzione al sesto ordine[19]. A Jacobi è inoltre riconducile l'omonimo integrale. Esso è l'unico integrale primo del moto nel problema dei tre corpi ristretto e consente di stabilire le aree di velocità nulla nelle quali sono racchiuse le zone accessibili al terzo corpo.

Pierre-Simon Laplace (1749-1821) viene per lo più ricordato per la formulazione del principio di determinismo assoluto contenuta nel suo *Essai philosophique sur les probabilités*[20] pubblicato nel 1814 come introduzione alla *Théorie analytique des probabilités* (la cui prima edizione risale invece al 1812). Egli esprime chiaramente come, all'interno della concezione meccanicista della natura, il caso non possa che essere considerato un sinonimo della nostra ignoranza. Di fondamentale importanza per la storia dell'astronomia e per il problema dei tre corpi è la sua *Mécanique céleste*[21], opera di cinque volumi pubblicata tre il 1799 e il 1825, in cui Laplace, oltre a riassumere tutti i risultati precedenti ottenuti in astronomia da Newton in poi, affronta i problemi meccanici

---

[18] Sulla base di questa conclusione Lagrange arrivò a concludere l'esistenza di un asteroide nel sistema Giove-Sole. La riprova di ciò si ebbe nel 1906 quando l'astronomo tedesco Max Wolf (1863-1932) scoprì l'asteroide Achille. Cfr. BARROW-GREEN, *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 11) p. 16.

[19] KARL GUSTAV JACOB JACOBI, "Sur l'élimination des nœuds dans le problème des trois corps", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1842, 15: 236-255. Cfr. MARCOLONGO, *Il problema dei tre corpi. Da Newton (1686) ai nostri giorni* (cit. nota 11) pp. 28-29.

[20] PIERRE-SIMON LAPLACE, "Essai philosophique sur les probabilités" in LAPLACE P.S., *Œuvres complètes de Laplace* (Paris: Gauthier-Villar, 1878-1912), trad. it a cura di S. Oliva e F. Abergamo, *Saggio filosofico sulle probabilità* (Roma-Bari: Laterza, 1951).

[21] LAPLACE, *Traité de Mécanique Céleste* 5 Vols. (Paris: Gauthier-Villars, 1891-1904) facente parte di LAPLACE, *Œuvres complètes de Laplace* (cit. nota 20).

posti dal sistema solare formulando soluzioni svincolate dai dati raccolti con l'osservazione. A proposito del problema dei tre corpi Laplace è uno tra i primi a interessarsi alla ricerca di soluzioni approssimate e allo sviluppo di un metodo delle perturbazioni[22]. Il contributo principale di Laplace in questo ambito sarà quello di migliorare il metodo di variazione dei parametri, già introdotto da Newton e sviluppato successivamente da Johan Bernoulli (1667-1748), Euler e Lagrange, principale strumento attraverso cui avviene una trattazione matematica delle perturbazioni. In Laplace la ricerca di nuovi metodi matematici che aiutino a trovare soluzioni, seppure approssimate, dei moti celesti si accompagna sempre a una profonda fede meccanicista che lo conduce più volte nelle sue opere a esternare la convinzione che il mondo, tanto terrestre che celeste, debba essere concepito come una macchina governata da leggi che ne garantiscano una durata eterna[23].

Solo a partire dalla metà del diciannovesimo secolo diventa evidente la difficoltà di trovare una soluzione definitiva per il problema dei tre corpi. Per questo motivo gli sforzi matematici si indirizzano massicciamente nel tentativo di trovare soluzioni approssimate mediante l'utilizzo di serie infinite. A ciò si aggiunge la necessità di eliminare i termini secolari, ovvero quei termini nei quali compare la variabile tempo e che sommandosi progressivamente portano a configurazioni del sistema completamente nuove. Da un punto di vista fisico i termini secolari possono essere considerati come espressione di piccole perturbazioni che, sebbene trascurabili singolarmente, in un intervallo di tempo sufficientemente lungo influenzano il sistema modificandone radicalmente l'evoluzione. Non è così invece per i termini periodici. Essi mettono in evidenza i fenomeni di compensazione che fanno sì che all'interno di un sistema dinamico vi sia un complessivo equilibrio tra forze perturbatrici opposte.

[22] Ovvero un metodo che anziché puntare a comprendere direttamente il moto di un sistema a tre corpi, parte dallo stabilire l'orbita di un sistema a due corpi (come ad esempio Terra e Luna) e quindi passa alle perturbazioni che la presenza di un terzo corpo può causare nel moto dei primi due. Nel caso specifico del sistema Terra, Luna, Sole, la comprensione delle anomalie e perturbazioni del moto della Luna risultano hanno inoltre un loro aspetto pratico dato che risultano di fondamentale importanza per la navigazione.

[23] Cfr. MORRIS KLINE, *Storia del pensiero matematico*, 2 Vols., vol. 1 (Torino: Einaudi, 1972, rist. 1999) in particolare della rist. p. 583.

Tuttavia, come viene sottolineato tanto dalla Barrow-Green quanto da Goroff[24], l'utilizzo del metodo delle serie infinite segna una netta distinzione tra l'approccio matematico e quello astronomico al problema dei tre corpi. In particolare mentre gli astronomi considerano convergente una serie i cui termini decrescono rapidamente senza considerare però il loro comportamento oltre un determinato grado di approssimazione, per i matematici una serie converge solo se è possibile dimostrarlo rigorosamente. Ovviamente questi due atteggiamenti non sono nient'altro che l'indizio di esigenze contrapposte, da un lato quelle di carattere più pratico degli astronomi e dall'altro quelle teoriche dei matematici. Al di là di queste differenti esigenze è però chiaro che il modo diverso di intendere la convergenza nelle due discipline crea una profonda ambiguità nella dimostrazione di stabilità di un sistema a tre corpi. Ciò che infatti è stabile per gli astronomi, non lo è per i matematici.

La ricerca di serie convergenti è alla base dei successivi lavori[25] condotti da Charles-Eugène Delaunay (1816-1872)[26], Johan August Hugo Gyldén (1841–1896)[27] e Anders Lindstedt (1854-1939)[28]. Quest'ultimo in particolare riuscirà, a partire dalle equazioni stabilite da Lagrange nel 1772, a esprimere le coordinare dei tre corpi attraverso serie trigonometriche in cui il tempo compare solo all'interno di termini periodici. Tuttavia, nonostante la grande utilità pratica di

[24] BARROW-GREEN J., *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 11) p. 18; DANIEL L. GOROFF, "Henri Poincaré and the birth of chaos theory: an introduction to the English translation of Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste", in JULES-HENRI POINCARÉ, *New Methods of Celestial Mechanics* (New York: American Institute of Physics, 1993) pp. 1-107 in particolare pp. 70-77.
[25] Per una sintesi commentata de lavori che verranno in seguito elencati si veda: BARROW-GREEN, *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 11) pp. 19-22.
[26] CHARLES-EUGENE DELAUNAY, "Nouvelle théorie analytique du mouvement de la lune" *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1846, 23: 968-970; ID., "Théorie du mouvement de la lune I" *Mémoire de l'Académie des Sciences*, 1860, 28: 1-883; ID., "Théorie du mouvement de la lune II" *Mémoire de l'Académie des Sciences*, 1867, 29: 1-931.
[27] JOHAN AUGUST HUGO GYLDEN, "Untersuchungen über die Convergenz der Reigen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden" *Acta Mathematica*, 1887, 9: 185-294; ID., "Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes" *Acta Mathematica*, 1891, 15: 65-189; ID., "Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planets", *Acta Mathematica*,1893, 17: 1-168.
[28] ANDERS LINDSTEDT, "Beitrag zur integration der differentialgleichungen der störungstheorie" *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétrsbourg*, 1883, (7), 31, No. 4: 1-19; ID., "Sur la forme des expressions des distances mutuelles dans le problem des trois corps", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1883, 97: 1276-1278, 1253-1255; ID., "Sur la détermination des distances mutuelles dans le problème des trois corps", *Annales de l'École Normale*, 1884, (3), 1: 85-102.

questo risultato, sarà Poincaré a dimostrare successivamente la non convergenza delle serie trigonometriche di Lindstedt.

Ben più radicale, sia per le nuove idee messe in campo che per l'influenza sui lavori successivi, è la trattazione del problema dei tre corpi fatta dall'astronomo americano George William Hill (1838-1914). Egli contribuisce con due articoli, pubblicati nel 1877[29] e nel 1878[30], a definire una nuova classe di soluzioni periodiche, le prime dopo quelle trovate da Lagrange. L'articolo del 1877 è dedicato allo studio del moto lunare e il problema che Hill intende affrontare è quello costituito dalle discrepanze esistenti tra i valori del moto del perigeo lunare calcolati per via teorica e quelli osservati. Hill si chiede se questa differenza possa essere dovuta al fatto che le approssimazioni si arrestano troppo presto o seppure si debba considerare l'azione di forze sconosciute. Per cercare di chiarire questo dubbio Hill decide di approfondire le approssimazioni riguardanti il moto del perigeo lunare al punto che esse non possano lasciare spazio a errori di considerevole portata. Nel fare questo egli segue però un percorso inedito che propone una versione nuova del problema ristretto dei tre corpi. Abitualmente il punto di partenza è la considerazione del moto ellittico di due corpi che, in seguito, viene turbato con l'introduzione di un terzo corpo. Hill parte invece dal considerare l'orbita lunare circolare anziché ellittica, indagando poi come essa possa venir perturbata dal Sole e, inseguito, dall'introduzione dell'eccentricità. Attraverso questo approccio egli riesce a ricavare una nuova soluzione periodica per il moto lunare che, estesa al caso generale attraverso la variazione di un opportuno parametro, conduce, come si è detto, alla fondazione di una nuova classe di soluzioni periodiche. Inoltre, in risposta al quesito iniziale sulla discrepanza tra valori teorici ed empirici, Hill calcola un valore del moto del perigeo lunare che eccede di solo un 1/60 il valore ricavato dalle osservazioni.

[29] GEORGE WILLIAM HILL, *On the part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon* (Cambridge: John Wilson & Son, 1877), ristampato in *Acta Mathematica*, 1886, 8: 1-36 e in HILL, *Collected Mathematical Works*, 4 Vols., vol. 1 No 29 (Washington: Carnegie Institution, 1905) pp. 243-270.

[30] HILL G. W., "Researches into the Lunar Theory" *American Journal of Mathematics*, 1878, I: 5-26, 129-147, 245-260. Oppure in HILL G. W., *Collected Mathematical Works*, vol.1, (cit. nota 108) No 32, pp. 284-335. Questo secondo articolo sebbene pubblicato come posteriore è, da un punto di vista teorico, antecedente a quello del 1877. Su questi lavori di Hill si vedano: BARROW-GREEN, *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 11) pp. 22-28; GOROFF D., "Henri Poincaré and the birth of chaos theory: an introduction to the English translation of Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste" (cit. nota 24), pp. 20-23.

Altro importante merito di Hill è quello di aver dimostrato, nell'articolo del 1878, la stabilità dell'orbita lunare attorno alla terra, riuscendo a fissare per via analitica un limite superiore del raggio Terra-Luna. I risultati di Hill, benché di notevole importanza, non hanno trovato un successo immediato. Poincaré è però stato uno tra i primi a riconoscere il grande valore degli studi pubblicati dal collega americano, riprendendone alcune conclusioni nei suoi successivi studi sulle equazioni differenziali e sul problema dei tre corpi.

In questa breve sintesi degli sforzi matematici fatti, a partire da Newton, per tentare di risolvere il problema dei tre corpi si è visto come essi non possano essere concretamente distinti dagli studi, di carattere puramente matematico, sulle equazioni differenziali. Proprio questo fa sì che nella tradizione della scienza moderna il problema dei tre corpi non possa essere considerato una questione prettamente fisica. Sebbene infatti esso abbia catalizzato per lo più l'attenzione degli astronomi, è innegabile che la sua soluzione sia stata considerata da subito come di estrema importanza anche per la matematica pura. Con tutta probabilità questo processo si lega a un progressivo distacco delle discipline scientifiche moderne da contenuti ritenuti metafisici o filosofici. Di conseguenza il problema dei tre corpi, lungi dal poter essere considerato una questione di filosofia naturale, si identifica sempre più con un problema di ordine tecnico-matematico.

Vedremo nel prossimo capitolo come la doppia anima del problema, matematica e fisica, sia presente nei lavori di Poincaré. Vedremo inoltre che sebbene gli articoli che egli pubblicherà a partire dalla prima metà degli anni Ottanta siano di carattere tecnico, essi si prestano tuttavia a considerazioni epistemologiche di ampia portata. Ciò che infatti si intenderà mettere in evidenza è proprio il lato filosofico che il problema dei tre corpi riacquista in Poincaré.

Per questo è però necessario introdurre la figura del matematico francese chiarendo alcuni aspetti della sua vita, della sua formazione scientifica e delle più importanti interpretazioni date al suo pensiero. Questi elementi, in legame a quelli fin qui introdotti, consentiranno infatti di capire alcuni aspetti del pensiero di Poincaré altrimenti difficilmente decifrabili.

1.2 *Jules-Henri Poincaré*

È ben noto che non vi sia pressoché alcun terreno del sapere fisico e matematico che Jules-Henri Poincaré non abbia toccato: dall'ottica all'elettromagnetismo, dal calcolo delle probabilità agli studi sulle equazioni differenziali. Senza alcun dubbio la sua produzione scientifica ha costituito un'opera di immenso valore che, ancora a oggi, viene presa in considerazione dagli specialisti dei diversi settori.

Sul piano filosofico Poincaré è stato invece uno dei primissimi scienziati epistemologi che, con un'opera di alta divulgazione scientifica concretizzatasi nella pubblicazione di articoli e raccolte, ha cercato di aprire a un pubblico non specialistico gli aspetti filosofici che soggiacciono ad alcune delle sue ricerche scientifiche. Benché però Poincaré abbia goduto di una grande fama in vita e la sua reputazione sia conosciuta tanto negli ambienti scientifici che nei circoli filosofici, dopo la morte il suo nome sembra essere caduto parzialmente nell'oblio rispetto a quello di molti altri scienziati del XX secolo.

Una spiegazione di ciò può trovarsi nel fatto che la "rivoluzione scientifica" del Novecento, che ha avuto inizio con la teoria della relatività ristretta ed è proseguita con la nascita della fisica quantistica, ha catalizzato l'attenzione di coloro che hanno sviluppato una riflessione filosofica sul sapere scientifico contemporaneo, spostando inevitabilmente l'interesse sui nomi di chi viene direttamente collegato a questi eventi scientifici.

Tra questi nomi spesso Poincaré non è comparso e sebbene questa tendenza sembra attualmente in cambiamento, ciò non toglie che si sia creata una tradizione di pensiero e una conseguente immagine della scienza contemporanea che tende a vedere in Poincaré l'ultimo degli scienziati moderni Questa convinzione, che tuttavia da subito è apparsa in contraddizione con l'estrema modernità dei suoi scritti scientifici, ha contribuito alla costruzione di una griglia interpretativa abbastanza complessa, in cui la modernità scientifica del pensiero di Poincaré viene contrapposta a una sua presunta arretratezza filosofica[31]. A ciò si aggiunge il

[31] DONALD GILLES, "Poincaré: conservative methodologist but revolutionary scientist", *Philosohia Scientiae*, 1996, I: 59-67. In quest'articolo, ad esempio, Gilles contrappone il carattere rivoluzionario delle ricerche scientifiche di Poincaré alla sua prospettiva filosofica, considerata conservatrice e ancorata a un'idea di scienza ancora ottocentesca. In questa direzione va anche l'interpretazione di: ISRAEL GIORGIO, MENEGHINI MARTA, "The 'Essential Tension' at Work in

convenzionalismo, chiave di lettura unica attraverso cui il suo pensiero è stato interpretato.

A questo proposito è necessario precisare che il termine "convenzionalismo" non è mai stato usato direttamente da Poincaré né in riferimento a soggetti specifici né tantomeno in riferimento al proprio pensiero. Solo le interpretazioni successive hanno utilizzato questo termine che, ben al di là dall'essere un puro espediente retorico per classificare il pensiero di Poincaré, ha assunto con il tempo un valore performativo.

Nella maggior parte dei casi l'intera produzione filosofica di Poincaré è stata riportata al convenzionalismo e ciò ha comportato un livellamento di distinzioni e sfumature presenti nel suo pensiero. Per Poincaré le "convenzioni" sono inoltre di natura differente in geometria e fisica. Tuttavia spesso si è cercato di offrire una lettura generale che permettesse di tornare a un unico convenzionalismo e che consentisse di vedere alcune convenzioni come "casi particolari" di una cornice teorica generale. Senza dubbio l'analisi del termine convenzione nelle diverse declinazioni che assume costituisce un elemento fondamentale per la comprensione del pensiero di Poincaré. Tuttavia ciò non legittima né a estendere quest'elemento a tutto il suo pensiero né a utilizzarlo come concetto chiave che lo riassuma nella sua totalità.

Il pensiero epistemologico di Poincaré è estremamente complesso e, forse più di altri, non si presta a sintesi. Da un lato è estremamente complicata la sua esposizione, mai sistematica e affidata sempre ad articoli riorganizzati, solo in un secondo momento, in raccolte. Dall'altro ci si scontra con le naturali difficoltà di un pensiero in continuo progresso, mai concluso e che anzi cerca costantemente di trovare nei più recenti progressi scientifici spunti per nuove riflessioni. Questa complessità implica che il pensiero di Poincaré sia difficilmente inseribile in una griglia predefinita che rischia di esserne solo una riduzione.

Per quanto riguarda invece il lato scientifico Poincaré appare come uno dei protagonisti delle grandi rivoluzioni del ventesimo secolo. Ben nota, soprattutto negli ultimi anni, è la questione riguardante la relatività ristretta e le pubblicazioni

Qualitative Analysis: A Case Study of the Opposite Points of View of Poincaré and Enriques on the Relationship between Analysis and Geometry", *Historia matematica*, 1998, *25*: 379-411. Di questo articolo si parlerà più diffusamente nel prossimo capitolo.

di Poincaré antecedenti a quella di Einstein. In effetti sono rintracciabili articoli di Poincaré che già a partire dal 1897 anticipano alcuni degli aspetti poi ripresi dalla relatività speciale e nel 1905 Poincaré pubblica, sui *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, una sintesi di *Sulla dinamica dell'elettrone* [32], articolo poi pubblicato completamente nel 1906 sui *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*[33]. No si ha qui intenzione di entrare nel vivo della questione alla quale peraltro sono stati dedicati notevoli studi[34]. Preme però sottolineare che essa non va risolta semplicemente sul piano tecnico e storico ma va presa in considerazione anche la cornice teorica in cui essa è inserita. Si scopre allora che nel caso di Poincaré il passaggio dalle trasformazioni di Galilei a quelle di Lorentz cela una profonda critica alla meccanica e ai parametri su cui essa si fonda che Poincaré esterna apertamente in un suo articolo epistemologico[35] e che ritorna in *La fin de la matière*[36], conclusione aggiunta alla seconda edizione di *La Science et l'Hypothèse*. Nella formulazione di Poincaré trova quindi spazio un aspetto filosofico-naturale che vede nell'elettromagnetismo una forma alternativa alla

---

[32] POINCARE J.-H., "Sur la dynamique de l'électron", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1905, CXL: 1504-1508. Questo articolo compare il 5 giugno 1905 mentre quello di Einstein è del 30 giugno dello stesso anno.

[33] POINCARÉ J.-H., "La dynamique de l'électron", *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1906, XXI, pp. 126-177. Questo articolo giunge in realtà alla redazione della rivista nel luglio del 1905, quindi poco dopo la pubblicazione di Poincaré sui *Comptes Rendus*.

[34] Si vedano ad esempio: EDMUND TAYLOR WHITTAKER, (1953), "The Relativity Theory of Poincaré and Lorentz", in *A History of the theories of Aether and Electricity. The Modern Theories 1900-1926* (London: Nelson, 1953) pp. 27-77; ANATOLII ALEKSEEVICH LOGUNOV, *On the articles by Henri Poincaré "On the dynamics of the Electron"*, (ed. originale in russo) (Moscow: Moscow University Press, 1988), trad. inglese a cura di G. Pontecorvo, *On the articles by Henri Poincaré "On the dynamics of the Electron"* (Dubna: Publishing Department of the Joint Institute for Nuclear Research, 1995); trad. francese a cura di V. Petrov e Christian Marchal, *Sur les articles de Henri Poincare "Sur la dynamique de l'electron". Le texte fondateur de la Relativite, en langage scientifique moderne*, ONERA Pub, 2000-1; GIANNETTO E., "The Rise of Special Relativity: Henri Poincaré's Works Before Einstein", *Atti del XVIII congresso di storia della fisica e dell'astronomia*, pp. 171-207; ARTHUR L. MILLER, "A study of Henri Poincaré's Sur la dynamique de l'électron" in *Archive for History of Exact Sciences*, 1973, X: 207-328; MILLER A. L., "Why did Poincaré not formulate special relativity in 1905?" in JEAN LUIS GREFFE, GERHARD HEINZMANN, KUNO LORENZ (eds.), *Henri Poincaré. Science et phlosophie*, (Berlin-Paris: Akademie-Blanchard, 1996) pp.6 9-100.

[35] POINCARE J.-H., "L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique", *Bulletin des sciences mathématiques*, 1904, 28, 2ème série: 302-324; pubblicato anche in *La revue des idées*, 1ère année, (15 novembre 1904), pp. 801-814; pubblicato inoltre in Poincaré, *La valeur de la science* (Paris: Flammarion, 1905 cap. VII, VIII e IX).

[36] POINCARE J.-H., "La fin de la matière", *Athenaeum*, 17 février 1906, 4086: 201-202. Dal 1907 integrato anche nel cap. X di ID., *La Science et l'Hypothèse* (Paris: Flammarion, 2ème edition 1907).

meccanica per esprimere l'essenza dei fenomeni naturali. Non sembra quindi di poter vedere in Poincaré l'espressione di posizioni filosofiche conservative.

Fatte queste premesse, il tentativo che qui si cercherà di portare avanti sarà quello di vedere in che modo egli affronti il problema dei tre corpi e come la scoperta delle dinamiche caotiche abbia influenzato la formazione del suo pensiero. Ciò non coincide con il tentativo di creare una nuova sintesi che semplicemente si differenzi dalle altre nella chiave interpretativa offerta. Si cercherà soltanto di ricostruire il percorso di uno degli elementi che hanno segnato la produzione scientifica e filosofica di Poincaré tentando di mettere in particolare evidenza come esso possa contribuire a spiegare alcuni passaggi di quest'ultima.

L'obiettivo di questa analisi è mostrare in che termini Poincaré possa essere considerato l'ultimo *savant universel* nella misura in cui la sua riflessione sulla scienza si trova ad affrontare le grandi questioni filosofiche poi dimenticate dal pensiero scientifico. Ciò non rende però lecito considerarlo semplicemente come l'ultimo geniale esponente della scienza moderna.

1.2.1 La vita

Jules Henri Poincaré nasce a Nancy il 29 aprile 1854[37]. Il padre Léon, medico, è professore presso la facoltà di medicina di Nancy, la madre Eugénie Launois è originaria della piccola città di Arrancy. Dal racconto di Paul Appell, Poincaré si distingue nel liceo di Nancy sia per le sue doti letterarie che per il suo talento matematico emerso, per la prima volta, al quarto anno[38]. Ciò nonostante dopo aver conseguito il suo baccalaureato in lettere il 5 agosto 1871 egli supera con voti non molto brillanti l'esame di baccalaureato in scienze tenutosi il 7 novembre 1871. In seguito, dopo aver vinto il primo premio al concorso generale di matematica

---

[37] Sulla vita di Poincaré, si vedano ad esempio: PAUL APPELL, *Henri Poincaré* (Paris: Plon, 1925);G. Julia, "Henri Poincaré, sa vie et son œuvre" in *Le livre du centenaire de la naissance de Henri Poincaré 1854-1954* (Paris: Gauthier-Villars, 1955) pp. 165-173; JEAN DIEUDONNE "Poincaré, Jules-Henri" in CHARLES COULSTON GILLESPIE *Dictionary of Scientific Biography*,17 Vols, vol. 11/12 (New York: Scriber's Sons, 1981) pp. 51-61; ARNOLD DENJOY, "Un savant français: Henri Poincaré" *Revue Philosophique de la France et de l'Etranger*, 1920, XC: 321-350; FRANCESCO SEVERI "Enrico Poincaré e la sua opera" in: POINCARE, *Antologia di Scritti* (Firenze: L'Arco, 1949) pp. 7-42.

[38] Cfr. APPELL P., *Henri Poincaré* (cit. nota 37) p. 16-19.

elementare, Poincaré seguirà, nell'anno accademico 1872-1873, il corso speciale di matematiche presso l'*École forestière*. È qui che farà la conoscenza di Appell ed è sempre qui che le sue capacità matematiche cominceranno a farsi notare. Victor-Zéphirin Elliot, ricercatore incaricato di tenere il corso, parla di Poincaré come di un "mostro in matematematica" sottolineando però la sua difficoltà nel comunicare i risultati raggiunti dovuta, soprattutto, alla tendenza a sorvolare, nelle dimostrazioni, sui particolari ritenuti superflui[39]. Di fatto la lacunosità delle dimostrazioni di Poincaré resterà una caratteristica della sua produzione matematica e ne determinerà la scarsa ricezione nonché l'attuale difficoltà di lettura. Questo stile conciso, poco incline a dilungarsi in elementi considerati meri dettagli, riflette una personalità schiva e solitaria che porterà Poincaré a non avere allievi che possano realmente raccoglierne l'eredità scientifica.

Nel 1873 Poincaré viene ammesso all'*École Polytechnique* dove rimarrà fino al 1875. Il 19 ottobre dello stesso anno si iscriverà all'*École des Mines*, dove terminerà i suoi studi nel 1878 venendo nominato *ingénieur ordinaire des mines* di terza classe. L'anno successivo prenderà servizio presso le miniere di Vesoul, dove tuttavia rimarrà per poco tempo poiché, dopo essersi addottorato in matematica nel 1879[40], il 1 dicembre dello stesso anno verrà incaricato di tenere il corso di analisi matematica alla *Faculté des Sciences* di Caen. Anche la permanenza in questa istituzione non sarà particolarmente duratura, Poincaré verrà infatti nominato nel 1881 *maître des conférences* di Analisi alla *Faculté des Sciences* della Sorbona. Negli anni immediatamente successivi egli inizia a pubblicare i suoi studi sulle equazioni differenziali e comincia a manifestare un primo interesse esplicito per il problema dei tre corpi[41]. Sempre in questi anni sono collocabili i celebri studi sulle equazioni differenziali a coefficienti algebrici che conducono Poincaré alla scoperta dei gruppi fuchsiani e da lì a quella delle funzioni che restano invarianti rispetto alle sostituzioni di tali gruppi, ovvero le funzioni fuchsiane. L'intuizione di Poincaré lo porta a riconoscere inoltre

---

[39] Cfr. *Ivi*, p. 21; cfr. CORRADO SINIGAGLIA, "Introduzione" in POINCARÉ, *La Scienza e l'Ipotesi* (Milano: Bur, 2003) pp. V- XXXVI in particolare p. V-VII.

[40] POINCARE, *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partialles* (Paris: Gauthiers-Villars, 1879) contenuta anche in J.-H. POINCARE, *Oeuvres*, XI vols. (Paris, Gauthier-Villars: 1916-56) vol. 1 pp. LX-CIXXX.

[41] POINCARE J.-H., "Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps", *Bullettin astronomique*, 1884, 1: 64-76.

l'isomorfismo tra i gruppi fuchsiani e le trasformazioni della geometria di Lobačevskij. Nel frattempo la sua fama si diffonde negli ambienti accademici europei e il suo nome raggiunge le personalità più influenti dell'ambiente matematico dell'epoca. Nel 1885 gli viene affidato il corso di *Meccanica e Fisica sperimentale*, mentre nel 1886 sostituisce Gabriel Lippmann alla cattedra di *Fisica matematica e Calcolo delle Probabilità*. Nel 1887 Poincaré viene inoltre eletto membro dell'*Académie des Sciences* nella sezione di Geometria.

Nel frattempo Poincaré coltiva anche i suoi interessi filosofici. Cognato del celebre Émile Boutroux ne frequenta spesso il "circolo", entrando in questo modo in contatto con i diversi orientamenti intellettuali dell'epoca e maturando una vera passione per la "controversia filosofica"[42]. Certamente questi anni sono fondamentali per la formazione filosofica di Poincaré e le influenze (positive o negative) subite nella frequentazione del Circolo di Boutroux non possono essere trascurate nella ricostruzione del suo pensiero epistemologico.

Come si avrà modo di vedere meglio nei prossimi capitoli, nel 1889 Poincaré vince il premio matematico bandito da re Oscar II di Svezia e, nonostante lo scandalo legato alla scoperta di un errore nella memoria da lui presentata[43], il suo nome acquista una notevole celebrità. La vittoria del premio verrà infatti celebrata a Parigi con la nomina di Poincaré a Cavaliere della Legione d'Onore.

L'ultimo decennio del diciannovesimo secolo è particolarmente prolifico per Poincaré. Oltre alla pubblicazione dei tre tomi di *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*[44], egli pubblica infatti tutti i testi relativi ai corsi da lui tenuti alla Sorbonne. L'ampio ventaglio dei soggetti trattati lascia inoltre intendere la vastità degli interessi scientifici di Poincaré e come egli non abbia risparmiato alcun argomento fisico o matematico. Negli anni 1890-1891 pubblica il suo *Electricité et optique*[45], seguito nel 1892 dalla *Théorie mathématique de la*

---

[42] Su questo aspetto: MARY JOE NYE, "The Boutroux Circle and Poincaré's Conventionalism", *Journal of History of Idea*, 1979, vol. 40, n. 1: 107-120; SINIGAGLIA, "Introduzione" (cit. nota 39) p. VII-IX.

[43] Nonostante i tentativi di Mittag-Leffler di insabbiare la scoperta di un errore, di fatto, la notizia trapelò in ambiente accademico, giungendo anche a Karl Weierstrass. Questi aspetti saranno trattati in modo più approfondito nel terzo capitolo.

[44] POINCARE J.-H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* 3 Vols. (Paris: Gauthier-Villars, 1892-1899).

[45] ID, *Electricité et optique* (Paris: Blondin, Jules and Brunhes, Bernard, 1890-1891).

lumière[46], la *Thermodynamique*[47] e la *Théorie de l'élasticité*[48]. A partire dal 1895 Poincaré pubblicherà inoltre un'opera monumentale, in cinque volumi, dedicata all'*Analysis Situs*[49]. A partire dal 1896 occupa la cattedra di *Astronomia matematica e Meccanica celeste*, sempre nello stesso anno pubblica il suo *Calcul des Probabilites*[50] e nel 1899 *La théorie de Maxwell et les oscillations hertzienne*[51].

Sebbene durante questi anni Poincaré non interrompa mai la scrittura di articoli filosofici, molti dei quali pubblicati sulla *Revue de Métaphysique et de Morale*, sarà solo a partire dai primi anni del Novecento che essi verranno raccolti in vere e proprie opere. Nel 1902 egli pubblica *La Science et l'Hypothèse* a cui seguirà *La Valeur de la Science* nel 1905 e *Science et Méthode* nel 1908[52]. Questi testi, oltre a riscuotere un grande successo, costituiscono uno dei primi tentativi di alta divulgazione scientifica unita a una profonda riflessione epistemologica. Quando Poincaré decide di pubblicare questi volumi è ancora nel pieno della sua attività scientifica e da scienziato militante sente con tutta probabilità la necessità di dare una risposta alle critiche antiscientifiche e anti-intellettualiste che provengono dall'ambiente filosofico francese[53].

Nel frattempo la fama di Poincaré è in continua crescita, nel 1908 diventa membro dell'*Académie Française* di cui, nel 1912, diventerà direttore. Dal punto di vista scientifico nel primo decennio del Novecento Poincaré pubblica, come si è già visto, i suoi articoli sulla dinamica dell'elettrone; a questi si aggiungono i tre tomi delle *Leçons de mécanique céleste*, pubblicati tra il 1905 e il 1911[54]. Proprio tra il 1911 e il 1912 egli si interessa inoltre alla nascente teoria dei quanti

---

[46] ID., *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière* (Paris: Georges Carré, 1892).
[47] ID., *Thermodynamique. Leçons professées pendant le premier semestre 1888-1889, par H. Poincaré, membre de l'Institut. Rédigées par J. Blondin, agrégé de l'Université* (Paris: Georges Carré,1892).
[48] ID., *Théorie de l'élasticité* (Paris: Georges Carré,1892).
[49] Per i riferimenti bibliografici vedi cap. 2 nota 13.
[50] POINCARE J.-H., *Calcul des probabilités* (Paris: Gauthier-Villars, 1896).
[51] ID., *La Théorie de Maxwell et les oscillations Hertziennes* (Paris: G. Carré et C. Naud, 1899).
[52] ID., *La Science et l'Hypothèse* (Paris: Flammarion, 1902, 2ème ed. 1907), trad. it vedi nota 118; ID., *La Valeur de la Science* (Paris: Flammarion, 1905) trad. it. a cura di Gaspare Polizzi, *Il valore della Scienza* (Firenze: La nuova Italia, 1994); ID., *Science et Méthode* (Paris: Flammarion, 1908), trad. it. a cura di Claudio Bartocci, *Scienza e Metodo* (Torino:Einaudi, 1997).
[53] Di queste critiche ci occuperemo in modo più approfondito nel quarto capitolo.
[54] POINCARE J.-H., *Leçons de mécanique céleste*, 3 Vols. (Paris: Gauthier-Villars, 1905-1911).

pubblicando, *Sur la théorie des quanta* e *L'hypothèse des quanta*[55]. Poco dopo la pubblicazione di quest'ultimo articolo Poincaré muore improvvisamente nel luglio del 1912 per un'embolia causata da un intervento chirurgico.

L'anno successivo viene pubblicata *Dernières Pensées*[56] opera che, stando alle parole dell'editore[57], rispecchia il progetto di quella che Poincaré aveva pensato come sua quarta raccolta di articoli epistemologici. Diversi anni dopo, nel 1916, nasce il progetto a opera dell'editore Gauthier-Villars di pubblicare una raccolta completa degli scritti di Poincaré. Da questo progetto, che verrà portato a termine solo nel 1956, ha origine *Œuvres de Henri Poincaré*[58], opera in undici volumi che raccoglie, oltre a tutte le sue memorie scientifiche, anche dei documenti inediti e alcuni interventi, di scienziati e filosofi, a lui dedicati.

1.2.2 Le principali interpretazioni del pensiero di Poincaré

Per comprendere e spiegare le interpretazioni attraverso cui è stato letto il pensiero di Poincaré nel corso del Novecento è necessario partire dai suoi contemporanei e, quindi, dalla ricezione che essi ebbero delle sue parole. Tra questi uno dei più illustri è certamente l'allievo di Bergson, Édouard Le Roy (1870-1954), che nel suo saggio *Science et Philosophie*[59] pubblicato sulla *Revue de Métaphysique et Morale* tra il 1899 il 1900 riprende alcune posizioni di Poincaré portandole alle estreme conseguenze. In particolare, nella lettura di Le Roy, lo statuto di convenzioni che Poincaré accorderebbe ad alcuni principi (senza distinzione tra diversi ambiti) li renderebbe del tutto arbitrari, conferendo alla scienza un'essenza nominalista. Le Roy riprende alcuni temi dell'anti-intellettualismo francese già toccati da Bergson, sottolineando in particolare l'incapacità del sapere scientifico di cogliere "la fuggente originalità delle cose"

---

[55] ID., "Sur la théorie des quanta", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1911, CLIII: 1103-1108; ID., "L'hypothèse des quanta", *Revue Scientifique*, 1912, ser. 4, XVII: 225-232. Entrambi questi articoli sono tradotti in italiano da Claudio Bartocci in: ID., *Geometria e Caso. Scritti di matematica e fisica* (Torino: Bollati Boringhieri, 1995) pp. 183-207.

[56] ID., *Dernières Pensées* (Paris: Flammarion, 1913).

[57] *Ivi*, p.1

[58] Vedi nota 40.

[59] ÉDUARD LE ROY, "Science et Philosophie", *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1899, 7: 375-425, 503-562, 708-751 e in *Revue de Métaphysique et de Morale*, 1900,8: 37-72.

comprensibile, piuttosto, solo attraverso l'intuizione. Affidandosi alla sola ragione, la scienza secondo Le Roy si limita a costruire un modello schematico e astratto del mondo che rinuncia a coglierne "la struttura intima e profonda, la vita interiore e l'infinita ricchezza della realtà concreta"[60]. Da questo punto di vista, che Le Roy sostiene traendo diverse argomentazioni a suo favore dalle opere di Poincaré, le leggi scientifiche dovrebbero essere intese come semplici convenzioni linguistiche, stabilite arbitrariamente e aventi come unico scopo quello di fornire una guida pratica *a priori* per orientare lo scienziato nell'azione.

Poincaré, già nell'introduzione di *La Science et l'Hypothèse*, sente la necessità di difendere il proprio pensiero dall'interpretazione deformante di Le Roy, ribattendo che, a proposito delle convenzioni, "libertà non è arbitrio"[61]. In *La Valeur de la Science*, le precisazioni di Poincaré trovano più ampio spazio così come il riconoscimento della matrice anti-intelletualista del nominalismo di Le Roy. Secondo Poincaré il nominalismo di Le Roy attribuisce alla scienza soltanto un valore pratico, riducendola così a una mera regola d'azione. Al contrario, per Poincaré: "[…] è la conoscenza lo scopo e l'azione il mezzo"[62]. Poincaré mette anche in evidenza la profonda contraddizione dell'anti-intellettualismo che, svolgendo una profonda critica all'utilizzo del discorso come veicolo di conoscenza si condanna, implicitamente, all'incomunicabilità[63]. Nell'ultimo capitolo ci soffermeremo in modo più dettagliato sul complicato rapporto tra il pensiero di Poincaré e le critiche anti-intellettualiste. Per il momento basti sottolineare che Poincaré respinge chiaramente l'interpretazione nominalista, precisando che le convenzioni non hanno alcun carattere di arbitrarietà.

Evidentemente però le parole di Poincaré non hanno avuto una grande ricezione, almeno in Italia, dato che nel 1906 il matematico italiano Federigo Enriques intitola uno dei paragrafi del suo *Problemi della Scienza, Il nuovo nominalismo di H. Poincaré*[64]. Tra le righe si intuisce che anche Enriques, come Le Roy, confonde "libertà" con "arbitrarietà" arrivando quindi a considerare le

---

[60] *Ivi*, 558 (traduzione mia).
[61] Cfr. POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'Ipotesi* (cit. nota 39) p. 5.
[62] Cfr. ID., *Il valore della Scienza* (cit. nota 52) p. 160.
[63] Cfr. *Ivi*, p. 157.
[64] FEDERIGO ENRIQUES, *Problemi della Scienza* (Bologna: Garzanti, 1906, 2ª ed. ampliata 1909, rist. 1989) in particolare p. 154 della ristampa.

convenzioni (Enriques fa peraltro riferimento solo alla geometria) come coincidenti con "sistemi arbitrari"[65]. Nonostante quindi Poincaré prenda subito le distanze da qualsivoglia nominalismo, esso caratterizza comunque la ricezione del suo pensiero presso i suoi contemporanei.

L'introduzione del termine "convenzionalismo" avviene diversi anni dopo la morte di Poincaré a opera, tra gli altri, di Hans Reichenbach. Nel suo *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre* del 1928[66], egli infatti accomuna la prospettiva filosofica di Poincaré a quella dei suoi predecessori Riemann e Helmholtz all'interno di generico "convenzionalismo" secondo il quale la scelta di una geometria per la descrizione dello spazio si accompagna sempre a una definizione coordinativa su cui si fondano le misure. Si noti come nella lettura di Reichenbach il convenzionalismo sia, essenzialmente, geometrico senza che vengano fatte delle distinzioni tra le convenzioni della geometria e quelle della fisica. Inoltre, senza distanziarsi molto dai suoi predecessori, anche Reichenbach vede in Poincaré l'esponente di una forma estrema di nominalismo. Egli ritiene infatti che secondo il pensiero di Poincaré sia impossibile pronunciarsi circa la reale struttura geometrica dello spazio fisico che, piuttosto, viene misurato secondo delle definizioni arbitrarie.

È invece strumentalista l'interpretazione che avanza Karl Popper. Secondo il filosofo tedesco, che dedica alcune riflessioni a Poincaré sia in *Logik der Forschung* che in *Conjectures and Refutations*[67], la filosofia di Poincaré condividerebbe con il pensiero di altri come Duhem, Mach, Hertz e Eddington la convinzione che la comprensione profonda della realtà, andando oltre le apparenze, sia di fatto al di fuori della portata e degli obbiettivi della scienza

---

[65] *Ivi*, 155.

[66] HANS REICHENBACH, *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*, (Berlin & Leipzig: De Gruyter, 1928); pubblicato anche in Gesammelte Werke Bd. 2, Vieweg Verlag, Braunschweig 1977; tr. ingl. a cura di M. Reichenbach, *Philosophy of Space and Time*, (New York: Dover Pubblcation, 1958); tr. it. dall'inglese a cura di A. Carugo, Filosofia dello spazio e del tempo (Milano: Feltrinelli, 1977).

[67] KARL POPPER, *Logik der Forschung*, (Vienna: Springer, 1934), tradotto in inglese dallo stesso autore qualche anno dopo, *The Logic of Scientific Discovery*, (Berlin: Springer, 1959), trad. it. a cura di M.Trinchero, *Logica della scoperta scientifica* (Torino: Einaudi, 1970); Id., *Conjectures and Refutations* (London: Routledge and Kegan Paul, 1969) trad. it. a cura di G. Pancaldi, *Congetture e confutazioni*,(Bologna: Il mulino, 1972).

fisica. In particolare anche Popper sembra attribuire una certa arbitrarietà alle convenzioni di cui parla Poincaré che verrebbero adottate in funzione dell'unico criterio di semplicità. Il convenzionalismo sarebbe inoltre secondo Popper epistemologicamente inaccettabile dato che proprio in funzione della loro arbitrarietà le convenzioni non sarebbero falsificabili. Al contrario, per Poincaré i principi della fisica vengono smentiti dall'esperienza, seppure non nel modo diretto teorizzato da Popper.

Ernst Nagel, nel suo *The Structure of Science*[68] offre un'interpretazione critica del pensiero di Poincaré che, a suo avviso, non sarebbe capace di distinguere tra una *geometria pura* e una *geometria applicata*. Se infatti è condivisibile la tesi convenzionalista a proposito della geometria pura (quindi l'intertraducibilità e l'impossibilità di considerarla vera o falsa) essa diventa invece inaccettabile per quanto concerne la geometria applicata. Nagel fa particolare riferimento all'argomento della parallasse usato da Poincaré per negare l'esistenza di un *experimentum crucis* che consenta di decidere quale sia la reale geometria dello spazio fisico. Al contrario, secondo la lettura datane da Nagel, il convenzionalismo di Poincaré porterebbe a considerare la geometria come un modello attraverso cui viene descritto lo spazio fisico e, qualora quest'ultimo dovesse mostrare delle incongruenze con tale modello, esso sarebbe comunque salvabile attraverso la fabbricazione di ipotesi *ad hoc*.

Sempre sull'esempio della parallasse si fonda l'interpretazione di Adolf Grünbaum contenuta nel suo *Philosophical problems of Space and Time*[69]. Secondo Grünbaum, il convenzionalismo di Poincaré si riduce a una visione convenzionalista del concetto geometrico di "congruenza" che, a sua volta, stabilisce un'interdipendenza esclusivamente linguistica tra la teoria geometrica dei corpi solidi e la teoria ottica di propagazione della luce. Come infatti Poincaré mette in evidenza, nel descrivere la parallasse, la "linea retta" in astronomia non è altro che "la traiettoria del raggio luminoso"; quindi un risultato empirico

[68] ERNST NAGEL, *The Structure of Science: Problems in the Logic of Scientific Explanation* (New York: Harcourt, Brace & World, 1961) trad. it. a cura di C. Sborgi e A. Monti, *La struttura della scienza. Problemi di logica della spiegazione scientifica* (Milano:Feltrinelli, 1968, rist. 1980).
[69] ADOLF GRÜNBAUM, *Philosophical Problems of Space and Time*, (New York: Alfred Knopf, 1963) si farà qui riferimento alla seconda edizione ampliata (Dordrecht: Reidel, 1973).

contrario alle aspettative può tanto mettere in discussione l'applicabilità fisica della geometria euclidea, quanto l'effettiva rettilineità del raggio luminoso. Rinunciare alla seconda ipotesi è per Poincaré la via più percorribile. Di conseguenza, egli conclude, la geometria non ha nulla da temere dall'esperienza. Nell'interpretazione di Grünbaum la conclusione di Poincaré porta a salvare la geometria euclidea attraverso una rimetrizzazione dell'esperienza. Grünbaum si concentra sul significato "linguistico" delle parole di Poincaré e sottolinea come, a suo avviso, attribuire il concetto di "linea retta" a oggetti che vengono considerati dalla geometria ordinaria come delle "linee curve" coincide con la scelta di una metrizzazione alternativa [70]. Questo slittamento linguistico costituirebbe l'ancora di salvezza della geometria euclidea e la garanzia della sua applicabilità allo spazio fisico. La tesi di Grünbaum può dunque essere riassunta nel seguente modo: Poincaré nega che qualsivoglia esperimento possa in alcun modo falsificare la geometria euclidea, essa non ha nulla da temere dall'esperienza, infatti sarà sempre possibile interpretare lo spazio fisico in termini euclidei attraverso una sua rimetrizzazione. Questa avviene attraverso quello che può essere considerato uno slittamento semantico, un *recasting* degli stessi contenuti fattuali che tiene sempre aperta la strada a un'interpretazione euclidea dello spazio fisico. Grünbaum arriva dunque a concludere che: "[…] il mantenimento della geometria euclidea attraverso una rimetrizzazione, affermato da Poincaré, implica un'interdipendenza esclusivamente linguistica della teoria geometrica dei corpi solidi e della teoria ottica dei raggi luminosi"[71]. Grünbaum non condivide la lettura nominalista del convenzionalismo data fino ad allora. Al contrario, l'idea di una possibile rimetrizzazione dello spazio fisico come conseguenza dei risultati ottenuti dall'esperimento della parallasse apre la porta a un empirismo geometrico moderato.

Ciò che accomuna le interpretazioni del pensiero di Poincaré viste finora è che tutte prendono in considerazione esclusivamente l'aspetto geometrico del convenzionalismo. Esso nasce dunque da una generalizzazione, spesso

[70] Secondo Grünbaum Poincaré sarebbe debitore di questa visione, che ha come presupposto l'idea che non possa esistere una metrica intrinseca dello spazio, a Berhnard Riemann. L'influenza di Riemann su Poincaré è innegabile, tuttavia è da sottolineare che Poincaré prende esplicitamente le distanze dalla prospettiva epistemologica di Riemann che considera "empirista".
[71] GRÜNBAUM A., *Philosophical Problems of Space and Time* (cit. nota 69) p. 119, traduzione mia.

deformante come nel caso del nominalismo, delle convenzioni geometriche a tutto il pensiero di Poincaré. Inoltre in nessuna di queste letture vi è un reale esame del ruolo che l'esperienza gioca, secondo Poincaré, all'interno della scelta degli assiomi, così come nelle convenzioni fisiche.

Una prima distinzione tra convenzionalismo geometrico e convenzionalismo fisico è invece riconosciuta recentemente da uno dei più illustri interpreti di Poincaré: Jerzy Giedymin.

Nei suoi articoli e testi dedicati all'argomento[72] Giedymin critica le precedenti interpretazioni del convenzionalismo[73]. In primo luogo a suo avviso il pensiero geometrico di Poincaré non deve essere accostato a quello di Riemann, da cui Poincaré stesso prendeva le distanze collocandolo tra gli empiristi, quanto a quello di Sophus Lie[74]. In particolare Giedymin sottolinea l'influenza che le ricerche di Sophus Lie, ma anche di Julius Plücker (1801-1868), Jean-Victor Poncelet (1788-1867) e Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), sulla interscambiabilità delle geometrie hanno esercitato sul convenzionalismo di Poincaré[75]. Giedymin è inoltre tra i primi a mettere in evidenza che in Poincaré non si parla di uno "spazio fisico". L'esperienza, in Poincaré, è sempre e solo orientata sui corpi, mentre la

---

[72] JERZY GIEDYMIN, *Science and Convention* (Oxford: Pergamon press, 1982); Id., "On the origin and significance of Poincaré's Conventionalism", *Studies in History and Philosophy of Science*, 1977, 8, No. 4: 271-300; Id., "Geometrical and Physical Conventionalism of Henri Poincaré in Epistemological Formulation", *Studies in History and Philosophy of Science*, 1991, 22: 1-22; Id., "Conventionalism, the Pluralist Conception of Theories and the Nature of Interpretation", *Studies in History and Philosophy of Science*, 1992, 23: 423-443.

[73] In particolare Giedymin si richiama a un principio di dimostrazione totale secondo il quale tutta l'opera di Poincaré dovrebbe essere presa in considerazione nella valutazione critica del suo pensiero. A questo proposito si veda: LAURENT ROLLET, «The Grünbaum-Giedymin Controversy Concerning the Philosophical Interpretation of Poincaré's Geometrical Conventionalism» in: Zamiara, K. (ed.), *The Problems Concerning the Philosophy of Science and Science Itself* (Poznan: Wydawnictwo Fundacji Humaniora, 1995) pp. 225-274.

[74] Cfr. GIEDYMIN J., "On the origin and significance of Poincaré's Conventionalism" (cit. nota 72) pp. 284-285. In particolare qui Giedymin sottolinea come Poincaré nel suo *Sur les hypothèse fondamentales de la géométrie* a proposito dell'origine degli assiomi della geometria rifiuti sia la prospettiva empirista sia quella kantiana a priorista. Per quanto concerne la visione empirista, che ricondurrebbe sul terreno dell'esperienza l'origine degli assiomi, Poincaré utilizza l'espressione "faits experimentaux" che sarebbe la traduzione di "einfache Tatsachen" espressione usata invece da Riemann proprio per indicare la natura degli assiomi. Di conseguenza, secondo Giedymin, Poincaré prenderebbe le distanze da una visione empirista di cui Riemann farebbe parte.

[75] In particolare Giedymin fa qui riferimento al principio di trasformazione di Lie, secondo cui i teoremi di una geometria possono sempre essere tradotti in quelli di un'altra. A sua volta esso poggerebbe sul *teorema di reciprocità* di Poncelet-Gergonne. Cfr. GIEDYMIN J., "On the origin and significance of Poincaré's Conventionalism" (cit. nota 72) pp. 287-288.

nozione di spazio ha esclusivamente un carattere teorico-geometrico. Secondo Giedymin, inoltre, lo spazio geometrico di cui parla Poincaré trova la sua essenza nel concetto di "gruppo" che deve essere visto come un elemento centrale per la comprensione del convenzionalismo[76]. Per quanto concerne il convenzionalismo geometrico Giedymin sembra condividere la tesi nominalista per cui le geometrie non sarebbero altro che sistemi linguistici complessi i cui concetti, presi dall'esperienza, vengono poi innalzati allo status di principi convenzionali. Questa prospettiva porta Giedymin a intendere il convenzionalismo geometrico come un caso particolare di un più ampio convenzionalismo fisico. Egli parla infatti di una comune visione della fisica di Hamilton-Hertz-Poincaré che costituirebbe un quadro più ampio all'interno del quale collocare il convenzionalismo[77]. In particolare, secondo Giedymin, Poincaré sarebbe stato condizionato da quella prospettiva epistemologica, condivisa da Hamilton, Helmholtz e Hertz, secondo cui ogni teoria fisica è in realtà una famiglia di teorie equivalenti da un punto di vista osservativo che condividono la medesima struttura matematica[78]. Gli unici elementi in cui le teorie della famiglia differiscono sono le ontologie a esse sottese che, però, risultano essere sperimentalmente indistinguibili[79].

Vi sarebbe inoltre, alla base del convenzionalismo di Poincaré, una "fisica dei principi" secondo cui, come già accade per gli assiomi della geometria, i principi della fisica sarebbero delle generalizzazioni di asserzioni empiriche elevate allo *status* epistemologico di convenzioni[80].

Sebbene Giedymin sia il primo, tra gli interpreti di Poincaré, a distinguere tra un convenzionalismo fisico e un convenzionalismo geometrico, l'impressione è

---

[76] Anche in riferimento alla nozione di gruppo Giedymin sottolinea la fondamentale influenza dei lavori di Sophus Lie e in particolare la *Theorie der Transformationsgruppe* del 1873.

[77] Cfr., GIEDYMIN J., "Geometrical and Physical Conventionalism of Henri Poincaré in Epistemological Formulation" (cit. nota 72) p. 1.

[78] Per questo motivo, dice Giedymin, Poincaré riterrebbe la relatività ristretta di Einstein come equivalente alla nuova meccanica di Lorentz. Cfr., ID., "Geometrical and Physical Conventionalism of Henri Poincaré in Epistemological Formulation" (cit. nota 72) p. 15.

[79] Per quanto riguarda il convenzionalismo geometrico a ciò si aggiungerebbe, sempre secondo Giedymin, una visione della scienza contaminata dalla teoria evoluzionista e in particolare dal riconoscimento che la verità non costituisce l'unico criterio di selezione scientifica ma che, a essa, si accompagna sempre l'utilità.

[80] Mentre questo processo è adatto a spiegare il convenzionalismo fisico di Poincaré le cose sembrano essere diverse per quanto riguarda invece il convenzionalismo geometrico. In questo caso, infatti, non sembra che Poincaré parli di idealizzazioni empiriche innalzate allo *status* di convenzioni.

che in realtà i due vengano riassunti all'interno di una visione unica, che sintetizza le loro diverse caratteristiche. Senza alcun dubbio Gyedimin offre una delle più complete analisi del convenzionalismo geometrico, individuando l'importanza della nozione di gruppo e l'influenza determinate di Lie. Allo stesso tempo sembra però non condivisibile l'idea che le convenzioni geometriche abbiano un'origine empirica, così come l'interpretazione generale per cui il convenzionalismo geometrico è ricondotto a un caso particolare di un più ampio convenzionalismo fisico. In realtà nell'opera di Poincaré la differenza di *status epistemologico* tra le convenzioni geometriche e quelle fisiche sembra ben marcata e può essere ricondotta a un diverso ruolo giocato dall'esperienza nelle due discipline.

Un'ultima interpretazione del pensiero di Poincaré è quella di Elie Zahar che vedrebbe nel convenzionalismo una forma di "realismo strutturale". Di questa interpretazione, che tocca più da vicino i temi trattati in questa ricerca, si parlerà più diffusamente nel quarto capitolo.

2 PREATER QUANTITATEM

Lo sviluppo di un approccio qualitativo

2.1 *Leibniz e Poincaré*

In una delle sue più importanti opere, *Stabilité structurelle et Morphogénèse*[1], René Thom introduce il concetto di analisi qualitativa cercando di sintetizzare, in poche righe, la scarsa considerazione di cui essa gode nella tradizione scientifica classica: "L'utilizzo del termine qualitativo ha nella scienza – e nella fisica soprattutto – un aspetto peggiorativo: un fisico mi ha ricordato, non senza una certa veemenza, le parole di Rutherford: 'l'accordo qualitativo tra una teoria e l'esperienza non esprime che un accordo grossolano (*Qualitative is nothing but poor quantiative*)'"[2]. Tuttavia, nonostante questa "pessima reputazione", l'importanza di un approccio qualitativo-geometrico, che passi attraverso una rivalutazione del concetto di "forma", sembra, se non proprio dimostrabile, quanto meno argomentabile. Thom parla allora di una "[…] tendenza naturale della mente a dare alla forma un valore intrinseco"[3].

Scopo del presente capitolo è quello di analizzare, da una prospettiva storico-epistemologica, questo "valore intrinseco" in riferimento alla produzione scientifica di Henri Poincaré cercando, inoltre, di mettere in evidenza come esso costituisca una base indispensabile al suo studio del problema dei tre corpi. Si tenterà, quindi, di comprendere come l'idea di "studio qualitativo" possa nascere da una valutazione critica dell'analisi quantitativa, dal riconoscimento della sua

[1] RENE THOM, *Stabilité structurelle et Morphogénèse: essai d'une théorie générale des modèles* (Paris: Intereditions, 1977).

[2] "L'usage du terme qualitatif a en Science – en Physique surtout – un aspect péjoratif; et un physicien m'a rappelé, non sans véhémence, le mot de Rutherford: «l'accord qualitatif d'une théorie et de l'expérience n'exprime qu'un accord grossier (*Qualitative is nothing but poor quantiative*)". *Ivi*, p. 4, traduzione mia.

[3] "[…] tendance naturelle de l'esprit à donner à la forme d'une courbe une valeur intrinsèque" *Ivi*, p. 4.

parzialità e del suo sostanziale riduttivismo. A prescindere dall'indiscusso valore scientifico che l'approccio qualitativo ha dimostrato nel corso del ventesimo secolo[4] si ritiene di notevole interesse filosofico cercare di comprenderne le origini epistemologiche, mettendo in evidenza come la nozione di "forma" venga riaffermandosi nella prospettiva qualitativa, ponendo l'accento su quelle proprietà globali spesso trascurate dall'approccio analitico-quantitativo.

Come sottolinea Ivar Ekeland, è nell'utilizzo stesso dei sistemi di equazioni differenziali che è possibile cogliere il sostrato epistemologico della scienza classica[5]. L'idea che un fenomeno fisico, ad esempio il moto di un corpo nello spazio, possa essere descritto ricorrendo a un sistema di equazioni differenziali perfettamente integrabile, rispecchia l'illusione "classica" che ogni evento fisico possa presentare caratteristiche generali di prevedibilità e stabilità. Illusione, appunto, che trova una fedele traduzione nell'idea che a ogni minima variazione delle condizioni iniziali corrisponda un'altrettanto minima variazione degli stati

---

[4] Numerosi sono, nella seconda parte del ventesimo secolo, coloro che hanno contribuito allo sviluppo dell'approccio qualitativo. Tra tutti, si collegano in modo particolare ai temi che stiamo trattando, Stephen Smale (1930) e René Thom (1923-2002). In entrambi i casi infatti l'importanza dell'approccio geometrico-qualtitativo appare di primaria importanza; nel caso di Smale, in particolare, esso si ricollega alla trattazione delle dinamiche caotiche. La teoria delle catastrofi di Thom invece, da un punto di vista epistemologico, svolge la funzione di una "eidétique descriptive géométrique" (come la definisce Petitot) che punta alla comprensione del caotico, dell'indescrivibile, attraverso il descrivibile, ponendo in evidenza come il primo emerga dal secondo. Lo sviluppo da parte di Thom dell'analisi qualitativa non si ricollega, dunque, ai fenomeni caotici nello stessa prospettiva epistemologica di Smale. Quest'ultimo si pone in diretta continuità con i lavori di Poincaré, Hadamard e Birkhoff, cercando di estenderne i risultati. In particolare Smale riprende gli studi sui "sistemi di equazioni differenziali" chiamandoli "sistemi dinamici" e affrontandoli, proprio come Poincaré, studiandone le caratteristiche topologiche. A Smale si deve l'idea di *stabilità strutturale* che generalizza (a un grado di libertà superiore) i risultati raggiunti da Alexandre Androv e Lev Pontryagin nel 1930 per un sistema con un grado di libertà pari a due. La definizione di Smale implica che un sistema sia strutturalmente stabile se, apportando delle piccole modifiche alle equazioni differenziali che lo caratterizzano, le proprietà topologiche delle curve definite da tali equazioni non subiscono variazioni. L'aspetto topologico rilevante è che la stabilità strutturale (a differenza delle soluzioni stabili) è una caratteristica globale del sistema. Per ulteriori approfondimenti su quanto detto qui in sintesi si veda: LUCIANO BOI, "La conception qualitative des mathèmatiques et le statut épistemologique du concept de groupe" in: JEAN LUIS GREFFE, GERHARD HEINZMANN, KUNO LORENZ (eds.), *Henri Poincaré. Science et phlosophie*, (Berlin-Paris: Akademie-Blanchard, 1996), pp. 315-332; THOM R., *Stabilité structurelle et Morphogénèse: essai d'une théorie générale des modèles* (cit. nota 1); THOM R., *Paraboles et Catastrophes* (Paris: Flammarion, 1983); THOM R., *Prédire n'est pas expliquer* (Paris; Flammarion, 1993); STEPHEN SMALE, "What is global analysis?", *American Mathematical. Monthly*, 1969: 76, *1*, 4-9; IAN STEWARD, *Does God play with dice?* (London: Penguin, 1989); JEAN PETITOT, "Note sur la querelle du détérminisme" in: A.A.V.V, *La querelle du détérminisme* (Paris: Gallimard, 1990), pp. 202-227; ALAIN BOUTOT, *L'invention des formes* (Paris: Editions Odile Jacob, 1993), in particolare pp. 24-30 e pp. 59-64.

[5] IVAR EKELAND, *Le meilleur des mondes possibles* (Paris, Seuil, 2000), pp. 99-136.

del sistema negli istanti successivi. È in questo passaggio che le osservazioni di Ekeland consentono di cogliere il valore epistemologico degli strumenti matematici. L'integrabilità si lega alla stabilità, la quale, a sua volta, presuppone che gli eventi possano essere pensati come organizzati in catene causali in cui ciascuno di essi è strettamente determinato dal precedente ed è del tutto indipendente dagli altri; le catene causali, in altre parole, si "svolgono parallelamente"[6]. I fenomeni naturali, tuttavia, non costituiscono sistemi perfettamente integrabili e non sono scomponibili in serie indipendenti. In primo luogo ci si imbatte nella "storia" dei fenomeni, ovvero nel loro costituirsi attraverso l'azione di elementi che non possono essere considerati come indipendenti e i cui effetti si sommano nel tempo. Da questo punto di vista il limite formale del determinismo classico trova le sue radici nell'utilizzo di equazioni differenziali che, da un punto di vista strettamente tecnico, sono del tutto inadeguate alla presa in considerazione della "storia" dei sistemi. Al contrario questo aspetto trova una sua formalizzazione nelle equazioni integro-differenziali di Vito Volterra (1860-1940), ovvero in equazioni che prendono in considerazione la storia globale di un sistema. In secondo luogo la scoperta delle soluzioni singolari mette in crisi un altro aspetto formale del determinismo, quello legato all'esistenza e l'unicità delle soluzioni. Dal momento infatti che questo postulato viene smentito dai risultati di Joseph Boussinesq (1842-1929) e Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886), la prospettiva filosofica del determinismo risultata svuotata sul piano scientifico[7]. Infine,

[6] *Ibidem*.
[7] A questo proposito dei temi qui affrontati ricordiamo il dibattito matematico (con notevoli ricadute filosofiche) sulla meccanica ereditaria che coinvolse Ludwig Boltzmann (1844-1906), Vito Volterra (1860-1940) e Emile Picard (1856-1941). In particolare tale dibattito risulta di notevole interesse storico e filosofico in quanto, unitamente ai lavori di Joseph Boussinesq (1842-1929) e Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886) sull'esistenza di soluzioni singolari delle equazioni differenziali, consente di cogliere già all'interno della visione meccanicista dei "casi" di crisi del principio di determinazione laplaciano. In Volterra in particolare sembra comparire la consapevolezza che la dimensione temporale, nello studio dei fenomeni fisici, gioca un ruolo di primaria importanza contribuendo a determinare "le condizioni inziali" di tali fenomeni; il fatto stesso che una conoscenza esatta di queste condizioni sia possibile solo attraverso la conoscenza completa della "storia" del fenomeno studiato introduce dei margini di indeterminazione. Per maggiori approfondimenti rimandiamo a: GIORGIO ISRAEL, "Il determinismo e la teoria delle equazioni differenziali ordinarie", *Physis*, 1991, *I*: 305-358. Nella prima parte di questo articolo si approfondisce la differenziazione ideologica soggiacente alla meccanica "ereditaria" nella formulazione di Boltzmann e in quella di Volterra. In particolare si mette in evidenza come Volterra, a differenza di Boltzmann, avesse colto con maggiore

riallacciandosi a quanto sottolineato da Ekeland, non è possibile costruire un'immagine dei fenomeni naturali che parta dalla loro riduzione all'interno di catene causali parallele e indipendenti. Al contrario i fenomeni devono concettualmente essere compresi nella loro interdipendenza.

La scienza classica ha vissuto nell'illusione che i fenomeni naturali fossero riconducibili a sistemi integrabili; questa illusione si è rivelata vana, da ciò deriva la necessità di basi epistemologiche diverse per i nuovi sviluppi scientifici. Il fenomeno naturale, compreso nell'interdipendenza delle molteplici cause che concorrono al suo divenire, non può più essere parcellizzato e snaturato attraverso un processo di riduzione alle cause minime. Ciò implica infatti la perdita di quella che potremmo definire la coerenza interna dei fenomeni: la loro *forma*. Il concetto di forma, nel suo valore geometrico, rimanda alle nozioni di "relazione" e "coerenza"; è nella forma che si esprime l'essenza stessa delle figure geometriche ovvero la relazione tra i punti dello spazio che le costituiscono. Lo studio della forma si delinea, in una prospettiva globale, come lo studio delle relazioni e della coerenza strutturale. Sempre Ekeland, in un'altra opera[8], dedica ampio spazio a Poincaré: quel "genio" che non ha creduto a un mondo perfettamente integrabile[9]. Nello specifico Poincaré, alle prese con i problemi della meccanica celeste, ammette che un fenomeno come l'orbita dei pianeti possa non appartenere all'universo dei calcoli; questo non significa, però, che non appartenga alla matematica. Semplicemente non si maneggeranno più modelli quantitativi ma qualitativi, non più previsioni precise ma idee generali delle diverse possibilità: "Su questa frontiera della conoscenza è dunque necessario un cambiamento d'ottica. Ai metodi quantitativi, precisi ma limitati, si cercherà di sostituire dei

consapevolezza le ricadute dell'introduzione delle equazioni integro-differenziali sul principio di determinazione e più in generale sulla meccanica classica. L'articolo prosegue mettendo in evidenza come nel caso di Boltzmann il punto di vista meccanicista non implicherebbe l'adesione al determinismo stretto. Si veda anche ENRICO GIANNETTO, "Elena Freda, Vito Volterra and the conception of hysterical nature" in: VALERIA P. BABINI, RAFFAELLA SIMILI (eds.), *More than pupils, Italian Women in Science at the Turn of the 20th Century*" (Firenze: Olschki, 2007) pp. 107-123. Per quanto concerne invece i lavori di Joseph Boussinesq e Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant un buon prospetto sintetico è dato da: MICHAEL A.B. DEAKIN, "Nineteen Century Anticipation of Modern Theory of Dynamical Systems", *Archive for History of Exact Sciences*, 1988, *39*: 183-194.

[8] EKELAND I., *Le calcul, l'imprevu* (Paris: Editions du Seuil, 1984).

[9] EKELAND I., *Le meilleur des mondes possibles* (cit. nota 5) pp. 107-108.

metodi qualitativi che permettono di andare più lontano ma offrono un'immagine meno distinta"[10].

L'approccio qualitativo non deve essere visto come una rinuncia, come l'ammissione dell'impotenza umana di fronte all'impenetrabilità delle leggi della natura; al contrario, esso rappresenta la presa di coscienza dei limiti dei metodi classici, della sua incapacità di cogliere l'aspetto globale dei fenomeni. Per questo è necessario sviluppare uno studio qualitativo che consenta di rappresentare gli aspetti formali come essenziali e non accidentali.

Parlando di studio qualitativo si è soliti, inoltre, introdurre una disciplina a esso intimamente connessa: l'*analysis situs* o *topologia*. In effetti, gli sviluppi del metodo qualitativo nel corso del Novecento si rifanno a un approccio geometrico-intuitivo (opposto a quello analitico-deduttivo) che trova la sua base proprio nella topologia; è così per la teoria delle catastrofi di Thom e per gli studi di Stephen Smale sui sistemi dinamici (cfr. nota 4). L'idea che il significato filosofico di una teoria scientifica possa trovarsi nell'indagine delle sue origini è una convinzione centrale nell'analisi che ci si propone di condurre[11] e spinge a interrogarsi sull'origine della topologia e, più in generale, del metodo qualitativo. Da quali problematiche esso emerge? In che misura si contrappone epistemologicamente all'approccio quantitativo?

Le origini dell'approccio qualitativo si intrecciano, per l'appunto, a quelle dell'analysis situs, disciplina la cui fondazione viene in molti casi ricondotta a Poincaré[12]. Se da un punto di vista matematico questa ricostruzione è fondata[13],

[10]"Il faut donc sur cette frontière de la connaissance, un changement d'optique. Aux méthodes quantitatives, précises mais limitées, on essaie de suppléer par des méthodes qualitatives, qui portent plus loin mais donnent une image moins distincte". EKELAND I., "L'œuvre de Poincaré" in EKELAND I., *Le calcul, l'imprevu*, pp. 48-64. Nello specifico, per la citazione qui riportata, si veda: pp. 48-49.

[11] Su questo si veda: FEDERIGO ENRIQUES, *Il significato della storia del pensiero scientifico*, nuova ed. a cura di M. Castellana e A. Rossi (Taranto: Barbieri, 2004). Questa convinzione, in realtà, viene ribadita dal matematico e filosofo italiano in diversi punti delle sue opere più celebri. Tuttavia l'indicazioni qui data fa riferimento a un'opera interamente dedicata all'argomento in cui Enriques spiega al meglio la prospettiva epistemologica che, a suo avviso, caratterizza la storia della scienza.

[12] Tra gli altri si vedano: JOHN STILLWELL "Poincaré, Geometry and Topology" in: GREFFE J., HEINZMANN G., LORENZ K. (eds.), *Henri Poincaré. Science et phlosophie* (cit. nota 4), pp. 231-240; CLAUDIO BARTOCCI "La geometria del sapere" in Henri-Jules Poincaré, *Scienza e metodo* (Torino: Einaudi, 1997), pp. VII-XVII; STEWARD I., *Does God play with dice?* (citato nota 4).

[13] In effetti, dal punto di vista della formalizzazione matematica della disciplina, Poincaré fu il primo a dedicare un'imponente opera all'analisys situs. Si veda infatti: POINCARE J.-H., "Analysis

credo che sotto il profilo epistemologico l'idea di analysis situs (e lo stesso utilizzo di questa espressione) debba essere ricondotta a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), autore noto a Poincaré[14].

Leibniz viene solitamente ricordato per i suoi fondamentali contributi alla nascita del calcolo infinitesimale e allo sviluppo dell'algebra. Tuttavia in una lettera inviata all'amico Christiaan Huygens (1629-1695) l'8 settembre 1679 in cui spiega i propri progressi nel campo dell'algebra, si legge:

> […] nonostante tutto il progresso che ho fatto in questi ambiti, non sono ancora soddisfatto dell'algebra, poiché essa non fornisce né i metodi più rapidi, né le più belle costruzioni della geometria. Per questo credo, per quanto riguarda quest'ultima, che ci serva un altro tipo di analisi, strettamente geometrica e lineare,

---

Situs", *Journal de l'école Polytechnique*, 1895: ser. 2 (1), 1-121 oppure in POINCARE J.-H., *Œuvres*, XI vols. (Paris, Gauthier-villars: 1916-56) vol. VI, pp. 193-288. In realtà già nel 1892 Poincaré pubblica una brevissima nota che tuttavia può essere considerata solo una dichiarazione di intenti: POINCARÉ J.-H., "Sur l'analysis situs", *Comptes rendus de l'academie de France*, 1892: *115*, pp. 633-636 oppure in POINCARÉ J.-H., *Œuvres*, cit., vol. VI, pp. 189-192. Come inoltre sappiamo all'articolo del 1895 faranno seguito altri cinque supplementi: POINCARÉ J.-H., "Complèment à l'Analysis Situs", *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1899: *13*, pp. 285-343 oppure in POINCARÉ J.-H., *Œuvres*, cit., vol VI, pp. 290-337; POINCARÉ J.-H., "Second complèment à l'Analysis Situs", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1900: *32*, pp. 277-308 in POINCARÉ J.-H., *Œuvres*, cit., vol. VI, pp. 387-370; POINCARE J.-H., "Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'Analysis Situs", *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1902: *30*, pp. 49-70 oppure in POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., vol. VI, pp. 373-392; POINCARE J.-H., "Sur les cycles des surfaces algébriques; quatrième complément à l'Analysis Situs", *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1902: 8 pp. 169-214 oppure in POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., vol. VI, pp. 397-434; POINCARÉ J.-H., "Cinquième complément à l'Analysis Situs", *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1904: *18*, pp. 45-110 oppure in POINCARÉ J.-H., *Œuvres*, cit., vol. VI, pp. 435-498. Per eventuali citazioni faremo riferimento a l'edizione di *Œuvres*. Un sintesi molto schematica dei principali risultati raggiunti da Poincaré nello sviluppo dell'analysis situs è rintracciabile in: KARANBIR SARKARIA, "A Look Back at Poincaré's *Analysis Situs*" in: GREFFE J., HEINZMANN G., LORENZ K. (eds.), *Henri Poincaré. Science et phlosophie* (cit. nota 4) pp. 251-258.

[14] Sappiamo infatti che, nel 1881, Poincaré scrisse una postfazione all'edizione della *Monadologie* curata da Emile Boutroux. Avremo modo, nel proseguo di questo questo capitolo, di soffermarci su questo breve scritto che costituisce, da un punto di vista storico, l'unica prova diretta di un interessamento di Poincaré a Leibniz. Sotto il profilo epistemologico, invece, vedremo che sarà possibile riscontrare diverse affinità tra il pensiero dei due. Su questi aspetti e per una rilettura inedita del pensiero di Leibniz si vedano: ENRICO GIANNETTO, "Il tempo della physis" in www.galileivr.it/Docenti/Fisica/articoli/Il%20tempo%20della%20physis.pdf (ultima consultazione: ottobre 2008); GIANNETTO E. "The rise of special relativity: Henri Poincaré's works before Einstein", *Atti del XVIII congresso di storia della fisica e dell'astronomia*:www.brera.unimi.it/old/Atti-Como-98/Giannetto.pdf (ultima consultazione: ottobre 2008). Anche questo secondo articolo, pur concentrandosi specificatamente sulla formulazione di una teoria della relatività ristretta da parte di Poincaré, contribuisce a mettere in luce l'esistenza di un legame epistemologico tra il suo pensiero scientifico e quello di Leibniz. Per quanto invece concerne la postfazione di Poincaré alla *Monadologie* si veda la nota 28.

> che esprima la posizione [situm] esplicitamente così come l'algebra esprime esplicitamente la grandezza[15].

Leibniz prosegue precisando il rapporto di dipendenza esistente tra geometria e algebra e mettendo in evidenza come oggetto di quest'ultima siano i numeri e le grandezze, e non gli angoli, le posizioni (situs) o i movimenti. Leibniz sembra inoltre nutrire la convinzione che l'analysis situs consenta una comprensione migliore di quei risultati che l'algebra raggiunge solo attraverso vie più difficili e faticose. In un breve saggio intitolato proprio *De Analysis Situs*[16] (e contemporaneo alla lettera che abbiamo citato) Leibniz afferma inoltre l'antica origine di tale disciplina i cui primi passi andrebbero ricondotti a Euclide, Marino e Apollonio. Costoro infatti, secondo Leibniz, non facevano uso di una matematica "algebrica", ma di una matematica delle "posizioni"; vi sarebbe dunque anche una priorità storica, non solo teorica, dell'analysis situs sull'algebra. Ciò consente a Leibniz di rafforzare l'idea che anche nelle ricerche algebriche degli analisti a lui contemporanei vi sia un sostrato puramente geometrico: "In generale, la Figura, prima della Quantità, possiede la Qualità ovvero la Forma"[17]. Qualità e forma stanno alla base della quantità e sostituiscono al concetto quantitativo di "uguaglianza" quello qualitativo di "similitudine".

---

[15] "[…] apres tous les progres que j'ay faits en ces matieres, je ne fuis pas ancore content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pourquoy lors qu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre Analyse proprement geometrique ou lineare, qui nous esprime directement, situm, comme l'Algebre esprime magnitudem. Et je croy d'en voir le moyen, et qu'on pourroit representer des figures et mesme des machines et mouvemens en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs". Questa lettera di Leibniz a Huygens è rintracciabile in CHRSTIAAN HUYGENS, *Œuvres complètes de Christiaan Huygens,* 22 vols. Vol 8, (La Haye: Société Hollandaise des sciences, 1888) pp. 214-218, in particolare per la citazione riportata si veda p. 216. Alla lettera si accompagna inoltre un complemento rintracciabile a pp. 219-224. Una traduzione inglese è invece rintracciabile in GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ, "Studies in a Geometry of Situation with a letter to Chrisitan Huygens" in *Philosophical papers and letters,* ed. by Leroy E. Loemker (Dordrecht-Boston: Reidel Publishing Company, 1969) pp. 248-258; trad. it. mia. Un commento storico a questa lettera e ai successivi scritti su una "geometria della posizione" in Leibniz è rintracciabile in: AITON ERIC, *Leibniz,* trad it. a cura di M. Mugnai (Milano: il Saggiatore, 1991) pp. 117-120.

[16] LEIBNIZ G. W. "De analysi Situs" in LEIBNIZ G. W. *Mathematische Schriften,* 7 voll. (Hildesheim, Zurich, New York: Georg Olms verlag, 2004) vol. 5, pp. 178-183. Si veda anche la traduzione ingese: "On analysis situs" in LEIBNIZ G. W., "Studies in a Geometry of Situation with a letter to Chrisitan Huygens" (cit., nota 15) pp. 254-257. Come specificato da Loemker nella nota 12 di pagina 258, questo saggio di Leibniz non è datato ma è strettamente legato agli studi geometrici di quegli anni.

[17] "Figura in universum *praeter quantitatem continet qualitatem seu formam*", *Ivi,* p. 179 (corsivo mio, trad. it. mia).

Proprio questa nozione, per Leibniz, diviene fondamentale nell'analysis situs; due figure simili non presentano le stesse dimensioni, bensì le stesse proporzioni, vale a dire che i punti che le costituiscono si trovano nelle medesime relazioni reciproche. Esse, a meno che non vengano messe a diretto confronto, risultano dunque indiscernibili[18]. La grande utilità matematica di un approccio qualitativo emerge, secondo Leibniz, anche nelle sue potenzialità e, a proposito di una matematica del qualitativo, egli scrive: "Mi piace chiamarla Analysis Situs, poiché essa esprime direttamente e immediatamente la posizione così che le figure, sebbene non siano tracciate, sono disegnate nella mente […]"[19].

L'idea che la descrizione delle leggi di natura possa passare attraverso un "calcolo qualitativo" risulta, a oggi, particolarmente suggestiva e interessante, contribuendo a conferire alla posizione di Leibniz una contemporaneità inaspettata[20].

---

[18] In questo passaggio è possibile rintracciare una delle applicazioni del principio di "identità degli indiscernibili" centrale nel pensiero filosofico di Leibniz. Nell'esempo qui citato l'identità tra due figure simili è strettamente vincolata alla congruenza di proporzioni tra le parti che le compongono. In altri termini possiamo dire che un simile passaggio teorico si vincola, in Leibniz, alla visione relazionale dello spazio in opposizione a quella assolutistica di Clarke e Newton. Proprio al carteggio Clarke-Leibniz risale, infatti, la disputa sulla natura del concetto di spazio. Leibniz chiama lo spazio assoluto di Clarke (e Newton) un "idola" (richiamandosi esplicitamente agli *idola tribus* e *idola specus* di Bacone) che cade sotto i colpi del principio di ragion sufficiente (sia da un punto di vista logico che teologico). Lo spazio si definisce, al contrario, come possibile relazione tra le sostanze o, meglio, come *ordine* delle possibili correlazioni tra di esse. La nozione di ordine è centrale nella comprensione del concetto di spazio e ne sintetizza l'essenza. Inoltre le parti che compongono lo spazio non sono distinguibili le une dalle altre; lo spazio è uniforme e si definisce solo come possibilità di rapporti, nulla di più. Alla luce di ciò il principio di identità degli indiscernibili e la visone relazionale dello spazio si intrecciano in una reciproca implicazione, che consente, inoltre, di cogliere meglio l'importaza attribuita da Leibniz allo sviluppo dell'analysis situs. Per quanto riguarda il carteggio Leibniz-Clarke si veda: HORACE G. ALEXANDER (ed.), *The Leibniz-Clarke correspondence*, (Manchester and New York: Manchester University Press, 1956). Qui è possibile rintracciare sia le lettere tra Clarke e Leibniz in cui appunto viene discussa la natura del concetto di spazio che un'interessante introduzione critica dell'autore. Più sul tema dello spazio in Leibniz si vedano invece: CHANA B. COX, "A defence of Leibniz's spatial relativism", *Studies in History and Philosophy of Science*, 1975, 6 *(2)*: 87-111; MARIO MUGNAI, "On Leibniz's theory of relations" in *Leibniz: questions de logique* (Wiesbaden-Stuttgart: Steiner, 1988), pp. 145-161; GURSKY SOLOMON, "Leibniz and topological equivalence", *Dialogue* 1993, 32 *(4)*: 721-724.

[19] "Itaque Analis situs appellare placet, quod ea situm recta et immediate explicat, ita ut figurae etiam non delineatae per notas in animo depingantur, et quicquid ex figuris imaginatio intelligit empirica […]". LEIBNIZ G. W., "De analysis situs" (cit. nota 16) pp. 182-183.

[20] Sulla contemporaneità del pensiero scientifico di Leibniz si veda: LAURENCE BOUQUIAUX, *L'harmonie et le chaos. Le rationalisme leibnizien et la "nouvelle science"* (Paris: Editions de l'institut supérieur de philosophie Louvain-La-Neuve, 1994). In questo testo l'autore mette in risalto come alcune prospettive filosofiche (oltre che scientifiche) di Leibniz si collochino in linea con i nuovi orizzonti epistemologici della "nouvelle science" e in particolare con l'esigenza di elaborare un pensiero scientifico che vada oltre il riduttivismo classico. Inoltre, come precisa lo

La prospettiva di una matematica qualitativa si colloca, inoltre, in linea con la nota critica di Leibniz al meccanicismo cartesiano[21]. Come sostiene Bouquiaux (riprendendo alcune osservazioni di Belaval):

> Leibniz intende rifiutare la dittatura del quantitativo, senza per questo abbandonare la fisica matematica [...]. La matematica che progetta Leibniz – e in certa misura costruisce – è qualcosa come la Mathesis Universalis di cui parla Descartes, qualcosa che supera la matematica cartesiana. È già anche la nostra matematica.

---

stesso autore, è possibile sostituire l'idea di un Leibniz ultra-razionalista che si pone ai vertci del pensiero classico-razionalista, con quella di un Leibniz che si pone ben al di là di questo ideale, comprendendone "les prétentions démesurées". Per una lettura di Leibniz, alla luce degli sviluppi epistemologici più recenti soprattutto in relazione alla controversia determinismo/caso nella scienza contemporanea si veda, oltre al testo già citato: ILYA PRIGOGINE, ISABELLE STENGERS, "La querelle du détérminisme, six ans après" in: A.A.V.V., *La querelle du déterminisme* (Paris: Gallimard, 1990), pp. 247-265.

[21] Da un punto di vista strettamente formale la critica di Leibniz al meccanicismo cartesiano si traduce nel sostituire il principio di conservazione della quantità di moto (*mv*) al principio di conservazione della forza viva (mv^2, *vis viva* o energia cinetica). Come mette bene in evidenza Bouquiaux, la critica epistemologica di Leibniz si concentra soprattutto sull'incapacità del meccanicismo cartesiano di riconoscere nei corpi un qualsiasi principio di azione vedendo in essi solo materia inerte. In questo modo il meccanicismo cartesiano, secondo Leibniz, offre un'immagine del mondo depauperata di quella ricchezza e di quel dinamismo che ne costituiscono l'essenza (proprio per questo il meccanicismo di Descartes arriva, secondo Leibniz, anche a infrangere il principio di identità degli indiscernibili). La sua riforma della dinamica si radica, dunque, nella necessità d'introdurre, nella spiegazione del movimento dei corpi, un principio metafisico (quello appunto della forza viva) che consenta di cogliere l'elemento "reale" del movimento che distingue un corpo in moto da uno in quiete e che mette in evidenza la nattura intrinsecamente attiva dei corpi. Come nota Gueroult, l'espressione mv^2 è una formula matematica che oltrepassa l'intuizione geometrica e che diventa misura di un effetto futuro (quello di un corpo di elevarsi all'altezza che esigerà tal forza); in ciò si manifesterebbe la sua natura metafisica. Per approfondimenti su queste tematiche riamandiamo a: LEIBNIZ G. W., *Discours de Métaphysique*, introduction par André Robinet (Paris: Vrin, 1994). Nella proposizione XVII (pp.54-57 dell'edizione segnalata) di questo breve testo risalente al 1686 si trova la distinzione da parte di Lebniz tra quantità di movimento e forza viva; quest'ultima deve essere stimata come grandezza dell'effetto prodotto. BOUQUIAUX L., *L'harmonie et le chaos. Le rationalisme leibnizien et la "nouvelle science"* (cit. nota 20), pp. 139-145; YVON BELAVAL, *Leibniz* (Paris: Vrin, 1962 seconda edizione) pp. 233-240; BELAVAL Y. *Leibniz critique de Descartes* (Paris: Galimard, 1960), soprattutto a pp. 494-496, mette in evidenza come la riforma della dinamica cartesiana da parte di Leibniz si inserisca nel più ampio contesto di emancipazione dalla meccanica cartesiana; FRANÇOIS DUCHENSNEAU, *La dynamique de Leibniz* (Paris: Vrin, 1994) in particolare pp. 133-146, in quest pagine l'autore, commentando la *Brevis Demostratio*, pone in rilievo le distinzioni fisiche e metafisiche tra quantità di moto e forza motrice. ANTONINO DRAGO, *La riforma della dinamica secondo G.W. Leibniz* (Benevento: Hevelius, 2003), questo testo offre una traduzione e commento di alcuni testi di Leibniz posteriori al 1690 contribuendo a mettere in luce i punti centrali della divergenza tra la dinamica di Leibniz e quella cartesiana; GIANNETTO E., *Saggi di storie del pensiero scientifico* (Bergamo: Bergamo University Press, 2004) pp. 235-247, in queste pagine l'autore mette in evidenza i caratteri generali della "fisica globale" di Leibniz come contrapposta alla "fisica locale" di Newton e sottolinea l'importanza, alla luce dell più recenti teorie fisiche, di alcune intuizioni della dinamica leibniziana. MARTIAL GUEROLT, *Dynamique et métaphysique leibniziennes. Suivi d'une Note sur le principe de la moindre action chez Maupertis* (Paris: Les Belles Lettres, 1934) in particolare, p. 47, un estratto di questa pagina è rintracciabile in BOUQUIAUX L., cit., pp. 143-144.

> Questa *mathesis* non si riduce all'algebra, che tratta della quantità in generale. Essa concerne tutto ciò che cade nel dominio dell'immaginazione per quanto ciò sia conosciuto distintamente. Essa non tratta solamente la quantità ma anche la disposizione delle cose. La nozione di ordine, benché sia qualitativa è, per Leibniz, matematica. [...] La verità di una figura risiede nel suo aspetto qualitativo più che nel suo aspetto quantitativo.[22]

Nel superamento del riduttivismo quantitativo di matrice cartesiana l'approccio qualitativo di Leibniz vede dunque nell'ordine delle relazioni (che potremmo chiamare la forma) l'aspetto essenziale dei fenomeni fisici il cui lato quantitativo costituisce, piuttosto, un accidente. È facile comprendere come questo aspetto del pensiero filosofico ed epistemologico di Leibniz rispecchi il suo intero sistema teorico: l'importanza attribuita ai concetti qualitativi di ordine e relazione si ritrova, all'interno della polemica con Clarke, nel rifiuto dello "spazio assoluto", così come la critica al meccanicismo cartesiano si rispecchia nel sistema delle monadi[23]. La nozione di "relazione" inoltre, seguendo l'interpretazione che di essa

[22] "Leibniz entend refuser la dictature du quantitatif, sans pour cela abandoner la physique mathématique [...]. La mathématique que projette – et, dans une certaine mesure, construit – Leibniz, c'est quelque chose comme la *Mathesis Unversalis* dont parle Decartes, quelque chose qui déborde la mathématique cartésienne. C'est aussi, déjà, notre mathématique. Cette *mathesis* ne se reduit pas à l'algèbre, qui traite de la quantité en général. Elle concerne tout ce qui tombe sous l'immagination, pour autant que cela soit conçu distinctement. Elle ne traite pas seulement de la quantité, mais aussi de la disposition des choses. La notion d'ordre, pour être qualitative, n'en pas moins, chez Leibniz, mathématique. [...] La vérité d'une figure réside dans son aspect qualitatif plus que dans son aspect quantitatif": BOUQUIAUX L., *L'harmonie et le chaos. Le rationalisme leibnizien et la "nouvelle science"* (cit. nota 20), p. 160. Nella nota 88 della pagina citata, Bouquiaux, concordando con quanto già sostenuto da Mates, ritiene che si debba stare bene attenti a non confondere l'analysis situs di Leibniz con la topologia contemporanea. In particolare, come egli stesso specifica, in Leibniz non si fa mai il minimo accenno a figure invarianti sotto deformazioni continue (dette anche topologiche). Non intendo mettere in discussione questa valutazione da un punto di vista strettamente matematico. Tuttavia, come ho già specificato in precedenza, credo che sotto il profilo epistemologico l'analysis situs possa essere considerata come un'autentica anticipazione della topologia. Sicuramente, in Leibniz, essa deriva dalla necessità di porre l'accento su quell'elemento qualitativo (espressione della ricchezza e della varietà dei fenomeni) che l'aproccio algebrico e quantitativo non può cogliere. Allo stesso modo, avremo modo di vedere, in Poincaré lo sviluppo della topologia non è riconducibile solo a esigenze di carattere tecnico (nonostante sia indiscutibile che anche queste giocano il loro ruolo) ma anche alla necessità di creare una disciplina che renda conto del contenuto intuitivo della nozione di continuo solitamente trascurato da una eccessiva aritmetizzazione della matematematica. Per il testo di Mates citato si veda: BENSON MATES, *The philosophy of Leibniz* (Oxford: Oxford university press, 1986) in particolare p. 240.

[23] La monade diventa espressione di un principio di attività intrinseco dei corpi che è del tutto estraneo alla meccanica cartesiana. Leibniz rifiuta il meccanicismo riduttivsta di Descartes che non riconosce ai corpi alcuni principio d'azione. Al contrario la monade diventa l'elemento minimo di tale attività e l'espressione di una forza generatrice interna ai corpi dalla quale non è possibile prescindere nel loro studio. Vedremo inoltre come, nella postfazione alla *Monadologie* scritta da

ne offre Deleuze, si pone come elemento fondamentale della matematica "barocca" leibniziana in opposizione al punto cartesiano[24]. In quest'ottica è possibile una comprensione più profonda anche del calcolo differenziale sviluppato da Leibniz e della sua esigenza filosofica (o meglio ancora metafisica) di offrire una matematica "più ricca" rispetto alla *mathesis universalis* di Descartes, una matematica capace di cogliere il dinamismo intrinseco dei fenomeni naturali[25].

Ricapitolando si possono isolare alcuni aspetti centrali nel pensiero di Leibniz e nell'importanza che egli attribuisce allo studio qualitativo. Innanzi tutto egli percepisce il riduttivismo intrinseco dell'approccio quantitativo e il suo poggiare, spesso inconsapevole, su constatazioni qualitative. In secondo luogo la centralità che egli attribuisce a nozioni come "forma" e "relazione" si inserisce nel più

Poincaré, il sistema meccanico di Leibniz si differenzi da quello di Descartes in virtù di un profondo legame tra le parti le quali non possono in alcun modo essere considerate come indipendenti le une dalle altre (come invece accadeva nella mecanica cartesiana).

[24] "[…] divisio continui non considerando ut arenae in grana, sed ut chartae vel tunicae in plicas, itaque licet plicae numero infinito, aliae aliis minores finat, non ideò corpus unquam in puncta sue minima dissolventur", questa citazione, ripresa da LEIBNIZ G.W., *Opuscoles et fragments inédits de Leibniz* (Paris: Alcan, 1903) p. 615, viene tradotta e utilizzata da Deleuze a dimostrazione di come, in Leibniz, l'idea di elemento ultimo non possa essere ricondotta a quella di punto. Il continuo, se viene dissolto (discretizzato) in un insieme di punti perde, potremmo dire, la sua stessa essenza, ovvero la sua coerenza. La piega, contrariamente al punto, costituisce l'elemento ultimo che è ancora latore di questa coerenza, di questo che non è un legame delle parti, ma un tutto le cui parti sono inseparabili; l'ordine della piega rispecchia l'ordine del tutto, e per quanto ogni piega possa nascondere al suo interno altre pieghe (in questa espressione sembra riecheggiare la dimensione frattale di Mandelbrot), per quanto si possa procedere in un ripiegamento infinito l'ordine si ripete infinitamente. Per approfondire questi aspetti nell'opera di Deleuze: GILLES DELEUZE, *Le Pli. Leibniz et le Baroque* (Paris: Les Éditions de Minuit, 1988), pp. 5-19, trad. it, *La piega. Leibniz e il Barocco* (Torino: Enaudi, 1990). In particolare si veda il cap. I: "I ripiegamenti della materia", pp. 5-21.

[25] A ciò si ricollega, inoltre, la distinzione che intercorre tra il tempo della dinamica leibniziana e quello della meccanica cartesiana. Come nota Belaval il tempo di Descartes, somma di istanti discontinui, è un tempo "morto" in cui ogni instante, concepito come separato da ogni altro, è frutto di un'artificiosa astrazione geometrica. Il tempo leibniziano non è formato da istanti indiffereziabili e indipendenti, al contrario è un "differenziale" (*dt*) in cui tra due istanti successivi non esiste più indipendenza, discontinuità. In questo tempo, la sostanza conserva dentro di sé gli istanti anteriori e porta, dentro di sé, il presentimento degli istanti successivi: "[…] le present est gros de l'avenir, le futur se pourroit lire dans le passé, l'eloigné est exprimé dans le prochain". Come nota Giannetto, questo aspetto, che si ritrova anche nel sistema leibniziano delle monadi (le monadi infatti hanno memoria della loro storia e il tempo, insieme allo spazio, si definisce come relazione possibile tra le monadi) consente a Leibniz di anticipare una dinamica integro-differenziale che come abbiamo visto in precedenza (nota 7) giocherà un ruolo centrale nella nascita della scienza contemporanea. La concezione del tempo di Leibniz è dunque centrale nella comprensione epistemologica del calcolo differerenziale da lui sviluppato. Per approfondire questi aspetti: BELAVAL Y., *Leibniz* (cit. nota 21) p. 236; GIANNETTO E., *Saggi di storie del pensiero scientifico* (cit. nota 21) p. 242. Per quanto concerne la citazione riportata si veda: LEIBNIZ G.W., "I principi razionali della natura e della grazia" in *Monadologie*, trad. it. con testo originale a fronte a cura di Salvatore Cariati (Milano: Bompiani, 2001) p. 50.

ampio contesto del suo sistema fisico e metafisico emergendo in modo evidente nella polemica con Clarke sullo spazio assoluto e nelle critiche al meccanicismo cartesiano. Infine, l'idea che l'aspetto qualitativo rappresenti l'essenza dei fenomeni in opposizione alla contingenza dell'aspetto quantitativo si ritrova nell'idea stessa di monade[26].

Da quanto brevemente detto, si può concludere che nel sistema leibniziano il concetto di qualità assume un valore metafisico grazie alla sua capacità di cogliere l'essenza dei fenomeni riuscendo a renderne l'irriducibile varietà. Sotto il profilo fisico e matematico ciò ricade nella consapevolezza di dover andare oltre la quantità occupandosi, invece, della qualità: ciò può avvenire attraverso l'analysis situs. In uno spazio che non può essere assoluto (un tale spazio contraddirebbe infatti il principio di identità degli indiscernibili) le proprietà qualitative esprimono il differenziarsi intrinseco dei punti nell'ordine delle loro relazioni. Così come nella dinamica la forza viva è espressione fisica e matematica di un principio metafisico, allo stesso modo l'analysis situs si traduce nel tentativo di trattare matematicamente quella nozione di qualità che si configura come essenza metafisica delle sostanze. In entrambi i casi si profila l'idea di una "coerenza

[26] "Cependant il faut que les mondes ayent quelques qualités. Autrement ce ne seroient pas même des Etres. Et si les substances simplex ne differoient point par leurs qualites, il n'y auroit pas moïent de s'appercevoir d'aucun changement dans les choses; puisque ce qui est dans le composé ne peut venir que des ingrediens simples; et les Monades étant sans qualités, seroient indistinguables l'une de l'autre, puisqu'aussi bien elles ne diffèrent point en quantité […]". La distinzione tre le monadi è essenzialmente qualitativa in quanto ogni monade deve distinguersi dalle altre in virtù di una varietà intrinseca che non può essere ricondotta alla sola quantità. Come già accennato una distinzione puramente quantitativa si scontrerebbe contro il principio di indiscernibilità degli identici. Boutroux annota inoltre che nella monadologia la quantità deve essere concepita come un accidente che poggia su un sostrato qualitativo che rappresenta, in definitiva, l'essenza metafisica della monade. La qualità è simbolo di varietà; in Leibniz non si può prescindere da quest'ultima per un'autentica comprensione metafisica della natura. Anche in questo caso, come nel passaggio dalla "quantità di progresso" alla "forza viva" l'esigenza di Leibniz è quella di reintrodurre un principio metafisico in un sistema che non può appiattirsi su soli principi fisici. Come suggerisce Serres, in Leibniz, il termine metafisico rimanda a qualcosa di reale, concreto, che va oltre i fenomeni fisici apparenti; in questi termini la Monadologia è un trattato *metafisico*, e le distinzioni qualitative, essenziali, sono distinzioni concrete. Serres, in virtù di questo primato nelle monadi della qualità sulle quantità, sostiene inoltre che la geometria elementare non può fornire un modello adatto per rappprsentare la struttura della monadologia; un modello più completo è quello offerto da una geometria fondata sulla nozione di *situs*. Per la citazione qui riportata dalla monadologia si veda: LEIBNIZ G.W., *Monadologie* (cit. nota 25) p 62. Il riferimento alla nota di Boutroux è rintracciabile in: LEIBNIZ G.W., *Monadologie*, accompagnée d'éclaircissements par Emile Boutroux (Paris: Delagrave, 1881) nota 4, pp. 144-145. Per quanto concerne invece i riferimenti a Serres: MICHEL SERRES, "Le système de Leibniz et ses modèles mathèmatiques" in: SERRES M., *Etoiles*, tome 1er (Paris: P.U.F.,1968) in particolare p. 309 e p. 318.

interna" che contraddistingue tanto i sistemi dinamici quanto l'idea di spazio e che trova la sua espressione barocca nel concetto di "piega"[27]. Se dunque da un lato è inimmaginabile (e costituirebbe sicuramente un errore storico) vedere nell'analysis situs di Leibniz un'anticipazione matematica della topologia in senso stretto, dall'altro non si può nascondere una notevole affinità epistemologica tra la posizione di Leibniz (in particolare nelle critiche al riduttivismo della scienza cartesiana) e alcune critiche contemporanee che la "nouvelle science" qualitativa muove nei confronti della scienza classica.

Cerchiamo ora di vedere in che misura le argomentazioni fin qui svolte possano ricollegarsi a Poincaré. Come già accennato egli conosce senza alcun dubbio il pensiero filosofico e scientifico di Leibniz; ciò è documentato da uno scritto giovanile inserito come postfazione all'edizione della *Monadologie* curata da Emile Boutroux ed edita nel 1881[28]. La breve *Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz* parte dalla constatazione che "[…] i principi generali che sono a fondamento della meccanica di Descartes sono del tutto differenti da quelli erano ammessi da Leibniz e che lo sono ancora oggi"[29]. In particolare Poincaré sottolinea la differenza tra la conservazione della quantità di moto (mv) – formulata da Descartes – e la conservazione della forza viva (mv^2) formulata da Leibniz; quest'ultima deriva dal principio di conservazione dell'energia totale di un sistema, principio che, come mette in evidenza Poincaré, Leibniz aveva già esplicitamente formulato[30]. Tuttavia le osservazioni di Poincaré

[27]Cfr. DELEUZE G., *Le Pli. Leibniz et le Baroque* (cit. nota 24). Sarebbe inoltre interessante approfondire quale analogia possa intercorrere tra la piega in Leibniz e il concetto di morfogenesi in Thom.

[28] POINCARE J.-H., "Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz" in: LEIBNIZ G.W., *Monadologie*, accompagnée d'éclaircissements par Emile Boutroux (cit. nota 26) pp. 225-231. Purtroppo a causa della dispersione della biblioteca di Poincaré non possiamo ricostruire con esattezza quali e quante opere di Leibniz Poincaré possedesse. Nonostante ciò l'unico documento che abbiamo a disposizione che testimonia un legame diretto tra i due mostra una profonda comprensione da parte di Poincaré degli aspetti epistemologici, oltre che scientifici, della dinamica di Leibniz.

[29] "[…] les principes généraux qui servaient des fondements à la mécanique des Descartes sont absolument différents de ceux qui étaient admis par Leibniz et qui le sont encore aujourd'hui", *Ivi*, p. 225, trad. it. mia.

[30] Poincaré fa qui riferimento a una lettera inviata da Leibniz a Bayle nel 1702: Cfr. POINCARE J.-H., "Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz" (cit. nota 28) p. 230. In realtà, come riportato da Bouquiaux, una formulazione del principio di conservazione dell'energia è già rintracciabile nel 1686 nel testo apparso in *Acta eruditorum*: LEIBNIZ G. W., "Brevis demostratio erroris memorabilis cartesii et aliorum circa legem naturalem, secundum quam volunt a Deo eandem semper quantitatem motus conservar, qua et in re mechanica

non sono solo di natura “tecnica”; nella conclusione della breve nota egli pone infatti l’accento sulle differenze “epistemologiche” intercorrenti tra la meccanica di Descartes e quella di Leibniz. La conservazione della quantità moto, teorizzata dalla fisica cartesiana, implica che la velocità di un “atomo” possa essere variata in direzione ma non in intensità, lasciando dunque inalterata la quantità di moto totale del sistema; ciò presuppone che ogni molecola (o atomo) possa subire delle variazioni senza che esse si ripercuotano in alcun modo sulle molecole vicine. In altre parole il sistema viene considerato come formato da componenti minime indipendenti tra loro[31]. Al contrario, nella meccanica leibniziana, se la velocità di una molecola varia in direzione e intensità – se non avvengono altre variazioni nel sistema – la *quantité de progrès* è destinata ad aumentare o diminuire. Affinché tale quantità non cambi è necessario che subentrino delle variazioni compensative nel sistema e che la variazione di movimento di un atomo sia accompagnata dalla variazione uguale e contraria di uno o di più altri atomi[32]. È dunque un principio di coerenza e di relazione tra le componenti di un sistema meccanico che segna, per Poincaré, la distinzione epistemologica tra la fisica di Descartes e quella di Leibniz: “[…] è dunque necessario che ci sia una certa armonia nei fenomeni

abutuntur”, *Acta eruditorum*, 1686, pp. 161-3. Poincaré annota, inoltre, che Leibniz distignue tra quantità di moto e quantità di progresso. La differenza tra le due è che mentre la prima prende in considerazione solo il modulo della quantità data la seconda ne considera invece anche verso edirezione. Questo fa si che, in un sistema formato da più punti materiali, la quantità di moto totale si riduca alla somma aritmetica delle quantità di moto singole, mentre la quantità di progresso totale sia la somma algebrica delle singole quantità di progresso. Per Leibniz, ciò che si conserva, oltre alla vis viva, è la quantità di progresso, non la quantità di moto. Sulla distinzione tra quantità di progresso e quantità di moto si veda: POINCARÉ J.-H., “Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz” (cit. nota 28) pp. 227-229.

[31] Cfr. POINCARE J.-H., “Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz” (cit. nota 28) p. 230. Queste osservazioni di Poincaré sulla meccanica cartesiana lasciano intravedere una critica del tutto simile a quella di cui abbiamo già parlato per quanto riguarda la concezione del tempo cartesiana. In entrambi i casi l’errore fondamentale di Descartes (dalla prospettiva Leibniziana) è quello sottolineato da Deleuze: credere che la distinzioni tra le parti comporti una separabilità tra le parti. La prospettiva cartesiana implica infatti una distinzioni tra le componenti minime che ha, come diretta conseguenza, la loro reciproca indipendenza. Di contro nella visione di Leibniz le parti sono concepite come inseparabili e tale inseparabilità costituisce l’essenza stessa del sistema studiato, ovvero la sua coerenza. Su questi aspetti si veda: DELEUZE G., *Le pli* (cit. nota 24) p. 8, trad. it, *La piega* (cit. nota 24) in particolare pp. 8-9.

[32] Qui è possibile notare come la distinzione tra quantità di moto e quantità di progresso, nonché la conservazione di quest’ultima all’interno di un sistema, siano spiegabili a partire da un principio metafisico: quello di coerenza (e armonia) tra le parti del sistema. La quantità di progresso, quindi, non è latrice soltanto di una distinzione fisica dalla quantità di moto ma di una distinzione (ben più importante) metafisica che traduce l’essenziale coerenza dei sitemi fisici studiati.

meccanici che interessano le differenti parti di un sistema"[33]. Proprio quest'armonia, essenza dei fenomeni fisici che vengono studiati attraverso la costruzione di modelli meccanici, viene perdendosi in un sistema eccessivamente riduttivista come quello cartesiano. Sebbene in forma implicita e senza approfondire troppo la questione, Poincaré sembra aver colto in queste poche righe il cuore del sistema filosofico e scientifico leibniziano: l'importanza conferita alla coerenza tra le parti, alla forma dei fenomeni, all'espressione della loro armonia interna. Questi elementi, come dimostra di aver compreso Poincaré, trovano un'espressione fisico-matematica nel principio di conservazione dell'energia; anche in questo caso fisica e metafisica si rispecchiano l'una nell'altra[34]. L'importanza conferita alla forma e alla relazione si traduce, in Leibniz, nell'esigenza di pensare i fenomeni naturali come dotati di una dinamica intrinseca senza che vengano appiattiti al livello di "materia inerte" come accadeva nel sistema di Descartes.

Forma, relazione, qualità e armonia sono concetti strettamente legati nel sistema leibniziano nel quale, abbiamo già detto, ogni parte riflette il tutto, ogni relazione è espressione della coerenza – e dunque dell'essenza – del sistema stesso. L'armonia prestabilita, non è, in questa prospettiva, sinonimo di una razionalità (divina) strettamente deterministica che informa i fenomeni naturali, ma il manifestarsi di una loro coerenza interna. È difficile stabilire in che termini Poincaré comprenda l'esigenza di Leibniz di introdurre un principio metafisico nella spiegazione dei sistemi fisici, senza dubbio egli coglie però l'essenza

[33] "Il faut donc qu'il y ait une certaine harmonie dans les phénomènes mécaniques qui affectent les différentes parties d'un système". Cfr. POINCARE J.-H., "Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibniz" (cit. nota 28) p. 230, trad. it. mia.

[34] Nel delineare le differenze epistemologiche tra la meccanica cartesiana e la dinamica di Leibniz, Poincaré fa riferimento alla proposizione 80 della Monadologie: "Descartes a reconnu, que les Ames ne peuvent point donner de la force aux corps, parce qu'il y a toûjours la même quantité de force dans la matière. Cependant il a crû que l'ame pouvoit changer la direction des corps. Mais c'est parce qu'on n'a point sû de son temps la loy de la nature, qui porte ancore la conservation de la même direction totale dans la matière. Si il l'avoit remarqué, il seroit tombé dans mon Systeme de l'Harmonie préétablie". Le note di Boutroux si soffermano sulla distinzione tra conservazione della quantità di moto e conservazione della vis viva. Benché, in senso stretto, entrambe si siano dimostrate false, la formulazione di Leibniz della conservazione di una data quantità di energia nel mondo fisico si è rivelata in linea con il principio di conservazione dell'eneriga totale. In questo aspetto Boutroux vede la ricaduta fisica del principio di "armonia prestabilita". Tanto per il passo citato, quanto per le note di Boutroux si veda: LEIBNIZ G.W., *Monadologie*, accompagnée d'eclarissements par Emile Boutroux (cit. nota 26), pp. 185-186. Su questo si veda anche GIANNETTO E., *Saggi di storie del pensiero scientifico* (cit. nota 21) pp. 241-242.

epistemologica del pensiero leibniziano. A queste stesse radici epistemologiche si può ricondurre l'idea di un "metodo qualitativo".

Gli interessi di Poincaré in questo ambito nascono nel campo dell'analisi e nello studio delle equazioni differenziali[35], trovando successivamente un terreno di applicazione sorprendente nello studio del problema dei tre corpi e portando, infine, alla stesura di cinque articoli dedicati all'*analysis situs* concentrati tra il 1895 e il 1905[36].

Nella prefazione del primo di questi articoli si trovano le motivazioni che giustificano, secondo Poincaré, l'utilità dell'analysis situs. Perché – egli si chiede – sostituire il linguaggio dell'analisi con quello della geometria, anche quando questa perde il suo potere evocativo (ovvero quando le sue figure non parlano più alla nostra capacità rappresentativa)? Innanzitutto perché il linguaggio della geometria è più conciso. Lo stile matematico di Poincaré (così come anche quello filosofico) si è sempre dimostrato propenso alla sintesi tanto da penalizzarlo, in più occasioni, compromettendo inoltre la ricezione sia dei suoi lavori matematici che di quelli filosofici[37]. Tuttavia, come si ha modo di leggere nelle successive

---

[35] Per quanto concerne i riferimenti bibliografici a questi lavori rimandiamo al paragrafo successivo in cui sarà loro dedicato più ampio spazio.

[36] Vedi nota 13. E in questi articoli che Poincaré sviluppa gli strumenti fondamentali di quella topologia algebrica che verrà in segutio ripresa e sviluppata nel corso del Novecento. Ciò che si cercherà di mettere in rilievo è come l'esigenza epistemologica di una tale disciplina nasca dalla necessità di offrire una trattazione matematica di aspetti qualitativo-intuitivi la cui ricchezza non viene colta dagli usuali strumenti dell'analisi; a ciò si aggiunge la centralità dei concetti di "forma" e "relazione", basilari nello sviluppo dell'analysis situs.

[37] Quello dell'eccessiva sintesi è un problema ricorrente negli scritti matematici e filosofici di Poincaré e si accompagna alla tendenza a dare per scontati una serie di passaggi "impliciti". Sappiamo, ad esempio, che nell'esame dell'articolo sul problema dei tre corpi, più volte la commissione formata da Mittag-Leffler, Hermite e Weierstrass si imbatté in notevoli problemi di comprensione dovuti proprio all'eccessiva sintesi dello stile matematico di Poincaré. A riprova di ciò, Mittag-Leffler, in una lettera dai toni ufficiosi spedita a Poincaré il 15 ottobre 1888, dice: "Mon cher ami, MM. Hermite, Weierstrass et moi-même nous sommes enfin arrivés au bout avec l'étude de votre mémoire. Je me permetterai de vous confier sous le sceau du plus grand secret que nous sommes de l'opinion unanime que vous avez fait de nouveau un chef d'oeuvre de premier genre et que la publication de votre mémoire sera le commencement d'une nouvelle époque dans la mécanique céleste. Mais je ne veux point vous cacher que l'étude de votre œuvre nous a paru offrir des difficultés fort grandes. Vous omettez très souvent les démonstrations des théorèmes très générals et très difficiles ou vous donnez des indications tellement courtes qu'il faut se tourmenter pendant des jours avant qu'on parvient à mesurer au juste la profondeur de vos idées M. Weierstrass m'a demandé si je n'osais pas vous proposer vu[e] l'amitié dont vous m'avez honoré depuis longtemps de vouloir bien ajouter à votre mémoire avant qu'il soit publié quelques développements sur les points essentiels qui ont été traités jusqu'ici d'une manière trop brève. Je réponds à M. Weierstrass que je n'hésite pas à vous écrire là-dessus parce que je sais bien que vous ne me prendrez pas mal des propositions qui sont faites dans l'intérêt seul de la science et pour faciliter la propagation de vos idées". Un contentuto simile si ritrova anche in una lettera

opere epistemologiche, il desiderio di semplicità, eleganza e sintesi viene considerato da Poincaré una sorta di *condicio sine qua non* della pratica scientifica[38]. Tuttavia, riconosce Poincaré, questo criterio non basta a giustificare il passaggio dal linguaggio dell'analisi a quello della geometria. L'utilità di un nuovo metodo deve essere provata su un altro piano: una sorta di principio di economia metodologico spinge a giustificare l'utilizzo di un nuovo oggetto matematico. Ci sono dei problemi, dice Poincaré, in cui il linguaggio analitico non ha alcuna comodità e per i quali, dunque, risulta comodo passare a un linguaggio geometrico. Ma in cosa consiste, in effetti, il motivo per cui viene utilizzato il linguaggio geometrico? Se, parafrasando Poincaré, la geometria può essere intesa come l'arte di ragionare correttamente su figure grossolane, queste figure devono però rispettare dei criteri precisi e, per quanto le loro proporzioni possano essere modificate, la disposizione reciproca dei punti che le costituiscono non può essere tuttavia sovvertita. L'utilizzo di queste figure ha dunque il compito di farci conoscere quelle relazioni, sussistenti tra gli oggetti studiati, che ricadono in quel ramo della geometria "[…] che chiamiamo Analysis Situs, e che descrive la posizione relativa dei punti e delle linee, senza alcuna considerazione della loro grandezza"[39]; questo dunque è il motivo fondamentale per cui si ricorrere all'analysis situs. Inoltre, precisa Poincaré, sia che si studino figure in uno spazio tridimensionale, sia che si studino figure in uno spazio a più di tre dimensioni le

---

inviata da Hermite a Mittag Leffler il 22 ottobre 1888: "M. Poincaré montre bien la voie et donne des indications, mais laisse considérablement à faire pour combler les lacunes et compléter son œuvre. Souvent, Picard lui a demandé, sur des points d'une grande importance dans ses articles des Comptes Rendus, des éclaircissements et des explications, sans pouvoir jamais rien obtenir qu'une affirmation: 'c'est ainsi, c'est comme cela', de sorte qu'il semble comme un voyant auquel apparaissent les vérités dans une vive lumière, mais en grande partie pour lui seulement". La sintesi viene quindi associata alla genialità dei lavori di Poincaré, ciò non toglie che ne risulti un deficit notevole nella comprensione di molti suoi articoli. Analogamente, negli scritti filosofici, abbiamo visto che lo stile asciutto di Poincaré pone diversi problemi interpretativi (cfr. cap I).

[38] "En résumé, le plus souvent, toute loi est réputée simple jusqu'à preuve du contraire […]. Il faut bien s'arrêter quelque part, et pour que la science soit possibile, il faut s'arrêter quand on a trouvé la simplicité". Questi passi, tratti da *La science et l'hypothèse*, sono solo un esempio di quanto detto. In realtà tanto in quest'opera quanto in *Science et méthode* sono numerosi i passi in cui Poincaré si richiama all'esigenza di formulare leggi semplici, sebbene esse non implichino una realte semplicità della natura. Questo passaggio, di notevole interesse filosofico, vedremo che segnerà in qualche modo la distinzione tra il Poincaré "convenzionalista" e Poincaré "realista". Per i passi citati si veda: POINCARÉ J.-H., *La scienza e l'ipotesi*, trad. it. con testo originale a fronte a cura di Corrado Sinigaglia (Milano: Bompiani, 2003), pp. 222-224.

[39] "[…] que l'on appelle *Analysis Situs*, et qui décrit la situation relative des points des lignes et des surfaces, sans aucune considérations de leur grandeur", POINCARE J.-H., "Analysis Situs" (cit. nota 36) p. 194, trad. it. mia.

relazioni descritte dall'Analysis Situs saranno sempre della stessa natura. Poincaré stesso sottolinea la grande utilità che ha avuto, nella serie di memorie dedicate allo studio delle equazioni differenziali pubblicate tra il 1881 e il 1886, l'utilizzo dell'*Analysis Situs* "ordinaria" e come invece l'*analysis situs generalisée* abbia consentito di trattare le equazioni differenziali di ordine superiore al primo: quelle della meccanica celeste. In poche righe Poincaré traccia la linea che unisce, all'interno dello studio qualitativo, ambiti di ricerca apparentemente distinti. La formalizzazione dell'Analysis situs, la stesura di articoli dedicati a essa, viene per ultima in ordine cronologico, ma l'approccio qualitativo che la contraddistingue permea già i suoi primissimi lavori.

Analizzeremo ora questi primi lavori cercando di vedere come in essi Poincaré introduca, per la prima volta, una distinzione metodologica esplicita tra approccio qualitativo e approccio quantitativo. L'analisi condotta, che non sarà di natura strettamente matematica, si concentrerà piuttosto sugli aspetti epistemologici. Per quanto inevitabilmente parziale, si ritiene infatti che una tale analisi contribuisca a mettere in luce i presupposti filosofici che accompagnano lo sviluppo di nuovi "strumenti" tecnici. Dal punto di vista storico sarà inoltre interessante vedere come Poincaré sviluppi, già nei suoi primissimi lavori, una serie di concetti e strumenti che verranno poi ripresi nello studio del problema dei tre corpi e senza i quali egli non si sarebbe potuto imbattere, seppur fortuitamente, nella "scoperta" del caos.

2.2 *Dal qualitativo locale al qualitativo globale: cicli senza contatto e cicli limite*

Nel 1881, due anni dopo essersi addottorato presso la *Faculté des Sciences de Paris*[40], Jules-Henri Poincaré pubblica, sul *Journal de mathématiques pures et*

[40] POINCARE J.-H., *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partialles* (Paris: Gauthiers-Villars, 1879) contenuta anche in: POINCARE J.-H., *Œuvres*, (cit. nota 13) Vol, 1 pp. LX-CIXXX. Già in questa tesi di dottorato – discussa il primo agosto del 1879 – Poincaré riprende, ampliandoli, alcuni risultati di Briot e Bouquet. La commissione (formata da Gaston Darboux, Jean-Claude Bouquet, Pierre Bonnet) non esprime un giudizio del tutto positivo sulla tesi di Poincaré, forse a causa del suo stile schematico che troppo spesso salta passaggi e procede con uno stile più intuitivo-geometrico che analitico. Nel *rapport de thése* che ci è

appliquées, il *Mémoire sur le courbes définies par une équation differentielle*, prima parte di un vero e proprio trattato che lo occuperà per i successivi cinque anni[41] e che è formato da diciannove capitoli. In questo articolo, per la prima

pervenuto si leggono espressioni come "un po' confuso" o giudizi riguardo al fatto che Poincaré non sia ancora riuscito a esprimere in modo "chiaro e semplice le sue idee". Tra gli altri si vedano inoltre: CLAUDIO BARTOCCI, "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" in POINCARÉ J.-H., *Geometria e caso. Scritti di Matematica e Fisica* (Torino: Bollati Boringhieri, 1995) pp. VII-L; JUNE BARROW-GREEN, *Poincaré and the Three Body Problem* (Providence: American Mathematical Society-London American Society, 1997) pp. 44-45.

[41] Le quattro parti dell'articolo vengono pubblicate tra gli anni 1881-1886. Diamo qui le indicazioni bibliografiche precise di ogni parte: POINCARE J.-H., "Mémoire sur le courbes définies par une équation différentielle (première partie)", *Journal des mathématiques pures et appliquées*, 1881, VII: 375-422, oppure in: POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit. nota 13) vol. 1, pp. 3-44; POINCARE J.-H., "Mémoire sur le courbes définies par une équation différentielle (deuxième partie)", *Journal des mathématiques pures et appliquées*, 1882, VIII: 251-296, oppure in POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit. nota 13) vol. 1, pp. 44-84; POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par les équations différentielle (troisième partie)", *Journal des mathématiques pures et appliquées*, 1885, I: 167-244 oppure in POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit. nota 13), vol.1, pp. 90-161; POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par les équations différentielle (quatrième partie)", *Journal des mathématiques pures et appliquées*, 1886, II: pp. 151-217 oppure in POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit. nota 13) vol. 1, pp. 167-222. È opportuno specificare che molti dei risultati ottenuti da Poincaré in questi articoli vengono anticipati in in cinque "note" trasmesse ai *Comptes rendus de l'Academie des Sciences* comprese tra il 1880 e il 1884. In particolare si tratta di: POINCARÉ J.-H., "Sur les curbes definies par une equation differentielles", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1880, *90*: 673-675, oppure *Œuvres* (cit. nota 13) vol. 1, pp. 1-2, in questa prima nota Poincaré anticipa alcuni dei risultati ottenuti nelle prime due parti di "Sur le courbes" attraverso lo studio geometrico delle curve integrali; POINCARÉ J.-H., "Sur les courbes definies par les equations differentielles", *Comptes rendus de l'Accademie des Sciences*, 1881, *93*: 951-953, oppure *Œuvres* (cit. nota 13) vol. 1, pp. 85-86, in questa nota Poincaré anticipa alcuni dei risultati che si possono ottenere estendendo lo studio qualitativo al caso generale di equazioni differenziali di primo ordine di grado superiore a primo. In particolare vengono anticipati dei risultati che saranno contenuti nella terza parte di "Sur les Courbes" edita nel 1885. POINCARE J.-H., "Sur les courbes définies par les équations différentielles", *Comptes rendus de l'Accademie des Sciences*, 1882, *94*: 416-418 oppure *Œuvres* (cit. nota 13) vol. 1, pp. 159-161; POINCARE J.-H., "Sur les courbes définies par les équations différentielles", *Comptes rendus de l'Accademie des Sciences*, 1882, *94*: 577-578 oppure *Œuvres* (cit. nota 13) vol. 1, pp. 162-163; POINCARE J.-H., "Sur les courbes définies par une équation différentielle", *Comptes rendus de l'Accademie des Sciences*, 1884, *98*: 287-289 oppure *Œuvres* (cit. nota 13) vol. 1, pp. 87-89. Quest'ultime tre note anticipano alcuni dei risutlati che saranno contenuti nella quarta parte di *Sur les courbes* e che rigurdano lo studio qualitativo di equazioni differenziali non lineari di ordine superiore a uno. Nelle pagine successive, qualora dovessimo ricorrere a citazioni tratte dai testi qui indicati faremo sempre riferimento alle edizioni contenute in *Oeuvres*. Per quanto invece concerne la letteratura critica esistente su tale articolo segnaliamo: CHRISTIAN GILAIN, "La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles", *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 1991, XXXIV: 215-242; BARROW-GREEN J., *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 40) pp. 29-41; JEAN MAWHIN, "Poincaré's early use of *Analysis Situs* in non-linear differential equation: Variation around the theme of Kronecker's integral", *Philosophia Scientiae*, 2000, 4 (1): 103-143; BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" in POINCARÉ J.-H., *Geometria e caso* (cit. nota 40) pp. XIII-XV; JEAN- LUC CHABERT, AMY DAHAN DALMEDICO, "Les idées nouvelles de Poincaré" in CHABERT J.- L., DALMEDICO A. (eds.), *Chaos et déterminisme* (Paris: Seuil, 1992), pp. 274-305; JACQUES HADAMARD, "Les equations differentielles" in: HADAMARD J., "L'œuvre mathématique de Poincaré", *Acta Mathematica*, 1921, XXXVII: 203-287, pp.236-252 oppure in POINCARÉ J.-H., *Œuvres*, (cit. nota 13) vol. 11, pp. 187-204; HADAMARD J., "Le problème des trois corps" in: VITO VOLTERRA, HADAMARD J., PAUL

volta, Poincaré introduce esplicitamente la distinzione tra analisi quantitativa e qualitativa.

Studiare le funzioni definite da equazioni differenziali in se stesse, senza cercare di ricondurle a funzioni più semplici, è una questione per Poincaré di "massimo interesse" che consente di far luce su alcune importanti proprietà delle equazioni differenziali. In questo campo, sottolinea Poincaré, si sono già fatti importanti passi avanti, ma solo studiando le funzioni considerate nei dintorni di un punto del piano[42]; è invece necessario procedere a uno studio globale che comprenda tutta l'estensione del piano.

Lo studio completo di una funzione, puntualizza Poincaré, comprende due aspetti: uno qualitativo, l'altro quantitativo. Mentre il primo si interessa allo studio delle proprietà geometriche delle curve definite e, quindi, si focalizza sul loro comportamento nel piano, il secondo riguarda invece il calcolo numerico dei valori assunti dalla funzione.

Poincaré, al fine di far comprendere meglio la distinzione tra qualitativo e quantitativo, ricorre a un'analogia: lo studio delle equazioni algebriche. In questo caso, infatti, è l'applicazione del teorema di Sturm[43] che ci consente di prevedere

---

LANGEVIN, PIERRE BOUTROUX (eds.), *Henri Poincaré l'œuvre scientifique, l'œuvre philosophique* (Paris: Alcan, 1914) pp. 51-114.

[42] Qui Poincaré fa riferimento, in particolare, ai lavori di Cauchy, Fuchs, Briot, Bouquet e Sofja Kovalevskaja, definendoli, inoltre, lavori di "geometri" che egli stesso utilizza come punto di partenza per le sue ricerche. Poincaré sottolinea inoltre come la peculiarità di questi lavori sia essenzialmente quella di aver messo in luce alcune proprietà delle equazioni differenziali in se stesse (secondo appunto un metodo geometrico) aprendo dunque ai "geometri" un territorio dell'analisi solitamente "interdetto". Bartocci ben sottolinea come il termine "geometri" assuma un valore preciso nel pensiero di Poincaré implicando, in matematica, una divisione metodologica che vede da un lato gli "analisti" e dall'altro i "geometri" appunto. Sul valore epistemologico di questa divisione avremo modo di soffermarci in seguito, credo però interessante sottolineare già ora come questa distinzione, potremmo dire, di campo, nasconde probabilmente un diverso approccio epistemologico ai problemi non solo matematici ma anche fisici. Per quanto riguarda il passo di Poincaré a cui qui si riferisce si veda: POINCARÉ J.-H., "Analisi dei propri lavori scientifici sulle equazioni differenziali" in: POINCARÉ J.-H., *Geometria e Caso. Scritti di matematica e fisica* (cit. nota 40), pp. 3-39, pp. 3-8. Il commento di Bartocci che si è citato è nella nota 2 di pagina 3 dell'articolo di Poincaré appena indicato. Una versione in lingua originale del saggio di Poincaré è invece rintracciabile in: POINCARÉ J.-H., "Analyse de ses travaux scientifiques faite par H. Poincaré", *Acta Matematica*, 1921, 38: 36-135.

[43] Jacques Charles-François Sturm (1803-1855), matematico francese di origine tedesca, precettore dei figli di madame de Staël, vinse nel 1827 un premio dell'*Académie de Sciences* per uno studio sulla compressibilità dei liquidi condotto con l'amico Jean-Daniel Colladon (1802-1893). Successivamente svolse anche degli studi sulla velocità del suono in acqua. Dal 1836 divenne membro de l'*Académie des Sciences*, fu professore presso l'école polytechnique e successe a Poisson alla cattedra di meccanica della *Faculté des Science* della *Sorbonne*. La dimostrazione del teorema citato da Poincaré e che porta il suo nome, risale al 1829. Il teorema stabilisce la

il numero di radici reali esistenti. Questa è la parte qualitativa. Il calcolo dei valori assunti da queste radici costituisce invece l'aspetto quantitativo dell'analisi. Analogamente, nello studio di una curva definita da un'equazione differenziale si comincia con il disegnarla e con lo studiarne la forma, se vi siano dei rami della curva chiusi o infiniti. Solo in un secondo momento si passa al calcolo dei valori assunti dalla funzione integrale. Per Poincaré l'analisi qualitativa costituisce la prima parte nello studio di un problema matematico; la parte in cui ancora non si cercano le soluzioni analitiche del problema, offrendone piuttosto una considerazione globale, volta a mettere in evidenza le proprietà formali e relazionali.

L'approccio qualitativo, geometrico, è un approccio intuitivo che, stando alle parole di Poincaré, non sembra opporsi a quello analitico-deduttivo, al contrario si affianca a esso rendendolo più completo[44]. Sembra tuttavia azzardato sostenere che Poincaré non abbia realmente colto il potere innovatore dell'analisi qualitativa e, incapace di spingere fino in fondo la rivoluzione metodologica che essa implica, la utilizzi strumentalmente al fine di potenziare lo studio analitico-quantitativo[45]. Al contrario si ha motivo di ritenere che l'articolo del 1881

possibilità di calcolare il numero di radici reali e distinte in una funzione polinomiale all'interno di un intervallo dato. Nello specifico l'enunciato del teorema dice che: il numero di radici reali e distinte di una funzione polinomiale a coefficienti reali in un intervallo dato [a;b] in cui a e b non sono delle radici è uguale al numero di cambiamenti di segno della successione di Sturm ai confini di questo intervallo. Come inoltre sottolinea Gilain (p. 224 articolo cit. nota 41) nel 1836 venne pubblicato sul *Journal de Mathematiques Pures et Appliquées* un intervento che Sturm lesse all'*Académie des Sciences* nel 1833 intitolato: *Mémorire sur les équations differentielles linéaires du second ordre* nel quale metteva in evidenza che sebbene fosse importante determinare il valore della funzione incognita per un valore isolato della variabile indipente era altrettanto importante stabilire "la marche" ovvero l'andamento di tale funzione. È infatti nello studio delle sinuosità e della forma della curva integrale che è possibile, secondo Sturm, isolare delle proprietà di massimo interesse che riguardano numerosi fenomeni fisici e dinamici. Gilain sottolinea anche che non è possibile stabilire se vi sia una diretta influenza di Sturm su Poincaré (peraltro i loro due lavori vertono su categorie differenti di equazioni differenziali).Tuttavia ritengo che tale eventualità non possa comunque essere eliminata dato che Poincaré dimostra di conoscere alcuni suoi lavori. Per l'articolo di Sturm si veda: JACQUES CHARLES-FRANÇOIS STURM, "Mémorire sur les équations differentielles linéaires du second ordre", *Journal de Mathematiques Purées et Appliquées*, 1836: *I*: 106-186.

[44] In particolare Hadamard (1865-1963) (a p. 240 dell'articolo citato nella nota 42) sottolinea la complementarietà degli studi qualitativi e quantitativi. Egli puntualizza inoltre come l'approccio qualitativo sia stato pressoché ignorato prima di Poincaré. Uniche eccezioni sono alcuni casi sporadici: la dimostrazione del teorema di stabilità dei fludi di Lagrange fatta da Dirichlet (1805-1859), i lavori di Sturm e quelli di Liouville (1809-1882).

[45] Questa è la tesi sostenuta in: GIORGIO ISRAEL, MARTA MENEGHINI, "The 'Essential Tension' at Work in Qualitative Analysis: A Case Study of the Opposite Points of View of Poincaré and Enriques on the Relationship between Analysis and Geometry", *Historia matematica*, 1998, *25*:

costituisca una vera presa di posizione a favore dell'introduzione di un metodo geometrico-intuitivo, volto a completare lo studio dei problemi matematici, affrontati solitamente solo per via analitica[46]. Inoltre sembrerebbe che proprio i

379-411. La tesi centrale dell'articolo è indirizzata a sostenere una contrapposizione metodologica tra l'approccio qualitativo di Poincaré e quello del matematico italiano Federigo Enriques. In particolare si ritiene che Poincaré non abbia compreso le innovazioni legate alle sue ricerche qualitative inserendole all'interno di un programma di ricerca conservativo, legato alla analisi matematica classica: "This is, in fact, the case of Poincaré: he was a traditionalist who, playing the games of classical mathematical analysis, appeared to be a successful innovator. Moreover, from the perspective of his subjective attitude, it is clear that Poincaré systematically minimized the innovative aspects of his theories and never accepted the idea that he was playing with really "new" rules and "new" pieces" (p. 380). Nello specifico gli autori ritengono che l'utilizzo di Poincaré dell'approccio qualitativo sia da ricomprendere all'interno della sua convinzione epistemologica concernente l'impossibilità di rompere definitivamente con dei quadri teorici dati cercando, piuttosto, di allargarli attraverso "forzature" e "modifiche" (p. 384). Non viene messa in discussione l'effettiva originalità dei risultati ottenuti da Poincaré, quanto, mi sembra, la sua capacità di riconoscere il loro aspetto rivoluzionario, considerandoli piuttosto come interni a un programma di ricerca classico: "He operated within a pardigm centered on the idea that the foundamental aim of analysis was the integration of the equation of mathematical physics […] Poincaré viewed qualitative analysis as means for preserving the nucleus of the classical reductionist program, even though it meant "bending the rules" somewhat". Personalmente non condivido pienamente questa lettura epistemologica di Poincaré. Se da un lato infatti Poincaré ammette l'impossibilità di rotture drastiche e definitive nei passaggi tra diverse teorie scientifiche (egli utilizza la metafora della storia di una città, in cui, nonostante alcuni edifici vengano abbattuti e altri nuovi costruiti, l'impianto originario della città rimane spesso rintracciabile) dall'altro non credo che questo implichi la sua adesione a una prostettiva conservatrice. Poincaré, ad esempio, non accetta l'idea di una riduzione meccanicista dei fenomeni fisici e si fa promotore di una spiegazione elettrodinamica alternativa. Su questo si veda: GIANNETTO E., "The rise of special relativity: Henri Poincaré's works before Einstein" in *Atti del XVIII congresso di storia della fisica e dell'astronomia* (cit. nota 14) pp. 181-216. Per quanto concerne il caso dell'analisi qualitativa credo che, rifacendosi sia a quanto Poincaré scrive nel prologo del 1881 sia alla breve analisi critica del 1901 (i riferimenti bibliografici di quest'ultima si possono trovare alla nota 51) è possibile notare come a suo avviso l'analisi qualitativa, caratterizzata da un approccio geometrico-intuitivo, svolga un ruolo complementare a quello dell'analisi quantitativa permettendo lo studio di nuove proprietà. Questo ruolo complementare viene riconosciuto anche nell'articolo di Israel e Meneghini, ma la lettura che viene offerta è quella di una subalternità dell'approccio qualitativo a quello quantitativo-analitico-riduzionista. Non credo che leggendo le parole di Poincaré emerga una tale dipendenza strumentale. Al contrario Poincaré, nell'articolo del 1901 parla dei "[…] resultats que on peut obtenir par d'autres méthodes, car il peut arriver que ce méthodes nous fassent découvrir certains particularités que le dévellopements ne mettraient pas immédiatement en évidence" (p. 55). Sembra dunque che Poincaré utilizzi il nuovo metodo per studiare nuove proprietà delle equazioni differenziali che rimarrebbero, altrimenti ignorate. In questo non credo si possa leggere una professione di fede verso il programma di ricerca classico, quanto invece il riconoscimento dei suoi limiti e della sua incompletezza. Ciò non implica né rivoluzioni drastiche né il completo abbandono dei risultati ottenuti per via quantitativa; piuttosto la necessità di colmare le lacune esistenti. Avremo modo di vedere, nell'ultimo paragrafo, altri aspetti del rapporto Enriques-Poincaré. Inoltre sempre riguardo a un confronto tra i due, su un piano non molto diverso da quello dell'articolo citato, ma in riferimento alle relazioni tra geometria, meccanica e fisica si segnala: ISRAEL G., "Poincaré et Enriques: deux points de vue différents sur les relations entre géométrie mécanique et physique" in: BOI L., DOMINIQUE FLAMENT, JEAN-MICHEL SALANSKINS (eds.), *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics* (Berlin: Springer, 1992) pp. 110-124.

[46] Su questo si veda ad esempio: BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 40) p. XVII; CHABERT J.-L., DALMEDICO A. D., "Les idées

risultati del metodo qualitativo applicati allo studio delle equazioni algebriche abbiano spinto Poincaré a svolgere un lavoro analogo per le funzioni definite da equazioni differenziali[47]. Questo, però, non è l'unico stimolo che sostiene Poincaré: al contrario egli vede nell'approccio qualitativo uno strumento di estrema importanza per il conseguimento di importanti risultati nell'ambito dell'Analisi Matematica e della Meccanica. A questo punto egli cita un caso, a titolo d'esempio:

> Consideriamo ad esempio il problema dei tre corpi: non è forse possibile domandarsi se uno dei corpi rimarrà sempre in una certa regione del cielo o se invece potrà allontanarsene indefinitamente? Se la distanza fra i due corpi aumenterà o diminuirà sempre di più, o se invece rimarrà compresa entro certi valori limite? Non è forse possibile porsi migliaia di interrogativi di questo genere, che avranno tutti risposta non appena si sapranno costruire qualitativamente le traiettorie dei tre corpi? E considerando un numero maggiore di corpi, in che cosa consiste il problema dell'invariabilità degli elementi d'orbita dei pianeti se non in un vero e proprio problema di geometria qualitativa, dato che fa vedere che l'asse maggiore non subisce variazioni secolari equivale a dimostrare che esso oscilla costantemente fra certi valori limite? Tale è il vasto campo di scoperte che si apre dinnanzi ai geometri.[48]

---

nouvelles de Poincaré" (cit. nota 41) p. 287; DALMEDICO A. D., "Le difficile héritage de Henri Poincaré en systèmes dynamiques" in: GREFFE J.-L., HEINZMANN G., LORENZ K. (eds.), *Henri Poincaré. Science et philosophie* (cit. nota 4) pp. 13-33. Più sull'importanza dell'approccio geometrico di Poincaré in generale e dunque non limitatamente all'articolo del 1881-1886, si veda ad esempio: BOI L., "La conception qualitative des mathèmatiques et le statut épistemologique du concept de groupe" in: GREFFE J.-L., HEINZMANN G., LORENZ K. (eds.), *Henri Poincaré. Science et phlosophie* (cit. nota 4) pp. 315-332; GREGORY NOWAK, "The concept of Space and Continuum in Poincaré's *Analysis Situs*" in: GREFFE J.-L., HEINZMANN G., LORENZ K. (eds.), *Henri Poincaré. Science et phlosophie* (cit. nota 4) pp. 365-377. Questo articolo, in particolare, risulta interessante anche per la segnalazione e il commento di alcuni passi di Poincaré contenuti in POINCARÉ J.-H., "Pourquoi, l'espace a trois dimensions" in: POINCARÉ J.-H., *Dernières Pensées* (Paris: Flammarion, 1913). Questi passi consentono infatti di comprendere alcuni aspetti epistemologici interessanti della riflessione di Poincaré sul concetto di intuizione e sul ruolo di questa nel pensiero; rimandiamo all'ultima parte di questo articolo il loro commento.

[47] Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 1) p. 31.

[48] "Prenons par exemple, le problème des trois corps: ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites? Ne peut-on pas se poser mille questions de ce genre, qui seront toutes résolues quand on saura costruire qualitativement les trajectoires des trois corps? Et, si l'on considère un nombre plus grand de corps, qu'est-ce que la question de l'invariabilité de éléments des planètes, sinon une véritable question de géométrie qualitative, puisque faire voir que le grand axe n'a pas de variations séculaires, c'est montrer qu'il oscille constamment entre certaines limites? Tel est le vaste champ de découvertes qui s'ouvre devant les géomètres". POINCARÉ J.-H., "Mémoire sur le

L'esempio utilizzato da Poincaré non è ovviamente banale e già in esso si vede un suo orientamento verso questioni di dinamica celeste[49]. Credo sia difficile, di fatto, stabilire a che punto di maturazione intellettuale e scientifica sia il suo interesse per il problema dei tre corpi nel 1881; tuttavia è osservabile come, in questo passaggio, emerga da un lato la sua attitudine a sviluppare una riflessione scientifica completa, capace di andare oltre le divisioni disciplinari, dall'altro la sua continua ricerca di una via intuitiva-geometrica[50] attraverso cui affrontare la risoluzione di problemi fisici e matematici.

Nel tentativo di mettere in luce i principali risultati teorici contenuti nell'articolo, oltre all'ausilio della letteratura critica, è possibile rifarsi a Poincaré stesso e, in particolare, a quanto da lui scritto diversi anni dopo. Si fa qui riferimento alle brevi note che Poincaré affida all'*Analyse des ses travaux scientifiques faite par H. Poincaré* pubblicate (postume) su *Acta Mathematica* nel 1921 ma redatte nel 1901 riprendendo alcune note scritte negli anni precedenti[51]. In questa sorta di auto-analisi, che Poincaré dedica alle sue più importanti "conquiste" scientifiche, un breve paragrafo riguarda gli articoli del 1881-86[52]. Di notevole interesse epistemologico sono le parole con cui Poincaré introduce lo studio delle curve definite da equazioni differenziali. Nelle pagine precedenti egli ha infatti descritto i suoi lavori concernenti le funzioni fuchsiane, le equazioni non lineari e l'integrazione delle equazioni mediante funzioni algebriche e abeliane, tuttavia:

---

courbes définies par une équation différentielle (première partie)" (cit. nota 41), pp. 4-5; trad. it. a cura di Claudio Bartocci in POINCARÉ J.-H., *Geometria e Caso*, a cura di C. Bartocci, (Torino: Bollati Boringhieri, 1995) pp. 25-26.

[49] Come sottolinea bene Barrow-Green nell'opera citata alla nota 40 (p. 35), Hadamard (a p. 240 dell'articolo che viene citato alla nota 41) pone l'accento sull'identificazione, da parte di Poincaré, della natura qualitativa del problema della stabilità del sistema solare. Già questo aspetto, sempre secondo Hadamard, costituirebbe un motivo valido per adottare il punto di vista qualitativo.

[50] In queste pagine, si è già fatto ricorso in più occasioni a termini come "intuizione" o metodo "intuitivo" o ancora "metodo geometrico-intuitivo". La riflessione di Poincaré sul concetto di intuizione è tutt'altro che banale e credo che giochi un ruolo fondamentale nella sua "costruzione" di un metodo qualitativo. Si avrà modo di vedere come, nei testi epistemologici di Poincaré, la nozione di intuizione emerga in tutta la sua importanza filosofica.

[51] POINCARE J.-H. "Analyse de ses travaux scientifiques faites par H. Poincaré", 1921, *Acta matematica*, *38*: pp. 36-135. In realtà un parte di questi scritti risalgono già a una pubblicazione del 1884: POINCARÉ J.-H., "Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Poincaré" (Paris: Gauthiers-Villars, 1884). Nelle citazioni successive ci rifaremo all'edizione di *Acta Mathematica*.

[52] *Ivi*, pp. 55-64.

> Anche quando si riuscirà a fare per un'equazione qualunque ciò che ho fatto per le equazioni lineari, vale a dire trovare degli sviluppi di integrali validi in tutta l'estensione del piano, ciò con sarà una ragione per abbandonare i risultati che si possono ottenere attraverso altri metodi, poiché può accadere che questi metodi ci facciano scoprire certe particolarità che gli sviluppi non mettono immediatamente in evidenza. Ciò mi ha persuaso a posizionarmi in un nuovo punto di vista e non saprei spiegarlo meglio che riproducendo ciò che ho scritto nel momento in cui ho cominciato queste ricerche […].[53]

Quindi Poincaré prosegue riportando l'introduzione del 1881 di cui si è già parlato. Il *point de vue nouveau*, qualitativo, permetterebbe dunque di mettere in evidenza delle proprietà non colte dai metodi analitico-quantitativi, focalizzando la sua attenzione sullo studio delle forme, delle relazioni e attuando, in questo modo, una "classificazione" delle curve integrali. Tuttavia la costruzione di tali curve comporta inizialmente delle difficoltà causate dai rami che si estendono all'infinito. Da qui, l'idea di proiettare il piano su una sfera usando come centro di proiezione il centro stesso della sfera. Questa proiezione, gnomonica, fa sì che a ogni punto del piano corrispondano due punti della sfera e che una linea retta corrisponda alla circonferenza massima[54].

Poincaré prende dunque in considerazione il caso più semplice, quello di un'equazione differenziale reale di primo grado della forma

$$dx/X = dy/Y \qquad [1]$$

con X e Y polinomi interi in x e y. Suo obiettivo è quello di comprendere e classificare le curve definite da questa equazione attraverso lo studio delle loro relazioni reciproche. Per prima cosa Poincaré si accorge che queste curve possono

[53] "Alors même qu'on parviendrait à faire pour une équation quelconque ce que j'ai fait pour les équation linéaires, c'est-à-dire à trouver des développements des intégrales valables dans tutte l'étendue du plan, ce ne serait pas une raison pour laisser de côté les résultats que l'on peut obtenir par d'autres méthodes, car il peut arriver que ces méthodes nous fassent découvrir certaines particularités que les développements ne mettraient pas immédiatement en évidence. C'est ce qui m'a décidé à me place à un point de vue nouveau et je ne saurais mieux le faire comprendre q'en reproduisant ce que j'écrivais au moment où je commençais ces recherches" *Ivi*, p. 55; trad. it. mia.

[54] Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three body problem* (cit. nota 40), p. 31; BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 40) p. 19.; CHABERT J.-L., DALMEDICO DAHAN A., "Les idées nouvelles de Poincaré" (cit. nota 42) p. 283.

essere di due forme: o curve chiuse o spirali. Il primo passo è allora dimostrare che "[…] *se una curva, definita da un'equazione come la [1] non ha dei punti d'arresto e taglia qualsiasi curva algebrica in un numero finito di punti reali, allora essa è una curva chiusa*"[55]. Successivamente, per "approfondire lo studio di queste curve", Poincaré svolge un'analisi qualitativa "locale" concentrata dunque sul comportamento delle curve nei dintorni di un punto singolare[56]. A questo proposito, egli dedica tutto il secondo capitolo ai principali risultati raggiunti da Cauchy[57] nello studio delle curve in regioni limitate della sfera e richiama, successivamente, i lavori di Briot e Bouquet specificando come, a differenza loro, la sua ricerca prenda in considerazione solo i punti reali.

Poincaré arriva dunque a identificare quattro tipi di punti singolari: in nodi (*nœuds*), i fuochi (*foyers*), le selle (*cols*) e i centri (*centres*)[58] e a stabilire la loro

[55] "[…] *si un courbe définie par une équation de la forme [1] n'a pas de point d'arrêt et ne coupe aucune courbe algébrique qu'en un nombre fini de points réels, elle est une courbe ferme*" POINCARE J.-H., "Analyse de ses travaux scientifiques faites par H. Poincaré" (cit. nota 51) p. 57, trad. it. mia, corsivo dell'autore.

[56] Poincaré stesso (a p. 57 del testo indicato alla nota 51) riconosce come questa parte di analisi fosse quella già condotta in precedenza da Briot e Bouquet nonché ripresa nella sua tesi di dottorato. I lavori di Briot e Bouquet a cui si fa riferimento sono: CHARLES BRIOT, JEAN CLAUDE BOUQUET, "Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles", *Journal de l'École Polytechnique*, 1878, *Cahier XLV*: 13-26.

[57]August-Louis Cauchy (1789-1857) ingegnere dell'*École Polytechnique*, dal 1816 diventò membro della sezione di Meccanica dell'*Académie des Sciences* e (questo incarico fu per certi versi una ricaduta politica della restaurazione che aveva portato alla rimozione dai loro incarichi presso l'*Académie* di Carnot e Monge), poco dopo, insegnante presso *École Polytechnique*, la Sorbonne e il Collége de France. A lui si devono importanti contributi nel campo dell'analisi infinitesimale. Nello specifico Poincaré fa riferimento (pp. 12-20) ai teoremi inseriti in: CAUCHY AUGUST-LUIS, "Memoires sur le calcul des limites", *Comptes rendus des sèances de l'Académie Sciences*, tomi XIV, XV, XVI. Questi teoremi riguardano regioni limitate della sfera e insieme a quelli di Briot e Bouquet già citati contribuiscono a introdurre la nozione di punto singolare e offire una visione dei diversi punti singolari: *noeuds*, *cols*, *foyers*, *centre*. Nello specifico Poincaré mette in evidenza come i quattro generi di punti singolari emergano da quattro sottocasi del "caso", più generale, in cui un punto (a,b) sia un punto singolare ordinario e non, come nel caso dimostrato da Cauchy, un punto per il quale passa una e una sola caratteristica.

[58] Per "nodi" si intendono dei punti singolari in cui si intersecano infinite famiglie di curve definite dall'equazione; per "fuochi" dei punti intorno a cui le curve si avvolgono secondo delle spirali logaritmiche; con l'espressione "punti di sella" si indicano invece quei punti attraverso i quali passano due e solo due curve definite dall'equazione differenzile; infine i "centri" identificano quei punti attorno cui le curve formano dei cicli chiusi concentrici. Utilizzando una della metafore topografiche tanto care a Poincaré: "Je reconue ensuite qu'on pouvait dans tous les cas silloner le plan par une infinité des courbes fermées, s'enveloppant mutuelment et rappelant par leur forme et leur disposition les courbes de niveau d'un plan topographique. Pour poursuivre cette comparison, je dirai que, dans ce plan topographique, le sommets et les fondes saraient rapprésentés par les noeds et les foyers,et le cols par le points singuliers que j'ai apellés plus haut de ce nom" (pp. 58-59 del testo di Poincaré citato alla nota 51). Si può notare che in questa metafora topografica non ricorrono i centri, ciò è dovuto al fatto che, come lo stesso Poincaré mette in evidenza, i centri si incontrano solo in condizioni molto particolari; per questo la sua analisi si concentra

distribuzione nel piano; ciò avviene introducendo la nozione di "indice" grazie alla quale diventa possibile trovare una relazione matematica che lega tra loro i diversi punti singolari[59]. Come commenta Bartocci, Poincaré si rende immediatamente conto del fatto che il teorema dell'indice esprime una proprietà di carattere topologico strettamente collegata al genere della superficie su cui sono definite le curve studiate[60]. L'analisi della forma, che si traduce in analisi topologica, racchiude l'essenza dello studio affrontato da Poincaré, in cui, le proprietà delle curve rispecchiano le proprietà topologiche delle varietà su cui esse sono definite[61]. Si stringe il legame tra forma delle curve, disposizione dei punti singolari e genere delle superfici. Tale legame si concretizzerà, in seguito, in una relazione matematica che lega il numero dei punti singolari (quindi l'indice) e il genere di superficie "sostrato" alla curva studiata[62].

Con il quarto capitolo Poincaré abbandona l'analisi locale per passare a uno studio "globale" delle curve esteso a tutta la superficie della sfera. Nello specifico egli si interessa ai punti di contatto, ovvero quei punti in cui una delle curve

---

maggiormente sugli altri generi di punti singolari. Per una spiegazione meno sintetica e una rappresentazione grafica si veda: BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 40) p. XX; BARROW-GREEN J., *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 40) pp. 31-32.

[59] L'indice è introdotto da Poincaré nel terzo capitolo del *mémoire* del 1881 ed esprime la relazione tra il numero di fuochi di nodi e di selle presenti sulla superficie della sfera. Nello specifico Poincaré trova che I=N+F-C. Da qui Poincaré calcola che sulla superficie della sfera N+F=C+2 (p.29). Egli, inoltre, sviluppa anche il calcolo dell'indice in diverse casistiche: quella di un ciclo che si trovi interamente in un emisfero e quello in cui si considerino i punti singolari situati sull'equatore della sfera. Questa trattazione gli consente non solo di trovare la relazione tra nodi, fuochi e selle vista sopra, ma anche di stabilire che il numero totale dei punti singolari sulla sfera è un multlipo di 4 più 2 e che se il numero di punti singolari si riduce a 2 essi sono dei nodi e dei fuochi e, ancora più in particolare, se sono localizzati sull'equatore sono sempre dei nodi (p. 29). Si può facilmente cogliere la somiglianza tra questa relazione e quella precedentemente introdotta da Leonhard Euler (1707-1783) che stabilisce il rapporto costante tra il numero di Vertici, Spigoli e Facce nei poliedri convessi.

[60] Cfr. BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 40) p. XXI.

[61] Su questo aspetto si veda BOI L., "La conception qualitative des mathèmatiques et le statut èpistemologique du concepì de groupe" (cit. nota 4). In tale articolo viene inoltre messo bene in evidenza come Poincaré riprenda i risultati raggiunti da Riemann nel tentativo di attuare una geometrizzazione della matematica e di alcune parti della fisica. In particolare Boi sostiene che Poincaré sia riuscito a dimostrare la possibilità di offrire una lettura topologica di una certa classe di fenomeni dinamici (pp. 326-327).

[62] Poincaré introduce una nozione più generica di indice (S-F-N=2g-g) maggiormente legata al genere della superficie considerata. La formulazione di tale relazione avviene per la prima volta in: POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par les équations différentielles", *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1981 (cit. nota 41). Tuttavia a questa breve nota è affidata solo l'enunciazione della relazione, mentre la sua dimostrazione appare nella terza parte del suo *mémoire* (cit. in nota 41).

integrali dell'equazione [1] viene toccata da una curva algebrica data. A questo proposito centrale è l'introduzione del concetto di *arco senza contatto* o *arco traverso*; si tratta di un arco di curva non tangente ad alcuna curva integrale e che quando incrocia una di queste ne viene esclusivamente tagliato[63]. Qualora l'arco senza contatto sia chiuso, si può parlare di *ciclo senza contatto*.

Nella seconda parte dell'articolo (pubblicata nel 1882) Poincaré introduce la nozione di *ciclo limite*: un ciclo chiuso formato da una delle curve costruite a partire dalla [1] attorno al quale si avvolgono asintoticamente altre curve. Nel caso in cui un arco senza contatto incroci un ciclo limite, il punto di incrocio sarà *conseguente* di se stesso[64].

Poincaré passa dunque allo studio della disposizione, su tutta la superficie della sfera, dei cicli limite, dei cicli senza contatto e dei punti singolari. Si tratta, come nota Barrow-Green[65], di una descrizione qualitativa del piano della sfera su cui giacciono le curve definite dalla [1]. Poincaré divide la sfera in quattro parti e per ciascuna di essa riesce a stabilire il numero di cicli limite presente. Arriva più in generale a stabilire che:

> Tra queste curve chiuse, alcune sono dei cicli senza contatto, altre sono dei cicli limite. A parte questi cicli limite, le curve definite dalla nostra equazione differenziale sono delle spirali che si avvicinano asintoticamente a dei punti singolari e dei cicli limite. Dopo aver dimostrato che il numero dei cicli limite è finito, salvo alcuni casi particolari, ho dato un metodo generale per determinare

---

[63] Per una spiegazione più dettagliata e per delle rappresentazioni grafiche: POINCARÉ J.-H., "Mémoire sur le courbes définies par une équation différentielle (première partie)" (cit. nota 41); BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 40), p. XXII; J. CHABERT J.- L., DALMEDICO D. A., "Les idées nouvelles de Poincaré" (cit. nota 41), pp. 280.

[64] I punti conseguenti vengono introdotti da Poincaré nel capitolo quinto del *mémoire*. Il loro utilizzo è fondamentale alla definizione di ciclo limite e, come notano Chabert e Dalmedico (articolo citato alla nota 41 p. 280), Poincaré attraverso essi è in grado di ricondurre lo studio della forma assunta da una curva su una superficie allo studio di una successione di punti su una linea. Data dunque una curva definita dalla equazione [1] e A e A' due punti in cui questa curva interseca un arco senza contatto Δ, si dirà A' è "punto conseguente" di A se A e A' intersecano successivamente l'arco Δ. Nel caso la curva sia un ciclo limite i due punti A e A' coincideranno e dunque si dirà che A è conseguente di se stesso.

[65] Cfr., BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three body problem* (cit. nota 40), p. 33.

questo numero e per tracciare delle regioni anulari nelle quali si trova uno, e un solo, ciclo limite.[66]

Nella terza parte del suo articolo, edita nel 1885, Poincaré sottolinea la possibilità di riscontrare una forte similitudine tra i temi trattati nella seconda parte (del 1882) e la questione, dinamica, concernente la stabilità del sistema solare[67]. I cicli senza contatto, ad esempio, contribuiscono a rappresentare una traiettoria instabile. Abbiamo infatti visto che una qualsiasi delle curve definite da [1] può incrociare in un solo punto un ciclo senza contatto, il che significa, da un punto di vista dinamico, che un ipotetico punto in movimento lungo la traiettoria definita dalla curva considerata attraverserà una sola volta il ciclo senza contatto senza poterlo più incontrare: la sua traiettoria sarà dunque *instabile*. Analoghe considerazioni dinamiche possono essere svolte per i cicli limite; anche in questo caso Poincaré si interroga sulla stabilità di un punto che si muove lungo una delle curve che, asintoticamente, si avvolgono attorno a un ciclo limite. In questa condizione, è evidente che se il punto si trova esternamente o interamente al ciclo limite non potrà mai attraversarlo ed è dunque possibile limitare la zona in cui esso si muove. Dato che però, nella maggior parte dei casi, i cicli limite sono delle curve trascendenti e quindi non è possibile determinarle con esattezza, si può al più determinare due curve algebriche chiuse formanti una superficie anulare all'interno della quale è compreso il ciclo limite[68]. La traiettoria del punto,

[66] "Parmi ces courbes fermées, les unes sont des cycles sans contact, les autres sont des cycles limites. A part ces cycles limites, le courbes définies par notre équation différentielle sont des spirales se rapprochant asymptotiquement des points singuliers et des cycles limites. Aprés avoir démotré que le nombre des cycles limites est fini, sauf dans certains cas exceptionnels, j'ai donné une méthode *générale* pour déterminer ce nombre et pour tracer des régions annulaires dans lesquelles se trouve un cycle limite, et un seul". Queste sono le parole con cui Poincaré, nel 1901, commenta i risultati da lui raggiunti, si veda: POINCARÉ J.-H. "Analyse de ses travaux scientifiques faites par H. Poincaré" (cit. nota 51) pp. 58-59, trad. it. mia. Inoltre il teorema qui enunciato da Poincaré viene ora chiamato di "Poincaré-Bendixson". Ivar Otto Bendixson (1861-1935), docente dell'Università di Stoccolma di analisi matematica e professore di matematica pura presso il *Royal Institute of Technology* di Stoccolma, fornì, nel 1901, una dimostrazione più rigorosa di tale teorema.

[67] In realtà Poincaré puntualizza che quest'ultima implica una serie di maggiori complicazioni.

[68] La definizioni di queste regioni anulari viene affrontata da Poincaré già nel capitolo 6 della seconda parte: POINCARÉ J.-H., "Mémoire sur le courbes définies par une équation différentielle (deuxième partie)" (cit. nota 41)

dunque, sarà ancora considerata instabile, ma sarà possibile definire le coordinate superiori e inferiori entro cui essa resta compresa[69].

Ciò che a noi interessa notare e che i concetti topologici di *ciclo senza contatto* e *ciclo limite*, assumono, in Poincaré, un importante valore euristico, permettendo di avvicinarsi ai problemi della dinamica seguendo un inedito approccio geometrico. Inoltre, nel caso particolare dei cicli limite è possibile ritrovare, sempre da un punto di vista topologico, delle forti analogie con il concetto di *attrattore*[70] che, nella seconda metà del Novecento, diventerà centrale nello sviluppo delle dinamiche caotiche[71].

Il primo capitolo della terza parte è intitolato *Stabilité et Instabilité* e, come si è già detto, Poincaré mette in evidenza come alcune questioni trattate nelle prime due parti abbiano delle forti analogie con il problema della stabilità del sistema solare (sebbene questa presenti delle complicazioni ben maggiori). È infatti possibile studiare l'equazione differenziale [1] ponendo:

$$dx/dt = X, \; dy/dt = Y \qquad [2]$$

considerando x e y come le coordinate di un punto mobile e t come il tempo: l'orbita di questo punto sarà allora stabile o instabile[72]? Dalla classificazione fatta

[69] È bene precisare che i concetti di stabilità e instabilità occupano un ruolo di primissimo piano nella riflessione scientifica di Poincaré. Anche da un punto di vista epistemologico possono contribuire a una rilettura inedita del pensiero di Poincaré. Per questo motivo si ritiene che la trattazione di questi concetti debba meritare più ampio spazio, dedicando a essi uno studio specifico che, certamente, non si può esaurito qui.

[70] Cfr. JEAN-LUC CHABERT, DALMEDICO DAHAN A., "Les idées nouvelles de Poincaré" (cit. nota 41) p. 281.

[71] Si pensi ad esempio al ruolo che questi concetti svolgono nelle ricerche di Lorenz e Ruelle. La letteratura sull'argomento è sterminata. Ci limitiamo qui a citare gli articoli di Lorenz e Ruelle e alcuni articoli o libri di letteratura critica in cui vengono introdotti e spiegati i concetti di attrattore e spazio delle fasi: EDWARD LORENZ, "Deterministic Nonperiodic Flow", *Journal of the Atmosperic science*, 1963, *20*: 130-141; e DAVID RUELLE, FLORIS TAKENS, "On the nature of turbulence", *Communications of Mathematical Physics*, 1971, *20*: 167-192; RUELLE D., *Hasard et Chaos* (Paris: Editions Odile Jacob, 1991); JEAN-PIERRE ECKMANN, "Mesures dans un système dynamique chaotique" in CHABERT J.- L., DALMEDICO DAHAN A. (eds.) *Chaos et déterminisme* (cit. nota 42) pp. 91-114; PIERRE BERGE, MONIQUE DUBOIS, "Chaos déterministe expérimental et attracteurs étranges" in CHABERT J.- L., DALMEDICO DAHAN A. (eds.), *Chaos et déterminisme* (cit. nota 42) pp. 115-169. Ribadisco che esiste una vasta letteratura che affronta queste tematiche, qui ho citato solo poche opere che credo possano offrire una panoramica introduttiva.

[72] È bene precisare che la definizione matematica di stabilità a cui si richiama Poincaré coincide con quella offerta da Poisson, quindi: "Nous dirons que la trajectoire d'un point mobile est stable, lorsque, décrivant autour du point de départ un cercle ou une sphère de rayon *r*, le point mobile, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, y rentrera une infinite de fois, et cela, quelque petit que soit *r* […]. Elle sera instable si, après être sorti de ce cercle ou de cette sphère, le point mobile

in precedenza, sottolinea Poincaré, tutte le possibili traiettorie sono delle spirali o dei cicli limite: l'instabilità è dunque la regola e la stabilità l'eccezione. Nel caso però che il piano delle curve integrali sia "solcato" da un'infinità di curve chiuse che soddisfano la [1] (anziché da un'infinità di cicli senza contatto) si ha stabilità nei dintorni di quei punti singolari chiamati *centri* e il sistema che si presenta viene definito *topografico*. A questo aspetto Poincaré dedica tutto l'undicesimo capitolo.

È dal dodicesimo capitolo che, invece, la sua attenzione si sposta sullo studio delle equazioni differenziali di primo ordine e di grado superiore al primo. Non si ha intenzione qui di dare un'analisi dettagliata di questa parte, ci si limiterà invece a riassumerne i risultati principali. Come nota Gilain, Poincaré associa una superficie algebrica S d'equazione F(x,y,z) = 0 all'equazione differenziale considerata. Le soluzioni di essa sono le proiezioni sul piano delle curve tracciate su S: Poincaré considera quindi le curve integrali di un campo di vettori tangente a S trasformando inoltre S in una superficie S_1 compatta, connessa e senza bordo[73]. Attraverso una rappresentazione parametrica di S_1 tramite due variabili *u* e *v* il caso studiato viene quindi ricondotto a quello delle curve definite da equazioni differenziali di primo grado e di primo ordine. Poincaré, cercando quindi di estendere i risultati ottenuti in precedenza al caso più generale, nota che mentre i comportamenti locali delle curve integrali sono gli stessi visti in precedenza, lo stesso non accade per i comportamenti globali; ad esempio la distribuzione dei punti singolari è determinata dal genere della superficie secondo la relazione:

$$N + F - C = 2 - 2p.$$[74]

Cerchiamo di mettere a fuoco alcuni aspetti epistemologici di quanto fin qui detto. Cominciamo con il sottolineare la fertilità del nuovo punto di vista adottato da Poincaré che, come anticipato nel prologo del 1881, consente di approfondire e completare lo studio delle equazioni differenziali, mettendo indirettamente in

---

n'y rentre plus". Poincaré specifica inoltre che la stabilità definita in questo modo ha un valore prettamente teorico; nella pratica è necessario definire una regione limitata dello spazio in cui il punto rimarrà costantemente rinchiuso. Per la citazione riportata si veda POINCARE J.-H., "Sur les courbes définies par les équations différentielle (troisième partie)" (cit. nota 41) p. 94.

[73] Cfr. GILAIN C., "La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'integration des équations différentielles" (cit. nota 41) p. 233.

[74] *Ivi*, p. 234.

evidenza i limiti dell'approccio analitico classico. Un metodo alternativo, dunque, che si accompagna a una posizione epistemologica capace di suggerire una nuova strada per avvicinarsi alla trattazione di problemi che, come si è visto, trascendono il ristretto campo della matematica o della topologia, comprendendo anche questioni di carattere fisico e astronomico. Nel caso di Poincaré però, sembrerebbe riduttivo parlare solo di un matematico che spazia con grande profitto nei diversi ambiti del sapere scientifico; si dovrebbe piuttosto parlare di uno scienziato capace di avvicinare tra loro settori disciplinari apparentemente molto distanti mettendo in risalto le somiglianze e l'artificialità di divisioni accademiche ma non reali. È senz'altro arduo cercare di capire con precisione quale sia, nel caso dell'articolo esaminato in queste pagine, l'origine delle intuizioni di Poincaré. Forse i problemi di meccanica celeste che vengono accennati nella prima e nella terza parte dell'articolo sono l'origine e la causa immediata dello studio qualitativo delle equazioni differenziali? Forse, come sostiene Hadamard, Poincaré aveva intuito il carattere qualitativo del problema di stabilità del sistema solare e per questo ritiene opportuno sviluppare tale metodo? O forse Poincaré si avvicina a queste tematiche spinto da un interesse matematico-topologico riconoscendo in un secondo momento l'interesse fisico che la trattazione da lui sviluppata può avere? Sarebbe vano cercare di rispondere a queste domande, cercare, in altre parole, di capire se Poincaré fosse più un fisico o un matematico; nel suo caso sembra che dietro l'etichetta di *dernier savant universel* possa emergere una personalità scientifica non del tutto comprensibile dal nostro punto di vista, intrinsecamente limitato e settoriale[75]. Del resto a ciò si lega uno degli aspetti epistemologici più interessanti del nuovo metodo

---

[75] Con questo non si intende assolutamente dire che Poincaré non distinguesse tra diversi ambiti disciplinari o che non considerasse le tematiche matematiche come distinte per tipologia e origine da quelle fisiche. Queste distinzioni sono anzi ben presenti ed egli le tematizza in diversi punti delle sue opere epistemologiche. Ciò nonostante, la mia impressione è che egli concepisse la scienza -pur nella sua articolazione interna- come un campo su cui muoversi senza soluzione di continuità. Le ipotesi della matematica, della geometria e della fisica, hanno una natura differente che rispecchia la loro differente origine, tuttavia nulla impedisce che la soluzione di problemi geometrici permetta di riconoscere la loro somiglianza a questioni fisiche e dunque consenta una loro applicazione a esse. Credo inoltre che in ciò sia implicata una sottile distinzione tra i concetti di "legge" e "principio" e gli aspetti metodologici che portano alla loro "costruzione". Sebbene le leggi della fisica siano di natura empirica nulla impedisce che essi trovino una formulazione anche attraverso un approccio geometrico.

qualitativo: la sua capacità di riunire in una prospettiva unica problemi fisici e matematico-topologici.

La letteratura critica concorda inoltre nel sottolineare l'estrema originalità dello studio "globale" delle curve; quella che Chambert e Dalmedico definiscono la parte *du qualitatif global*[76]. In essa Poincaré si smarca dalle precedenti ricerche di Briot e Bouquet e si addentra "in un territorio vergine e inesplorato"[77]. Si è visto come di fondamentale importanza (anche in vista di un loro utilizzo nella dinamica) siano i concetti di *ciclo senza contatto* e di *ciclo limite*. Proprio questi sembrano essere tra le "conquiste" più importanti del metodo qualitativo e dell'analisi globale condotta da Poincaré. Essi appaiono strettamente collegati allo studio delle "forme" che l'approccio qualitativo valorizza e che resta invece precluso al solo studio quantitativo. Oltre allo studio delle forme la prospettiva globale di Poincaré si interessa alle loro relazioni reciproche[78]. In questo modo è possibile stabilire in che zone della sfera siano circoscrivibili i cicli limite, arrivando a concludere che tutte le curve che non sono un ciclo limite si avvolgono, asintoticamente, attorno a esso o a un punto singolare. Allo stesso modo il genere delle superfici ricopre un ruolo centrale nella definizione generale delle proprietà globali delle curve e, abbiamo visto, della disposizione stessa dei punti singolari. Il genere delle superfici, la loro "forma topologica", determina dunque le relazioni reciproche tra le curve integrali studiate.

Un ultimo aspetto, che qui si accennerà soltanto, è quello riguardante l'idea che l'approccio qualitativo di Poincaré rispecchi un metodo più "intuitivo" nell'affrontare un problema scientifico, sia esso fisico o matematico. La nozione

---

[76] Cfr. CHABERT J.- L., DALMEDICO DAHAN A., "Les idées nouvelles de Poincaré" (cit. nota 41) p. 280.

[77] Cfr. BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 40) p. XXII.

[78] Hadamard stesso nel suo saggio "Le problème des trois corps" (cit. nota 42) sottolinea come una delle caratteristiche principali del nuovo metodo qualitativo utilizzato da Poincaré sia proprio porre quello di porre al centro l'interesse per i rapporti e le relazioni tra le diverse soluzioni delle equazioni differenziali: "Il consiste, étant donné que le problème a plusieurs solutions, – et même une infinité de solutions – à cesser de porter son attention exclusivement sur une seule d'entre elles pour considérer, au contraire, les relations que ces solutions ont les unes avec les autres.[...] Dans les premières recherches sur les équations differentielles, on avait généralement étudié une à une les integrales d'une équation différentielle donne quelconque: en examinant chacune d'elles, on avait fait abstraction de toutes les autres. Les mémoires sur les courbes définies par les équation différentielles vinrent montrer que ce point de vue était insuffisant et que les solutions d'un systeme d'équation algébrique, devaient, même en vue de l'intelligence de chacune d'elles, être envisagées dans leurs rapports mutels"; pp. 68-69.

di intuizione, in Poincaré, ha un profondo valore epistemologico e, come sembra emergere in alcuni suoi scritti successivi, si lega ai concetti di forma, di relazione e, si vedrà, di continuo. Tuttavia proprio questo profondo legame fa sì che "l'intuizione" così come è intesa da Poincaré possa essere spiegata e collocata nella cornice del suo pensiero (più filosofico che scientifico) solo dopo un'analisi più approfondita e completa degli aspetti strettamente legati ai temi della forma e dell'analisi qualitativa.

2.3 *Superfici senza contatto e integrali invarianti*

La quarta parte di *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, viene ultimata nel dicembre del 1885 e pubblicata nei primi mesi dell'anno successivo[79]. Essa in certa misura si distingue, per l'argomento trattato, dalle prime tre parti; Poincaré riprende infatti i risultati ottenuti nei lavori precedenti e li applica ai sistemi di equazioni del secondo ordine[80]. In questo passaggio Hadamard vede l'interesse di Poincaré per lo studio delle equazioni della dinamica di cui, quelle della meccanica celeste, costituiscono un caso particolare[81]. Da un punto di vista storico ed epistemologico questo articolo dà la possibilità di cogliere lo sviluppo di alcuni concetti che Poincaré riprenderà, in seguito, nel suo approccio qualitativo al problema dei tre corpi.

---

[79] Ci riferiamo a POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)" (cit. nota 42). Nello specifico l'articolo viene ultimato il 13 dicembre del 1885, verrà quindi pubblicato sulla rivista di Jordan nei primi mesi dell'anno successivo. Sappiamo inoltre, da una lettere inviata da Poincaré a Mittag-Leffler il 23 Novembre del 1885 che in quella data Poincaré non aveva ancora iniziato la stesura dell' articolo; egli stesso dice di "apprestarsi" a farlo. La stesura è dunque raccolta nei pochi giorni che vanno dal 23 Novembre al 13 Dicembre. Riprenderemo, in seguito, la lettera qui citata in riferimento al problema dei tre corpi.

[80] Ricordiamo brevemente che mentre le curve definite da un sistema differenziale del primo ordine definiscono, intuitivamente, delle linee che ricoprono una superficie, per quanto invece concerne le curve definite da un sistema differenziale del secondo ordine possono essere intese come delle linee che riempiono un spazio. Cfr. HADAMARD J., "Le probleme des trois corps" (cit. nota 41), p. 74. In ogni caso la "metafora" di un punto mobile nello spazio è utilizzata da Poincaré stesso all'inizio del suo articolo. Le equazioni differenziali del secondo ordine vengono infatti messe da Poincaré nella forma: $dx/dt=X$, $dy/dt=Y$, $dz/dt=Z$; è facile riconoscere l'equazioni che definiscono il moto di un punto di coordinate x,y,z in un tempo t. Ovviamente come, precisa Poincaré, l'aver preso come caso particolare equazioni del secondo ordine non vieta di estendere la trattazione a un ordine n-1 di equazioni della forma: $dx_1/dt=X_1$, $dx_2/dt=X_2 \ldots dx_n/dt=X_n$ che rappresenterebbero dunque il moto di un punto in uno spazio a *n* dimensioni.

[81] HADAMARD J., "Le problème des trois corps" (cit. nota 41) p. 75.

In queste pagine cercheremo di vedere in che termini Poincaré introduca questi "strumenti" innovativi, come essi siano riconducibili a un metodo qualitativo e quali riflessioni epistemologiche possano suggerire.

Poincaré è ben consapevole delle difficoltà che implica l'utilizzo del linguaggio geometrico nella descrizione dei sistemi di equazioni del secondo ordine. Se infatti si vuole trovare una rappresentazione geometrica di queste equazioni si è costretti a immaginare la traiettoria di un punto P a n-coordinate in uno spazio n-dimensionale. In questo caso, sostiene Poincaré: "La geometria non è altro allora che un linguaggio che può essere più o meno vantaggioso, non è più una rappresentazione che parla ai sensi. Ciò nonostante possiamo essere condotti, a volte, a usare questo linguaggio"[82]. È di interesse storico notare come già nel 1886 Poincaré utilizzi delle espressioni che implicitamente rimandano a una posizione epistemologica che contraddistinguerà, in seguito, la sua intera produzione filosofica[83]. L'idea che il linguaggio della geometria possa risultare uno strumento vantaggioso, non deve, ovviamente, essere confusa con il banale nominalismo[84] che ha caratterizzato la prima ricezione del convenzionalismo di

[82]"La Gèometrie n'est plus alors qu'un langage qui peut être plus ou moins avantageux, ce n'est plus une rapprésentation parlant aux sens. Nous pourrons néanamoins être conduits à employer quelquefois ce langage", POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)" (cit. nota 41) p. 168; trad. it. mia.

[83] Si intende qui fare riferimento alle riflessioni sulla geometria che sarà poi possibile trovare nei successivi scritti epistemologici di Poincaré. In particolare l'idea che la geometria possa essere concepita come una sorta di linguaggio che, anche svincolato dalla raprresentazione sensibile, risulta tuttavia comodo nella pratica matematica, si riallaccia alla possibilità stessa (sperimentata da Poincaré nelle sue ricerche sulle trasformazioni fuchsiane) di creare dei collegamenti inediti tra ambiti matematici apparentemente distinti. In questo, ancora, la geometria non è "comoda" solo in quanto parla direttamente ai sensi, in quanto latrice di una comprensione intuitiva che manca ad altri ambiti matematici. Infatti, anche qualora questa peculiarità rappresentativa della geometria venga meno, essa rimane tuttavia "comoda" per la sue potenzialità euristiche, per la possibilità stessa di far luce su proprietà (ad es. delle equazioni differenziali) che altrimenti rimarrebbero ignorate.

[84] In particolare si fa riferimento all'interpretazione del convenzionalismo che venne data da LeRoy e che lo stesso Poincaré respinge nell'introduzione di *La science et l'hypothèse* e in un capitolo di *Le valeur de la science*. Un interpretazione altrettanto nominalista sarà anche quella data dall'italiano Federigo Enriques nella sua più celebre opera *Problemi della Scienza*. In realtà l'utilizzo del termine "linguaggio" da parte di Poincaré può effettivamente lasciare spazio a grossi fraintendimenti che possono poi amplificarsi nella lettura distorta di altri passi delle opere più epistemologiche. In realtà la sfumatura che Poincaré attribuisce alla geometria chiamandola "un linguaggio" va ricompressa all'interno delle più ampie riflessioni epistemologiche che egli dedica all'argomento. Brevemente possiamo dire che pensare alla geometria come a un linguaggio consente di considerarla vera sul piano logico e non su quello empirico. Su questo piano una geometria è vera, proprio come un linguaggio, se ha una coerenza interna se non presenta delle contraddizioni, verità diventa sinonimo di coerenza; per questo, come dirà successivamente Poincaré in *La Science et L'hypothèse* (cit. nota 38, p. 87), non esiste una geometria più vera di

Poincaré. Piuttosto è possibile rintracciare nel linguaggio della geometria l'applicazione di un approccio euristico innovativo, volto a cogliere degli aspetti essenziali dei fenomeni studiati mettendone in evidenza proprietà di natura qualitativa.

Poincaré si affretta a precisare che nel caso da lui trattato, la geometria mantiene ancora tutto il suo vantaggio intuitivo e che dunque, come per i sistemi di equazioni del primo ordine, egli continuerà a utilizzarla. Inoltre, nelle equazioni del secondo ordine, oltre ai punti singolari è possibile identificare anche delle *curve singolari*. I punti singolari sono di cinque tipi: nodi, colli, fuochi, colli-fuochi[85] e centri; uno in più rispetto ai sistemi del primo ordine. Poincaré intravede la possibilità di stabilire una relazione tra l'ordine dei sistemi considerati e il numero corrispondente di punti singolari. Se da un lato ciò consente di estendere le trattazioni fatte a *n* ordini, dall'altro costituisce l'identificazione di una proprietà qualitativa dei sistemi di equazioni

---

un'altra (sul piano empirico) sono tutte ugualmente vere (sul piano logico). Esiste, al più, una geometria più comoda di un'altra. Dato che per Poincaré la geometria non può essere considerata una scienza empirica la nozione di verità che si ricolega a essa non può sottendere una corrispondenza con i dati empirici. In riferimento all'esperienza ha senso parlare di maggiore "comodità" di una geoemetria rispetto a un'altra, non di "verità". La nozione di comodità ha, come ho accennato nella nota precedente, un duplice valore: da un lato si tratta di una comodità rappresentativa (per questo la geometria euclidea rimarrà sempre la più comoda per l'interpretazione dello spazio percettivo) dall'altro di una comodità più teorica. Per quanto riguarda il fraintendimento nominalista del convenzionalismo di Poincaré si veda: LE ROY E., "Science et Philosophie", *Revue de Métaphisique et Morale*, 1899, 7: 375-425, 1900, 8: 37-72. FEDERIGO ENRIQUES, *Problemi della scienza* (Bologna: Zanichelli, 1906) pp 154-157. Per quanto riguarda la risposta di Poincaré alle critiche di Le Roy si veda: POINCARÉ J.-H., *La scienza e l'ipotesi* (cit. nota 38) pp. 4-5; Poincaré J.-H., *La valeur de la science* (Paris: Flammarion, 1905, rist. 1970) pp. 151-171. Per quanto concerne invece le riflessioni sui rapporti tra geometrie diverse, sui diversi gradi di comodità di queste si veda, in *La Science et l'hypothèse* (cit. nota 38) pp. 118-139. Per quanto concerne la letteratura critica, nel più ampio contesto del convenzionalismo geometrico di Poincaré, rimandiamo a: JERZY GIEDYMIN, *Sciences and Conventions: Essays on Henry Poincaré's Philosophy of Science and the Conventonalist Tradition* (Oxford: Pergamon Press, 1982); GIEDYMIN J., "Geometrical and physical conventionalism in epistemological formulation", *Studies in History and Philosophy of Science*, 1991, *XXII*: 1-22; JULES VUILLEMIN, "Poincaré's philosophy of space", *Synthèse*, 1972, *XXIV*: 161-179; ELIE ZAHAR, "Poincaré's philosophy of geometry, or does geometric conventionalism deserve its name?", *Studies in History and Philosophy of Sciences. B. Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 1997, *XXVIII, 2*: 183-218: CORRADO SINIGAGLIA, "Introduzione" in Poincaré J.-H., *La scienza e l'ipotesi* (cit. nota 38) pp. V-XXVI.

[85] I colli-fuochi sono un genere particolare di punto singolare peculiare dei sistemi di equazioni del secondo ordine. Nelle parole di Poincaré la descrizione di questi punti singolari: "Il existe donc une surface sur laquelle sont tracées une infinité de trajectoire qui, tournant comme des spirales autour du point singulier, s'en raprochent asymptotiquement. Il y a en outre une trajectoire T_1 qui va passer pour ce point singulier. Toutes les outres en reste à une distance finie. Un pareil point eut s'appeler *col-foyer*". POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)" (cit. nota 41) p. 175 (corsivo dell'autore).

differenziali[86]. La trattazione viene dunque estesa al caso delle curve singolari mostrando come, su una di esse, sia possibile individuare degli archi tali che tutti i punti di un arco siano o dei nodi o dei fuochi o dei colli. I punti che dividono tali archi sono, a loro volta, dei punti singolari ai quali però Poincaré non dedica una trattazione specifica.

Nel capitolo successivo viene messa in evidenza una delle prime applicazioni ai problemi della dinamica, dei risultati ottenuti in precedenza. Poincaré richiama la possibilità di definire il movimento di un punto in uno spazio a n-dimensioni attraverso una qualunque equazione differenziale nella forma:

$$dx_1/dt = X_1;\ dx_2/dt = X_2 \ldots dx_n/dt = X_n \qquad [3]$$

dove X sono dei polinomi interi e t rappresenta il tempo. Fissando delle precise condizioni iniziali, se pensiamo che il tempo cresca indefinitamente, secondo Poincaré, si possono presentare cinque generi di traiettorie possibili: può accadere che il punto mobile resti sempre a una distanza finita dalla posizione di partenza senza avvicinarsi a un punto singolare, oppure il punto mobile si allontanerà all'infinito, oppure ancora esso passerà, in un tempo finito, da un punto singolare. Una quarta ipotesi è che il punto si avvicini indefinitamente a un fuoco oppure, in un quinto e ultimo caso, si può pensare che il punto passi infinite volte vicino a un punto singolare a distanze che possano essere, di volta in volta, sempre più piccole di una quantità data, restando tuttavia finite negli intervalli dei diversi passaggi[87]. Quindi, arriva a concludere Poincaré, le distanze di un punto mobile da un punto singolare possono: rimanere finite, tendere a zero, oppure diventare più piccole di una quantità data senza però tendere a zero.

Riuscire a esprimere $x_1 \ldots x_n$ attraverso una serie di funzioni convergenti per valori reali tempo che vanno $-\infty$ a $+\infty$[88] è, secondo Poincaré, di massimo interesse:

---

[86] "Il serait facile d'étendre cette thèorie à des équation de ordre n. Remarquerons seulement que, quand on fait crôire n, les nombres des espèces des points singulers croit très rapidement. Nous avons vu, en effet, qu'il a été de 3 pour n=1 de 4 pour n=2; on verrait sans peine qu'il est de 8 pour n=3, et de 10 pour n=4." POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)" (cit. nota 41) p. 176.

[87] *Ivi*, p. 181.

[88] A una questione di questo tipo Poincaré aveva già dedicato un lavoro. Si veda, infatti: POINCARE J.-H., "Sur l'intégration des équation différentielles par les series", *Comptes Rendus*, 1882, *92*: 577-578 oppure in POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit. nota 13) vol.1, pp. 162-163. Per un breve

risolvere un problema di questo tipo "è sempre possibile" ma, per sua stessa natura, esso presenta un'infinità di soluzioni. Ci sono dunque poche probabilità che la soluzione che egli si appresta a offrire sia valida anche per tutti gli altri casi particolari. Introducendo una variabile ausiliaria *s* Poincaré riesce a esprimere attraverso la definizione di un valore α la variabile x in serie di potenze convergenti. Tuttavia la traiettoria così definita presenta delle particolarità ben precise: "[…] conviene tuttavia osservare che se questa traiettoria passa per un punto singolare, essa dovrà essere considerata come tagliata in questo punto singolare che considereremo come un punto d'arresto. In effetti, il punto mobile non può (data la forma stessa de l'equazione) raggiungere un punto singolare che per dei valori infiniti di *s* e *t*"[89]. Poincaré riconosce la "tentazione" di applicare il metodo elaborato alle equazioni del problema dei tre corpi. In questo caso le serie di potenze definite attraverso la variabile *s* sono valide a meno che, date determinate condizioni iniziali del sistema, due dei tre corpi si incontrino in un tempo finito; in tal caso, infatti, *s* diventerà infinita nel momento dello scontro.

Dato invece un tempo *t* è possibile stabilire che le coordinate dei tre corpi si sviluppino secondo le potenze della serie

$$e^{\alpha t}-1/ e^{\alpha t}+1 \qquad [4]$$

a condizione che due dei tre corpi restino sempre a una distanza superiore a una quantità data[90].

---

commento sull'argomento si rimanda a: BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three body problem* (cit. nota 1) pp. 37-38.

89 "[…] il convient, toutfois, d'observer que si cette trajectoire va passer par una point singulier, elle devra etre regardée comme coupée en ce point singulier qu'on considérera comme un point d'arrêt. En effet, le point mobile ne peut (d'après la forme même des l'équation) atteindre un point singulier que pour des valeurs infinies de *s* et de *t*", POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)" (cit. nota 41), p. 188; trad. it. mia.

90 Già il 16 Aprile del 1883 Poincaré dedica all'argomento una lettera inviata a Gösta Mittag-Leffler (1846-1927). Egli infatti dice di aver letto una lettera di Weirstrass a Mittag-Leffler (donatagli da quest'ultimo) in cui si il matematico tedesco stabilisce l'impossibiltà di esprimere le coordinate dei pianeti per serie ordinate secondo le potenze di $e^{\alpha t}-1/ e^{\alpha t}+1$ se non dando per presupposte le condizioni citate sopra. Per questo Poincaré sottolinea che egli non intende esprimere le coordinate dei pianeti per serie ordinate secondo $e^{\alpha t}-1/ e^{\alpha t}+1$ ma secondo serie $e^{\alpha s}-1/ e^{\alpha s}+1$ in cui s rappresenta una variabile ausiliaria. In questo caso è possibile esprimere le posizioni dei pianeti per valori di s che vanno da $-\infty$ a $+\infty$ a cui si accompagna una crescita costante di t da $-\infty$ a $+\infty$. Nel caso però a un instante t_0 due dei tre pianeti si scontrino allora, mentre s varia da $-\infty$ a $+\infty$, t cresce da $-\infty$ a t_0 e la soluzione data vale fino a t_0. Anche in questo caso Poincaré esterna il suo scetticismo sull'eventualità che tale soluzione possa avere una qualche concreta utilità per i problemi di meccanica celeste ritenendo, anzi, che si possano trovare soluzioni migliori. In effetti

In ragione di queste limitazioni, Poincaré aggiunge: "Non credo tuttavia che si possa trarre grande profitto dalle applicazioni di questo metodo alla meccanica celeste. Non ho voluto, lo ripeto, che dare un esempio, e non di esporre un metodo che conviene utilizzare in tutti i casi"[91].

Dopo aver affrontato la questione della distribuzione dei punti singolari[92] Poincaré passa nel capitolo XIX allo studio delle possibili traiettorie chiuse definite da:

$$dx/X= dy/Y= dz/Z= dt \qquad [5]$$

L'interesse di Poincaré è quello di cercare di capire il comportamento, qualitativo, delle curve che si trovano in prossimità di queste traiettorie chiuse[93]. Nel

---

circa trenta anni dopo Sundman (1873-1949) riuscirà a stabilire che la variabile ausiliaria s può essere scelta in modo da far sì che che le serie convergano per tutti i valori di t anche nell'eventualità di uno scontro tra due dei tre corpi. Per quanto riguarda la lettera di Poincaré a Mittag-Leffler si veda: POINCARÉ J.-H., "Lettres d'Henri Poincaré à M. Mittag-Leffler concernant le mémoire couronné du prix de S. M. le roi Oscar II", *Acta Mathematica*, 1921, *XXXVIII*: 161-173, oppure in POINCARÉ J.-H., *Œuvres* (cit. nota 13) vol. XI, pp. 66-78. Per quanto concerne invece i lavori di Sundman: KARL FRITHIOF SUNDMAN, "Recherches sur le problème de trois corps", *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, 1907, *34 N° 6*: 1-43: SUNDMAN K. F., "Nouvelles recherces sur le problème des trois corps", *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, 1909, *35 N° 9*: 1-27; SUNDMAN K. F., "Mémoire sur le problème des trois corps", *Acta Mathematica*, 1912, *36*: 105-179. Per la letteratura critica si segnalano, tra gli altri: MALTE HENKEL, "Sur la solution de Sundman du problème des trois corps", *Philosophia Scientiae*, 2001, *5 (2)*: 161-184: BARROW-GREEN J., "Poincaré et le problème des trois corps" (cit. nota 3) pp. 187-192.

91 "Je ne crois pas toutefois qu'on puisse tirer grand parti des applications de cette methode à la Méchanique celeste. Je n'a volu, je le répète, que donner un exemple, et non exposer un méthode qu'il convient d'appliquer dans tous les cas", POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)" (cit. nota 3) pp. 188-189; trad. it. mia.

92 A questo è dedicato il cap. XVIII dove Poincaré stesso dice di attenersi a un'applicazione del teorema di Kronecker. Già nel 1883 in un breve abstract *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps* pubblicato su *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* e l'anno successivo in un articolo dello stesso titolo ma pubblicato sul *Bulletin Astronomique*, Poincaré si era occupato di una applicazione del teorema di Kronecker al problema dei tre corpi, in particolare nel caso in cui si presentino delle soluzioni periodiche. In questo caso Poincaré riprende in parte risultati ottenuti nell'83 assimilando il caso delle soluzioni periodiche a quello delle curve chiuse e riuscendo così a ottenere dei nuovi risultati sulla complessa distribuzione dei punti singolari in un sistema di equazioni del secondo ordine. Il risultato così ottenuto consente di descrivere alcune proprietà qualitative per le curve definite da equazioni differenziali del secondo ordine, proprietà che risultano determinanti nella comprensione dell'andamento globale di tali curve. Se non ci siamo soffermati su una analisi approfondita di tale capitolo ciò è dovuto essenzialmente al fatto che essa costituirebbe una digressione un po' troppo ampia rispetto alle finalità che ci siamo posti in questo breve prologo. Per quanto concerne le informazioni bibliografiche di tali articoli: POINCARE J.-H., "Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps", *Comptes Rendus de l'Académies des Sciences*, 1883, *97:* 251-252 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit. nota 13) vol. VII, pp. 251-52; POINCARE J.-H., "Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps", *Bulletin Astronomique*, 1884, *1*: 65-74 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit. nota 13) vol. VII, pp. 253-67.

presentare la possibilità di condurre questo studio attraverso una sua riduzione al caso delle equazioni del primo ordine, si intuisce lo stratagemma ideato da Poincaré; egli prende in considerazione il caso di un toro senza contatto[94] all'interno del quale non vi siano punti singolari. Il primo passo è quello di dimostrare che, all'interno di un toro senza contatto, esiste sempre una curva chiusa[95]. A partire da ciò, dice Poincaré: "[…] utilizzeremo un sistema particolare di coordinate"[96].

---

[93] A questo proposito Hadamard osserva che l'introduzione dello studio di soluzioni periodiche (nel contesto esplicito del problema dei tre corpi) è da far risalire a Hill ma: "c'est à Poincaré qu'il appartient d'avoir montré dans les solutions periodiques un instrument, l'un des plus puissants dont on dispose, pour la recherche e l'étude des autres solutions". In particolare, continua Hadamard, è merito di Poincaré proprio l'aver compreso che attraverso le soluzioni periodiche diventa possibile studiare le soluzioni a esse "vicine". Questo costituirebbe uno dei principali contributi di Poincaré nello studio qualitativo delle curve definite da equazioni differenziali del secondo ordine e, di conseguenza, nello studio di traiettorie "vicine" a un'orbita periodica nel problema dei tre corpi. Tale osservazione, inoltre, si accomapagna a quanto scritto da Poincaré stesso nella sua *Analisi dei lavori scientifici* laddove egli ammette che il solo studio dei punti singolari non è una condizione sufficiente, nel caso delle equazioni di secondo ordine, per condurre uno studio approfondito delle curve definite: "Il faut introduire en outre, une notion nouvelle qui joue, dans une certain mesure, le même rôle que les points singuliers. Soit C_0 une courbe ferme statisfaisant à notre équation, et D un domaine comprenant tous les points souffisamment voisin de C_0: nous pouvons étudier la forme et la disposition générale des courbes C à l'interieur de ce domaine". Per il passo di Hadamard citato si veda HADAMARD J., "Les equations differentielles" (cit. nota 41) p. 249. Per quanto invece riguarda la citazione di Poincaré: POINCARÉ J.-H., "Analyse de ses travaux scientifiques faites par H. Poincaré" (cit. nota 51) p. 62.

[94] Come nota Barrow-Green: "Again he [Poincaré] considers the simplest type of solution space avaible within the costraints of sistems: a torus without conctat with no interior singular points". Dunque anche in questo caso, come già in precedenza, Poincaré prende in considerazione una situazione "ideale" e "ottimale" che rappresenta una semplificazione rispetto alla complessità dei fatti. Diversi anni dopo, nelle opere più epistemologiche Poincaré dimostra la sua consapevolezza nei confronti del distacco teorico introdotto dallo scienziato nel momento in cui la spiegazione del fatto "complesso" è data a partire dal fatto "semplice". In *La scienza e l'Ipotesi*, l'idea che la legge nasca a partire dallo studio dei fatti semplici che vengono "integrati" ricostituendo il fatto complesso appare come una verità banale del metodo scientifico. Meno banale è chiedersi quali problematiche epistemologiche implichi questo processo, cosa di cui Poincaré è ben consapevole dati i risultati emersi nelle sue ricerche in meccanica celeste.

[95] Dopo aver fatto questa dimostrazione Poincaré richiama i risultati da lui ottenuti nell'articolo del 1884 "Sur certaines solutiones paticulières du problème des trois corps" (cit. nota 91) che dimostrerebbero l'esistenza di certi integrali particolari che possono essere considerati delle traiettorie chiuse. In questo passaggio, come i molti altri, si ha la consapevolezza del fatto che Poincaré non traccia una distinzione netta tra i suoi lavori matematici e quelli più legati alla meccanica celesta e sebbene i riferimenti al problema dei tre corpi siano sporadici nelle quattro parti di *Sur les courbes* in realtà Poincaré sembra avere sempre presenti i fitti rimandi tra le due questioni. Inoltre, già all'interno di questa dimostrazione, Poincaré introduce un metodo analogo a quello che riprenderà poi per lo studio delle soluzioni vicine alla traiettoria chiusa. Egi infatti immagina di sezionare il toro in tanti meridiani e di considerare z l'asse del toro mentre x, y le coordinate intrinseche definite sui meridiani. Dato allora un qualsiasi punto interno al toro esso avrà coordinate x, y, z. Inoltre i piani (meridiani) definiti sono considerati tutti dello stesso segno. Il che significa che la direzione di un ipotetico punto mobile che li attraversa è sempre la stessa. Il toro senza contatto è una superficie negativa, quindi, una volta che un punto mobile entra in esso non ne può più uscire. Quindi definendo Ξ e H, due funzioni olomorfe che corrispondono alle

Immaginiamo di fissare sulla curva chiusa un punto O, origine di un arco *s* della curva. Supponiamo ora che M sia un punto qualsiasi di s. Facciamo passare per M una superficie normale alla curva e fissiamo su essa un sistema coordinate rettangolari *xy* con origine in *M*: "Un punto qualunque dello spazio sarà allora determinato da tre coordinate *x*, *y* et *s*. Questo sistema di coordinate è utile per rappresentare un punto molto vicino a una traiettoria chiusa"[97].

Poincaré non ha fatto altro che sezionare la curva chiusa con una superficie a essa perpendicolare e passante per un punto O considerato come origine. Per stabilire le coordinate di un punto è sufficiente immaginare di tracciare su ogni superficie un sistema di riferimento intrinseco *x*, *y* e aggiungere a questo una coordinata *s* equivalente al tempo *t*. Quindi, fissato un meridiano di origine, è possibile definire la traccia M che un punto mobile lascia sulla superficie attraverso le coordinate (x_0, y_0, t_0). Come già visto per la dimostrazione di esistenza di una curva chiusa in un toro senza contatto, nel caso la traiettoria presa in considerazione sia chiusa, dopo un periodo 2π, il punto passerà per $M\pi = M$.
In questo passaggio Poincaré introduce quello che egli stesso chiama metodo delle superfici senza contatto ma che, in seguito, prenderà il nome di "applicazione di Poincaré" o "mappa di Poincaré"; credo sia importante sottolineare come l'utilizzo delle superfici senza contatto permetta a Poincaré di mettere in atto una semplificazione del problema trattato senza però attuarne una riduzione.

Introdotto questo nuovo metodo egli si dedica allo studio della traiettoria di un punto mobile infinitamente vicino alla curva chiusa data; tale studio si ramifica nell'analisi di casi ben distinti[98]. Essi, se studiati attraverso le "tracce" che i punti mobili lasciano sulle superfici senza contatto, sono riconducibili ai diversi tipi di punti singolari già studiati per le equazioni differenziali di primo grado. Quindi il

---

differenze x_1-x_0 e y_1-y_0 (dove x_1 y_1 è il conseguente di x_0 y_0 su un meridiano ω) riesce a dimostrare che all'interno del toro esiste sempre almeno un caso per cui $\Xi = H = 0$ e dunque esiste sempre almeno una curva chiusa.

[96] "Nous ferons usage d'un système particulier des coordonnèes", POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)", (cit. nota 3), p. 199;trad. it. mia.

[97] "Un point quelconque de l'espace sera alors déterminé par ces trois coordonnées x, y et s. Ce système de coordonnées convient pour représenter un point très voisin de la trajectoire fermée" *Ibidem*.

[98] Nello specifico Poincaré prende in considerazione un'equazione $S=e^{2\lambda\pi}$ che definisce dei termini λ_1 e λ_2 che compaiono negli integrali delle equazioni della curva studiata. Ora, ciò che interessa a Poincaré è, di fatto, il variare di questi termini che potremmo paragonare a degli esponenti caratteristici; è in questo modo che si articola la casistica di cui si è parlato.

primo caso corrisponderà a quello in cui vi sia, come punto singolare, un fuoco, il secondo, un nodo e il terzo un punto di sella. La possibilità di interpretare la traiettoria di una curva *C*' in prossimità di una curva chiusa *C* si semplifica, quindi, attraverso la "lettura" dei punti in cui *C*' attraversa una superficie senza contatto. Tale lettura è possibile immaginando di unire i punti conseguenti attraverso una linea formando, in questo modo, un arco che assumerà una data forma attorno al punto singolare *P*. In questo modo lo studio delle traiettorie definite da un'equazione di secondo grado si riconduce allo studio dei punti singolari nelle equazioni del primo ordine. Come nota Hadamard[99] questo passaggio, essenziale a Poincaré per le successive ricerche sul problema dei tre corpi, non sarebbe stato possibile senza il precedente studio qualitativo locale delle equazioni del primo ordine le cui origini risalgono già alla tesi del 1879.

Un quarto caso, oltre ai tre elencati sopra, si presenta più complesso; esso infatti si divide a sua volta in due sottocasi. La difficoltà di questi è data dal fatto che mentre il primo ricade nelle casistiche riportate sopra[100], il secondo sembra invece presentare una situazione del tutto nuova, quella in cui il punto *P* può essere considerato come un *centro*. Il paragone con il capitolo XI della terza parte è inevitabile[101] e anche qui Poincaré mette in luce come questo caso possa rappresentare delle traiettorie stabili di un punto *P*' su *C*'. È in questo passaggio che Poincaré introduce, per la prima volta, l'utilizzo degli *integrali invarianti*. Il valore euristico di questo strumento matematico viene ben sottolineato da Green Barrow che vede in esso il collegamento tra i metodi geometrici di Poincaré e le equazioni della dinamica[102]. Il concetto di *integrale invariante* ricorre, in seguito, sia nell'articolo del 1890 (dove viene ad assumere questo nome) sul problema dei tre corpi, che nell'opera più ampia *Les nouvelles méthodes de la mécanique céleste* pubblicata tra il 1892 e il 1899. Proprio il terzo volume, edito nel 1899, si

[99] Cfr. HADAMARD J., "Les equations differentielles" (cit. nota 41) p. 252.

[100] Nello specifico, si ricade nel primo dei tre casi riportati quello cioè in cui il punto P corrisponda a un fuoco. Cfr., POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)" (cit. nota 41) p. 207.

[101] Ricordiamo brevemente che nel capitolo XI, contenuto in POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (troisième partie)" (cit. nota 41) pp. 95-115. Poincaré si occupa dello studio del caso corrispettivo a quello qui riportato ma per le equazioni del primo ordine. Ciò che Poincaré prende in esame è il caso in cui dei fattori C_0 si annullino e si verifichi, dunque, la presenza di un "centro"e di quella che quindi è definita una traiettoria stabile.

[102] Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 1), p. 74.

apre con la definizione di invariante integrale. L'esempio di un fluido incompressibile con cui solitamente si spiega l'origine della nozione di invariante integrale deriva da queste pagine[103].

Nell'articolo del 1886, attraverso l'utilizzo della nozione di integrale invariante, Poincaré riesce a dimostrare, a priori, l'esistenza delle condizioni che consentono di pensare il punto *P* come un *centro*[104]. Questo passaggio risulta tutt'altro che banale dato che, poco prima, Poincaré specifica l'impossibilità di una verifica analitica dato che essa comporterebbe"un'infinita di verificazioni".

Tuttavia, una volta dimostrata la possibilità dell'esistenza di una superficie anulare senza contatto di genere 1 che avvolge la curva *C* e dunque la possibilità di esistenza di una traiettoria stabile, rimane problematico definire più precisamente le condizioni di questa stabilità e se essa si verifichi realmente. Attraverso una trattazione complessa, che si ramifica in diversi ulteriori sottocasi[105] Poincaré arriva a stabilire l'impossibilità di distinguere i casi stabili da quelli instabili. Ciò è essenzialmente dovuto al fatto che, per quanto si possa stabilire che il punto mobile *P*' di *C*' passa un'infinità di volte per tutte le possibili

---

[103] Per questa definizione di integrale invariante si veda: POINCARÉ J.-H., "Les Methodes nouvelles de la Mécanique céleste", 3 vols., Vol. 3 (Paris: Gauthier-Villars, 1899) pp. 3-7. Una definizione particolarmente chiara è anche in: ZEIPEL H. VON, "L'œuvre astronomique de Henri Poincaré", *Acta Mathematica*, 1921, *XXXVIII*: pp. 309-85 oppure in POINCARÉ J.-H., *Œuvres* (cit. nota 13) vol. XI, pp. 263-346. Qui faremo riferimento a questa ultima edizione, di cui, per quanto concerne gli integrali invarianti si vedano, pp. 338-340. Una trattazione interessante dal punto di vista matematico è inoltre quella di Elie Cartan: ELIE CARTAN, "Sur les invariants intégraux des certains espaces homogènes clos et les propriétés topologiques des ces espaces" in *Œuvres Complètes*, 3 parts (Paris: Gauthiers-Villars, 1952), part. 1, vol. 2, pp.1081-1125.

[104] Tali condizioni sono che i termini C_0, costanti delle serie trigonometriche, si annullino tutti contemporaneamente. La verifica di questa condizione, puntualizza Poincaré, potrebbe avvenire solo attraverso una serie infinita di verificazione. Questa difficoltà può essere aggirata solo attraverso una verifica *a priori*; proprio questa è quella che Poincaré riesce a compiere attraverso l'utilizzo degli integrali invarianti. Cfr. POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)" (cit. nota 3) pp. 207-208.

[105] Nello specifico Poincaré identifica altri quattro sottocasi che vengono poi a corrispondere a tre generi differenti di comportamento qualitativo delle curve descritte: Nel primo caso la posizione del punto mobile *P'* passa un numero finito di volte per una data posizione ρ e, per $t\to\infty$, si ha $\rho\to\pm\infty$; sia ha dunque instabilità. Nel secondo caso, invece, la posizione di *P'* oscilla costantemente tra deteminati limiti e *P'* assume un numero infinito di volte tutti i valori di ρ compresi entro questi limiti; in questo caso ci troviamo di fronte a una soluzione stabile. Nel terzo e ultimo caso il punto *P'* prende un'infinità di volte tutti i valori possibili ρ, ma non possiamo stabilire i limiti entro cui tali valori oscillano; in questo caso si ha sia instabilità che stabilità. Vedremo che la difficoltà in cui si imbatte Poincaré consiste nell'impossibilità di distinguere il terzo caso dal secondo. Cfr., POINCARE J.-H., "Sur le courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)" (cit. nota 41), pp. 208-222. La questione viene inoltre ripresa da Poincaré e spiegata nelle sue linee generali in: POINCARÉ J.-H., "Analyse de ses travaux scientifiques faites par H. Poincaré" (cit., nota 51) pp. 61-64.

posizioni, non si è in grado di stabilire i limiti entro cui tali posizioni oscillano. Questo implica che da un lato via sia stabilità dato che *P*' è destinato a passare un'infinità di volte infinitamente vicino alla sua posizione di partenza, ma dall'altro vi è instabilità poiché non si è in grado di stabilire quanto *P*' si allontanerà e quali siano, quindi, i limiti entro cui oscillano le sue posizioni. Dunque nel momento in cui *P*' si allontana dalla posizione di partenza (nelle vicinanze di *P*) non possiamo sapere se si allontanerà all'infinito e se dopo un tempo t tornerà infinitamente vicino a essa partenza.

Come Poincaré stesso commenterà successivamente nella sua *Analyse de ses travaux scentifiques*: "[…] il punto mobile può essere allora essere vicino quanto vogliamo a un punto del dominio D, e, se esso parte da una data posizione iniziale, finirà sempre per tornare vicino tanto quanto vogliamo a questa posizione. In questo caso c'è dunque *stabilità*, e la dimostrazione di questa stabilità sarebbe completa sapendo assegnare dei limiti alle coordinate del punto mobile"[106]. Purtroppo è proprio l'incompletezza di questa dimostrazione che limita la possibilità di dimostrare completamente la stabilità di *P*'. Da questi risultati Poincaré riconosce quelle che sono le difficoltà che si incontrano nella trattazione dei problemi di meccanica celeste, "che ritroveremo qualsiasi metodo sarà impiegato"[107].

La quarta e ultima parte di *Sur les courbes* si conclude dunque con una trattazione esplicita di questioni afferenti alla meccanica celeste e, più che una conclusione, sembra una premessa ai lavori futuri. È difficile dire in che misura Poincaré abbia già in mente una bozza dell'articolo sul problema dei tre corpi. Certamente sappiamo che è già al corrente dell'esistenza del concorso, dato che l'annuncio su *Nature* appare nel luglio del 1885. Inoltre, da una lettera inviata a Mittag-Leffler il 23 Novembre del 1885, sappiamo che Poincaré si appresta a redigere la quarta parte di *Sur les courbes*, ultimata poi nel dicembre dello stesso

[106] "[…] le point mobile peut aller aussi près que l'on veut d'un point quelconque du domaine *D*, et, s'il parte d'une position initiale donnée, il finira toujours pour revenir aussi près que l'on veut de cette position. Dans ce cas il y a donc *stabilité*, et la démostration de cette stabilité serait complète, si l'on savait assigner des limites aux coordonnées du point mobile" POINCARE J.-H., "Analyse de ses travaux scientifiques faites par H. Poincaré" (cit. nota 51) p. 63; trad. it. mia.
[107] "[…] qu'on les retrouvera, quelle que soit la méthode que l'on emploie" POINCARE J.-H., "Sur les courbes définies par une équation différentielle (quatrième partie)" (cit. nota 51) p. 222.

anno[108]; è dunque possibile che, nel trattare lo studio di un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, Poincaré pensi già in certa misura alla memoria sul problema dei tre corpi.

Alcune riflessioni conclusive, di un certo interesse storico, sono quelle che Poincaré affida alla sua *Analyse*. Si tratta, come sappiamo, di un'analisi retrospettiva, nella quale tuttavia Poincaré mette in luce la profonda coerenza che lega i suoi diversi lavori scientifici: proprio ciò la rende di grande interesse per la nostra trattazione. Due sono le tematiche che Poincaré accenna, entrambe legate agli sviluppi del suo approccio qualitativo: dinamica e analysis situs. La prima emerge dai limiti e dalle possibilità emerse proprio a partire dagli ultimi sviluppi nello studio delle equazioni differenziali. Poincaré sottolinea la possibilità di estendere i risultati qualitativi ottenuti alle equazioni di ordine superiore al secondo, tuttavia, come egli stesso riconosce, tale estensione comporta l'abbandono del linguaggio della *geometria* e l'adozione di quello dell'*iper-geometria*. Le difficoltà di tale linguaggio, sconosciuto a gran parte dei geometri, compromette la sua fruibilità e applicabilità. Ciò nonostante, la possibilità di completare i risultati rimasti in sospeso e dunque di far luce su questioni dinamiche di estrema importanza diventa, in Poincaré, stimolo per la costruzione di un nuovo strumento. Come egli stesso dice "[…] per andare più lontano mi era necessario creare uno strumento destinato a rimpiazzare lo strumento geometrico, che mi limitava quando volevo penetrare nello spazio a più di tre dimensioni. Questa è la principale ragione che mi condotto ad avvicinarmi allo studio dell'Analysis Situs"[109].

---

[108] La lettera a cui facciamo riferimento è rintracciabile in: POINCARÉ J.-H., *La correspondance entre Poincaré et Gösta Mittag-Leffler* (Basel: Birkhäuser, 1999) p. 147. Poincaré scrive: "Je viens de commencer un travail *Sur les courbes definies par les equations différentielles* qui fera suite aux trois premières parties déjà pubbliées et qe je donnerai à M. Jordan". Come sappiamo, infatti, Jordan (1838-1922) dal 1885 era direttore del *Journal des mathématiques pures et appliquées* su cui Poincaré aveva già pubblicato le prime tre parti di *Sur le courbes*.

[109] "Pour aller plus loin, il me fallait créer un instrument destiné à remplacer l'instrument géométrique qui me faisait défaut quand je voulais pénétrer dans l'éspace à plus des trois dimensions. C'est la principale raison qui m'a engagé à aborder l'étude de l'Analysis Situs" POINCARE J.-H., "Analyse de ses travaux scientifiques faites par H. Poincaré" (cit. nota 13) p. 64; trad. it. mia.

L'analysis situs diventa uno strumento attraverso cui approfondire lo studio della dinamica[110]; dunque, è nel solco dell'analisi qualitativa che Poincaré intende proseguire ed è in questo nuovo approccio che egli intravede la possibilità di raggiungere nuovi importanti risultati[111]. Perché ciò avvenga, l'analisi qualitativa deve sviluppare i suoi strumenti teorici; da qui deriva l'esigenza di costruire una nuova disciplina, di sviluppare un nuovo ramo del sapere matematico che diventi la base teorica su cui costruire una nuova dinamica qualitativa (così come l'analisi è stata la base teorica dell'approccio quantitativo). Credo che il valore storico dell'auto-commento di Poincaré risieda soprattutto nello svelare le finalità che lo portano allo studio dell'analysis situs. Gli interessi "fisici" legati alla dinamica (celeste) sono tra le "ragioni principali" che spingono Poincaré allo sviluppo di tale disciplina geometrica[112]. Quest'ultima si inserisce all'interno di un percorso

[110] Una prospettiva storica di un certo interesse, soprattutto sull'utilizzo dell'analysis situs in Poincaré già a partire dagli articoli dei primi anni '80, è quella offerta in: MAWHIN J., "Poincaré's early use of *Analysis Situs* in non-linear differential equation: Variation around the theme of Kronecker's integral" (cit. nota 51). L'articolo di Mawhin mette bene in risalto come già nelle quattro parti di *Sur le courbes* (ma anche in diversi altri articoli pubblicati nello stesso periodo) Poincaré faccia largo uso di strumenti appartenenti all'analysis situs e, in particolare, come in più occassioni Poincaré ricorra, nello studio qualitativo delle equazioni differenziali, all'utilizzo dell'indice di Cauchy e dell'indice di Kronecker (generalizzazione del primo). L'articolo evidenza anche alcuni collegamenti tra le ricerche di Poincare del decennio 1880-1890 e successivi teoremi della topologia algebrica (ad es. teorema di Bendixon-Poincaré, teorema di Poincaré-Hopf).

[111] Sicuramente gli interessi di Poincaré per l'analysis situs si collocano all'interno dell'indirizzo di ricerche inaugurato da Riemann che Poincaré prosegue e amplia. Egli sviluppò, secondo un nuovo approccio, la teoria analitica delle funzioni complesse mostrando come alcune proprietà analitiche di tali funzioni dipendessero strettamente dalle caratteristiche topologiche della superficie di Riemann su cui esse si estendono. Questi aspetti vengono affrontati più in dettaglio in: BOI L., "La conception qualitative des mathèmatiques et le statut épistemologique du concept de groupe" (cit. nota 4). In questo articolo viene anche sottolineato come, in termini generali, il legame tra Riemann e Poincaré si fondi sulla comune prospettiva geometrica nello studio di questioni matematiche, meccaniche e fisiche.

[112] Su alcuni dei più importanti risultati teorici raggiunti da Poincaré nell'analysis situs segnaliamo: JOHN STILLWELL, "Poincaré, Geometry and Topology" in GREFFE J., HEINZMANN G., LORENZ K. (eds.), *Henri Poincaré. Science et phlosophie* (cit. nota 4), pp. 231-240; questo breve articolo ha certamente il pregio di offrire una buona sintesi di alcuni dei principali concetti topologici sviluppati da Poincaré, pur non inserendo la topologia all'interno del suo percorso teorico e considerandola semplicemente una "disciplina inventata" da Poincaré. Una sintesi molto schematica, sempre dei lavori "topologici" di Poincaré è rintracciabile in: KARANBIR SARKARIA, "A Look Back at Poincaré's *Analysis Situs*" in GREFFE J., HEINZMANN G., LORENZ K. (eds.), *Henri Poincaré. Science et phlosophie* (cit. nota 4), pp. 251-258; ALEKSANDROV PAVEL SERGEEVICH "Poincaré and Topology", *Russian Mathematical Surveys*, 1972, XXVII: pp. 157-168 oppure in Browder E.F. (eds.), *The Mathematical Heritage of Henri Poincaré* in *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 1983: *XXXIX vol. 2*, pp. 245-255. Un articolo di un certo interesse epistemologico, soprattutto nel sottolineare il legame tra l'analysis situs in Poincaré e le sue riflessioni sul concetto di continuo, è: NOWAK G., "The concept of Space and Continuum in Poincaré's *Analysis Situs*" (cit. nota 46).

di ricerca ben definito che mostra, nel suo dispiegarsi, una notevole propensione "fisica".

Sappiamo che, storicamente, la prima pubblicazione di Poincaré sull'analysis situs risale al 1895; essa è quindi successiva alla memoria sul problema dei tre corpi e ai primi due tomi di *Nouvelles Méthodes*. Tuttavia, non sempre l'ordine delle pubblicazioni rispecchia quello degli interessi sviluppati o dei percorsi teorici seguiti; inoltre, come spesso capita, la data di una pubblicazione segna un traguardo, non una partenza. Si può allora dire che lo sviluppo di Poincaré dell'analysis situs raggiunge una prima tappa nel 1895 ma, grazie alle sue stesse parole, sappiamo che i suoi interessi per questa disciplina risalgono alla prima metà degli anni '80. È dunque in concomitanza, probabilmente in funzione, dei suoi interessi per la dinamica celeste che Poincaré avverte la necessità di articolare una trattazione teorica più ampia della disciplina che ha come oggetto di studio le proprietà qualitative. Come già detto, non si tratta di trascinare la fisica nel territorio della geometria né, viceversa, di rendere la geometria un sapere fisico; si tratta, piuttosto, della creazione di una nuova piattaforma teorica che possa meglio contribuire a comprendere i fenomeni dinamici nella loro globalità e complessità costituendo una valida alternativa al riduzionismo classico.

Approccio qualitativo, superfici senza contatto, integrali invarianti, questi elementi costituiscono le premesse indispensabili per comprendere la prospettiva teorica dentro la quale si muove Poincaré alla vigilia della stesura sui problemi di tre corpi. A questi elementi si accompagna, inoltre, una piena conoscenza dei risultati raggiunti dai predecessori e la comprensione della necessità di inaugurare nuovi percorsi teorici per dirimere la spinosa questione della stabilità del sistema solare.

Sempre nella sua *Analyse*, Poincaré conclude: "Ho proseguito in seguito le mie ricerche su curve definite da equazioni differenziali, ma i risultati nuovi che ho ottenuto riguardano soprattutto la meccanica celeste"[113]. In queste poche righe egli tratteggia la prospettiva attraverso cui devono essere lette le ricerche sulle curve

[113] "J'ai poursuivi ensuite mes recherches sur les courbes définies pas les équations différentilelles, mais les résultats nouveaux que j'ai obtenus se rapportent avant tout à la Mécanique Celeste" POINCARE J.-H., "Analyse de ses travaux scientifiques faites par H. Poincaré" (cit., nota 51) p. 64, trad. it. mia.

definite da equazioni differenziale e, più in generale, il tentativo di costruire un nuovo approccio qualitativo.

2.4 *Alcune considerazioni epistemologiche*

Nel suo *Le calcul, l'Imprevu* Ivar Ekeland considera Poincaré "le maître" dei metodi quantitativi e "l'inventeur" di quelli qualitativi[114]. Dietro queste espressioni si nasconde, in realtà, la convinzione che la posizione critica assunta da Poincaré nei confronti dei metodi quantitativi derivi da una completa conoscenza di essi e, dunque, da una piena consapevolezza dei loro limiti. Dopo aver seguito il percorso (quantitativo) indicato dalla meccanica classica ed essere arrivato ai suoi confini, Poincaré avrebbe dunque compreso la necessità di elaborare un nuovo punto di vista, una nuova prospettiva, che consenta di aggirare le difficoltà incontrate. Poincaré – prosegue Ekeland – riesce infatti a dimostrare che le equazioni della dinamica, utilizzate dalla meccanica celeste, non sono completamente integrabili e che le serie utilizzate per cercare di risolverle non sono convergenti[115].

Sotto il profilo epistemologico la critica di Poincaré al metodo quantitativo ruota attorno a ciò che viene comunemente considerato il suo punto di forza: la possibilità di potere effettuare delle previsioni precise. Il passaggio a un approccio qualitativo, se considerato come elaborazione di una nuova prospettiva attraverso cui osservare i problemi della meccanica classica, è un passaggio epistemologico prima ancora che matematico; esso rappresenta il percorso attraverso cui Poincaré, scopre che le equazioni della dinamica possono rappresentare dei movimenti tutt'altro che regolari. Nell'approccio classico, la complessità dei movimenti scompare nella semplificazione quantitativa ma riemerge, in un secondo momento, nell'impossibilità di effettuare delle previsioni certe, ovvero di trovare

---

[114] EKELAND I., *Le Calcul, l'Imprevu* (Paris: Editions de Seuil, 1984) p. 49.

[115] *Ivi*, p. 51. Qui Ekeland fa riferimento alla serie di Lindstedt; Poincaré, infatti, nella memoria sul problema dei tre corpi determinerà l'impossibilità di stabilire la convergenza di tale serie. Avremo modo di tornare su questo aspetto nel prossimo capitolo.

serie convergenti[116]. È quindi necessario elaborare una prospettiva che di questa complessità possa rendere conto; questo è l'obiettivo dell'approccio qualitativo. Dunque la svolta epistemologica di Poincaré è quella di reintrodurre la complessità dei fenomeni nel quadro dell'analisi matematica mettendo in discussione l'approccio esclusivamente quantitativo e il determinismo classico che esso contribuisce a fondare. Da un certo punto di vista ciò implica una parziale rinuncia all'ambizione "classica" di fornire delle previsioni certe ma consente, dall'altro, di costruire uno strumento matematico più adatto all'analisi di fenomeni troppo complessi per una spiegazione quantitativa.[117]

I risultati qualitativi raggiunti da Poincaré negli articoli che abbiamo esaminato non possono essere scissi dai suoi interessi per l'analysis situs e dimostrano, al contrario il forte interesse che egli manifesta per tale disciplina già a partire dalla prima metà degli anni '80. Nel suo breve articolo del 1901 *Analysis Situs*, Poincaré scrive: "Per quel che mi riguarda, tutte le diverse strade che via via

---

116 A questo proposito credo sia interessante prendere in considerazione alcune osservazioni di Hadamard sui termini secolari e sul ruolo da essi giocato nel tentativo di determinare le orbite dei pianeti. Come spiega Hadamard nei metodi di approssimazione classici "l'expression approchée du resultat" è raggiuta attraverso la somma di una serie di termini; questi possono essere di vario genere, alcuni sono periodici e quindi assumono ciclicamente gli stessi valori, altri sono "secolari" ovvero proporzionali al tempo, altri ancora sono termini periodici con periodi molto lunghi, essi prendono il nome di "piccoli divisori". Hadamard, trova nelle parole di Poincaré, la spiegazione "fisica" di queste differenti tipologie di termini. I termini periodici mettono in evidenza i fenomeni di compensazione che fanno sì che all'interno di un sistema dinamico vi sia un complessivo equilibrio tra forze perturbatrici opposte. Vi sono però dei casi in cui tale compensazione non avviene: qui intervengono i termini secolari e i piccoli divisori. In termini fisici si può dire che gli effetti delle perturbazioni in questo caso non si annullano; al contrario si sommano accumulandosi. Questi termini diventano quindi espressione della complessità dei fenomeni dinamici e, da un punto di vista matematico, impediscono di prevedere se le serie di approssimazione convergeranno o meno. È possibile trascurare questi termini, in questo caso si avranno però dei casi ideali, estremamente ridotti, la cui risoluzione non tiene conto di elementi essenziali del fenomeno studiato. I termini secolari non costituiscono un problema del calcolo differenziale in se stesso (come nel caso delle soluzioni singolari), quanto un aspetto essenziale dei fenomeni naturali difficilemente trattabile attraverso i metodi quantitativi. Nello specifico l'accomulazione degli effetti fa sì che a gradi di approssimazione crescenti delle serie apparentemente convergenti si rivelino, invece, divergenti. Cfr. HADAMARD J., "Le problème des trois corps" (cit. nota 42) pp. 89-95.

117 Hadamard osserva, a prosito delle difficoltà poste da alcuni problemi fisici di estrema complessità, come appunto il problema dei tre corpi, e della conseguente necessità di trovare nuovi metodi per rapportarsi a tali problemi: "Mais là même où nous y sommes arrivés, ce n'a été, le plus souvent, et ce ne pouvait être qu'en modifiant profodément nos idées sur ce qu'il faut entendre par 'solution'". È necessario, dunque, che l'insufficienza dei vecchi metodi, unita alla necessità di crearne di nuovi, porti a cambiare l'idea di soluzione matematica. A ciò secondo Hadamard si riallaccia l'osservazione di Poincaré per cui non si può più parlare di problemi (matematici) risolti ma soltanto di problemi più o meno risolti. La citazione riportata è tratta da: HADAMARD J., "Le problème des trois corps" (cit. nota 42) p. 61.

imboccavo mi conducevano all'analysis situs. Avevo bisogno dei risultati di questa disciplina per proseguire i miei studi sulle curve definite da equazioni differenziali e per estenderli alle equazioni differenziali di ordine superiore e in particolare a quelle relative al problema dei tre corpi"[118].

La matematizzazione degli aspetti qualitativi avviene quindi attraverso l'analysis situs e, come è facile osservare, i risultati raggiunti da Poincaré nello studio delle equazioni differenziali sono di natura topologica. Ciò non toglie che il "bisogno" di Poincaré di sviluppare tale scienza nasca da un interesse "fisico" e dalla volontà di offrire una lettura matematica "inedita" che possa far luce su questioni fisiche la cui complessità mette in scacco i metodi tradizionali[119].

Nel 1900, in un intervento presso il III Congresso Internazionale di Fisica a Parigi[120], Poincaré dirà, a proposito della semplicità delle leggi della fisica e della presunta semplicità della natura: "Se la semplicità fosse reale e profonda resisterebbe alla crescente precisione dei nostri strumenti di misura; se dunque credessimo che la natura sia semplice in profondità, dovremmo concludere da una semplicità approssimata una semplicità rigorosa. Lo si faceva un tempo; ma non abbiamo più il diritto di farlo"[121]. La natura, dunque, non è profondamente ed

[118] "Quant à moi toutes les voises diverses òu je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'Analysis Sitûs. J'avais besoin des données de cette science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par les équations différentielles et pour les étendre aux équations différentielles d'ordre supérieur et en particulier à celles du problème des trois corps" POINCARE J.-H., "Analysis Situs" in "Analyse de ses travaux scientifiques faite par H. Poincaré" (cit. nota 42) p. 101; trad. it. a cura di Bartocci C. in POINCARE J.-H., *Geometria e Caso* (cit. nota 48) p. 100.
[119] Sempre Hadamard chiarisce come nello studio delle equazioni differenziali Poincaré avesse ben presenti i metodi utilizzati dai suoi predecessori (nello specifico l'introduzione di variabili immaginarie) offrendo inoltre dei contributi personali. Tuttavia precisa che, allo stesso tempo: "Il apprit aux géomètres à se placet au point de vue opposé. Aussi bien et mieux que le plus grands, il mania l'instrument légué par Cauchy, Riemann et Weierstrass. Mais il montra que, tout admirable qu'il soit, cet instrument ne suffit pas à totut et ne s'adapte pas à tous les aspects du problème". HADAMARD J., "Le problème des trois corps" (cit. nota 42) p. 63.
[120] L'intervento è rintracciabile in: POINCARE J.-H., "Sur le rapports de la physique sperimentale et de la physique mathématique", *Revue générale de Science pure set appliquées*, 1900, *XI*: 1163-1175. Successivamente l'articolo è stato ripreso e inserito da Poincaré in *La science et l'Hypothèse* (cap. IX e X). Nell'edizione citata alla nota 38 pp. 215-269.
[121] "Si la simplicité était réelle et profonde, elle résisterait à la précision croissante des nos moyens de mesure; si donc nous croyons la nature profondément simple, nous derions conclure d'une simplicité approchée à une simplicité rigoureuse. C'est ce qu'on faisait autrefois; c'est ce que nous n'avons plus le droit de faire", POINCARE J.-H., *La scienza e l'ipotesi* (cit. nota 32) p. 226; trad. it. nella stessa opera a cura di C. Sinigaglia, p. 227. Nella citazione riportata Poincaré sembra fare riferimento a una sorta di complicazione graduale che deriva dal passaggio da un livello di approssimazione elevato (quello della semplicità approssimata) a uno meno elevato (quello che dovrebbe essere di una semplicità profonda). La semplicità approssimata non è dunque l'indizio di una semplicità profonda; al contrario la discensa a un livello di analisi dei fenomeni più

essenzialmente semplice. Inoltre, prosegue Poincaré, l'utilizzo di leggi "semplici" come la legge di Keplero, può risultare comodo, forse lo sarà sempre, ma ciò non implica che tale legge sia rigorosamente esatta. L'esigenza di trovare leggi semplici e armoniose non consente di indurre che semplicità e armonia appartengano ai fenomeni. Poincaré è ben consapevole dello scarto ontologico che esiste tra le leggi della fisica classica (nonché le istanze metafisiche di cui sono espressione) e la reale essenza dei fenomeni fisici.

Analogamente, nella riflessione epistemologica sull'analysis situs, egli mette in evidenza la ricchezza intuitiva della nozione di continuo che si contrappone all'impoverimento di una trattazione esclusivamente analitica. Uno degli ultimi testi di Poincaré, pubblicato postumo nel 1913 e inserito nella raccolta *Dernières Pensées* si intitola *Pourquoi l'espace a trois dimensions*[122]. Nelle osservazioni di Gregory Nowak è possibile cogliere l'importanza che questo capitolo assume in un'analisi filosofica, prima ancora che matematica, della nozione di "continuo" nel pensiero di Poincaré[123]. L'analysis situs è considerata, da Poincaré, come un terzo tipo di geometria (dopo la geometria metrica e proiettiva) in cui: "[…] la quantità è completamente bandita e che è esclusivamente qualitativa" e aggiunge

---

approfondito mette in evidenza come le leggi della scienza classica non siano affatto rigorose. Non si ha più diritto, per Poincaré, d'inferire una semplicità rigorosa da una semplicità approssimata; il cambiamento di scala mette in evidenza infatti un progressivo aumento di complessità. A questa tematica credo sia possibile collegare anche le osservazioni di Hadamard di cui si è parlato a nota 116. La necessità di "cambiare" l'idea di "soluzione di un problema" deriva, in Poincaré, proprio dalla piena consapevolezza che il concetto di "soluzione" della scienza classica risulta del tutto inadeguato all'approccio di problemi estremamente complessi come, ad esempio, quelli della meccanica celeste. In questi casi si può, da un lato procedere per successive approssimazioni, dall'altro avere una prospettiva globale che ci consenta di comprenderne l'andamento generale dei fenomeni e le lor proprietà formali. In entrambi i casi la concezione "classica" di soluzione va superata.

[122] POINCARE J.-H., *Dernières Pensées* (cit. nota 46) pp. 57-97. In questo capitolo Poincaré cerca di speigare quella che egli ritiene l'asserzione base dell'analysis situs: lo spazio è un continuo a tre dimensioni. La spiegazione si articola sui diversi aspetti (topologici, psico-fisiologici e fisici) che giustificano la formulazione di tale asserzione. Ciò che però a noi interessa maggiormente porre in evidenza sono le riflessioni di Poincaré sul concetto di continuo così come viene inteso dall'analsis situs.

[123] NOWAK G., "The concept of Space and Continuum in Poincaré's *Analysis Situs*" (cit. nota 47). Nowak colloca le riflessioni di Poincaré all'interno di un progressivo declino del punto di vista fisico in matematica causato dalla scoperta delle geometrie non euclidee e dalla conseguente proliferazione di oggetti matematici n-dimensionali, che difficilemente possono trovare un legame diretto con il mondo fisico. Ciò non toglie, tuttavia, che tali oggetti abbiamo successivamente mostrato una loro utilità nell'affrontare questioni fisiche. Da un punto di vista filosofico credo che la questione più interessante sia cercare di capire se un tale cambiamento di equilibri tra fisica e matematica non abbia portato (forse già Poincaré) a una riflessione della fisica su se stessa e sulle proprie leggi, nonché alla necessità di cambiare il quadro concettuale all'interno del quale offrire una spiegazione fisica dei fenomeni.

inoltre: “In questa disciplina, due figure sono equivalenti ogni volta che si può passare da una all’altra attraverso una deformazione continua, qualunque sia la legge di questa deformazione purché rispetti la continuità […]. Dal punto di vista della geometria metrica, così come da quello della geometria proiettiva, le due figure non sono equivalenti; esse lo sono al contrario dal punto di vista dell’Analysis Situs”[124]. Poche righe dopo Poincaré sottolinea come sia proprio nell’*Analysis Situs* che interviene, veramente, l’intuizione geometrica[125]; essa è la base, il sostrato, attraverso cui si sviluppano anche la geometria metrica e proiettiva. Proprio per questo, prosegue Poincaré, è necessario comprendere

---

[124] “[…] la quantité est complètement bannie et qui est purement qualitative.Dans cette discipline, deux figures sont équivalentes toutes les fois qu’on peut passer de l’une à l’autre par une déformation continue, quelle que soit d’ailleurs la loi de cette déformation pourvu qu’elle respecte la continuté […]. Du point de vu de la géométrie métrique, de celui même de la géométrie projective, les deux figures ne sont pas équivalentes; elles le sont au contraire du point de vue de l’Analysis Situs”, POINCARE J.-H., *Dernières Pensées* (cit. nota 46) p. 58; trad. it. mia. Questo estratto è tratto dalla parte iniziale di *Pourquoi l’espace a trois dimensions* e nelle righe che lo precedono Poincaré traccia una distinzione tra geometria metrica, proiettiva e analysis situs; è interessante notare come una distinzione di questo tipo sia presente già in *Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria* (1901) e *Problemi della Scienza* (1906) dell’italiano Federigo Enriques. In particolare Enriques, nel tentativo di offrire una spiegazione psico-fisiologica della nozione geometrica di spazio e dei postulati della geometria mette in evidenza la possibilità di tracciare una distinzione netta tra geometria metrica e proiettiva alla base delle quali si colloca l’analysis situs (definita da Enriques un sostrato comune). Senza approfondire troppo la posizione di Enriques basti osservare che sebbene la distinzione che egli traccia sia del tutto simile a quella ripresa successivamente da Poincaré, egli individua tuttavia un’origine psico-fisiologica del concetto topologico di continuo; al contrario vedremo che non sarà questa la posizione di Poincaré. Per approfondimenti su Enriques di veda: FEDERIGO ENRIQUES, “Sulla spiegazione psicologica dei postulati della geometria”, *Rivista Filosofica*, 1901, *II*: 171-195 rist. in: ENRIQUES F., *Memoria scelte di geometria*, 2 vols. (Bologna: Zanichelli, 1966) vol. II, pp. 145-161; ENRIQUES F., *Problemi della Scienza* (Bologna: Zanichelli seconda 1909) pp. 174-201. È doveroso precisare che sebbene qui vengano riportati gli estremi bibliografici della seconda edizione (quella che attualmente si può trovare in commercio) di *Problemi della Scienza* le tematiche che abbiamo discusso risalgono già alla prima edizione del 1906.

[125] Poincaré distingue l’intuizione, propriamente geometrica, dell’analysis situs, da quella di natura differente della geometria metrica (che rassomiglia maggiormente a quella dell’aritmetica e dell’algebra). Non solo: in conclusione del capitolo che stiamo esaminando egli mette in evidenza come l’intuizione pura del continuo possa estendersi a una intuizione del continuo a più di tre dimensioni spingendosi oltre l’usuale intuizione geoemetrica. In ciò la posizione di Poincaré si avvicina molto a quella di Enriques e a quanto il matematico livornese scrive nell’introduzione delle sue *Lezioni di Geometria Proiettiva* del 1893. L’intuizione di cui parla Enriques è uno strumento che si distacca dai soliti strumenti matematici e che da un lato contribuisce a mettere in luce il significato dei risultati a cui tali strumenti conduco (talvolta riuscendo anche ad anticiparli). Non è questo il luogo per approfondire il raffronto tra l’intuizione del continuo in Poincaré e l’intuizione geoemetrica pura di Enriques: si ha tuttavia motivo di sostenere che le due presentino diversi punti in comune. Sulla distinzione tra diverse forme di intuizione geoemetrica in Poincaré: POINCARÉ J.-H., *Dernières Pensées* (cit. nota 46) p. 61. Per quanto riguarda invece l’intuizione geometrica in Enriques si è fatto riferimento a: ENRIQUES F., *Lezioni di Geometria Proiettiva*, (Bologna, Zanichelli, 1898, rist. 1904.)

l'origine della proposizione fondamentale dell'analysis situs, quella proposizione che definisce lo spazio un continuo a tre dimensioni.

Punto di partenza è la constatazione che lo spazio è relativo: non solo potremmo essere spostati in un'altra regione dello spazio senza che questo cambiamento venga percepito ma, in più, un cambiamento delle grandezze che rispetti le proporzioni reciproche non verrebbe colto nemmeno dai nostri strumenti di misura che parteciperebbero, senza alcun dubbio, a tale cambiamento[126]. Lo spazio, precisa Poincaré, considerato indipendentemente dagli strumenti di misura, non ha né proprietà metriche né proiettive: "[…] esso è *amorfo*, vale a dire che non differisce da quello che avremmo ricavato attraverso una deformazione continua qualunque"[127]. Ma, all'interno di queste considerazioni, in che misura i concetti di "continuo" e "dimensione" sono legati tra loro? Secondo Poincaré il numero delle dimensioni è "intimamente" legato alla nozione di continuità. Per dimostrare ciò, egli introduce la definizione "analitica" di continuo *n*-dimensionale, mettendone immediatamente in risalto i limiti: "Questa definizione, irreprensibile da un punto di vista matematico, non ci soddisferà tuttavia pienamente. In un continuo le diverse coordinate non sono, per così dire, giustapposte le une alle altre, esse sono legate tra loro in modo da formare i diversi aspetti di un tutto"[128]. Il continuo non è riducibile alla definizione degli elementi che lo costituiscono; al contrario deve necessariamente essere ritrovato nei legami e nelle relazioni intercorrenti tra questi elementi: le

---

[126] Cfr. POINCARÉ J.-H., *Dernières Pensées* (cit. nota 46) p. 63. Sappiamo che un esempio simile ricorre anche in Leibniz nel breve "Analysis Situs" di cui si è parlato nel primo paragrafo. Leibniz già sostiene come il cambio di dimensioni, (se le proporzioni restano inalterate) non possa essere colto internamente al sistema di riferimento; al contrario solo un raffronto con un elemento esterno può renderne conto. Il fatto che Poincaré specifichi che uno strumento di misura interno al sistema non può cogliere i mutamenti di grandezza (dato che partecipa a essi) riprende l'osservazione leibniziana per cui solo attraverso un elemento esterno sarebbe possibile cogliere eventuali ingrandimenti. In entrambi i casi ciò che si riafferma è l'implicita natura relazionale dello spazio.

[127] "Il est *amorphe*, c'est-à-dire qu'il ne diffère pas de celui qu'on eu déduirait par une déformation continue quelconque"POINCARE J.-H., *Dernières Pensées* (cit. nota 46) p. 62; trad. mia.

[128] "Cette définition, irréprochable au point de vue mathématique, ne saurait pourtant nous satisfaire entièrement. Dans un continu les diverses coordonnées ne sont pas pour ainsi dire juxtaposées les unes aux autres, elles sont liées entre elles de façon à former les divers aspects d'un tout". *Ivi*, p. 64, trad. it. mia. Sembra di ritrovare, in queste parole, la critica di Leibniz alla meccanica cartesiana. Abbiamo visto che Poincaré aveva ripreso, nella sua postfazione alla *Monadologie*, tale critica e l'aveva resa il centro epistemologico attorno a cui si definiva la distinzione tra la meccanica di Leibniz e quella di Descartes. Ora, a più di trent'anni da quella pubblicazione, Poincaré torna a porre l'accento su questioni simili: i punti del continuo, cosi come gli atomi cartesiani (o il tempo "morto"cartesiano), non possono essere considerati semplicemente come giustapposti, indipendenti gli uni dagli altri.

parti si legano tra loro in modo da formare un tutto. Il continuo si definisce in funzione di una coerenza interna che sfugge del tutto alla definizione analitica. Scrive Poincaré:

> […] questa definizione svende l'origine intuitiva della nozione di continuo e di tutta la ricchezza che riguarda questa nozione. Essa rientra nel tipo di quelle definizioni che sono divenute così frequenti in Matematica da quando si è teso a "aritmetizzare" questa scienza. Queste definizioni, irreprensibili, si è detto, da un punto di vista matematico, non sanno soddisfare il filosofo. Esse rimpiazzano l'oggetto da definire e la nozione intuitiva di questo oggetto con una costruzione fatta con materiali più semplici; è ben chiaro che si può fare una tale costruzione con questi elementi, ma è allo stesso tempo chiaro che potremmo farne molte altre; ciò che non si vede è la ragione profonda per cui si assemblano questi elementi in un tal modo e non in un altro. Non voglio dire che questa «aritmetizzazione» delle matematiche sia una cosa dannosa, dico solo che non è tutto.[129]

L'aritmetizzazione della matematica, secondo Poincaré, "svende" l'origine intuitiva della nozione di continuo, depauperandola della ricchezza che la contraddistingue. Il continuo, prima ancora che matematico, è intuitivo; l'aritmetizzazione avviene solo in un secondo momento, costituisce una sovrastruttura e non l'essenza del continuo. Come conclude Poincaré: l'aritmetica è qualcosa di importante ma non è tutto. La determinazione del numero di dimensioni avviene allora attraverso la nozione di *coupure*, "taglio", nozione puramente topologico-qualitativa che consente di offrire una definizione di continuo che non cada nell'aritmetizzazione di quella analitica[130].

---

[129] "[…] fait bon marché de l'origine intuitive de la notion de continu, et de toutes les richesses que recèle cette notion. Elle rentre dans le type de ces définitons qui sont devenues si fréquentes dans la Mathématique, depuis qu'on tend à 'arithmétiser' cette science. Ces définitons, irréprochabiles, nous l'avons dit, au point de vue mathémamatique, ne sauraient satisfaire le philosphie. Elles remplacent l'object à définir et la notion intuitive de cet object par une construction faite avec des matériaux plus simplex; on voit bien alors qu'on peut effectivement faire cette construction avec ces matériaux, mais on voit en même temps qu'on pourrait en faire tout aussi bien beaucoup d'autres; ce qu'elle ne lasse pas voir c'est la raison profonde pour la quelle on a assemblé ces matériaux de cete façon et ne pas d'une autre. Je ne veu pas dire que cette «arithmétisation» des mathématiques soit une mauvaise chose, je dis qu'elle n'est pas tout" *Ivi*, p. 65, trad. mia.

[130] Si noti inoltre, come accenna Poincaré qualche pagina dopo, che questa nozione di *coupure* è la stessa che consente di definire il genere di varietà topologica e che contribuisce a distinguere, topologicamente, un toro da una sfera.

Il continuo, il cui contenuto intuitivo viene meglio espresso dall'analys situs, costituisce secondo Poincaré il sostrato qualitativo su cui, solo successivamente, è possibile costruire il continuo analitico espresso da Lie con la nozione di *Zahlenmannifaltigkeit*[131]. Considerare quest'ultimo equivalente al "continuo" costituisce un errore matematico e filosofico: matematico in quanto non riconosce la presenza di una serie di proprietà qualitative del continuo (prima che esso venga metrizzato in alcun modo), filosofico perché ne ignora l'essenza intuitiva. Essa viene invece meglio espressa dall'*analysis situs*. Poincaré non risparmia alcune critiche al programma formalista di Hilbert prendendo in particolare considerazione la definizione formalista dell'assioma dell'ordine[132]; nel formalismo hilbertiano esso si risolve in una serie di proposizioni che si deducono logicamente le une dalle altre senza che venga minimamente resa la coerenza delle relazioni che le legano. L'assioma dell'ordine appare così come un *assemblage* di proposizioni *artificiel et baroque* che non consente di comprendere perché lo si debba preferire rispetto a una serie di altri possibili[133]. In particolare per gli assiomi dell'ordine Poincaré sottolinea "che c'è qualcosa di più, essi sono delle vere proposizioni intuitive, riconducibili all'Analysis Situs"[134]. L'assioma dell'ordine, a differenza di altri, non presenta delle caratteristiche di "comodità" in funzione del suo accordo con i fatti sperimentali[135], esso appare come direttamente collegato a un contenuto intuitivo. Questa intuizione, però, non è l'intuizione dello spazio. Se così fosse, sostiene Poincaré, non potremmo che intuire un continuo tridimensionale e dunque attribuire allo spazio tre dimensioni: esiste invece una topologia a più di tre dimensioni che, specifica Poincaré, non

[131] Cfr. NOWAK G., "The concept of Space and Continuum in Poincaré's *Analysis Situs*" (cit. nota 47) pp. 369-370.

[132] L'assioma dell'ordine sostiene che su una retta un punto C è collocato tra un punto A e un punto B e un punto D è tra i punti A e C allora D sarà tra A e B. Ciò che Poincaré critica è il fatto che Hilbert non riconosca alcun valore intuitivo a tale assioma, riducendolo a una definizione puramente formalista.

[133] Cfr. POINCARE J.-H., *Dernières Pensées* (cit. nota 46) p. 94.

[134] "[…] qu'il y a quelque chose de plus, que ces sont de véritables propositions intuitives, se rattachant à l'Analysis situs" *Ivi*, pp. 94-95; trad. it. mia.

[135] *Ibidem*. In generale, precisa Poincaré, gli assiomi non sono per noi delle convenzioni arbitrarie, ma delle convenzioni giustificate – qui Poincaré riprende uno deglia aspetti fondamentali del suo "convenzionalismo geometrico" a cui, più ampio spazio, è dedicato in *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 32, pp. 89-139) – in funzione del loro accordarsi con i fatti dell'esperienza che ci sono familiari. Tuttavia secondo Poincaré, questo non è il caso dell'assiomi dell'ordine che, invece, si radicano alle proposizioni intuitive dell'analysis situs; tant'è vero che essi si riallacciano al quella nozione di *coupure* fondamentale per la definizione del continuo intuitivo tridimensionale.

poggia esclusivamente sull'analisi. Al contrario essa si alimenta di continui richiami all'intuizione: "Esiste dunque un'intuizione del continuo a più di tre dimensioni e se essa esige un'attenzione maggiore dell'intuizione geometrica ordinaria, è senza dubbio una questione di abitudine, e così come l'effetto della complicazione rapidamente crescente delle proprietà del continuo quando aumenta il numero delle dimensioni"[136]. L'intuizione del continuo si può quindi estendere oltre le tre dimensioni e costituisce, secondo Poincaré, una facoltà che preesiste a ogni nostra esperienza nonostante ne subisca anche l'influenza[137]. È interessante sottolineare come le sue riflessioni sulla nozione di continuo e sull'analysis situs si riallaccino a una prospettiva che supera il riduttivismo quantitativo a favore della rivalutazione in un punto di vista qualitativo.

Tanto nei lavori sulle equazioni differenziali quanto nello sviluppo dell'analysis situs la centralità epistemologica del concetto di forma appare chiara. Forma è sinonimo di relazione e, come visto, è sullo studio delle relazioni che si focalizza l'analysis situs. I lavori sulle curve definite da equazioni differenziale contengono, come già detto, risultati di carattere topologico e, cosa ancora più interessante, tali risultati vengono estesi alla comprensione dei fenomeni dinamici. Come lo stesso Poincaré osserva, si apre ai geometri un ambito di ricerca solitamente interdetto. Tuttavia, un'analisi epistemologica più approfondita può forse contribuire a mettere in luce alcuni aspetti "inediti". Abbiamo visto che gli interessi "fisici" di Poincaré contraddistinguono già gli articoli sulle equazioni

---

[136] "Il y a donc bien une intuition des continus à plus de trois dimensions et si elle exige une attention plus soutenue que l'intuition géométrique ordinaire, c'est sans doute une affaire d'habitude, et aussi l'effet de la complication rapidement croissante des propriétés des continus quand augmente le nombre des dimensions". *Ivi*, p. 96; trad. mia. A proposito della nozione di intuizione che viene qui sviluppata si veda la nota 124. Si noti inoltre come Poincaré stesso individui nell'analysis situs "un instrument destiné à remplacer l'instrument géométrique qui me faisait défaut quand je voulais pénétrer dans l'espace à plus de trois dimensions" (p. 64) riconoscendo dunque a essa la peculiarità di un'intuizione che supera l'ordinaria intuizione geometrica riuscendo a penetrare l'idea di spazio *n-dimensionale*.

[137] Ancora una volta possiamo trovare un legame tra Poincaré e Leibniz. Nella distinzione tra le "pieghe della materia" e "le piege dell'anima" in Leibniz, Deleuze mette in evidenza l'esistenza di un contatto per assonanza tra i due livelli, quello dei sensi e quello dell'anima. Esistono delle conoscenze innate, le pieghe dell'anima, ma esse diventano attive solo sotto l'influenza delle sollecitazioni della materia. L'intuizione del continuo, in Poincaré (cosi come la nozione di gruppo in *La scienza e l'ipotesi*) sembra funzionare in modo simile; benché la nozione di continuo sia tutta interamente presente in noi prima di ogni esperienza essa è, allo stesso tempo, modellata dall'esperienza. Non c'è, in Poincaré come in Leibniz, un contatto diretto tra conoscenze a priori ed esperienza ma un modellarsi delle prime in funzione della seconda; non un contatto, appunto, ma un'assonanza. Cfr. DELEUZE G., *Le pli* (cit. nota 24) p. 6, trad. it *La piega. Leibniz e il Barocco* (cit. nota 24) pp. 5-6.

differenziali. La sua può dunque essere intesa come una trattazione "geometrica" motivata da forti ragioni fisiche; in ciò il linguaggio della topologia, oltre a porre l'accento su una classe di proprietà che fanno da sostrato alle proprietà quantitative, consente di stabilire una rete di connessioni tra ambiti di ricerca scientifica generalmente distanti costruendo, come abbiamo già osservato, una nuova piattaforma teorica.

Tuttavia l'interdisciplinarità a cui da accesso l'approccio topologico-qualitativo, non costituisce l'unico aspetto epistemologico rilevante. Nella topologia è infatti possibile, come si è già osservato, vedere la rinascita di un aristotelismo matematico in cui la causa formale torna a coprire il ruolo primario che le era stato sottratto della causa efficiente alla nascita della scienza classica. In questa accezione è facile capire come il termine "forma" non rimandi a una semplice "configurazione esteriore" ma, in linea con quanto già sostenuto dalla fisica scolastica, a una struttura intima, essenziale[138]. Nello studio della forma non si dà una conoscenza approssimativa, un ripiego per i limiti della conoscenza quantitativa; si dà, piuttosto, quello che potrebbe definirsi un cambiamento concettuale maturato a partire dalla consapevolezza che i presupposti epistemologici dell'approccio classico-quantitativo presentano dei limiti evidenti. L'approccio qualitativo di Poincaré, la centralità della "forma" che si esprime nello sviluppo dell'analysis situs e della dinamica qualitativa, aprono la strada a quella svolta "neo-aristotelica" che risulterà estremamente fertile nel corso del Novecento[139].

---

[138] Cfr. BOUTOT A., *L'invention des formes* (cit. nota 4) pp. 172-175. In queste pagine l'autore mette bene in evidenza come l'eliminazione della forma porti alla creazione di uno spazio astratto, articificiale nel quale ha luogo un movimento dei corpi idealizzato e uniforme.

[139] A questo proposito Bouquiaux riporta un'osservazione di Petitot secondo la quale la creazione di una "teoria oggettiva delle forme" coincide con il tentativo di edificare una "ontologia qualitativa" che si ricollega, inevitabilmente, alla tradizione aristotelica. Proprio questo elemento, secondo Petitot, avrebbe condotto a un'opposizione della scienza classica verso ogni tipo di teorizzazione degli aspetti "oggettivi" della forma che quindi avrebbe sviluppato, almeno nella prima parte del '900, solo i suoi aspetti soggettivi (approccio psicologico, fenomenologico). A oggi, parlare di un neo-arisotelismo matematico può risultare ambiguo; da un punto di vista epistemologico, tuttavia, credo che questa espressione renda in modo appropriato lo sforzo di una parte del sapere scientifico di porre al centro dei propri interessi quella nozione di "foma" che la scienza classica aveva del tutto bandito. Per il riferimento a Petitot in Bouquiaux: BOUQUIAUX, *L'harmonie et le chaos. Le rationalisme leibnizien et la 'nouvelle science'* (cit. nota 20) p. 87. Si veda inoltre PETITOT J., "Forme" in *Encyclopædia Universalis*, 1990, 9: 712-728. Per un approfondimento degli aspetti legati alla "eliminazione" della "forma" alla nascita della scienza moderna si veda: BOUTOT A., *L'invention des formes* (cit. nota 4) pp. 172-189.

Resta da chiarire, in che misura, il recupero del qualitativo a partire dal quantitativo possa essere rappresentato come un cambiamento culturale e concettuale profondo che contribuisce a ridisegnare i contorni del sapere scientifico e delle categorie interpretative attraverso cui l'uomo si volge alla comprensione della natura. Se, come osserva René Thom, il primato che la scienza classica ha accordato alla *causa efficiente* è frutto di un antropocentrismo ingenuo, si può scorgere nel recupero della *causa formale* il superamento di questo antropocentrismo e la ricostruzione del valore ontologico che deve essere accordato alla "forma"[140]. Il significato ontologico della "forma" risiede nella capacità di offrire una comprensione globale dei fenomeni in cui la relazione formale tra le parti non è bandita nell'edificazione di una "natura automate"[141] ma, al contrario, è colta come elemento essenziale indispensabile.

Si è aperto questo capitolo parlando di Leibniz e della sua intuizione di un'analysis situs che ponga l'accento sui quei concetti di "qualità" e "forma" che stanno alla base della nozione di "quantità". Successivamente, abbiamo messo in evidenza come, in Poincaré, tanto nello studio delle equazioni differenziali quanto nelle riflessioni sull'analysis situs, emerga la necessità di mettere in rilievo le proprietà qualitative che fanno da sostrato agli aspetti quantitativi. Sia in Leibniz che in Poincaré è rintracciabile la stessa consapevolezza epistemologica: quella di creare gli strumenti matematici per analizzare gli aspetti qualitativi, quel "quelque chose de plus", che la scienza moderna ha messo da parte alla sua nascita ma la cui importanza non può essere trascurata. L'utilizzo della topologia nello studio delle equazioni differenziali e della dinamica celeste sembra partire dalla piena consapevolezza che non è più possibile credere a una semplicità "profonda" della natura; sebbene le leggi della fisica classica (come le già citate leggi di Keplero) possano rimanere comode convenzioni che il fisico continuerà a utilizzare,

[140] "En général, si on a attribué un statut ontologique plus profond que celui de la forme, cela est sans doute dû à une éspece d'anthropocentrisme ingénu qui dériv du fait que nous agisson sur les objects extérieurs par l'intermédiaire des forces que nous leur appliquons avec l'aide des nos muscles […]. J'estime, en revanche, que la forme entendue dans une très large acception est un concept infinement plus riche et plus subtil que le concept de force, concept anthropocentrique réduisant pratiquement un être à un vector". *Ivi*, p. 112. Si veda inoltre: BOUQUIAUX L., *L'harmonie et le chaos. Le rationalisme leibnizien et la 'nouvelle science'* (cit. nota 20) pp. 84-88.

[141] L'espressione è tratta da PRIGOGINE I. STENGERS I, *La nouvelle Alliance* (Paris: Gallimard, 2e editions 1986) p. 35 e è utilizzata per indicare l'immagine della natura creata dalla meccanica razionale.

tuttavia non è pensabile che esse rimandino all'essenza dei fenomeni: non è possibile da una semplicità approssimata inferire una semplicità profonda. Di contro, si può puntare all'essenza dei fenomeni attraverso un percorso intellettuale alternativo che cominci con il porre come elementi fondamentali non il *punto* ma la *relazione*, non la *forza* ma la *forma*.

3 BIFORCAZIONI E CAOS

L'affacciarsi di una nuova scienza nelle ricerche di Poincaré

3.1 *Verso il caos*

Nell'analisi di *Sur les courbes*[1] si è avuto modo di comprendere quali aspetti epistemologici accompagnino le innovazioni matematiche introdotte da Poincaré, ponendo in particolare evidenza come il cambio di prospettiva messo in atto – dall'analisi alla geometria – riveli la rinnovata importanza attribuita alla nozione di forma. A ciò è stata collegata una più ampia riflessione sull'analysis situs attraverso la quale si è potuto cogliere il valore epistemologico che Poincaré sembra attribuire a questa disciplina.

Le quattro parti di *Sur les courbes*, si è visto, vengono pubblicate tra il 1881 e il 1886. Questi anni, i primi della carriera accademica di Poincaré, si caratterizzano per la loro intensità. Nel 1881 Poincaré lascia Caen per trasferirsi a Parigi dove, il 20 ottobre, verrà nominato *Maître des Conférences* presso la *Faculté des Sciences*. A questa nomina si accompagnano una serie di altri incarichi che ne accrescono il prestigio scientifico e accademico: nel 1882 è nominato membro del servizio di controllo delle ferrovie del nord, il 6 novembre 1883 è *répétiteur* di Analisi presso l'*Ecolé Polytechnique*, il 3 maggio 1884 diventa membro corrispondente della Società Reale delle Scienze di Göttingen, il 16 Marzo 1885 occupa la cattedra di *Meccanica Fisica e Sperimentale* della *Faculté des Sciences* e il 27 maggio dello stesso anno è eletto membro straniero della Società reale delle Scienze di Upsala. L'anno successivo Poincaré sostituisce

[1] Vedi capitolo precedente nota 41, p. 82.

Lippman alla cattedra di *Fisica matematica e calcolo delle probabilità* e diventa presidente della *Société mathématique de France*[2].

Nel corso di questi anni Poincaré viene inoltre introdotto all'*Académie des Sciences* di cui verrà eletto membro il 31 gennaio 1887 a soli trentadue anni. Questi, tuttavia, non sono solo anni di conquiste accademiche ma anche di importantissimi incontri e contatti. All'11 aprile 1881 risale il primo scambio epistolare con Mittag-Leffler[3], mentre al maggio dell'anno successivo il primo incontro tra i due. Sempre nel maggio 1882 Poincaré incontra Sofja Kovalevskaja[4]

---

[2] Cfr. PAUL APPELL, *Henri Poincaré* (Paris: Plon, 1925) pp. 35-40. Una cronologia completa della vita di Poincaré è attualmente consultabile sul sito ufficiale degli *Archives Poincaré* di Nancy: http://www.univ-nancy2.fr/poincare sotto la voce "chronologie poincaréenne" (pubblicato: Ottobre 2000, consultato: Agosto 2007). Sempre in tale sito è inoltre riprodotta gran parte della corrispondenza di Poincaré comprendente sia lettere fisicamente conservate agli *Archives* sia lettere che si trovano in altri centri di ricerca. Una parte delle lettere è inoltre corredata da note di approfondimento curate dai responsabili degli *Archives*; di altre sono invece riprodotte immagini ottenute attraverso la scansione degli originali. Nelle pagine successive le lettere a cui faremo riferimento sono in gran parte tratte dal sito degli *Archives* che, da ora in poi, verrà indicato con la sigla *AHP* (*Archives Henri Poincaré*). Le indicazioni bibliografiche verranno date utilizzando i criteri attualmente condivisi, nella stesura di articoli scientifici, per la citazione di materiale tratto da internet. Qualora il materiale consultato sia contenuto anche in una pubblicazione cartacea verrà fornita una doppia indicazione bibliografica. Inoltre di ogni lettera citata verrà menzionato il centro di ricerca o la collezione privata in cui è attualmente conservata.

[3] Si tratta di una lettera di Mittag-Leffler a Poincaré a cui il matematico svedese allega un articolo di Charles Hermite che crede possa interessare al giovane collega francese. Mittag-Leffler chiede inoltre informazioni a Poincaré sulla data di pubblicazione del suo articolo sulle equazioni differenziali. Cfr. *Mittag-Leffler à Poincaré*, 11 Aprile 1881 in *AHP* sotto la voce "correspondance de Poincaré" (consultato: Agosto 2007).La lettera e inoltre pubblicata in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (Basel: Birkhäuser, 1999) p. 51. La copia originale della lettera è attualmente conservata ai *Mittag-Leffler Archives* di Djursholm. Sempre sulla corrispondenza tra Mittag-Leffler e Poincaré si segnala inoltre l'Introduzione (pp. 11-36) della raccolta sopra citata.

[4] La notizia che Sofja Kovalevskaja si trova a Parigi raggiunge Poincaré nei primi mesi del 1882 attraverso una lettera di Mittag-Leffler. L'amicizia tra Mittag-Leffler e la Kovalevskaja risale al 10 febbraio 1876 giorno in cui i due si sono incontrati a Sanpietroburgo. In realtà, già durante il suo soggiorno di studio a Berlino tra il 1873 e il 1876, Mittag-Leffler sente parlare della Kovalevskaja, anch'essa allieva di Weierstrass e da lui stesso definita la miglior studentessa mai avuta. Inoltre lo stesso Weierstrass in occasione del soggiorno della Kovalevskaja a Parigi le raccomanda lo studio dei lavori di Poincaré. Sappiamo peraltro che Poincaré si interesserà ad alcuni lavori della collega russa, in particolare a una memoria sugli anelli di saturno. Per quanto riguarda la lettera Mittag-Leffler a Poincaré cfr. *Mittag-Leffler à Poincaré*, 1882 circa. (cit. nota 3, consultato: Agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) pp. 96-97. L'originale è conservato presso i *Mittag-Leffler Archives* di Djursholm. Per quanto riguarda invece la memoria sugli anelli di saturno della Kovalevskaja, essa viene menzionata più volte da Poincaré negli scritti sui fluidi in rotazione. Un'indicazione bibliografica precisa è però contenuta solo in una breve comunicazione del marzo 1885 del *Bulletin Astronomique*, la riportiamo qui di seguito: SOFJA KOVALEVSKAJA, "Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe", *Astronomische Nachrichten*,1885, n° 2643. Sulla vita e le opere di Sofja Kovalevskaja si segnalano, tra gli altri: KOVALEVSKAJA S., *Memorie d'infanzia*, ed. italiana a cura di Laura Guidotti (Bologna: Pendragon, 2000), oppure GABRIELE LOLLI, *La crisalide e la farfalla* (Torino: Bollati Boringhieri, 2000) pp. 24-29.

(1850-1891) e in ottobre avviene l'importante incontro con Sophus Lie[5] (1842-1899). È al termine di questi anni decisivi, quando l'autorevolezza di Poincaré viene consolidandosi, che si collocano gli articoli che si prenderanno in considerazione in questo capitolo.

Al fine di comprendere e contestualizzare gli articoli di Poincaré direttamente collegati al problema dei tre corpi, è necessario prenderne in considerazione altri che, benché centrati su tematiche diverse, sono in stretto collegamento con i primi. Buona parte degli articoli che esamineremo sarà di carattere tecnico, tuttavia, come fatto in precedenza, la nostra attenzione si concentrerà sul contenuto filosofico e culturale dei principali concetti introdotti; ciò nella convinzione che tali articoli, oltre a costituire una pagina di straordinaria importanza della storia della matematica e della fisica, si contraddistinguano per il loro intrinseco valore epistemologico.

In primo luogo si prenderanno in esame gli scritti di Poincaré sull'equilibrio di un fluido in rotazione. Essi si concentrano in un periodo che va dal febbraio 1885 al marzo 1887 e comprendono, oltre a una memoria di circa cento pagine pubblicata su *Acta Mathematica*, alcune brevi comunicazioni (sia antecedenti che posteriori)[6]. Molto più tardo (1892) è invece uno scritto divulgativo dedicato

[5] L'incontro tra i due è stato definito "importante" perché in esso Poincaré viene a conoscenza del Programma di Erlangen di Felix Klein. In una lettera del 14 Agosto 1883 a Mittag-Leffler propone inoltre di preparare una traduzione della prolusione di Klein per i lettori di *Acta Methematica*. Per un approfondimento su questi aspetti segnaliamo: FELIX KLEIN, *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen: Deichert, 1872); anche in KLEIN, F., *Gesammelte matematische abhandlungen*, erster band (Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag, 1973); tr. it. a cura di Bernardo Antonio, *Il programma di Erlangen* (Brescia: La Scuola, 1998); LUCIANO BOI, "La conception qualitative des mathèmatiques et le statut épistemologique du concept de groupe" in JEAN LUIS GREFFE, GERHARD HEINZMANN, KUNO LORENZ (eds.), *Henri Poincaré. Science et philosophie*, (Berlin-Paris: Akademie-Blanchard, 1996), pp. 315-332; JEREMY GRAY, "Poincaré and Klein-Groups and Geometries" in BOI L., JEAN-MICHAEL SALANSKIS, DOMINIQUE FLAMENT (eds.), *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, Mathematics and History* (Berlin: Springer, 1992) pp. 35-44; THOMAS HAWKINS, "The Erlangen Programm of Felix Klein: Reflections on its Place in the History of Mathematics", *Historia Mathematica*, 1984, 11: 442-470; GRAY J., SCOTT WALTER, "Introduction", in POINCARÉ J.-H., *Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsiennes*, Gray J. Walter S. (eds.) (Berlin: Akademie Verlag, Paris: Albert Blanchard, 1997) pp. 1-26. A proposito della lettera di Poincaré a Mittag-Leffler: NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) p. 32. La lettera è inoltre presente in AHP.

[6] POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1885, t. 100: 346-348 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, XI vols. (Paris, Gauthier-Villars: 1916-56), VII, pp. 14-16; POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Bulletin Astronomique*, 1885, t. 2: 109-118 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., VII, pp. 17-25; POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre

all’argomento e pubblicato sulla *Revue générale des sciences pures et appliquées*[7]. A ciò si aggiunge un breve scambio epistolare tra Poincaré e Lyapunov (1853-1913), autore anch’egli, in quegli anni, di un articolo riguardante la forma dei fluidi in rotazione[8]. L’interesse per questi articoli è motivato essenzialmente da due aspetti: in primo luogo essi si collegano agli interessi astronomici di Poincaré (vedremo infatti che una delle questioni trattate riguarda la genesi dei pianeti), in secondo luogo vedremo come attraverso essi prenda forma la nozione di *biforcazione* nonché una prima trattazione del concetto di *stabilità*. Entrambi questi concetti ritorneranno nella trattazione del problema dei tre corpi e proprio attorno a essi si costruiranno alcuni dei risultati più interessanti.

Per quanto riguarda gli articoli sui fluidi in rotazione, purtroppo la letteratura critica scarseggia. Certamente i risultati matematici raggiunti da Poincaré sono stati ampiamente ripresi, studiati e citati dalla produzione matematica successiva; questa grande attenzione non ha però avuto il suo corrispettivo nella letteratura filosofica. Difficilmente i lavori epistemologici su Poincaré citano questi testi.

Nel caso del problema dei tre corpi, la trattazione sarà più complessa e intricata. Numerosi sono i “punti di accesso” per lo studio epistemologico di tale

---

d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 1885, t. 100: 1068-1070 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., VII, pp. 34-36; POINCARE J.-H., “Sur l’équilibre d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 1885, t. 101: 307-309 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., VII, pp. 37-39; POINCARE J.-H. “Sur l’équilibre d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation”, *Acta mathematica*, 1885, *VII*: 259-280 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit.,VII, p. 40-140; POINCARE J.-H., “Sur l’équilibre d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation”, *Bulletin Astronomique*, 1885, t. 2: 405-413; POINCARE J.-H., “Sur l’équilibre d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 1886, t. 102: 970-972 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., VII, pp. 141-142; POINCARE J.-H., “Sur un théorème de M. Liapunoff relative à l’équilibre d’une masse fluide”, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 1887, t. 104: 622-625 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., VII, p. 143.

[7] POINCARE J.-H., “Sur l’équilibre d’une masse fluide animée d’un mouvement de rotation”, *Revue générale des sciences pures set appliquées*, 1892, III: 809-815 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., VII, pp. 203-217 oppure POINCARE J.-H., *Geometria e Caso, scritti di matematica e fisica*, edizione a cura di Claudio Bartocci (Torino: Bollati Boringhieri, 1991) pp. 61-76.

[8] Per quanto concerne la corrispondenza Poincaré-Lyapunov si veda: VLADIMIR IANOVICH SMIRNOV, ADOLF-ANDREI PAVLOVITCH YOUCHKEVITCH (eds.), “Correspondance de A. M. Lyapunov avec H. Poincaré”, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 1987, 8: 1-18. Una parte della corrispondenza è inoltre presente in *AHP*, cit. nota 3. L’articolo di Lyapunov a cui si fa riferimento risale al 1884 ma una traduzione integrale francese compare solo nel 1904: ALEKSANDR MIKHAILOVICH LYAPUNOV, “Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d’équilibre d’un liquide animé d’un mouvement de rotation”, *Annales de la Faculté. des sceinces de Touluse*, 1904, (2), 6: 5-116.

problema: oltre agli articoli, alle comunicazioni e ai resoconti, abbiamo lettere (ufficiali e ufficiose) e una vasta letteratura critica.

Da un punto di vista prettamente storico i primi interessi di Poincaré nei confronti del problema dei tre corpi sono antecedenti all'annuncio del concorso indetto da re Oscar II di Svezia. Come si è infatti avuto modo di osservare nel capitolo precedente, già nella prima parte di *Sur les courbes*, Poincaré individua nel problema dei tre corpi una delle principali applicazioni dei risultati ottenuti in quel lavoro; si ha ragione inoltre di ritenere che lo sviluppo di un metodo qualitativo, nonché degli strumenti dell'analysis situs, si possa inquadrare all'interno di un più ampio interesse per i problemi di meccanica celeste.

Più esplicitamente già nei primi anni ottanta compaiono due pubblicazioni di Poincaré sul problema dei tre corpi. Entrambe si intitolano *Sur certaines solutions particulières du problème du trois corps* ma mentre la prima, del 1883, compare sui *Comptes Rendus* (pertanto è solo una nota riassuntiva) la seconda, del 1884 è pubblicata sul *Bulletin Astronomique*[9]. In quest'ultima Poincaré esordisce sottolineando come il problema dei tre corpi sia ancora lontano da una soluzione definitiva che, negli ultimi tempi, è stata cercata attraverso lo sviluppo di serie trigonometriche[10]. Sebbene queste si siano rivelate di notevole interesse pratico

[9] POINCARE J.-H., "Sur certaines solutions particulières du problème du trois corps", *Comptes Rendus de l'Académie de France*, 1883, t. 97: 251-252; POINCARE J.-H., "Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps", *Bulletin Astronomique*, 1884, t. 1, 65-74. Una breve analisi si questi due articoli è rintracciabile in: JUNE BARROW-GREEN, *Poincaré and the Three Body Problem* (Providence: American Mathematical Society-London American Society, 1997) pp. 43-44.

[10] Lo stesso Poincaré si dedica allo sviluppo di serie trigonometriche. Come annota Barrow Green esse costituiscono la base dei suoi primi interessi in meccanica celeste. Il problema che Poincaré si trova a fronteggiare è, ovviamente, la dimostrazione di convergenza di serie trigonometriche. A questo proposito egli mostra come il criterio di convergenza ordinaria di una serie trigonometrica non possa essere utilizzato per provare la convergenza assoluta della serie e, quindi, la stabilità del sistema dei tre corpi. Inoltre sempre all'interno degli interessi di Poincaré per le serie trigonometriche si inseriscono i sui sviluppi (che diventeranno nell'articolo del 1890 delle confutazioni) delle serie di Lindstedt. POINCARE J.-H., "Sur les séries trigonométriques", *Comptes Rendus de l'Académie de Science*, 1882, t. 92: 766-768 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., IV, pp. 162-163; POINCARE J.-H., "Sur les séries trigonométriques", *Comptes Rendus de l'Académie de Science*, 1883, t. 97: 1471-1473 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., IV, pp. 588-590; POINCARE J.-H., "Sur la convergence des séries trigonométriques", *Bulletin Astronomique*, 1884, 1, 319-327; oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., IV, pp. 591-598; POINCARE J.-H., "Sur les séries trigonométriques", *Comptes Rendus de l'Académie de Science*, 1885, t. 101: 1131-1134 oppure POINCARE J.-H. *Œuvres*, cit., I, pp. 164-166; POINCARE J.-H., "Sur un moyen d'augmenter la convergence des séries trigonométriques", *Bulletin Astronomique*: 1886, 3: 521-528 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., IV, pp. 599-606. Ci limitiamo qui a riportare esclusivamente gli articoli sulle serie trigonometriche pubblicati prima della memoria del 1890 sul problema dei tre

non lo sono state tuttavia dal punto di vista teorico: la loro convergenza infatti non è dimostrabile. Esistono però delle soluzioni particolari per le quali non si pone il problema della convergenza e per cui le distanze reciproche dei pianeti sono funzione del tempo: in altre parole delle soluzioni periodiche. L'articolo è dunque dedicato a un esame di queste soluzioni particolari, ottenute per valori precisi delle masse dei pianeti nonché delle eccentricità e inclinazioni delle loro orbite[11]. Non è nostro interesse approfondire l'analisi di questa comunicazione che si è voluta citare con l'unico fine di dimostrare, ancora una volta, quanto l'interesse per il problema dei tre corpi fosse radicato già nei primi lavori di Poincaré.

L'articolo più celebre sul problema dei tre corpi è quello pubblicato il 28 aprile 1890 su *Acta Mathematica*[12]. Esso, almeno ufficialmente, non dovrebbe essere altro che la copia della memoria vincitrice del concorso matematico indetto, nel gennaio del 1885, da re Oscar II di Svezia; di fatto è ormai noto che l'articolo pubblicato da Poincaré è un rimaneggiamento di quello presentato al concorso. Si avrà modo di vedere che ciò è essenzialmente dovuto a un errore, contenuto nella memoria originaria, che risulterà avere degli effetti del tutto inaspettati.

---

corpi. Un breve trattazione del contenuto di questi articoli è rintracciabile in: BARROW-GREEN J., *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 9) pp. 41-43.

[11] Come infatti il titolo dei due articoli suggerisce Poincaré prende in considerazione dei casi speciali del problema dei tre corpi. Con questa espressione si intende dire che vengono studiati casi a cui sono attribuite condizioni iniziali ben precise. Tali condizioni riguardano le masse dei pianeti e le caratteristiche delle loro posizioni reciproche; queste ultime possono essere espresse attraverso le inclinazioni ed eccentricità delle loro orbite. Nello specifico Poincaré si chiede se per valori delle masse molto piccoli (di due dei tre pianeti) sia possibile dimostrare l'esistenza di soluzioni periodiche. Ne trova di tre tipi, corrispondenti a valori di inclinazioni ed eccentricità differenti: inclinazione nulla ed eccentricità molto piccola, inclinazione nulla ed eccentricità finita, inclinazione finita ed eccentricità molto piccola. Nella dimostrazione di esistenza di soluzioni periodi che per i casi menzionati Poincaré fa ricorso alla "Formula di Kronecker"; essa permette di dimostrare che, date precise condizioni, per *n* funzioni continue di *n* variabili esiste almeno un sistema di valori delle variabili per cui le funzioni si annullano. L'applicazione di questo teorema permette di dimostrare a Poincaré che è possibile scegliere le condizioni iniziali di un sistema di tre corpi come quello descritto tale che le posizioni reciproche dei corpi siano funzioni periodiche del tempo. Per un breve commento a questi articoli: BARROW-GREEN J., *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 9) p. 43. Qui l'autrice mette in evidenza come questi articoli di Poincaré costituiscano un allargamento dei risultati ottenuti da Hill nello studio di soluzioni periodiche. Viene inoltre specificata la consapevolezza, da parte di Poincaré, della scarsa applicabilità della dimostrazione effettuata a casi più vicini alla realtà; tuttavia l'abilità di Poincaré emergere nel vedere le soluzioni periodiche come "orbite intermedie" utilizzate per esprimere le posizioni reciproche delle masse se le loro condizioni differissero di poco da quelle imposte nel caso di soluzioni periodiche. L'introduzione di soluzioni periodiche viene dunque inteso da Poincaré in chiave euristica. Si avrà occasione di vedere che questo modo di intendere le soluzioni periodiche riemergerà anche successivamente.

[12] POINCARE J.-H., "Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique", *Acta Mathematica*, 1890, t. 13: 1-270 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., VII, pp. 262-479.

Infine ricordiamo che tra il 1892 e il 1899 avviene la pubblicazione dei tre tomi di *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, voluminosa opera che ci limiteremo a trattare solo indirettamente.

Nel caso del problema dei tre corpi la letteratura critica si divide essenzialmente in due parti: da un lato libri e articoli di storia della matematica che offrono un'eccellente ricostruzione dell'articolo di Poincaré del 1890 mettendone in risalto le tecniche utilizzate e gli aspetti più innovativi[13], dall'altro articoli di carattere epistemologico che, nella maggior parte dei casi, si limitano a offrire un'immagine intuitiva più o meno chiara del contenuto scientifico degli scritti di Poincaré sul problema dei tre corpi[14]. Entrambi questi generi di

---

[13] Della vasta letteratura esistente ci limitiamo a segnalare: BARROW-GREEN J., *Poincaré and the Three Body Problem* (cit. nota 9). Questo testo costituisce, senza alcun dubbio, l'analisi matematica più completa sull'argomento. Esso infatti, oltre ad approfondire l'analisi di entrambe le versioni della memoria di Poincaré, ne offre anche una eccelletne contestualizzazione storico-matematica. Della stessa autrice si segnalano anche: BARROW-GREEN J., "Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's Memoir on the three body problem", *Archive for history of exact sciences*, 1994, 48: 107-131; BARROW-GREEN J., "Henri Poincaré, memoir on the three body problem" in IVOR GRATTAN-GUINNESS, ROGER COOKE (eds.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940* (Amsterdam: Elsevier, 2005) pp. 626-638. Questi due articoli, riprendono e sintettizzano quanto già trattato nel libro citato. Per quanto concerne una trattazione specifica sui punti omoclinici: K.G. ANDERSON, "Poincaré's discovery of Homoclinic Points", *Archive for history of exact sciences*, 1994, 48: 133-147. Una trattazione sempre di carattere matematico, seppur meno tecnica è quella di: GRAY J., "Poincaré, topological dynamics, and the stability of the solar system" in PETER M. HARMAN, ALAN E. SHAPIRO, *The investigations of difficult things, essays on Newton and the history of exact sciences in honour of D.T. Whiteside* (Cambridge: Cambridge University Press, 1992) pp. 503-524.

[14] In questo ambito, ancor più che nel precedente, la letteratura critica è pressoché sterminata. Ci limiteremo qui a indicarne una parte essenziale: JEAN- LUC CHABERT, AMY DAHAN DALMEDICO, "Les idées nouvelles de Poincaré" in CHABERT J.- L., DALMEDICO A. (eds.), *Chaos et déterminisme* (Paris: Seuil, 1992), pp. 274-305; JAQUES LASKAR, "La stabilité du système solaire" in CHABERT J.-L., DALMEDICO A. (eds.), *Chaos et déterminisme*, cit., pp. 170-211, questo articolo oltre a comprendere i risultati di Poincaré sull'argomento riassume anche alcuni precedenti storici; IVAR EKELAND, *Le Calcul, l'Imprevu, les figures du temps de Kepler à Thom* (Paris: Editions du Seuil, 1984), il testo di Ekeland oltre a essere una delle analisi epistemologiche più brillanti del lavoro di Poincaré sul problema dei tre corpi offre anche, in appendice, una spiegazione estremamente chiara dei punti omoclinici accessibile anche a dei lettori non matematicamente esperti; IVARS PETERSON, *Newton Clock's, chaos in the solar system* (New York: Freeman, 1993), questo volume costituisce un'ottima introduzione storico-epistemologica al problema della stabilità del sistema solare. Nella parte dedicata a Poincaré l'autore mette in particolare evidenza l'utilizzo, nello studio del problema dei tre corpi, dello spazio delle fasi hamiltoniano permettendo di comprendere l'estrema originalità dell'approccio di Poincaré, ovvero l'utilizzo di strumenti geometrici nello studio di traettorie nello spazio delle fasi. PETER GALISON, *Einstein's clocks, Poincaré's maps: Empires of Time* (New York: Norton & Company, 2003) pp. 62-75, la ricostruzione di Galison si colloca all'interno di una più ampia rivalutazione della figura di Poincaré e di un confronto, sul piano della dinamica relativista, con il lavoro di Einstein; CLAUDIO BARTOCCI, "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" in POINCARÉ J.-H., *Geometria e Caso, scritti di matematica e fisica*, (cit. nota 7), pp. VII-L, l'introduzione di Bartocci consente di comprendere come l'interessamento di Poincaré al problema dei tre si integri con i

letteratura critica, è bene dirlo, sono estremamente preziosi. Tuttavia si ha motivo di credere che essi lascino spazio a interventi originali volti a evidenziare aspetti storici e filosofici non ancora sottolineati.

Per prima cosa si metteranno in luce le dinamiche storiche che portarono Poincaré a partecipare al premio indetto da re Oscar II di Svezia, chiarendo anche alcune "anomalie" del concorso. In un secondo momento, focalizzandosi sui concetti principali che emergono dall'articolo di Poincaré, si cercherà di mettere in evidenza quale nuova immagine di scienza essi contribuiscano a delineare.

Questo prospettiva interpretativa assolve, in primo luogo, al compito di mostrare in che misura l'opera scientifica di Poincaré abbia contribuito a una "decostruzione"[15] della scienza classica, mettendone indirettamente in discussione i metodi e, più in profondità, i presupposti culturali. In secondo luogo l'analisi di testi che spesso non sono stati considerati nella valutazione del Poincaré epistemologo credo possa contribuire a una più ampia rivalutazione del suo pensiero filosofico.

3.2 *Figure d'equilibrio e Biforcazione*

Poincaré introduce per la prima volta il concetto di *biforcazione* in *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée par un mouvement de rotation*[16], nota pubblicata nell'aprile 1885 sui *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* in cui, rispetto

---

suoi interessi per l'analysis situs e lo studio qualitativo delle curve definite da un'equazione differenziale.

[15] A questo proposito forse si addice a Poincaré l'immagine di "iconoclasta" attraverso cui lo descrive Tobis Dantzig. Sicuramente è infatti condivisibile, da un punto di vista metodologico, l'idea di un Poincaré solitario, capace di aprire nuove strade alla ricerca e di mettere a fuoco alcune questioni della scienza classica da una prospettiva inedita: "For, he fits no pattern, and is beyond all norm". Da un punto di vista sostanziale invece Dantzig coniuga iconoclastia e armonia. Purtroppo questa associazione non viene approfondita dall'autore, tuttavia, riferendosi alle citazioni di Poincaré inserite, è possibile comprendere come l'idea stessa di armonia insita nella ricerca scientifica, venga ricondotta da Poincaré più all'uomo che alla natura. Avremo modo di approfondire in seguito questo aspetto del pensiero filosofico di Poincare che si crede possa essere ricollegato alle sue ricerche di meccanica celeste. Di notevole interesse filosofico è anche chiarire se, nell'utilizzo del termine "armonia", si possa trovare un ennesimo collegamento tra Leibniz e Poincaré. A proposito del libro di Dantzig: TOBIAS DANTZIG, *Henri Poincaré, critic of crisis* (New York: Charles Scriber's sons, 1954), per la frase citata si veda, p. 12.

[16] Si fa qui riferimento a: POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Œuvres* (cit. nota 6) VII, pp. 34-36.

agli articoli pubblicati in precedenza sull'argomento, egli enuncia dei risultati inediti:

> Una massa fluida omogenea di cui tutte le molecole si attirano secondo la legge di Newton, e che è animata da un moto di rotazione uniforme attorno a un asse, è suscettibile di un'infinità di figure d'equilibrio. Le sole che siano state segnale finora sono l'ellissoide di rivoluzione, l'ellissoide di Jacobi e le figure anulari di MM. Tait e Thomson, che ho studiato in dettaglio in una nota recente contenuta nel *Bulletin Astronomique*. Ma il problema ammette un'infinità di altre soluzioni.[17]

Come Poincaré stesso sottolinea, nei lavori pubblicati in precedenza sull'argomento egli si è limitato a prendere in considerazioni alcuni dei risultati contenuti nel celebre *A treatise of natural philosophy* di Thomson e Tait[18]. In particolare i suoi interessi si sono concentrati sullo studio delle figure anulari di equilibrio introdotte nel *Treatise* in aggiunta alle figure di equilibrio già conosciute: gli ellissoidi di MacLaurin e gli ellissoidi di Jacobi. Poincaré ritiene però che sia possibile dimostrare l'esistenza di un'infinità di figure di equilibrio.

Suo interesse è quello di studiare le serie lineari formate da queste figure, ovvero serie per le quali a ogni valore della velocità di rotazione corrisponde una figura (o un numero finito di figure) d'equilibrio. Ad esempio, argomenta Poincaré, le figure ellissoidali formano una serie, gli ellissoidi di Jacobi ne

---

[17] "Une masse fluide homeogène dont toutes les molécoules s'attirent d'aprés la loi de Newton, et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe, est suscptible d'une infinité des figures d'équilibre. Les seules qui aient été signalées jusqu'ici sont l'ellipsoïde de révolution, l'ellipsoïde de Jacobi et les figures annulaires de MM. Tait e Thomson, que j'ai étudiées en détail dans une Note récente, insérée au *Bulletin astronomique*. Mais le problème admet une infinité d'autres solutions". POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Œuvres* (cit. nota 6) VII, p. 34 (traduzione mia).

[18] Il lavoro di Thomson e Tait costituisce per Poincaré un punto di riferimento imprescindibile nello studio dei fluidi in rotazione. In un primo momento Poincaré dimostra dei risultati che nel *Treatise* vengono semplicemente enunciati (in particolare l'esistenza di figure di equilibrio anulare), successivamente introduce invece delle dimostrazioni inedite come appunto quella riguardate l'esistenza di una infinità di figure d'equilibrio, ellissoidali e non. Per quanto concerne il trattato di Thomson e Tait: WILLIAM THOMSON, PETER GUTHRIE TAIT, *A Treatise of Natural Philosophy* (Cambridge: Cambridge university press, 1879). In *AHP* è inoltre rintracciabile una parte della corrispondenza tra Poincaré, Thomson e Tait. In particolare nella lettera di Thomson a Poincaré del 7 Novembre 1891 lo scienziato scozzese dice di aver letto la memoria sul problema dei tre corpi pubblicata in *Acta Mathematica* e di esserne rimasto colpito. Molto meno "cordiale" è la corrispondenza con Tait (dal 24.02.1892-20.05.1892) composta da lettere aperte pubblicate su Nature. Poincaré non approva infatti alcune osservazioni di Tait al suo articolo *Thermodynamics* pubblicato nel volume 45 di *Nature*. Ne nasce uno scambio epistolare molto acceso che nel susseguirsi delle lettere vede inasprirsi sempre di più i toni.

formano un'altra. Può capitare, però, che queste due serie abbiano una figura in comune. Ciò significa che esiste un ellissoide di rotazione (di MacLaurin) che è anche un ellissoide di Jacobi. Sebbene Poincaré non lo menzioni esplicitamente il concetto che viene qui introdotto è proprio quello di *biforcazione*[19].

L'idea centrale su cui esso si fonda (e che come vedremo più avanti è ricca oltre che di spunti scientifici anche di conseguenze filosofiche) è che due serie distinte, in questo caso due serie di figure di equilibrio, possano avere un punto di intersezione nel quale coincidono. Nel caso dell'esempio riportato da Poincaré, la figura comune alla serie degli ellissoidi di rotazione e a quella degli ellissoidi di Jacobi, considerata isolatamente, non può essere ricondotta con certezza all'una piuttosto che all'altra; data questa figura, non potremo quindi sapere in senso univoco né da quale delle due serie essa si è evoluta né in quale delle due si evolverà. Poincaré va oltre mostrando come possa darsi il caso in cui una figura ellissoidale appartenga non solo alla serie di figure ellissoidali di equilibrio, siano esse di MacLaurin o Jacobi, ma anche alla serie di figure di equilibrio non ellissoidali; si dà quindi un'intersezione tra più serie differenti.

Come già detto le comunicazioni pubblicate sui *Comptes Rendus* sono esclusivamente delle anticipazioni di ricerche in corso e, solitamente, sono seguite da pubblicazioni più articolate. Proprio ciò accade con la pubblicazione negli *Acta Mathematica* nel settembre del 1885 di *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée par un mouvement de rotation*, principale memoria dedicata da Poincaré all'argomento[20].

Nell'introduzione dell'articolo Poincaré inquadra immediatamente le questioni centrali; quali figure di equilibrio esistono per un fluido in rotazione attorno a un suo asse e le cui parti si attraggono secondo la legge di Newton? Quali sono le condizioni di stabilità di queste figure?

---

[19] Poincaré infatti, dopo aver spiegato l'esistenza di differenti serie di figure d'equilibrio, scrive: "Il peut arriver qu'une même figure appartienne à la fois à deux séries linéaires. Ainsi il y a un ellipsoïde de révolution qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi", POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Œuvres* (cit. nota 6) VII, p. 34. Dietro questa descrizione di intersezione di due serie differenti è facile vedere proprio l'idea di biforcazione.

[20] POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Œuvres* (cit., nota 6) VII, p. 40-140. Sebbene la pubblicazione avvenga nel settembre 1885 il manoscritto sarebbe stato inviato il 16 luglio dello stesso anno. Ciò trova conferma in una lettera di Poincaré a Mittag- Leffler del 9 Agosto 1885 rintracciabile in *AHP*.

Gli ellissoidi di rotazione e gli ellissoidi di Jacobi costituiscono gli unici esempi di figure di equilibrio finora conosciute. Intento di Poincaré è quello di dimostrare l'esistenza di una serie infinita di tali figure. A ciò si aggiunge l'ambizione di offrire una dimostrazione di molti risultati semplicemente enunciati da Thomson e Tait nella seconda edizione del *Treatise*[21].

Il primo paragrafo dell'articolo è intitolato *Équilibre de bifurcation*: qui, per la prima volta, compare l'utilizzo esplicito del termine "biforcazione". Poincaré prende in considerazione, inizialmente, il caso di un sistema in equilibrio assoluto, con lo scopo di estendere in seguito i risultati ottenuti a un sistema in equilibrio relativo[22].

Immaginando un sistema descritto da n parametri è possibile pensare a una funzione delle forze che agiscono nel sistema $F\ (x_1 \ldots x_n)$ in modo che esso sia in equilibrio quando tutte le derivate di questa funzione si annullano e sia stabile quando la funzione ha valore massimo. Poincaré aggiunge inoltre un parametro y dal quale dipendono gli n parametri che determinano lo stato del sistema. Riassumendo, i valori assunti da $(x_1 \ldots x_n)$ descrivono lo stato del sistema ma, a loro volta, questi valori sono dipendenti da un parametro y. Ne consegue che per un dato valore di y le equazioni di equilibrio:

$$dF/dx_1 = dF/dx_2 = \ldots = dF/dx_n \qquad [6]$$

si azzerano per delle radici il cui valore varia a seconda dell'andamento di y. Si otterranno in questo modo delle serie lineari di radici. È facile intuire che ciascuna serie sarà determinata da valori diversi, tuttavia, sottolinea Poincaré, può capitare

[21] Poincaré enuncia infatti una serie di proposizioni che possono essere considerate come punto di partenza per lo studio dei fluidi in rotazione. Esse, introddotte già da Thomson e Tait nel *Treatise*, sono per lo più prive di qualsiasi dimostrazione. Poincaré sostiene allora di volerne dimostrare e completare alcune. Richiama inoltre la dimostrazione di esistenza di figure anulari di equilibrio contenuta nella memoria pubblicata quello stesso anno sul *Bulletin Astronomique* citando, a questo proposito, gli studi di Sofia Kovalevskja sugli anelli di saturno. Per la pubblicazione di Poincaré sul *Bulletin Astronomique* cfr. nota 6, per quanto concerne invece la Kovalevskja cfr. nota 4.

[22] La distinzione tra equilibrio relativo ed equilibrio assoluto è ben spiegata nel saggio del 1892. In sintesi l'equilibrio assoluto riguarda un sistema le cui componenti sono in stato di quiete (rispetto al centro di rotazione del sistema). Un equilibrio relativo riguarda invece un sistema le cui parti sono in moto; questo è il caso dei fluidi in rotazioni. Poincaré è ovviamente ben consapevole che un equilibrio relativo è tale rispetto a un osservatore soggetto a uno stesso moto di rivoluzione, al quale dunque la massa fluida apparirà in quiete. Cfr. POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Revue générale des sciences pures set appliquées*, 1892, III: 809-815 oppure *Œuvres* (cit. nota 7) VII, p. 208.

che due serie presentino dei valori uguali. Egli precisa che ciò accade quando il determinante Δ della hessiana di F è nullo[23]. Dopo una serie di approfondimenti legati al cambio di segno di Δ[24], Poincaré conclude:

> Riassumiamo i risultati ottenuti in questo paragrafo.
> Le forme di equilibrio del sistema considerato sono date dalle *n* equazioni
>
> $$dF/dx_1 = dF/dx_2 = \ldots = dF/dx_n$$
>
> Queste n equazioni avranno un certo numero di soluzioni reali e quando *y* varierà in modo continuo, queste soluzioni varieranno esse stesse in modo continuo in modo da formare diverse *serie lineari di forme d'equilibrio*.
> Potrà del resto accadere che una stessa forma di equilibrio appartenga a due o più differenti serie lineari. Diremo allora che è una forma di biforcazione. Possiamo infatti trovare, per un valore di *y* infinitamente vicino a quello che corrisponde a questa forma, due forme di equilibrio che differiscono infinitamente poco dalla forma di biforcazione.[25]

Una forma di biforcazione è dunque un incrocio di due o più figure d'equilibrio, l'intersezione di serie diverse. Una particolare forma di biforcazione è *la forma limite*. Può infatti capitare che due serie distinte di forme d'equilibrio reali si

[23] Da un punto vista matematico la matrice hessiana di una funzione F a *n* variabili è una matrice quadrata *n* x *n* delle derivate parziali seconde di F. Il calcolo del determinante (o discriminante) di una data hessiana per un certo punto x (in una varietà a *n* dimensioni) consente di capire a quale categoria esso appartenga: se sia ad esempio un punto ordinario o un punto stazionario (o critico). Quando, per un dato punto x, il determinante Δ=0 allora siamo in presenza di un punto critico. Da quanto detto da Poincaré emerge quindi che un punto di biforcazione è, in termini analitici, un punto critico. La biforcazione appare in questi termini come un "singolarità", ovvero un punto di evoluzione del sistema in cui il ventaglio delle possibilità diventa infinito e i cambiamenti globali e osservabili sono determinati da minimi (e inoseervabili) mutamenti nelle condizioni iniziali. Su questi aspetti si veda: BOI L., "Geometry of dynamical systems and topological stability: from bifurcation and chaos to dynamics in the natural and life sciences", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, forthcoming.

[24] Poincaré dimostra che in un punto di biforcazione α il segno di Δ cambia, ciò indica che α è un punto appartenente a più serie di radici.

[25] "Résumons les résultats de ce paragraphe. Les formes d'équlibre du système considéré données par les n equations: dF/dx1= dF/dx2=…=dF/dxn. Ces n équations auront un certain nombre de[s] solutions réelles et quand y variera d'une façon continue, ces solutions varieront elles-mêmes d'une façon continue de manière à former séries linéaires de formes d'équilibre. Il pourra d'ailleurs arriver qu'une même forme d'équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires. Nous dirons alors que c'est une forme de bifurcation. On peut, en effet, pour une valeur de y infiniment voisine de celle qui correspond à cette forme, trouver deux formes d'équilibre qui diffèrent infiniment peu de la forme de bifurcation". POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Œuvres* (cit., nota 6) VII, p. 50 (corsivo dell'autore, traduzione mia).

"confondano" incontrandosi in una forma di biforcazione e che svaniscano in essa[26]. In questo caso la forma di biforcazione è appunto una *forma limite*[27], ovvero il punto di distruzione delle serie di equilibrio che in essa convergono. In conclusione, data una serie lineare di forme d'equilibrio, facendo variare il parametro y può accadere che Δ si annulli e cambi di segno, in questo caso il valore di y corrispondente a $\Delta=0$ indica una *forma di biforcazione*.

Nei successivi tre paragrafi Poincaré si dedica all'estensione di quanto ottenuto a proposito dell'equilibrio di biforcazione considerando un fluido in rotazione sottoposto all'azione di infinite forze e vedendo quale applicazione di ciò si possa fare nella dimostrazione di esistenza di una figura anulare di equilibrio.

Nel settimo paragrafo Poincaré introduce, per la prima volta, la nozione di *stabilità dell'equilibrio relativo*. A differenza di un sistema in equilibrio assoluto, un sistema in equilibrio relativo non si rapporta a degli assi fissi, ma mobili e dunque, rispetto al primo, appare "infiniment plus compliqué"[28]. Anche in questo caso Poincaré cita Thomson e Tait, come coloro che hanno introdotto tale distinzione offrendone una prima trattazione. Le loro dimostrazioni si fondano essenzialmente sulla distinzione tra *stabilità ordinaria* e *stabilità secolare*.

Come infatti precisa Poincaré, nello studio dell'equilibrio relativo è possibile considerare o meno la viscosità del fluido in rotazione. La viscosità, da un punto di vista fisico, è una forza dissipativa, ovvero una forza che agendo sul sistema (in questo caso il fluido in rotazione) determina una graduale dissipazione della sua energia totale. Come quindi spiega Poincaré nel caso in cui essa sia trascurata si trova quella che viene definita *stabilità ordinaria*. Se al contrario l'equilibrio è stabile anche nel caso in cui si consideri la viscosità del liquido, allora si avrà una *stabilità secolare*. Ovviamente può accadere che una data forma di equilibrio goda di stabilità ordinaria ma non di stabilità secolare. Un dato valore della viscosità (per quanto piccolo) potrà forse permettere a una figura di equilibrio di mantenere

[26] Come spiega Poincaré accade che le radici delle equazioni di equilibrio diventano immaginarie.
[27] La nozione di "forma limite" ha un notevole interesse scientifico in Poincaré. Essa ritornerà infatti anche nello studio del problema dei tre corpi. In questo caso, vedremo, Poincaré mette n luce come facendo variare le condizioni iniziali del sistema, le possibili soluzioni periodiche scompaiono a coppie, convergendo in quella che può essere considerata a tutti gli effetti una forma limite.
[28] Cfr. POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Œuvres* (cit., nota 6) VII, p. 70. Con questo Poincaré intende dire che mentre nel caso dell'equilibrio assoluto.

la sua forma a lungo, tuttavia, presto o tardi, essa sarà comunque destinata a scomparire. Analogamente all'introduzione dei termini secolari (che giocano un ruolo essenziale nello studio dei sistemi planetari), la considerazione della viscosità coincide con l'introduzione della direzionalità temporale nello studio del fenomeno fisico analizzato. La *stabilità secolare* ricorda inoltre che non è possibile trascurare, nell'analisi di un fenomeno fisico, tutti quegli elementi (infinitamente piccoli se considerati isolatamente) che sommandosi sincronicamente e diacronicamente concorrono a influenzarne l'evoluzione[29]. Biforcazione, stabilità ordinaria e stabilità secolare, costituiscono concetti epistemologicamente interessanti nella misura in cui contribuiscono a storicizzare i fenomeni mettendone in evidenza la singolarità. Nel caso poi della nozione di biforcazione l'idea stessa di catena causale viene stravolta introducendo un'ambiguità sostanziale che si riflette tanto sul passato quanto sul futuro del fenomeno studiato.

Un'ultima osservazione sull'articolo del 1885 riguarda la conclusione; qui Poincaré svela la finalità cosmogonica delle sue ricerche. Egli prende in esame il caso in cui il liquido in rotazione vada raffreddandosi progressivamente; esso verrà in un primo momento a prendere la figura di un ellissoide di rotazione, quindi a mano a mano che il raffreddamento prosegue si appiattirà sino a diventare un ellissoide di Jacobi. A questo punto continuando a raffreddarsi la figura cesserà di essere un ellissoide assumendo una forma asimmetrica rispetto al piano verticale e presentando una strozzatura verso una delle due estremità. Questa strozzatura andrà aumentando progressivamente mentre le due parti da essa separate tenderanno ad assumere una forma sferoidale. Seppur non sia lecito inferire con certezza quello che accadrà in seguito, Poincaré ritiene ragionevole pensare che le due masse si separino l'una dall'altra. Egli conclude dunque il suo

[29] Come si è già accennato nel secondo capitolo, queste considerazioni si ritrovano al centro della "fisica ereditaria" di Vito Volterra e della sua introduzione di equazioni integro-differenziali. Da un punto di vista epistemologico esse nascono dalla consapevolezza che l'evoluzione di un sistema fisico non può essere descritta partendo esclusivamente da un dato istante *t*, trascurando la sua storia pregressa. Ciò coincide infatti con il trascurare una serie di fattori che vanno sommandosi nel tempo (proprio come i termini secolari) e che influenzano l'evoluzione del sistema. Su questo tema si veda: VITO VOLTERRA, *Saggi scientifici* (Bologna: Zanichelli, 1920 rist. 1990) in particolare pp. 191-218; ENRICO GIANNETTO, "Elena Freda, Vito Volterra and the conception of hysterical nature" in VALERIA P. BABINI, RAFFAELLA SIMILI (eds.), *More than pupils, Italian Women in Science at the Turn of the 20th Century*" (Firenze: Olschki, 2007) pp. 107-123.

articolo presentando una teoria cosmogonica che, a suo avviso, costituisce l'interesse principale delle ricerche sui fluidi in rotazione[30].

Altre brevi comunicazioni seguiranno quest'articolo del 1885, ma solo nel 1892 Poincaré pubblica su la *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, un articolo che riassume i risultati ottenuti nello studio sui fluidi in rotazione e ne traccia alcune possibili implicazioni[31].

A differenza degli articoli precedenti in quest'ultimo la finalità cosmogonica è esplicitata già nelle prime righe. È largamente condivisa, dice Poincaré, l'idea che in origine tutti gli astri siano stati di natura liquida o gassosa e che solo in seguito a un progressivo raffreddamento si siano solidificati. Nel passaggio da uno stato all'altro sia ha però motivo di ritenere che essi abbiano conservato la loro forma: da qui l'interesse degli astronomi per lo studio dei fluidi in rotazione.

Entrando nel vivo della questione Poincaré suppone che il movimento della massa fluida debba essere ritenuto uniforme e che le uniche forze agenti su essa siano, come già in precedenza, la forza d'attrazione newtoniana tra una molecola e l'altra e la forza centrifuga causata dalla rotazione della massa stessa. La determinazione della figura di equilibrio di un tale fluido appare chiaramente come un problema di idrostatica.

Credo sia interessante sottolineare come, in poche righe, Poincaré riesca a intrecciare due ambiti disciplinari, l'astronomia e l'idrostatica, apparentemente distanti tra loro e a metterne in evidenza il legame. Nessuna anomalia, quindi, nel fatto che un astronomo possa interessarsi a questioni di idrostatica o che, viceversa, queste ultime possano gettare nuova luce sull'origine dei corpi celesti.

Poincaré fa quindi un breve riferimento a uno dei "numerosi geometri" che nel secolo precedente hanno preso in esame la questione, si tratta di Alexis Claude

[30] In questo si trova un'ulteriore conferma di come gli interessi astronomici di Poincaré, alla metà degli anni Ottanta, permeino la sua attività scientifica. Tanto nello studio sulle equazioni differenziali, quanto in quello sui fluidi in rotazione, Poincaré scorge possibili applicazioni all'astronomia. In entrambi casi si tratta di approcci estremamente originali, caratterizzati da uno studio globale che, per certi versi, trascende la prospettiva analitico-meccanicista classica. Anche nello studio dei fluidi in rotazione, infatti, Poincaré è interessato agli aspetti qualitativi-globali nei quali vede la possibilità di costruire una nuova strada per la cosmogonia.

[31] POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation" (cit., nota 7).

Clairaut[32] (1713-1765). Egli nel suo *Théorie de la figure de la terre* del 1743 avanza una soluzione basata sull'ipotesi che i corpi celesti siano animati da un movimento di rotazione lento che li porta ad assumere una forma sferoidale. Un riferimento ben più noto è invece quello alla nebulosa di Laplace[33] (1749-1827): essa si collega all'idea che la materia costituente dei pianeti, una volta staccatasi dal sole, abbia inizialmente assunto una forma anulare. Un'altra ipotesi, che invece si distacca dall'idea che un fluido in rotazione venga ad assumere una forma sferoidale, è quella di Colin MacLaurin (1698-1746) il quale in un trattato sulle maree del 1740 e nel successivo *Treatise on fluxions* del 1742[34] è riuscito a dimostrare che una delle possibili forme d'equilibrio assunte da un fluido in rotazione coincide con un ellissoide schiacciato.

Fino a questo momento, dunque, che si tratti di forme d'equilibrio sferoidali o ellissoidali esse appaiono sempre coincidere con una superficie di rotazione. È tuttavia merito di Jacobi aver dimostrato che possono esistere delle particolari figure d'equilibrio la cui forma richiama quella di un ellissoide con i tre assi disuguali (in rotazione attorno all'asse minore). A questo proposito, nota Poincaré, è possibile veder cadere l'abituale convinzione che solo delle superfici di rotazione possano rappresentare delle figure d'equilibrio; del resto, come egli puntualizza, spesso accade nel sapere scientifico che si dissolvano come fantasmi delle apparenti evidenze[35].

---

[32] Clairaut, precoce matematico francese, a soli sedici anni pubblicò le *Recherche sur les courbes à double courbure*, trattatato dedicato allo studio delle curve spaziali. A diciassette anni divenne membro de l'Académie des Sciences. Si interesso sia allo studio della figura della terra, perfezionando i risultati di MacLaurin, che al problema dei tre corpi. In riferimento a quest'ultimo pubblico, nel 1763, la *Théorie de la lune*. Per una trattazione sintetica dei lavori di Clairaut si veda: MORRIS KLINE, *Storia del pensiero matematico*, ed. it. a cura di Alberto Conte, 2 vols. (Torino: Einaudi, 1991) Vol. I, pp. 650-651.

[33] Il modello della nebulosa di Laplace si trova spiegato in PIERRE SIMONE LAPLACE, *Exposition du système du monde* (Paris: Fayard, rist. 1996). Per una sintesi di tale modello si veda invece: Bellone Enrico, "Il modello a nebulosa: Laplace e Herschel" in PAOLO ROSSI (ed.), *Storia della scienza*, 4 vols. (Torino: Utet, 1988), vol. I, pp.751-755. Per una trattazione più ampia del "problema cosmologico" e una contestualizzazione del modello di Laplace: GIANNETTO E., *Saggi di storie del pensiero scientifico* (Bergamo: Sestante, 2005) pp. 291-298.

[34] Cfr. MORRIS KLINE, *Storia del pensiero matematico* (cit. nota 32) p. 611.

[35] "L'exemple n'est d'ailleurs pas rare dans Les annales de la Science et ce n'est pas là le premier fantôme de ce genre qu'on ait vu se dissiper ainsi", POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Œuvres* (cit. nota 7) p. 204. L'affermazione di Poincaré può essere epistemologicamente interpretata in senso ampio, pensando dunque che egli alluda ai meccanismi stessi del progresso scientifico in cui talvolta, quelle che vengono considerate ipotesi consolidate, quasi certezze, scompaiono come fantasmi. Credo però la lettura di

A partire dalla scoperta di Jacobi ci si inizia dunque a interrogare sulla possibilità di trovare altre figure di equilibrio non ellissoidali e in questa direzione si concentrano gli sforzi di Thomson e Tait nel già più volte citato *Treatise*, nonché gli studi di Lyapunov, Mathiessen, Sofja Kovalevskaja e Poincaré stesso. Alle numerose forme di equilibrio emerse in questi studi, Poincaré dedica un paragrafo suddiviso a sua volta in due sottosezioni: la prima dedicata all'"equilibrio" la seconda alla "stabilità".

Descrivendo in termini meno tecnici i procedimenti già seguiti negli articoli degli anni Ottanta, Poincaré specifica come facendo variare in modo continuo il momento angolare[36] di un fluido in rotazione sia possibile ottenere una deformazione continua degli ellissoidi di MacLaurin così come di quelli di Jacobi; si origina in questo modo quella che abbiamo già visto essere una serie lineare. Tanto nel caso degli ellissoidi di MacLaurin che di quelli di Jacobi, l'aumento del momento angolare corrisponde in una fase iniziale all'aumento della velocità angolare e dello schiacciamento dell'ellisoide. Dopo un certo limite però, sebbene il momento angolare continui ad aumentare[37], la velocità angolare inizia a diminuire fino ad annullarsi; questa è la descrizione delle due serie continue di figure di equilibrio generata dagli ellissoidi di Jacobi e MacLuarin. Poincaré si affretta a precisare che esse non sono indipendenti l'una dall'altra, esiste infatti una figura d'equilibrio comune alle due: un punto di *biforcazione*[38]. Si ha dunque una figura in cui le due tipologie di ellissoidi si confondono; Poincaré la chiama figura di biforcazione E_1. Delle figure di biforcazione analoghe a E_1 possono essere trovate anche nelle serie continue originate a partire da figure di equilibrio non ellissoidale. In particolare alcune di esse appartengono tanto alle serie degli ellissoidi di MacLaurin che di Jacobi; una figura di biforcazione può quindi appartenere a tre o più serie di figure di equilibrio. Poincaré prosegue facendo alcuni esempi di serie formate da figure di equilibrio non ellissoidali ottenute

questa frase possa essere storicizzata pensando che Poincaré abbia in mente i suoi risultati sul moto dei corpi celesti e la conseguente scomparsa del "fantasma" della stabilità del sistema solare.

[36] Per momento angolare si intende il prodotto tra il momento di inerzia e la velocità angolare (L= I x W).

[37] Ciò è determinato dal fatto che il momento di inerzia dipende dal raggio della figura in rotazione.

[38] Questa spiegazione viene ripresa da Vito Volterra: VOLTERRA V., *Saggi Scientifici* (cit. nota 29) p. 154. Volterra mostra inoltre una applicazione del teorema di scambio della stabilità dimostrato da Poincaré nell'articolo del 1885 su *Acta Mathematica*.

partendo da ellissoidi di rivoluzione o di Jacobi. La casistica elencata da Poincaré è estremamente dettagliata, basti dire, per offrire un'idea, che le nuove figure di equilibrio nascono da una deformazione ottenuta dividendo gli ellissoidi di partenza in "spicchi" e immaginando che ciascuno di questi possa sollevarsi o sprofondare formando quelli che vengono chiamati dei "colli" o delle "valli"; a seconda del numero di spicchi di partenza e del grado della deformazione è possibile ricavare differenti serie di figure d'equilibrio[39].

Una volta stabilita la loro esistenza, nonché la presenza in esse di figure di biforcazione, Poincaré pone il problema della stabilità. Prima di chiarire se le figure d'equilibrio trovate siano stabili oppure no, egli ritiene fondamentale puntualizzare il significato del concetto stesso di stabilità riallacciandosi all'analisi precedentemente condotta da Thomson e Tait. Per parlare di diversi tipi di stabilità è però necessario, secondo Poincaré, parlare prima di diversi tipi di equilibrio: assoluto e relativo.

L'equilibrio assoluto è raggiunto quando i corpi presi in considerazione sono in stato di quiete; non è dunque il caso di una massa fluida in rotazione. Di contro l'equilibrio relativo è quello di una massa in rotazione (che può tuttavia apparire in quiete a un osservatore coinvolto nel medesimo movimento di rotazione). La differenza sostanziale tra equilibrio assoluto e relativo sta nella diversità di condizioni che ne garantiscono la stabilità. Per entrambi si ha stabilità quando l'energia totale del sistema ha un valore minimo. Se questa però è una condizione sufficiente per entrambi, risulta essere necessaria solo per l'equilibrio assoluto. Un sistema animato da moto di rotazione elevato può infatti essere in equilibrio stabile anche nel caso in cui la sua energia totale non sia minima[40]. Il sistema rimarrà in equilibrio per un tempo indefinito a patto che su di esso non agiscano perturbazioni esterne. Se infatti si considera l'azione dell'attrito su un sistema in equilibrio relativo è facile comprendere che, per quanto debole, essa finirà con il

---

[39] Nello specifico Poincaré immagina di sezionare un ellissoide di rotazione in *n* fasce (tracciando n-1 paralleli) e *p* spicchi (tracciando p-1 meridiani). In questo modo la superficie dell'ellissoide sarà divisa in una sorta di scacchiera, le cui caselle possono essere "sollevate" o "schiacciate". Si formano in questo modo delle nuove figure di equilibrio. A diversi valori di *n* e *p* corrisponderanno serie differenti.

[40] Come Poincaré stesso spiega è il caso di una trottola in rotazione attorno al proprio asse. Se la sua velocità angolare è sufficientemente alta la trottola è infatti in equilibrio, nonostante la sua energia totale non sia minima.

distruggerlo. Si noti che, sebbene la forza dell'attrito non sia sufficiente a turbare l'equilibrio, l'esito della sua azione è determinato dal suo persistere nel tempo[41].

Proprio l'ingresso della variabile *tempo* determina la distinzione tra due generi diversi di stabilità: quella *ordinaria* e quella *secolare*. La seconda è quella che interessa Poincaré. Riprendendo la figura di biforcazione E_1 egli sostiene che gli ellissoidi di MacLaurin meno schiacciati di E_1 sono secolarmente stabili, non lo sono invece tutti gli altri. Un ragionamento analogo viene condotto sugli ellissoidi di Jacobi[42]. Per quanto riguarda le nuove forme di equilibrio esse sono tutte instabili (o stabili ordinariamente). L'unica eccezione, secondo Poincaré, è costituita da una serie particolare, definita in precedenza a partire da un ellissoide di Jacobi[43]. A questa serie appartiene un particolare figura d'equilibrio piriforme chiamata da Poincaré E_2.

Concluse le considerazioni sulla stabilità delle figure d'equilibrio Poincaré si dedica alle *Conseguenze cosmogoniche*:

> Da quello che precede è possibile trarre alcune conclusioni interessanti. Supponiamo di avere una massa fluida omogenea soggetta a un moto di rotazione uniforme. Immaginiamo che questa massa si raffreddi e si condensi; supponiamo che mentre si condensa rimanga uniforme e il suo raffreddamento sia sufficientemente lento da consentire alle forze d'attrito di mantenere uniforme la rotazione.[44]

---

[41] Anche in questo caso Poincaré indica l'effetto ereditario dell'attrito (nel caso di un fluido in rotazione si può parlare di viscosità, come nell'articolo del 1885), ribadendo in questo modo una presenza del tempo, nello studio dei fenomeni fisici che oltrepassa la concezione termodinamica di "unidirezionalità". Viene aggiunta a essa quella di "storicità" e dunque di infinità di cause nel tempo (sommate all'infinità di cause nello spazio) che concorrono alla determinazione dello stato presente di un sistema. Da un punto di vista filosofico viene naturale domandarsi in che misura, questi aspetti, possano collegarsi alla visione begsoniana del tempo e quindi a una sua rivalutazione qualitativa.

[42] Come scrive Bartocci gli studi sulla stabilità degli ellissoidi di Jacobi proseguono, dopo Poincaré con Gorge Darwin, il quale arriva a concludere la stabilità delle figure piriformi. Le sue conclusioni saranno tuttavia definitivamente smentite da Lyapunov, Jeans e Cartan che dimostreranno l'instabilità sia in senso ordinario che secolare degli ellissoidi di Jacobi. Cfr POINCARÉ J.-H., *Geometria e Caso, scritti di matematica e fisica* (cit. nota 7) p. 67, nota 2.

[43] Si tratta della serie di figure di equilibrio generata a partire da un ellissoide di Jacobi e con n=3. È infatti possibile trovare, a partire da questa serie, una figura chiamata da Poincaré E_2 che coincide anche con un ellissoide di Jacobi.

[44] "On peut tirer de ce qui précède quelques conséquences intéressantes. Supposons une masse fluide homogène animée d'une rotation uniforme. Imaginons que cette masse se refroidisse et se condense; supposons qu'en se condensant elle demeure homogène et que son refroidissement soit assz lent pour que les frottements aient le temps de maintenir l'uniformité de la rotation" POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Œuvres* (cit., nota 7) p. 209. Traduzione a cura di C. Bartocci: POINCARÉ J.-H., *Geometria e Caso, scritti di matematica e fisica* (cit. nota 7) p. 68.

Quali siano le "conclusioni interessanti" a cui si può giungere è già anticipato dal titolo del paragrafo e, come intuibile, conducono dall'idrostatica all'astronomia. Poincaré descrive le fasi che accompagnano il progressivo raffreddamento del fluido associato a un crescente schiacciamento della figura considerata[45]. Si delineano dunque tutte le condizioni per la produzione di una serie di figure di equilibrio associate a valori crescenti della velocità angolare ω. Poincaré descrive quindi il comportamento del fluido in rotazione in modo del tutto analogo all'articolo del 1885, concludendo che esso può essere utilizzato nello spiegare la nascita di alcuni sistemi di stelle doppie.

Le conseguenze cosmogoniche ricavate dallo studio dei fluidi in rotazione non si esauriscono qui, è infatti possibile utilizzarle nello studio degli anelli di saturno e della figura della terra; proprio a questi due argomenti Poincaré dedica due sottosezioni.

L'esistenza di figure d'equilibrio anulari viene dimostrata da Poincaré, come si è visto, già nei primi articoli sui fluidi in rotazione. Gli aspetti che restano da chiarire sono però quelli legati alle motivazioni che determinano l'instabilità di tale equilibrio; per questo, secondo Poincaré, può essere "opportuno" richiamarsi allo studio di Maxwell (1831-1879) sugli anelli di Saturno[46]. Le argomentazioni di Maxwell, riassunte e integrate da Poincaré, si sviluppano prendendo in considerazione tre ipotesi sulla natura degli anelli di Saturno: che essi siano solidi oppure formati da numerosi satelliti in rotazione attorno a un centro comune, oppure ancora liquidi. La prima ipotesi viene scartata: nessun corpo solido sarebbe infatti sufficientemente resistente da non infrangesi sotto l'azione della forza gravitazionale esercitata da Saturno.

La seconda ipotesi, peraltro già avanzata da Giovanni Cassini[47] (1625-1712) viene trattata sinteticamente da Poincaré partendo dal caso più semplice esaminato

[45] Un processo di questo genere, dato che il momento angolare deve mantenere un valore costante, implica una diminuzione del momento di inerzia e un costane aumento della velocità angolare.
[46] Si fa qui riferimento a: JAMES CLERK MAXWELL, *On the Stability of the Motion of Saturn's Rings* (London: Mac Millan, 1859) oppure in Maxwell J.C., *The scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 2 vols. (New York: Dover, 1965) vol. I, pp. 289-374.
[47] Giovanni Cassini fu infatti il primo astronomo a ipotizzare che gli anelli di saturno non fossero costituiti da un corpo solido ma da una miriade di frammenti in rotazione attorno al pianeta. Sempre in ambito astronomico Cassini si interesso allo studio dei moti dei satelliti di Giove e Saturno. Cfr. AUGUSTO DE FERRARI, "Cassini, Giovan Domenico", *Dizionario biografico degli Italiani*, vols. 68 (Roma: Istituto Enciclopedia Italiana Treccani, 2005) vol. 21, pp. 484-487.

da Maxwell, quello cioè di satelliti uguali l'uno all'altro, separati da una stessa distanza e in moto uniforme secondo una traiettoria circolare il cui centro è rappresentato da Saturno. Di rilevante interesse storico ed epistemologico è la domanda che Poincaré si pone riguardo a un sistema di questo genere:

> È chiaro che questo stato di moto può prolungarsi indefinitamente se nessuna causa esterna viene a perturbarlo. Ma supponendo che una causa siffatta provochi una perturbazione molto piccola, la corona si frammenterà completamente, oppure la sua deformazione rimarrà anch'essa molto piccola? In altri termini, l'equilibrio della nostra corona sarà stabile?[48]

La stabilità del sistema viene identificata come una proporzionalità tra causa ed effetto. Se una perturbazione molto piccola darà origine a un altrettanto piccolo cambiamento allora l'equilibrio del sistema sarà considerato stabile. Non sarà così se una piccola perturbazione porterà al frammentarsi dell'equilibrio; l'instabilità emerge implicitamente come conseguenza di quella che oggi verrebbe chiamata "sensibilità alle condizioni iniziali". Secondo Poincaré, nel caso in cui Saturno non sia al centro del sistema, l'equilibrio del sistema sarebbe instabile:

> Si vede subito che, se non ci fosse il pianeta al centro, l'equilibrio sarebbe instabile. Se infatti, per una causa qualsiasi, uno dei satelliti viene a trovarsi in anticipo rispetto agli altri, si avvicina al satellite che lo precede e si allontana da quello che lo segue. Viene pertanto attratto in misura maggiore dal primo e minore dal secondo, e il suo moto ne risulterà ancor più accelerato; il suo anticipo tenderà ad aumentare e la corona a frammentarsi.[49]

---

[48] "Il est clair que ce mouvement peut se continuer indéfiniment si aucune cause extérieure ne vient le troubler. Mais, si une semblable cause vient y apporter une perturbation très petite, la couronne va-t-elle finir pas se disloquer, ou bien sa déformation restera-t-elle très petit? En d'autres termes, l'equilibre de notre couronne sera-t-il stable?". POINCARÉ J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Œuvres* (cit., nota 7) p. 213; traduzione a cura di C. Bartocci: POINCARÉ J.-H., *Geometria e Caso, scritti di matematica e fisica* (cit. nota 7) p. 72.

[49] "On peut voir d'abord que, si l'astre central n'existait pas, l'equilibre serait instable. Si, en effet, l'un des satellites prend de l'avance pour une cause quelconque, il se rapproche du satellite qui est devant lui et s'éloigne de celui qui est derriere. Il es plus attiré par le premier et moins par le second: sa marche est ancore accélérée; son avance tend à s'accroître et la couronne à se disloquer". POINCARE J.-H., "Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation", *Œuvres* (cit., nota 7) p. 214. Traduzione a cura di C. Bartocci: POINCARÉ J.-H., *Geometria e Caso, scritti di matematica e fisica* (cit. nota 7) p. 72.

Sebbene i termini della questione restino impliciti non è possibile non riconoscere in queste righe le tracce di quanto Poincaré riprenderà diversi anni dopo nel suo *Le hasard*. Sembra ben presente nelle parole di Poincaré l'idea che il dibattito sulla stabilità passi attraverso una valutazione di proporzionalità tra causa ed effetto. A esso, inoltre, si associa ancora una volta l'introduzione della variabile tempo che, "storicizzando" il fenomeno studiato, permette di valutare diacronicamente l'azione delle cause esterne agenti su di esso. Quest'aspetto risulta centrale nella valutazione di proporzionalità tra causa ed effetto. Come infatti scrive Poincaré, l'anticipo del satellite perturbato "tenderà ad aumentare" e proprio questa tendenza, dettata dal sommarsi nel tempo degli effetti generati dalla perturbazione iniziale, determinerà il crollo dell'equilibrio. La distruzione dell'equilibrio, dice Poincaré, può scongiurarsi solo ammettendo che la massa della corona di satelliti sia infinitamente più piccola rispetto a quella del pianeta. Analogamente, come dimostrato da Maxwell, accade nel caso della terza ipotesi, quella di un anello fluido. In questo caso lo scienziato scozzese calcola infatti che affinché l'anello sia stabile è necessario che la sua densità media sia trecento volte inferiore a quella del pianeta[50].

I calcoli di Poincaré, confrontati con quelli di Maxwell, inducono a concludere che l'anello di Saturno non può essere stabile qualora sia liquido. È invece necessario tornare all'ipotesi di Cassini, peraltro confermata dalle osservazioni.

[50] A questo punto Poincaré interviene con il proposito di "completare" il ragionamento di Maxwell. Egli richiama il modello di campo elettrostatico rappresentato da una serie di linee di forza la cui tangente in ogni punto coincide con la direzione della forza elettrica. Sostituendo l'immagine delle linee di forza con quella di piccoli canali in cui scorre un liquido fittizio è possibile definire la quantità di tale liquido passante attraverso una data superficie come "il flusso di forza" che la attraversa. Con questo espediente è possibile considerare il flusso di forza che attraversa una superficie chiusa come proporzionale alla somma algebrica delle masse elettriche in essa contenute. Sulla base di questo modello Poincaré costruisce un immagine simile per una molecola appartenente a un fluido in rotazione composto, a sua volta, da masse reali e fittizie. Mentre le prime interagiscono tra di loro secondo la legge della gravitazione di Newton le seconde sono invece delle masse di densità "negativa" anch'esse esercitanti una forza proporzionale al quadrato delle distanza ma repulsiva; in altre parole esse rappresentano la forza centrifuga. Affinché l'equilibrio sia stabile la risultante delle due forze deve essere una linea perpendicolare alla superficie della massa fluida e diretta dall'esterno all'interno. Quindi immaginando di sostituire la linea di forza con i canali sopra menzionati, affinché si dia stabilità della figura di equilibrio, il flusso del liquido fittizio che scorre nei canali dovrà essere rivolto dall'esterno all'interno della superficie e, quindi, essere positivo. Ne consegue, spiega Poincaré, che positiva dovrà allora essere anche la somma algebrica di masse fittizie e masse reali e quindi la densità media di queste ultime deve essere superiore a quella delle prime (la densita delle masse fittizie è proporzionale al quadrato della velocità angolare).

L'ultimo paragrafo Poincaré lo dedica alla "Forma della Terra", ovvero al caso in cui la massa del solido di rotazione non sia omogenea. Il problema principale è quello di definire la legge di variazione di densità attraverso le misurazioni geodetiche e la precessione degli equinozi[51]. Tuttavia nel fare ciò la complessità dell'impresa e l'incertezza dei dati raccolti non consentono di trovare una soluzione che soddisfi tanto lo schiacciamento equatoriale quanto la precessione degli equinozi. In altre parole i dati raccolti evidenziano delle incongruenze tra le ipotesi di partenza. A questo punto resta da decidere quali, tra ipotesi e osservazioni, sia legittimo sacrificare; forse la terra non è un ellissoide di rivoluzione? Forse sono errate le misurazioni?

Poincaré conclude sottolineando come sia inutile moltiplicare le ipotesi riguardanti problemi la cui soluzione è ancora molto lontana. Le ipotesi riguardanti la forma della terra si moltiplicano in funzione della complessità del problema e la scienza è ancora lontana dal saper sciogliere il nodo di tale complessità.

Con l'articolo del 1892 si conclude l'esame di testi riguardanti i fluidi in rotazione. Sebbene essi presentino nella maggior parte dei casi delle trattazioni tecniche sarebbe sbagliato ridurli a esse. È indubbia, infatti, la presenza di contenuti epistemologici che emergono, più o meno esplicitamente, attraverso le nozioni di "biforcazione" e "stabilità". Si intravede nella loro trattazione l'emergere di un'immagine di scienza alternativa a quella classica capace di porre in rilievo le nuove problematiche introdotte dalla direzionalità temporale e dalla "storicizzazione" dei fenomeni fisici.

3.3 *Il Problema dei tre corpi*

Come accennato nell'introduzione di questo capitolo affrontare il problema dei tre corpi, così come è stato trattato da Poincaré, pone la necessità di stabilire alcune condizioni preliminari atte a definire con precisione il piano di analisi su cui ci si

[51] Poincaré spiega infatti che il fenomeno di precessione degli equinozi è causato dall'azione del Sole sul rigonfiamento equatoriale e è dipende da come varia la densità interna. Studiare la precessione può quindi fornire qualche informazione sulla densità interna.

intende muovere. Si è infatti detto che la letteratura critica sull'argomento è vasta e prende in esame differenti aspetti della questione; da quelli più tecnico-matematici[52] a quelli più epistemologici[53]. Il terreno sul quale ci si muoverà nel presente studio è certamente più vicino a questi ultimi sebbene cerchi di ritagliare uno spazio di originalità interpretativa. Difficilmente i lavori storico-epistemologici che hanno preso in esame il problema dei tre corpi in Poincaré sono andati oltre il tentativo di rendere comprensibile il contenuto tecnico di articoli inaccessibili al grande pubblico; tale sforzo, indispensabile per chi si avvicini all'argomento con una formazione non matematica, ha tuttavia lasciato sullo sfondo la ricchezza filosofica dei concetti trattati da Poincaré e non è stato capace di mettere in collegamento questi lavori con la sua successiva produzione filosofica[54].

L'obiettivo del presente lavoro sarà allora quello riempire questo vuoto cercando da un lato di mettere in evidenza i passaggi epistemologicamente più interessanti degli articoli che esamineremo, dall'altro di sviluppare le basi per una rilettura delle opere epistemologiche di Poincaré.

La ricostruzione storica è il fondamentale punto di partenza. Essa, oltre a offrire interessanti sviluppi epistemologici, contribuirà ad aprire uno squarcio sulla vita di Poincaré e su alcune dinamiche accademiche che riguardanti l'avventurosa pubblicazione dell'articolo sul problema dei tre corpi.

L'analisi condotta prevede la rilettura di passi tratti da comunicazioni, lettere e articoli dedicati al tema trattato. Sebbene il tentativo di affrontare (e in parte spiegare) alcune questioni tecniche sia essenziale, esso non sarà centrale nella presente analisi e in ogni caso sempre rivolto alla possibilità di aprire approfondimenti di carattere filosofico.

---

[52] Cfr. nota 13.

[53] Cfr. nota 14.

[54] In nessuno di questi articoli si è mai tentato di creare un collegamento tra i lavori tecnici di Poincaré sul problema dei tre corpi e i suoi scritti epistemologici. Appare tuttavia improbabile che le tematiche scientifiche e filosofiche sollevate dallo studio del problema dei tre corpi abbiano lasciato Poincaré del tutto indifferente da un punto di vista "filosofico". Si crede tuttavia che da questo punto di vista il pensiero filosofico di Poincaré vada letto andando oltre il convenzionalismo a cui buona parte della letteratura critica lo ha spesso ridotto. Gli sforzi interpretativi si sono così indirizzati, nella maggior parte dei casi, nel tentativo di trovare una origine "scientifica" del convenzionalismo; è il caso questo di Gyedemin, Stump, Grünbaum e altri. Credo in realtà che la ricchezza concettuale degli scritti di Poincaré oltrepassi il convenzionalismo offrendo spunti di riflessioni rimasti, talvolta, in ombra.

3.3.1 Antefatti

Come sottolinea June Barrow-Green una prima anomalia legata al concorso indetto da re Oscar II di Svezia è nella natura stessa di tale gara[55]. Lungi dall'essere una novità in senso assoluto, l'organizzazione di un concorso matematico è solitamente collegata a un'istituzione e non, come nel caso trattato, a una rivista. La rivista è *Acta Mathematica* e il suo direttore Gösta Mittag-Leffler (1846-1927) è colui a cui viene affidata la regia della competizione. Re Oscar II viene dipinto, nelle parole di Sofja Kovalevskaya come un monarca illuminato, colto, interessato alle scienze e molto sensibile alle richieste dell'ambiente universitario sebbene non abbia con esso un collegamento istituzionale diretto[56]. Del resto già la fondazione di *Acta Mathematica*, nel 1882, è riconducibile alla sensibilità culturale del re a cui si aggiungerà, in seguito, una profonda intesa intellettuale con Mittag-Leffler. Sebbene non sia possibile stabilire a chi precisamente vada ricondotta[57] l'idea di indire il concorso, è invece nota l'occasione per cui esso viene pensato: il festeggiamento, nel gennaio del 1889, del sessantesimo compleanno di re Oscar II.

Le fasi organizzative sono tutt'altro che semplici e Mittag-Leffler viene scontrandosi con numerose difficoltà. Come testimonia una lettera inviata a Sofja Kovalevskaya nel giugno del 1884[58] un primo nodo da sciogliere è la composizione della commissione. Inizialmente Mittag-Leffler pensa a cinque componenti tra cui si ipotizza anche la presenza dell'analista italiano Francesco Brioschi (1824-1897). Secondo il regolamento provvisorio a ogni consegna del premio due dei cinque commissari dovrebbero lasciare la giuria e al loro posto verrebbero nominati altri due direttamente scelti dal re; alla morte di questi il compito verrà svolto dai restanti tre componenti della commissione.

---

[55] Cfr. BARROW-GREEN J., "Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's Memoir on the three body problem" (cit., nota 13) pp. 107-108.
[56] Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* cit., nota 13) p. 51.
[57] *Ivi*, p. 53.
[58] *Ivi*, pp. 227-228. La lettera è qui riprodotta nella sua traduzione inglese.

Purtroppo per Mittag-Leffler, le rivalità accademiche e personali dei nomi coinvolti impediscono la piena realizzazione dell'ipotesi iniziale[59] e portano a una commissione formata solamente da Charles Hermite[60] (1822-1901), Karl Weierstrass[61] (1815-1897) e lo stesso Mittag-Leffler.

Sia Hermite che Weierstrass sono due vecchie conoscenze di Mittag-Leffler: egli infatti dopo essersi addottorato a Uppsala nel 1872 si trasferisce prima a Parigi, dove è seguito nei suoi studi da Hermite, e successivamente a Berlino, dove entra in contatto con Weierstrass. Si tratta dunque di un allievo che si rivolge ai suoi maestri perché lo aiutino, con il prestigio della loro partecipazione, a dare credibilità e visibilità all'iniziativa che egli sta organizzando.

Dopo aver accantonato l'ipotesi di proporre un unico quesito (sarebbe troppo riduttivo) e quella di lasciare libertà di scelta ai partecipanti (diventerebbe difficile stabilire il vincitore) la commissione decide di proporre quattro quesiti dando però ai partecipanti anche l'opportunità di sottoporre dei lavori riguardanti questioni scelte autonomamente.

Nel luglio del 1885 compare su *Acta Mathematica* (in francese e tedesco) e in *Nature* (in inglese) l'annuncio del concorso:

---

[59] In particolare Mittag-Leffler dovette far fronte alle accuse, sia formali che sostanziali, di Leopold Kronecker. Questi chiese spiegazioni a Mittag-Leffler sia delle modalità di organizzazione del concorso che dei criteri di composizione della giuria. Criticò inoltre il quarto quesito proposto, sostendo la sua insolubilità. Per maggiori dettagli sulle critiche di Kronecker: BARROW-GREEN J., "Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's Memoir on the three body problem" (cit., nota 13) pp. 11-115; BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) pp. 59-61.

[60] Charles Hermite, docente alla Sorbona e all'*Ecole Polytechinque*, è stata una figura dominante della matematica francese dell'epoca. Autorità nel campo delle funzioni ellittiche, con il loro utilizzo dimostrò, nel 1858, l'esistenza di una formula per la risoluzione delle equazioni di quinto grado. Insegnante di Mittag-Leffler a Parigi, gli consigliò di recarsi a Berlino per conoscere Weierstrass. Su Charles Hermite: BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) p. 55-57.

[61] Karl Weierstrass rappresenta, nel contesto matematico dell'epoca, la massima autorità tedesca nel campo dell'analisi. A partire dal 1857 occupò la cattedra di matematica presso l'Università di Berlino dove tra i suoi allievi ebbe: Sofja Kovalevskaya, Sophus Lie, Gorge Cantor e Felix Klein. I suoi primi interessi si indirizzarono verso lo studio delle funzioni ellittiche e abeliane, in seguito i suoi sforzi si concentrarono invece sullo sviluppo di un programma di aritmetizazione della analisi volto a ridimensionare l'utilizzo dell'intuizione geometrica, considerata come fonte di incertezza, nelle dimostrazioni matematiche. Il suo nome è legato al teorema di analisi riguardante l'esistenza di un massimo e un minino tra valori definiti di una funzione e alla definizione di funzioni analitiche attraverso la convergenza di una serie di potenze nel piano complesso. Di interesse storico scientifico, per la ricostruzione del personaggio di Weierstrass, è l'articolo di Mittag-Leffler in suo ricordo: MITTAG-LEFFLER G., "Zur Bioraphie von Weierstrass", *Acta Mathematica*, 1912, XXXV, pp. 29-65.

> Sua maestà Oscar II, desideroso di fornire una nuova prova del suo interesse per l'avanzamento delle scienze matematiche […] ha deciso di accordare un premio, il giorno 21 gennaio 1889, suo sessantesimo genetliaco, a un'importante scoperta nel campo dell'analisi matematica superiore. Questo premio consisterà in una medaglia d'oro recante l'effige di sua Maestà e avente il valore di mille franchi, insieme con una somma di duemilacinquecento corone.[62]

A queste altisonanti parole segue l'elenco dei quattro quesiti: i primi tre formulati da Weierstrass e l'ultimo da Hermite.

Il primo riguarda il problema degli *n* corpi e ne viene spiegata l'importanza; la sua risoluzione permetterebbe di risolvere rilevanti questioni legate alla struttura dell'universo quali ad esempio quelle legate alla stabilità del sistema solare. Proprio quest'ultima sarebbe stata dimostrata da Dirichet, secondo una confidenza rilasciata a un allievo (Leopold Kronecker) poco prima della morte, grazie alla scoperta di un nuovo metodo di integrazione delle equazioni differenziali della meccanica. Purtroppo di tale idea non è rimasto nulla, pertanto i partecipanti al concorso sono invitati a ricostruirla con l'ausilio degli strumenti dell'analisi. Viene inoltre specificato che se nessuna delle memorie presentate dovesse meritare il premio, questo potrebbe essere attribuito a un'altra memoria che offra la soluzione di una qualsiasi altra questione rilevante della meccanica.

Il secondo tema proposto riguarda invece lo studio di nuove funzioni uniformi a due variabili la cui esistenza è stata dimostrata da Fuchs[63] e che si legano alle funzioni ultra-ellittiche. Tale quesito è proposto perché si ritiene che un esame

[62] Riportiamo qui la traduzione inglese apparsa su *Nature* "His Majest Oscar II, wishing to give a fresh proof of his interest in the advancement of the mathematical science […] has resolved to award a prize, on January 21, 1889, the sixtieth anniversari of his birthday, to an important discovery in the field of higher mathematical analysis. This prize will consist of a gold medal of the eighteenth size bearing his Majesty's image and having a value of a thousand francs, toghether with a sum of two thousand five hundred crowns". La versione integrale dell'annuncio è rintracciabile in: BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit., nota 13) pp. 229-231.

[63] Lazarus Immanuel Fuchs (1833-1902), matematico tedesco noto soprattutto per i sui studi sulle equazioni differenziali introdusse l'utilizzo delle funzioni ellittiche. Sappiamo che proprio ai lavori di Fuchs si richiama Poincaré nel suo studio delle equazioni differenziali lineari a coefficienti algebrici nel quale costruirà gruppi discontinui ribattezzati appunto "fuchsiani". Per una sintesi sui prinicipati risultati scientifici di Fuchs nello studio delle equazioni differenziali si veda, tra gli altri: GRAY J., "Fuchs and the Theory of Differential Equations", *Bulletin of the American Mathematical Socety*, 1984, 10: 1-26.

approfondito della teoria di Fuchs sulle equazioni differenziali possa essere di grande utilità all'analisi.

Il terzo quesito tratta invece delle equazioni differenziali non-lineari il cui studio è stato iniziato da Briot e Bouquet ma di cui restano ancora diversi aspetti inesplorati; anche in questo caso l'approfondimento del tema proposto costituirebbe una conquista di somma importanza per l'analisi.

Infine il quarto quesito, quello formulato da Hermite, propone lo studio delle relazioni algebriche esistenti tra due funzioni fuchsiane, la cui esistenza è stata dimostrata da Poincaré, aventi un gruppo in comune.

Nel caso nessuna delle memorie inviate a risposta dei quesiti proposti venga considerata adeguata al conferimento del premio, questo può essere attribuito a una memoria riguardante un problema centrale della teoria delle funzioni anche se diverso da quelli proposti dalla commissione. L'annuncio si conclude con alcune direttive "tecniche": la data ultima per la consegna delle memorie al caporedattore (Mittag-Leffler) di *Acta Mathematica* è il 1 giugno 1888, per la memoria vincitrice, così come per eventuali altre memorie considerate meritevoli dal comitato giudicante, vi sarà la pubblicazione su *Acta Mathematica*. La lingua ufficiale del concorso è il francese, le memorie possono essere in qualsiasi altra lingua a patto che siano accompagnate da una traduzione in francese.

Osservando il bando, così come esso viene pubblicato, due sono le particolarità immediatamente rintracciabili. La prima è che, dei quattro quesiti proposti, solo per il primo viene indicata un'utilità "fisica"; sebbene il problema dei tre corpi nasconda un interesse analitico di primissima importanza a questo non viene fatto quasi riferimento. L'analisi è menzionata come strumento attraverso cui rintracciare un metodo di integrazione delle equazioni della meccanica celeste. Lo scopo della risoluzione del quesito riguarda piuttosto la stabilità del sistema solare. Non è così per gli altri tre quesiti; il loro interesse puramente matematico è esplicitamente dichiarato. Lo stacco tra il primo e gli altri tre quesiti è reso ancora più netto dal fatto che, immediatamente dopo il primo, viene specificato che il premio può essere assegnato anche ad altre memorie riguardanti questioni di primario interesse per la meccanica; una formula simile, riguardante invece l'analisi, si trova alla fine del bando. Questa soluzione formale sembra esplicitare ufficialmente la differenza tra il primo problema proposto e gli altri. A ciò si aggiunge l'anomalia di un concorso matematico che si apre sottoponendo un problema di meccanica celeste.

Una seconda particolarità è invece quella riguardante l'apparizione del nome di Poincaré all'interno del bando. Prima del suo compaiono i nomi di Fuchs, Bouquet e Briot, ma mentre Fuchs e Bouquet (il quale peraltro morirà due mesi dopo l'uscita del bando mentre Briot è già morto da tre anni) sono matematici ormai affermati alla pari di Hermite e Weierstrass, Poincaré è un giovane *maître de conferences* che ha ottenuto la cattedra di *Meccanica Fisica e Sperimentale* alla *Faculté des Sciences* solo pochi mesi prima. L'apparizione del suo nome in uno dei quesiti richiesti dice almeno due cose: che le capacità del giovane matematico di Nancy sono tali da renderlo, a soli trentuno anni, un punto di riferimento fondamentale nello studio dei nuovi problemi dell'analisi e che la commissione giudicatrice avrà certamente un occhio di riguardo nei confronti di una sua eventuale memoria. Vedremo che quest'ultimo aspetto sarà deducibile anche da altri particolari.

Da quanto detto in precedenza, nel 1885 Poincaré si trova in piena ascesa accademica e, a quell'anno, appartengono la terza parte di *Sur les courbes* e l'articolo sui fluidi in rotazione pubblicato su *Acta*. Entrambi questi lavori sono legati, sebbene per aspetti differenti, al problema dei tre corpi[64].

In ogni caso Poincaré non sembra manifestare, almeno in un primo momento, un particolare interesse per il concorso, al punto da portare i membri della commissione a sollecitare la sua partecipazione[65]. Per inserire in un adeguato

[64] Nel capitolo precedente abbiamo infatti visto che lo studio qualitativo delle equazioni differenziali si lega, in Poincaré, alla spinosa questione della stabilità del sistema solare e quindi al problema dei tre corpi. Per quanto concerne invece lo studio sui fluidi in rotazione, come si è già accennato, il concetto di biforcazione tornerà anche nella parte del lavoro sul problema dei tre corpi dedicata alle orbite periodiche.

[65] Ciò è testimoniato da una lettera di Mittag-Leffler a Poincaré del 13 luglio 1887 in cui il matematico svedese scrive: "Je me permets de vous rappeler que les mémoires destinés pour le prix du roi Oscar doivent être envoyés chez moi avant le 1 Juin 1888. J'ose espérer que vous veuillez bien envoyer quelque chose. Comme vous vous rappelez, tout mémoire sur un sujet de la théorie des fonctions pourra convenir. Si vous veuillez envoyer quelque chose c'est guère probable que quelqu'un vous dépassera." Il tono di affettuosa rassicurazione di Mittag-Leffler lascia intuire il suo atteggiamento nei confronti di Poincaré. Si noti inoltre che Mittag-Leffler sembra dare per scontato che il soggetto trattato da Poincaré riguarderà la teoria delle funzioni. La risposta di Poincaré è datata 16 luglio 1887 e in essa dice di ricordarsi benissimo del concorso e che sua intenzione è quella di rispondere al primo quesito, quello degli n corpi. Dice anche di aver già

contesto storico le dinamiche inerenti la partecipazione di Poincaré al concorso è necessario ricostruire, almeno per sommi capi, i legami e rapporti accademici che egli intrattiene con i membri della commissione.

Charles Hermite ha avuto tra i suoi allievi sia Mittag-Leffler che Poincaré. Proprio grazie al sostegno di Hermite, Mittag-Leffler riesce a pubblicare nei primi numeri di *Acta Mathematica* articoli di Picard, Appell e dello stesso Poincaré[66]. La corrispondenza tra Poincaré e Hermite conta trentaquattro lettere concentrate tra il 1879 e il 1895, di cui diciannove risalgono a prima del concorso[67]. Si tratta di lettere contenenti scambi di opinione e osservazioni reciproche. Senza entrare in dettagli se ne deduce, da parte di Hermite, un profondo interesse per i lavori di Poincaré e un'altrettanto grande stima delle sue capacità. Proprio per questo l'11 marzo 1881 Hermite scrive a Mittag-Leffler a proposito di Poincaré: "Penso che questo giovane, che è stato mio allievo all'Ecole Polytechnique nel 1875, sia un vero genio"[68].

I contatti epistolari tra Mittag-Leffler e Poincaré risalgono già al 1881, quindi prima della collaborazione di Poincaré ad *Acta Mathematica* e, come nel caso di Hermite, toccano i diversi aspetti della sua produzione scientifica[69]. Quello che però è interessante notare, nella lettura di alcune lettere, riguarda le dinamiche soggiacenti alla fondazione della rivista, in cui il ruolo di Poincaré è tutt'altro che secondario.

---

raggiunto dei risultati interessanti per il "caso ristretto" e che spera di poterli estendere al caso più generale. A proposito di questo scambio epistolare si veda: *Mittag-Leffler a Poincaré 13 luglio 1887* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) e *Poincaré a Mittag-Leffler 16 luglio 1887* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: Agosto 2007). La risposta di Poincaré è inoltre pubblicata in Poincaré J.-H., *Œuvres* (cit. nota 7) vol. 11, pp. 69-78 oppure in *Acta Matematica*, 1911, t. 38: 161-173. L'intero scambio è rintracciabile anche in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) pp. 155-166.

[66] Per maggiori dettagli sulla nascita di *Acta Mathematica*: YNGVE DOMAR, "On the foundation of Acta matematica", *Acta Mathematica*, 1982, 148: 3-8.

[67] Tutta la corrispondenza è consultabile in *AHP* (cit. nota 3).

[68] "Je crois à ce jeune homme [Poincaré], qui a été mon élève à l'Ecole Polytechnique en 1875, un véritable génie" (traduzione mia). Questa frammento di lettera è rintracciabile alla nota 1 di *Mittag-Leffler à Poincaré*, 22 giugno 1881 in *AHP* (cit. nota 3 consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) p. 70. Le lettere di Hermite a Mittag-Leffler sono invece rintracciabili in: PIERRE DUGAC, "Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883)", *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, 1984, 5: 49-285.

[69] Nelle prime lettere, ad esempio, Mittag-Leffler si interessa agli studi di Poincaré sulle equazioni differenziali chiedendo informazioni sulle pubblicazioni in vista.

Il primo riferimento esplicito all'idea di fondare una nuova rivista compare in una lettera di Mittag-Leffler a Poincaré datata 29 Marzo 1882. Nella prima parte Mittag-Leffler elogia il "genio di Poincaré"[70] invitandolo a chiamare la nuova classe di funzioni scoperte né fuchsiane né kleiniane ma "funzioni di Poincaré". Quindi Mittag-Leffler prosegue:

> E ora ho una proposta da farvi e una preghiera da indirizzarvi. Noi, matematici dei paesi scandinavi, abbiamo il progetto di pubblicare un nuovo giornale matematico secondo il modello del *giornale di Crelle*. Mi hanno chiesto di diventare l'editore principale. Gli altri editori saranno Malmsten e Gyldén in Svezia, Broch, Bjerknes, Lie e Sylow in Norvegia, Lorenz e Zeuthen in Danimarca e Lindelof in Finlandia. Il giornale sarà pubblicato in francese e in tedesco ma soprattutto in francese. Vi prego di tenere per voi questa confidenza ancora per qualche tempo. Voi sapete che è Abel, un norvegese, che ha determinato soprattutto il successo del *giornale di Crelle*. Ora M. Gyldén ed io abbiamo pensato che voi, un francese, sarete forse abbastanza generosi da voler fare il successo del nostro giornale. Vorreste darci il vostro articolo "Sur les groupes fuchsiens" da pubblicare sul primo numero del giornale?[…] **Vi prego di non dire ancora nulla a nessuno sul nostro progetto poiché la sua realizzazione dipende da voi**. Se voi rifiutate sono dell'avviso di **dover attendere due o tre anni ancora**. È indiscutibile che il nostro giornale farà un po' di concorrenza al giornale di Weierstrass e Kronecker ed è una cosa che non mi piacerebbe fare quando Weierstrass è ancora alla testa di questo giornale. **È solo l'enorme vantaggio di poter pubblicare le vostre scoperte che mi potrà decidere a farlo.**[71]

[70] I complimenti di Mittag-Leffler sono motivati dalla lettura dell'articolo di Poincaré, pubblicato nelle pagine di *Mathematische Annalen*, riguardante i principali risultati ottenuti sulle funzioni fuchsiane. A questo proposito Mittag-Leffler aggiunge: "Mais certainement que Monsieur Klein a raison que vous avez tort d'appeler vos fonctions, fonctions Fuchsiennes et Kleinéennes. Elles doivent porter le nom des fonctions de Poincaré". Per quanto riguarda l'articolo di Poincaré si veda: POINCARE J.-H., "Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires", *Mathematische Annalen*, 1882, 19: 553-564. Per la lettera di Mittag-Leffler: *Mittag-Leffler à Poincaré 29-3-1882* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) p. 87.

[71] "Et maintenant j'ai une proposition à vous faire et une prière à vous adresser. Nous, les mathématiciens dans / les pays scandinaves, ont le projet de publier un nouvel journal mathématique d'après le modèle du *journal de* Crelle.On m'a demandé de devenir l'éditeur principal. Les autres éditeurs seront Malmsten et Gyldén en Suède, Broch, Bjerknes, Lie et Sylow en Norvège, Lorenz et Zeuthen au Danemark et Lindelöf en Filande. Le journal sera publié en français et en allemand mais surtout en français. Je vous prie à garder cette confiance strictement à vous seul pour quelques temps encore. Vous savez que c'est Abel, un norvégien, qui a fait surtout le succès du *journal de Crelle*. Maintenant nous avons pensé M. Gyldén et moi que vous, un français, serez peut-être assez généreux pour vouloir faire le succès de notre journal. Voudriez

Le parole di Mittag-Leffler lasciano intuire l'enorme ammirazione nei confronti del giovane Poincaré il quale, suo malgrado, si trova a essere l'ago della bilancia all'interno di una competizione editoriale che coinvolge persino Weierstrass. La risposta di Poincaré a Mittag-Leffler è purtroppo andata persa, ma dalla successiva lettera di questi[72] si capisce che essa è positiva[73]. Mittag-Leffler scrive inoltre di aver contattato Hermite pregandolo di trattare per suo conto con Picard e Appell, in modo che anch'essi diventino collaboratori della rivista. Infine egli aggiunge di non voler fare trapelare notizie in Germania almeno fino alla fine di luglio, quando egli vi si recherà proprio per trovare dei collaboratori tedeschi[74].

In una lettera successiva, collocabile tra la fine di giugno e i primi giorni di luglio del 1882,[75] Mittag-Leffler informa Poincaré che Sofja Kovalevskaya è a Parigi e gradirebbe fare la sua conoscenza; aggiunge che ella ha ricevuto una lettera di Weierstrass in cui i lavori di Poincaré sono elogiati in modo più che lusinghiero. Mittag-Leffler prosegue dicendo di aver ricevuto la conferma da parte di Weierstrass dell'invio di un suo articolo per il primo numero della nuova risvista[76].

---

vous nous donner votre mémoire 'Sur les groupes fuchsiens' pour être publié le premier mémoire dans le journal? […] Je vous prie de ne dire rien à personne encore sur notre projet parce que la réalisation de ce projet dépend de vous. Si vous refusez je suis de l'avis que nous devons attendre deux ou trois ans encore. Entre nous c'est incontestable que notre journal fera un peu la concurrence avec le *journal de Weierstrass et Kronecker* et c'est une chose que je n'aimerais pas quand Weierstrass est encore à la tête de ce journal. C'est seulement l'avantage énorme de pouvoir publier vos découvertes qui pourrait m'y décider". *Mittag-Leffler à Poincaré 29-3-1882* (cit. nota 72) traduzione mia, grassetto mio, corsivo dell'autore.

[72] Cfr. *Mittag Leffler à Poincaré 10-04-1882* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) pp. 93-94.

[73] Nel primo numero di *Acta Mathematica* compare infatti: POINCARÉ J.-H., "Théorie des groupes fuchsiens", *Acta Mathematica*, 1882, 1: 1-62.

[74] Mittag-Leffler considera difficile la "missione tedesca" anche per questioni politiche. La Germania, infatti, non ha sicuramente visto di buon occhio le simpatie francesi della Svezia durante il conflitto del 1870.

[75] Cfr. *Mittag-Leffler à Poincaré 6-7? 1882* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) pp. 96-97.

[76] In una lettera del 18 settembre 1882 di Mittag-Leffler a Poincaré si legge che l'articolo di Weierstrass verrà pubblicato nel secondo numero della rivista a causa della sua lunghezza. Come però è riportato alla nota 3 della lettera in realtà l'articolo non verrà mai pubblicato in quanto, secondo Mittag-Leffler, non fu mai scritto o non usci mai dalle mani di Weierstrass. Si veda: *Mittag-Leffler à Poincaré 18-9- 1882* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler*

È quindi sulla nascita di *Acta Mathematica* che si fonda il sodalizio tra Mittag-Leffler e Poincaré e in particolare sulla disponibilità di quest'ultimo a determinare il successo della rivista scandinava. Non si hanno invece prove di un contatto tra Weierstrass e Poincaré antecedente al 1889[77].

Quello che si può concludere, da quando riportato finora, è che sia Hermite che Mittag-Leffler, alla data di annuncio del premio, hanno già da tempo solidi rapporti con Poincaré e nutrono nei suoi confronti una sentita stima. A ciò si aggiunge il fatto che Poincaré, stando a quanto testimoniato dalla lettera inviatagli da Mittag-Leffler, ha avuto un ruolo centrale nel successo della pubblicazione di *Acta Mathematica* contribuendo in questo modo ad accrescere il prestigio accademico del collega e amico svedese. Risulta dunque naturale pensare che la commissione veda in Poincaré uno dei "favoriti" per la vittoria del concorso. In questo contesto non sorprende la celebre lettera di Mittag-Leffler a Poincaré del 13 luglio 1887 in cui gli ricorda che una sua memoria è attesa per il concorso di Re Oscar II.

3.3.2 Fase finale del concorso

Il 16 luglio 1887, in risposta alla lettera di Mittag-Leffler, Poincaré scrive:

> Non mi sono dimenticato il premio di re Oscar e vi dico anche che questo premio mi preoccupa in modo esclusivo da uno o due mesi. La mia ambizione era di risolvere il primo quesito, quello che riguarda il problema degli *n* corpi. Tuttavia non sono ancora giunto a dei risultati completamente soddisfacenti, almeno per il caso generale. Ho tuttavia ottenuto qualche risultato di interesse di cui ve non ve ne voglio citare che uno.[78]

---

et Henri Poincaré (cit. nota 3) p. 107 (la nota 3 indicata per la lettera presente on line è riportata anche in questa versione cartacea).

[77] Questa lettera, conservata a Parigi, fa parte di una collezione privata. In *AHP* è tuttavia presente una sua scansione. Si veda: *Weierstrass à Poincaré 8-01-1889* (Collection particulière, Paris) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007).

[78] "Je n'ai pas oublié le prix du roi Oscar et je vous dirai même que ce prix me / préoccupe exclusivement depuis un ou deux mois. Mon ambition était de résoudre la première question, celle qui se rapporte au problème des *n* corps. Mais je n'ai pu arriver encore à des résultats complètement satisfaisants au moins dans le cas général. J'ai toutefois obtenu quelques résultats

Poincaré spiega quindi di essere stato in grado di dimostrare la stabilità nel caso del problema ristretto dei tre corpi, quello cioè in cui due dei tre corpi hanno massa finita e ruotano descrivendo una circonferenza attorno al loro centro di gravità mentre il terzo corpo è considerato di massa nulla e si muove nel piano delle circonferenze. Poincaré stabilendo i limiti entro cui si muove il terzo corpo completa i risultati ottenuti in precedenza da Bohlin e Hill. Richiamandosi alla presunta dimostrazione di Dirichlet, Poincaré si dice sicuro di non poter risolvere il problema cercando di integrare funzioni già note o simili: ciò è provato dalle particolarità inaspettate delle funzioni che egli ha ricavato, particolarità che le allontanano da ogni funzione già conosciuta; la speranza di Poincaré è quella di riuscire a estendere il risultato ottenuto nel caso "ristretto" al caso generale. La lettera si conclude con la richiesta di conferma riguardo alcune regole di partecipazione a concorso; in particolare Poincaré vuole sapere se la memoria presentata deve essere del tutto inedita o se al contrario dei riassunti possono essere pubblicati sui *Comptes Rendus*.

La risposta di Mittag-Leffler non si fa attendere, il 18 Luglio scrive a Poincaré di essere felice di aver appreso che si sta occupando del primo quesito, confermandogli che la memoria da inviare oltre a essere anonima deve essere del tutto inedita. Quindi consiglia a Poincaré la lettura di due articoli di Weierstrass che riguardano proprio l'argomento del primo quesito[79].

Precisiamo che quanto stabilito da Poincaré già nel 1887, ovvero la stabilità del caso "ristretto" del problema dei tre corpi costituirà, in fine, il contenuto principale della memoria inviata alla commissione: sebbene infatti questa contenga un tentativo di allargamento al caso generale, esso né costituisce il corpo principale della memoria né può essere considerato come una soluzione al

---

qui ne sont pas sans intérêt et dont je ne veux vous citer qu'un seul". Cfr *Poincaré à Mittag Leffler* (cit. nota 65).

[79] Si tratta di: WEIERSTRASS K., "Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen", *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissen-schaften zu Berlin*, 1885, II: 633-639; WEIERSTRASS K., "Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen" *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissen-schaften zu Berlin*, 1885, II: 789-805. La lettera di Mittag-Leffler è invece: *Mittag-Leffler à Poincaré* 18-07-1887 (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) p. 167. Poincaré risponde a Mittag-Leffler dicendo di aver letto solo una delle due memorie di Weierstrass.

problema degli *n* corpi. In riferimento a quest'ultimo aspetto è interessante l'annotazione di Gray secondo cui è necessario ricordare che Poincaré vince il premio sebbene, da un punto di vista strettamente formale, non risolva il problema proposto[80]. Questa riflessione lascia comprendere in che termini la memoria costituisca un'innovazione, sia nel risultato ottenuto che nei mezzi usati per ottenerlo, tale da meritare la vittoria del premio sebbene non offra una soluzione definitiva al problema proposto.

Il 1 giugno 1888 le memorie presentate alla commissione sono dodici di cui cinque riguardanti il primo quesito, una riguardante il terzo e le restanti sei orientate su temi alternativi. Anche in questa fase del concorso si registra un'anomalia. Sappiamo infatti che il regolamento prevede che le memorie siano anonime, siglate con un motto e accompagnate da una busta sigillata con all'interno il nome dell'autore. Poincaré, come si è visto in una delle lettere citate in precedenza, chiede a Mittag-Leffler se le memorie debbano essere presentate anonimamente e riceve conferma di ciò. Nonostante questo, nella busta contenente la sua memoria (recante come richiesto un moto in esergo) Poincaré allega una lettera di accompagnamento firmata e una nota personale indirizzata a Mittag-Leffler[81]. La lettura della memoria di Poincaré non fu dunque anonima[82].

Le dodici memorie pervenute sono sottoposte a una prima scrematura di cui si occupa Edvard Phragmén, redattore di *Acta Matematica*. Egli dopo una lettura preliminare invia copie degli articoli più interessanti ai componenti della giuria. Dopo questa prima selezione rimangono solo tre memorie: quelle di Poincaré, e di Appell e quella proveniente da Heidelberg.

Un primo esame di queste tre porta la commissione ad attribuire la vittoria a Poincaré sebbene la sua memoria sia di difficile comprensione a causa delle nuove tecniche utilizzate e dello stile estremamente sintetico, poco incline a soffermarsi

---

[80] Cfr. GRAY J., "Poincaré, topological dynamics, and the stability of the solar system" (cit. nota 13) p. 512.

[81] Si tratta di due lettere datate 17 maggio 1888. Si tratta di poche righe che hanno come unico scopo quello di "accompagnare" l'articolo sul problema dei tre corpi. Si veda: *Poincaré à Mittag-Leffler 17-05-1888* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) pp. 175.

[82] In realtà, come precisa Barrow-Green, non lo sarebbe comunque stata dato che l'articolo di Poincaré era riconoscibile sia da un punto di vista calligrafico che bibliografico: nel testo Poincaré inserisce infatti numerosi rimandi a suoi precedenti articoli. Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) pp. 62-63.

sui dettagli. Per questo motivo nell'arco di tempo in cui la commissione studia la memoria di Poincaré e prima di annunciare ufficialmente il vincitore, Mittag-Leffler scrive a Poincaré chiedendo alcuni chiarimenti[83]:

> Mio caro amico,
> Hermite, Weierstrass ed io siamo giunti al termine dello studio della vostra memoria. Mi permetto di confidarvi, con il vincolo del silenzio che siamo di opinione unanime che voi abbiate fatto un capolavoro di primo genere e che la pubblicazione della vostra memoria sarà l'inizio di una nuova epoca della meccanica celeste. Ma non voglio nascondervi che lo studio della vostra opera ci ha dato delle grandi difficoltà. Omettete le dimostrazioni di teoremi molto generali e difficili o date delle indicazioni talmente brevi che bisogna arrovellarsi per giorni interi prima di comprendere la giusta profondità delle vostre idee. Weierstrass mi ha domandato se non potevo osare, in virtù dell'amicizia che mi avete accordato da lungo tempo, proporvi di aggiungere, prima che venga pubblicata, alcuni sviluppi alla vostra memoria sui punti essenziali che sono stati trattati fin qui in modo troppo breve.[84]

Mittag-Leffler prosegue dicendosi sicuro che Poincaré non avrà alcun problema a rispondere a queste richieste rivolte, esclusivamente, nell'interesse della scienza e di una maggiore facilità nella propagazione delle sue idee. Le richieste di chiarimento riguardano due punti. In primo luogo viene chiesta a Poincaré una dimostrazione della non convergenza della serie di Lindstedt, risultato che viene semplicemente enunciato. Quindi si chiede di offrire una versione più comprensibile agli astronomi della dimostrazione di stabilità da lui ottenuta; in

[83] Barrow Green riporta anche una lettera di Hermite a Mittag-Leffler nella quale il matematico francese si lamenta della scarsa comprensibilità dell'articolo di Poincaré. Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit., nota 13) p. 65.

[84] "Mon cher ami, MM. Hermite, Weierstrass et moi-même nous sommes enfin arrivés au bout avec l'étude de votre mémoire. Je me permett[e]rai de vous confier sous le sceau du plus grand secret que nous sommes de l'opinion unanime que vous avez fait de nouveau un chef d'oeuvre de première genre et que la publication de votre mémoire sera le commencement d'une nouvelle époque dans la mécanique céleste. Mais je ne veux point vous cacher que l'étude de votre œuvre nous a paru offrir des difficultés fort grandes. Vous omettez très souvent les / démonstrations des théorèmes très générals et très difficiles ou vous donnez des indications tellement courtes qu'il faut se tourmenter pendant des jours avant qu'on parvient à mesurer au juste la profondeur de vos idées. M. Weierstrass m'a demandé si je n'osais pas vous proposer vu[e] l'amitié dont vous m'avez honoré depuis longtemps de vouloir bien ajouter à votre mémoire avant qu'il soit publié quelques développements sur les points essentiels qui ont été traités jusqu'ici d'une manière trop brève" (traduzione mia), *Mittag-Leffler à Poincaré 15-11-1888* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) pp. 177-178.

particolare si tratterebbe di offrire una soluzione valevole per lo spazio ordinario[85].

Poincaré risponde il 19 novembre assicurando che manderà i chiarimenti che gli sono stati richiesti e invitando la commissione a segnalare eventuali altri punti oscuri della sua memoria. Lo scambio epistolare tra i due continua per alcune settimane. Le dimostrazioni richieste a Poincaré verranno ultimate e spedite il 7 dicembre; nel frattempo Poincaré, su consiglio di Mittag-Leffler, incontra Hermite per discutere con lui altri aspetti poco chiari della memoria. Una curiosità sullo svolgimento del concorso è contenuta nella lettera di Mittag-Leffler a Poincaré del 21 dicembre; in essa il matematico svedese chiede a Poincaré di spedirgli una busta sigillata contenente il suo nome e indirizzo. Si tratta, evidentemente, della busta che Poincaré non ha inserito nel plico originario e che ora, alla chiusura del concorso, deve essere "aperta".

Nel frattempo la commissione stende i giudizi delle memorie esaminate: a Weierstrass è affidato l'incarico di scrivere il giudizio della memoria vincitrice, a Hermite è invece affidato il compito di stendere quello della memoria presentata da Paul Appell che, sebbene non abbia meritato il primo posto, si aggiudica un posto d'onore[86]. Il 20 gennaio 1889, mentre i giudizi ufficiali sono ancora in fase di redazione, Mittag-Leffler si reca da re Oscar II per comunicare l'esito del concorso e convalidare la decisione presa dalla giuria. In una lettera del giorno successivo egli preannuncia a Poincaré che riceverà comunicazione ufficiale della vittoria del concorso da Monsieur Le Comte de Lewenhaupt, ambasciatore svedese a Parigi. Nella comunicazione si legge che:

---

[85] Sappiamo che lo studio di Poincaré avviene in uno spazio delle fasi hamiltoniano dove l'introduzione delle superfici senza contatto consente di passare dalle tre alle due dimensioni. In questo modo Poincaré riesce a ricondurre lo studio delle traiettorie di un punto che si muove nello spazioe delle fasi, allo studio delle curve sulle superfici senza contatto creando un evidente collegamento tra il problema di tre corpi e i suoi precedenti lavori sulle equazioni differenziali. Il linguaggio utilizzato da Poincaré doveva pertanto risultare di diffificile comprensione, sia per la sua sinteticità che per l'introduzione di una metodologia inedita. Sull'utilizzo, nel problema dei tre corpi, dello spazio delle fasi hamiltoniano si veda: PETERSON I., *Newton Clock's, chaos in the solar system* (cit. nota 14) pp. 140-160.

[86] Come precisa Barrow-Green sia Weierstrass che Hermite non accettano volentieri l'incarico. Il primo a causa dei sui problemi di salute, il secondo per l'amicizia che lo lega ad Appell. Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit., nota 13) pp. 65-67.

> […] la memoria intitolata *Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique* e recante il motto "Numquam praescriptos transibunt siderea fines" è l'opera profonda ed originale di un genio matematico, che si è assicurato un posto fra i maggiori geometri di questo secolo. I problemi più importanti e difficili, quali la stabilità del sistema del mondo, l'espressione analitica delle coordinate dei pianeti mediante serie in seno e coseno di multipli del tempo, e oltre a ciò lo studio, quanto mai pregevole dei moti asintotici, la scoperta di forme del moto nelle quali, sebbene le mutue distanze dei corpi restino comprese entro limiti prefissati, non è tuttavia possibile esprimere le loro coordinate mediante serie trigonometriche, e ancora altri argomenti che tralasciamo completamente, tutti questi temi sono trattati mediante metodi che aprono – sarebbe ingiusto tacerlo – una nuova epoca nella meccanica celeste.[87]

La notizia della vittoria di Poincaré e del posto d'onore di Appell si diffonde rapidamente in Francia al punto da rendere i due delle celebrità[88]. Nel frattempo, nonostante la chiusura del concorso, per Mittag-Leffler le preoccupazioni non diminuiscono. La pubblicazione delle memorie di Poincaré e Appell su *Acta Mathematica* è prevista per l'ottobre del 1889 ma Mittag-Leffler si trova a dover superare alcuni inconvenienti.

In una lettera del 23 febbraio 1889 scrive a Poincaré:

> M. Gyldén è molto irritato e all'ultima seduta dell'accademia delle scienze ha fatto un intervento in cui sosteneva che tutto quello che voi avete scoperto sulle soluzioni asintotiche si trova già alle pagine 263-264 della sua grande memoria pubblicata in *Acta*. Io non ero presente alla seduta per un malanno ma alla prossima, il 13 marzo, su ordine del re dovrò dare un rapido riassunto dei principali risultati della vostra memoria. Credo di sapere grossomodo ciò che devo rispondere alle osservazioni di

---

[87] "[…] le mémoire qui est intitulé *Sur Le problème des trois corps et les équations de la dynamique* avec la devise 'Numquam præscriptos transibunt siderea fines', est l'œuvre profonde et originale d'un gnie mathématique dont la place est marqué parmi les gands géomètres du siècle. Les plus importante set les plus difficiles questions, comme la stabilité du système du monde, l'expression analytique des coordonnées des planètes par des series des sinus et de cosinus des multiples du temps, puis l'étude on ne peut plus remarquable, des mouvements asymptotiques, la découverte de formes de mouvement où les distances des corps restant comprises entre des limites fixes, on ne peut cependant exprimer leurs coordonnées par des séries trigonométriques, d'autre sujets ancore que nous n'indiquons point, sont traités par des méthodes qui ouvrent, il n'est que juste de le dire, une époque nouvelle dans la mécanique céleste"; trad. it. BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 14) p. XXVII. La versione originale è invece rintracciabile in BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit., nota 13) pp. 237-238, corsivo dell'autore.

[88] Sia a Poincaré che ad Appell viene conferito il titolo di Cavalieri della Legione d'Onore.

> Gyldén ma per maggior sicurezza vi prego di volermi esporre, nei termini che voi utilizzate e in quelli che utilizza M. Gyldén, la confutazione delle pretese che egli ha ritenuto opportuno esporre all'accademia. […] Il rapporto definitivo di M. Weierstrass non è ancora nelle mie mani. Ne cambia continuamente la formulazione e pesa ogni singola parola. Ma questo rapporto avrà un'eco straordinaria e lo si è già assai contestato senza conoscerlo. M. Kronecker è terribile e attende soltanto la pubblicazione del rapporto per avanzare la sua critica.[89]

Le preoccupazioni di Mittag-Leffler provengono dunque da possibili attacchi di Gyldén e Kronecker che, in una fase così delicata per *Acta Mathematica*, rischiano di gettare discredito tanto sul concorso che sulla rivista. In realtà entrambe queste minacce si riveleranno un fuoco di paglia ma un terzo inconveniente, molto più grave e riguardante proprio la memoria di Poincaré, rischierà di compromettere più seriamente la reputazione di *Acta Mathematica*, di Mittag-Leffler e dello stesso Poincaré.

3.3.3 Un errore scoperto per caso

Durante l'estate del 1889 a Edvar Phragmén viene affidato l'incarico di preparare per la pubblicazione su *Acta Mathematica* gli articoli di Poincaré e Appell. Nella fase di revisione delle bozze Phragmen però si accorge di un'imperfezione nel

[89] "M. Gyldén est de fort mauvaise humeur et à la dernière séance de l'académie des sciences, il a fait une communication où il prétend que tout ce que vous avez donné sur les solutions asymptotiques se trouve déjà aux pages 263-264 de son grand mémoire dans les *Acta*. Je n'étais pas présent à la séance à cause de maladie mais à la séance prochaine le 13 Mars je dois sur l'ordre du roi donner un compte rendu rapide des principaux résultats de votre mémoire. Je crois voir à peu près ce que je dois répondre aux observations de M. Gyldén mais pour être tout à fait sûr je vous prierai de vouloir bien m'exposer dans les termes que vous employez ainsi que dans ceux qu'emploie M. Gyldén la réfutation des prétentions qu'il a trouvé convenable d'exposer devant l'académie[…]. Le rapport définitif de M. Weierstrass n'est pas encore entre mes mains Il change la rédaction à chaque moment et il pèse chaque mot. Mais c'est que ce rapport aura aussi un retentissement bien extraordinaire et on l'a déjà très vivement attaqué sans la connaître même. M. Kronecker est terrible et il attend seulement la publication du rapport pour venir avec sa critique". *Mittag-Leffler à Poincaré 23 febbraio 1889* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) pp. 196-197. Si noti inoltre che Mittag-Leffler dice a Poincaré di non aver ancora ricevuto una copia definitiva del giudizio di Weierstrass (quello contenuto nella dichiarazione firmata dal re è solo una sintesi). Di fatto il giudizio definitivo non verrà mai stilato.

lavoro di Poincaré e non esista a comunicarlo a Mittag-Leffler. Questi, a sua volta, scrive a Poincaré il 16 luglio, riportando le osservazioni di Phragmen:

> Mio caro amico,
> Monsieur Phragmén ha richiamato la mia attenzione su alcuni passaggi della vostra memoria sul problema dei tre corpi che gli sono parsi un po' oscuri e che ha giudicato giusto segnalarvi. Nella maggior parte dei casi non si tratta che di difficoltà apparenti, e possiamo farle scomparire pressoché immediatamente, ma mi sembra che ci sia una difficoltà reale all'ultimo punto segnalato da M. Phragmén […] Vi sarò, mio caro amico, molto riconoscente se mi spiegherete come aggirare quest'ultima difficoltà.[90]

La lettera di Mittag-Leffler si conclude, come sempre, con dimostrazioni di apprezzamento e con la speranza di poter ospitare presto Poincaré a Stoccolma. Nulla nel tono della lettera sembra sottolineare con particolare gravità il punto oscuro trovato da Phragmén, e Mittag-Leffler appare convinto che Poincaré sarà in grado di spiegare come aggirare quella difficoltà. Tuttavia, proprio durante la fase di rilettura, Poincaré si rende conto di un errore (diverso da quelli segnalati da Phragmén) che rischia di avere delle ripercussioni considerevoli su tutto l'articolo. In una lettera a Mittag-Leffler dell' 1 dicembre 1889 leggiamo:

> Ho scritto questa mattina a M. Phragmén per dirgli di un errore che ho commesso e indubbiamente egli vi ha mostrato la mia lettera. Tuttavia, le conseguenze di questo errore sono più serie di quanto pensassi in un primo momento. Non è vero che le superfici asintotiche sono chiuse, per lo meno nel senso inteso all'inizio. Ciò che è vero è che se entrambe le facce di queste superfici vengono considerate (che credo ancora siano connesse l'una all'altra) esse si intersecano lungo un numero infinito di traiettorie asintotiche (e inoltre che le loro distanze diventano infinitamente piccole di ordine più alto di μ^p per ogni valore di p).

---

[90] "Mon cher ami, Monsieur Phragmén vient de fixer mon attention sur quelques passages de votre mémoire sur le problème des trois corps qui lui ont paru un peu obscurs et qu'il a jugés dignes de vous être signalés. La plupart des fois la difficulté n'est qu'apparente, et on peut la faire disparaître presque immédiatement, mais il me semble qu'il y a une difficulté réelle au dernier endroit signalé par M. Phragmén. […] Je vous serais, mon cher ami, très reconnaissant de vouloir bien m'expliquer comment on peut tourner cette dernière difficulté". *Mittag-Leffler à Poincaré 16-07-1889* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) p. 215.

> Pensavo che tutte queste curve asintotiche, dopo essersi allontanate da una curva chiusa rappresentante una soluzione periodica, si sarebbero riavvicinate alla stessa curva. Ciò che è vero è che ce ne sono un'infinità che godono di questa proprietà.
> Non vi nascondo l'angoscia che questa scoperta mi ha provocato. In primo luogo non so se voi ancora pensiate che i risultati rimasti, vale a dire l'esistenza di soluzioni periodiche, le soluzioni asintotiche, la teoria degli esponenti caratteristici, la non-esistenza di integrali (primi?) e la divergenza delle serie di Lindstedt, meritino il grande riconoscimento che gli avete dato.
> D'altro canto sono stati necessari diversi cambiamenti e non so se possiate iniziare a stampare la memoria; ho telegrafato a Phragmén.
> In ogni caso, non posso fare altro che confessare la mia confusione a un amico leale come voi. Vi scriverò più diffusamente quando potrò vedere le cose più chiaramente.[91]

È verosimile pensare che i toni drammatici della lettera di Poincaré abbiano sorpreso non poco Mittag-Leffler, il quale si sarà chiesto, tra stupore e incredulità, quale errore e quale nuova scoperta possano essere tali da gettare in "confusione" una mente brillante come quella di Poincaré.

Dal contenuto della lettera si capisce che il risultato ottenuto nella dimostrazione, ovvero la stabilità del sistema nel caso del problema ristretto dei tre corpi, viene seriamente compromessa. Come infatti precisa Poincaré non è più

[91] "J'ai écrit à M. Phragmén pour lui parler d'une erreur que j'avais commise et il vous a sans doute communiqué ma lettre. Mais les conséquences de cette erreur sont plus graves que je ne l'avais cru d'abord. Il n'est pas vrai que les surfaces asymptotiques soient fermées, au moins dans le sens où je l'entendais d'abord. Ce qui est vrai, c'est que si je considère les deux parties de cette surface (que je croyais hier encore raccordées l'une à l'autre), [elles] se coupent suivant une infinité de courbes trajectoires asymptotiques (et de plus que leur distance est un infiniment petit d'ordre plus élevé que μ^p quelque grand que soit p. soit p). J'avais cru que toutes ces courbes asymptotiques après s'être éloignées d'une courbe fermée représentant une solution périodique, se rapprochaient ensuite asymptotiquement de la même courbe fermée. Ce qui est vrai, c'est qu'il y en a une infinité qui jouissent de cette propriété. Je ne vous dissimulerai pas le chagrin que me cause cette découverte. Je ne sais d'abord si vous jugerez encore que les résultats qui subsistent, à savoir l'existence des solutions périodiques, celle des solutions asymptotiques, la théorie des exposants caractéristiques, la non-existence des intégrales uniformes et la divergence des séries de M. Lindstedt méritent la haute récompense que vous avez bien voulu m'accorder. D'autre part, de grands remaniements vont devenir nécessaires et je ne sais si on n'a pas commencé à tirer le mémoire; j'ai télégraphié à M. Phragmén. En tout cas je ne puis mieux faire que de confier mes perplexités à un ami aussi dévoué que vous l'avez toujours été. Je vous en écrirai plus long quand j'aurai vu un peu plus clair dans mes affaires"; traduzione mia. Per la versione integrale della lettera si veda: *Poincaré à Mittag-Leffler, 1-12-1889* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) p. 217. Una versione inglese della lettera, accompagnata da alcune fotografie dell'originale, è invece rintracciabile in: BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) p. 119.

possibile pensare che tutte le traiettorie asintotiche, dopo essersi allontanate da una traiettoria chiusa, tornino ad avvicinarsi a essa; in altre parole non è più possibile pensare che tutte le traiettorie asintotiche siano stabili come, inizialmente, Poincaré ha dimostrato. Se però l'errore è chiaro, non è invece chiara la sua conseguenza. Da qui deriva la confusione di Poincaré e la sua promessa di scrivere a Mittag-Leffler quando le cose potranno essere viste "più chiaramente".

Sappiamo che l'utilizzo delle parole, tanto nelle lettere quanto nei testi a stampa, è sempre ben ponderato da Poincaré. Ciò induce a pensare che i nuovi scenari aperti siano tali da trascendere ogni aspettativa. È facile, a oggi, vedere nell'errore e nella conseguente scoperta di Poincaré un'anticipazione di alcuni tratti fondamentali della scienza contemporanea. Al più, da una prospettiva erroneamente antistorica, ci si limiterà a constatare la perspicacia di Poincaré e l'incredibile attualità dei suoi lavori. Quello che invece un simile punto di vista non coglie adeguatamente è la "confusione" che annebbia la mente di Poincaré. Su questa ci soffermeremo più avanti, così come sui particolari dell'*errore*. Per il momento procediamo nella ricostruzione degli avvenimenti.

Poincaré telegrafa immediatamente a Phragmén, sperando di bloccare in tempo la stampa dell'articolo. Tuttavia, sebbene il volume di *Acta Mathematica* con la memoria vincitrice non sia ancora stato stampato, alcune copie dell'articolo sono state inviate in anteprima a buona parte dei più importanti matematici europei. Come riporta Barrow-Green[92], Phragmén trasmette a Mittag-Leffler una nota con riportati i nomi di coloro che hanno già ricevuto l'articolo. Tra essi spiccano quelli di: Charles Hermite, Karl Weierstrass, Sofja Kovalevskya, Camille Jordan, Sophus Lie, Hugo Gyldén e Anders Lindstedt. Inutile dire che l'eventualità che qualcuno di essi possa accorgersi dell'errore rischia di gettare discredito tanto sulla serietà del concorso, quanto sulla giuria che ha valutato la memoria. Per questo motivo, Mittag-Leffler invita Poincaré al massimo riserbo e, nel frattempo, cerca di recuperare le memorie già inviate[93]. A Poincaré spetta inoltre il dovere di pagare le copie già stampate dell'articolo, per un totale di 3.500 corone contro le

[92] Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) p. 67.
[93] Cfr. *Ivi*, pp. 66-69.

1.000 vinte per il concorso. Mittag-Leffler, dal canto suo, deve affrontare un'ennesima difficoltà: comunicare ai suoi due colleghi di giuria l'accaduto.

Con Hermite fa da mediatore lo stesso Poincaré, avvisandolo dell'errore e dicendogli che esso non gli appare più così terribile come in un primo momento; aggiunge la promessa di preparare, per la settimana successiva, un sommario dei suoi risultati, in modo che Hermite possa darne comunicazione all'*Académie des Sciences*. Poincaré non riuscirà a tener fede alla sua promessa e sebbene Hermite lo faccia presente a Mittag-Leffler[94], decide di soprassedere lasciando che il tutto venga gestito dallo stesso Mittag-Leffler.

La questione più delicata, quella di avvertire Weierstrass, è gestita da Mittag-Leffler in prima persona. Inizialmente egli cerca di minimizzare l'accaduto facendo credere al matematico tedesco che il ritardo nella pubblicazione dell'articolo sia dovuto alla correzione di alcune imperfezioni. La strategia di Mittag-Leffler non tiene però conto di eventuali possibili fughe di notizie. Infatti nel febbraio del 1890, attraverso Gyldén, Weierstrass viene a conoscenza di voci di un possibile grave errore nell'articolo di Poincaré. Mittag-Leffler, interpellato da Weierstrass per avere una spiegazione a riguardo, si difende dicendo di non averlo voluto coinvolgere in una questione tanto spinosa anche per tutelare la sua debole salute. Lo rassicura garantendo che le critiche mosse all'articolo sono in netta minoranza rispetto agli apprezzamenti. Nonostante ciò Weierstrass esprime la sua insoddisfazione per quanto accaduto e spera di poter vedere quanto prima una copia corretta dell'articolo[95].

Poincaré termina il suo nuovo articolo nel gennaio del 1890 e ne invia una copia a Phragmen[96]. Esso verrà successivamente pubblicato nel numero 13 di *Acta Mathematica*, insieme alla memoria di Appell e al giudizio di Hermite su

---

[94] Cfr. "Hermite à Mittag-Leffler 10-12-1889", *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, 1985, 6: 180-181.

[95] Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) p. 68. Weierstrass è inoltre preoccupato per quanto da lui scritto tra le motivazioni di assegnazione del premio a Poincaré. Tuttavia, l'assenza di riferimenti a dettagli matematici farà si che quel giudizio provvisorio possa calzare anche alla nuova versione dell'articolo. Weierstrass precisa però che per la stesura completa del giudizio deve poter visionare la nuova versione dell'articolo.

[96] Barrow-Green, che ha svolto una analisi comparata della prima e seconda edizione dell'articolo, sottolinea come la seconda versione, oltre a tutte le correzioni riguardanti l'errore incorpori le note esplicative, aggiunte alla prima versione, nel corpo del testo. Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) p. 69.

quest'ultima[97]. Non verrà invece mai ultimato il giudizio di Weierstrass di cui una parte introduttiva comparirà su *Acta Mathematica* nel 1912[98].

Edvard Phragmen, il cui ruolo nella scoperta dell'errore e nella successiva gestione dello "scandalo" è centrale, verrà ringraziato da Poincaré nell'introduzione del nuovo articolo (seppure in modo abbastanza vago) ma, soprattutto, su spinta di Mittag-Leffler otterrà l'appoggio di Poincaré per la candidatura alla cattedra di *Meccanica* dell'Università di Stoccolma[99].

3.4 *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*

3.4.1 Introduzione

La versione originale dell'articolo inviato da Poincaré al concorso viene attualmente conservata all'*Institut Mittag-Leffler* di Stoccolma e un'ottima ricostruzione, unita a un confronto con la seconda versione, è quella offerta da June Barrow-Green. Nella presente analisi si cercherà di mettere in luce gli aspetti epistemologici ritenuti più interessanti all'interno della memoria pubblicata da Poincaré su *Acta Mathematica*.

L'introduzione della memoria si suddivide in tre parti: la prima riguarda la struttura stessa dell'articolo, la seconda i risultati raggiunti, la terza quelli che Poincaré chiama i risultati "negativi"[100].

Nella prima parte Poincaré chiarisce subito che l'articolo stampato su *Acta Mathematica* è un rimaneggiamento di quello che egli ha presentato al concorso

---

[97] Vedi nota 13.

[98] Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) p. 69. Secondo Barrow-Green, Mittag-Leffler aveva interesse che il giudizio di Weierstrass non fosse ultimato e pubblicato. Questi aveva infatti detto di sentire l'obbligo morale di far cenno all'errore contenuto nella memoria originaria. Ovvio pensare che Mittag-Leffler sentisse la sua reputazione minaccaita da un'eventualità simile. Per quanto concerne la parte introduttiva del giudizio di Weierstrass: MITTAG-LEFFLER G., "Zur Biographie von Weierstrass", *Acta Mathematica,* 1912, 35: 63-65.

[99] "Je suis très reconnaissant si vous dites un mot bienveillant sur M. Phragmén. Une chaire de mécanique est libre à notre université et je désire bien vivement qu'elle sera donnée à lui en préférence de M. Bohlin ou de M. Charlier qui lui sont tous les deux très inférieurs". *Mittag-Leffler à Poincaré 4-12-1889,* (Mittag-Leffler Archives, Djursholm) in *AHP* (cit. nota 3, consultato: agosto 2007) oppure in NABONNAND P. (ed.), *La correspondance entre Mittag-Leffler et Henri Poincaré* (cit. nota 3) pp. 219-220.

[100] Sull'importanza dei risultati negativi in Poincaré (e non solo): GIUSEPPE LONGO, "Savoir critique et savoir positif: l'importance des résultats négatifs" *Intellectia,* 2005, 1,40: 109-113.

indetto da Re Oscar II di Svezia. In particolare, precisa Poincaré, sono stati chiariti alcuni passaggi oscuri riguardati dei risultati che egli, nella versione originale, si è limitato a enunciare. A *Monsieur* Phragmén va la riconoscenza per l'aiuto prestato nella rilettura delle bozze, per aver penetrato con "grande finezza" il senso dell'articolo e per aver identificato alcuni punti dove si sono rese necessarie delle spiegazioni integrative. In ultimo Poincaré riconosce a Phragmén il merito di aver attirato la sua attenzione su un "importante errore" di cui però non menziona, seguendo scrupolosamente le indicazioni di Mittag-Leffler, le caratteristiche precise[101].

Nella parte contenente i risultati raggiunti, Poincaré dice di essere ben lontano dall'aver risolto definitivamente il problema dei tre corpi e di essersi limitato a dimostrare l'esistenza di alcune interessanti soluzioni particolari: *periodiche*, *asintotiche* e *doppiamente asintotiche*. In particolare, nel caso da lui studiato, ovvero il problema "ristretto" dei tre corpi egli ha dimostrato l'esistenza di soluzioni "stabili" a esclusione di alcuni casi *eccezionali*[102]. In questa affermazione si nasconde l'errore indirettamente segnalato da Phragmén che costringe Poincaré a non ritenere più tutte le soluzioni asintotiche come stabili, ma solo un numero infinito di esse; la sua dimostrazione, benché rimanga valida in un'infinità di casi, non può essere estesa a *tutti* i casi. Egli si dice ben consapevole della parzialità dei risultati raggiunti i quali, tuttavia, hanno il merito di essere stabiliti con rigore; solitamente, invece, il problema dei tre corpi è affrontato attraverso metodi di approssimazioni successive che "svendono" il rigore assoluto richiesto dalla matematica[103].

La terza parte dell'introduzione enuncia i risultati "negativi" ai quali è dedicata la conclusione dell'articolo. Si tratta della dimostrazione di inesistenza di integrali analitici e uniformi per il problema dei tre corpi al di fuori degli integrali già

---

[101] "C'est même lui qui, en appelant mon attention sur un point délicat, m'a permis de découvrir et de rectifier une importante erreur", POINCARE J.-H., "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique", *Œuvres* (cit. nota 12) VII, p. 264.

[102] "[…] j'ai reconnu que dans ce cas les trois corps repasseront une infinité des fois aussi près que l'on veut de leur position initiale, à moins que les conditions initiales du mouvement ne soient exceptionnelles". *Ibidem*.

[103] Si avrà modo di vedere come il "rigore" della dimostrazione di Poincaré possa aver giocato un ruolo tutt'altro che secondario nella "confusione" suscitata nella scoperta di un errore. Sebbene infatti le argomentazioni di Poincaré procedano in modo "rigoroso" esse non conducono all'esito atteso: la dimostrazione di stabilità. Al contrario il rigore del metodo utilizzato porta a dimostrare l'assenza di una stabilità assoluta.

conosciuti. A ciò si accompagna la presa di coscienza che la risoluzione definitiva del problema dei tre corpi, se mai sarà possibile, richiederà l'utilizzo di nuovi strumenti analitici, differenti da quelli già utilizzati e infinitamente più complicati. Più si rifletterà su quanto da lui dimostrato, dice Poincaré, più ci si renderà conto delle difficoltà inaudite del problema dei tre corpi; difficoltà, queste, che i metodi tradizionali lasciano presagire, ma di cui Poincaré crede di aver messo meglio in risalto la natura e la grandezza[104]. Afferma quindi di aver dimostrato che le serie di Lindstedt non sono convergenti[105] dicendosi desolato di aver gettato, seppur contro ogni sua intenzione, un qualche discredito sui lavori di Lindstedt e Gyldén precisando inoltre che i metodi da loro proposti mantengono un'indiscutibile utilità pratica. Egli infatti, citando la serie di Stirling, offre un esempio di come l'utilizzo di serie divergenti possa essere comunque utile alla meccanica celeste.

L'introduzione si conclude quindi con un omaggio e delle scuse a Bohlin che, nella seduta del 9 maggio 1888 dell'Accademia di Stoccolma, ha enunciato alcuni risultati utilizzati anche da Poincaré nella sua memoria. Poincaré assicura di non essere stato a conoscenza del lavoro di Bohlin; esso, infatti, è stato pubblicato alcuni mesi dopo la scadenza del concorso.

---

[104] "Plus on réfléchira sur les propositions que je démontre plus loin, mieux on comprenda que ce problème présente des difficultés inouies, que l'insuccès des efforts antérieurs avait bien fait pressentir, mais dont je crois avoir mieux ancore fait ressortir la nature et la grandeur", POINCARE J.-H., "Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique", *Œuvres* (cit. nota 12) p. 265.

[105] Il tentativo di Lindstedt di stabilire delle serie convergenti per esprimere l'evluzione di un sistema a tre corpi si inserisce nel più ampio sforzo della matematica ottocentesca di risolvere il problema dei tre corpi attraverso l'approssimazione per serie. Tentativo, questo, che passa attraverso la costruzione di serie nelle quali non compaiano termini secolari e la variabile tempo sia argomento di termini periodici. Gli sforzi di Lindstedt si sono concentrati sul tentativo di trovare delle serie di espansione trigonometriche che potessero risolvere il problema dei tre corpi. Ponendo delle condizioni iniziali ben precise (riguardo le eccentricità e inclinazioni delle orbite) egli riuscì a ridurre il problema alla risoluzione di un sistema di quattro equazioni del secondo ordine. Risolvendo queste attraverso approssimazioni successive ottenne le coordiante dei tre corpi attraverso serie trigonometriche con quattro argomenti dipendenti linearmente dal tempo. Poincaré in un primo momento ampliò i risultati ottenuti da Lindstedt (eliminando delle condizioni di simmetria che egli aveva posto) ma successivamente dimostrò invece che le serie di Lindstedt non convergono: mentre infatti i primi termini di queste decrescono rapidamente i successivi crescono. Nella pratica astronomica le serie restano comunque utili, viene tuttavia meno la loro convergenza matematica. Sulle serie di Lindstedt e il loro ruolo nel tentativo di risolvere il problema dei tre corpi si vedano: HUGO VON ZEIPEL, "L'œuvre astronomique d'Henri Poincaré" in POINCARÉ J.-H *Œuvres* (cit. nota 12) XI, pp. 327-333; ROBERTO MARCOLONGO, *Il problema dei tre corpi da Newton (1686) ai giorni nostri* (Milano: Hoepli, 1919) pp. 61-96; BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) p. 21-22.

Quest'introduzione, tutt'altro che banale, merita alcune osservazioni. La prima di carattere stilistico. Poincaré, sappiamo, si trova costretto a dire senza poter dire. Per chi conosce gli avvenimenti precedenti alla pubblicazione è facile leggere nelle (e tra le) righe le tracce di quanto accaduto. Il nome di Phragmén compare nella parte iniziale dell'introduzione e Poincaré gli riconosce i dovuti meriti facendo anche cenno a un "importante" errore che egli avrebbe contribuito a trovare nella prima stesura dell'articolo. I toni si fanno "drammatici" nella conclusione dell'introduzione dove Poincaré descrive la complessità del problema dei tre corpi; parla di "difficoltà inaudite" di cui è difficile cogliere la "natura" e la "grandezza". Queste difficoltà appaiono più chiare, dice Poincaré, riflettendo su quanto dimostrato nel suo articolo. In queste frasi, probabilmente, sono riconducibili all'effettiva portata dell'errore. Poincaré riesce infine a parlarne, indirettamente, nel rispetto delle regole imposte da Mittag-Leffler. Le difficoltà inaudite, la cui natura e grandezza sono difficilmente comprensibili, sono da intendersi come effetti delle riflessioni che Poincaré conduce a partire dall'errore accidentalmente trovato. In questo scenario si collocano i "risultati negativi" che Poincaré dimostra e la convinzione che per affrontare il problema dei tre corpi servano nuovi strumenti, differenti da quelli tradizionali dell'analisi[106].

Un'ultima osservazione comprende altri due punti. Poincaré, parlando del valore che può essere attribuito ai risultati da lui ottenuti, fa appello al loro rigore contrapposto alla mancanza di esso nei metodi di approssimazione successiva. Qualche riga dopo, a proposito dei lavori di Lindstedt e Gyldén, Poincaré ricorda la loro utilità pratica, mantenuta nonostante essi siano stati confutati. In entrambi questi passi si trova traccia della contrapposizione che Poincaré riprenderà in altri punti tra la convergenza in senso matematico e la convergenza in senso fisico. In particolare, come sottolinea Goroff: "Poincaré è cauto a distinguere il senso strettamente matematico del termine dal modo in cui talvolta gli astronomi utilizzano la parola "convergenza" per riferirsi alle serie di cui i primi termini

[106] Da un punto di vista epistemologico l'enunciazione dei risultati negativi può essere letta come la dimostrazione di insufficienza degli strumenti che la matematica ottocentesca ha utilizzato fino a quel momento nell'affrontare il problema dei tre corpi. Poincaré, come già fatto nello studio sulle equazioni differenziali, sembra propendere per un metodo geometrico che pur rinunciando all'ambizione di una prevedibilità certa sia in grado di offrire una descrizione qualitativa di un sistema a tre corpi. In realtà, nel caso del problema dei tre corpi anche questa si rivelerà pressoché impossibile.

decrescono abbastanza rapidamente da fornire buone predizioni numeriche”[107]. In particolare la serie di Stirling citata da Poincaré è di questo tipo; ma lungi dall’essere una serie convergente in senso vero e proprio (cioè che converge per valori del tempo che tendono all’infinito) può piuttosto essere chiamata una serie *semiconvergente* o *asintotica*[108]. L’assenza di una dimostrazione teorico-matematica di convergenza delle serie fa sì che esse non possano ritenersi adatte alla previsione del comportamento qualitativo di un sistema a tre corpi; in altre parole non potranno contribuire a stabilire se esso sia stabile oppure no. Resta certamente vero che, sotto il profilo pratico, l’utilizzo di serie asintotiche consente di effettuare calcoli per un periodo di tempo limitato. Non è questo, però, ciò di cui Poincaré è in cerca.

3.4.2 Prima parte

La prima parte della memoria di Poincaré è suddivisa in tre capitoli: il primo riguarda le proprietà generali delle equazioni differenziali, il secondo la teoria degli integrali invarianti e il terzo la teoria delle soluzioni periodiche. Nelle prossime pagine se ne metteranno in evidenza alcuni aspetti fondamentali.

Partiamo dalla nozione di stabilità: Poincaré nella prima parte dell’articolo ne dà due definizioni. La prima è contenuta nel paragrafo intitolato *Notations et definitions*. Dopo aver definito x_1, x_2 e x_3 come le coordinate di un punto P nello spazio e le loro derivate prime come le componenti della velocità di tale punto è

---

[107] “Poincaré is careful to distiguish the strict mathematical sense of the term from the way in which astronomers sometimes use the word ‘convergent’ to refer to any series whose first few terms decrease rapidly enough to provide good numerical predictions”, DANIEL GOROFF, “Henri Poincaré and the birth of Chaos Theory: An Introduction to the English Translation of Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste” in POINCARÉ J.-H., *New Methods of Celestial Mechanics* 3 vols. (New York: American Institute of Physics, 1993) vol. I, pp. 1-107. Per la citazione: p. 71, traduzione mia.

[108] Cfr. *Ivi*, pp. 71-72. Goroff riporta un esempio tratto da Arnol’d per dimostrare la differenza sostanziale tra la convergenza astronomica e quella matematica. Si immagini di avere un recipiente pieno d’acqua e se ne misuri il livello a un instante t. Si immagini che il recipiente abbia sul fondo un foro di raggio μ. Ne consegue che il recipiente sarà destinato a svuotarsi. Tuttavia se μ è sufficientemente piccolo, per intervalli di tempo limitati non si riscontreranno cambiamenti nel livello dell’acqua all’interno del recipiente. Un osservatore che si limiti a questa osservazione potrebbe erroneamente concludere che il recipiente mantenga lo stesso livello di acqua per $t \to \infty$ e $\mu \to 0$. Al contrario colui che sia interessato a studiare il comportamento di questo fenomeno andando oltr una previsione di tempo limitatà vedrà che il repiciente è destinato a svuotarsi.

possibile pensare che facendo variare il valore *t* del tempo si ottenga una possibile traiettoria di *P* nello spazio. È bene precisare che il punto *P* introdotto da Poincaré può essere inteso come un punto definito in uno spazio hamiltoniano; esso rappresenta dunque lo stato di un sistema a tre corpi. Poincaré procede quindi dicendo:

> In seguito ci occuperemo frequentemente della questione della stabilità. Ci sarà stabilità se le tre quantità x_1, x_2, x_3 resteranno inferiori a certi limiti quando il tempo *t* varia da $-\infty$ a $+\infty$; o in altri termini, se la traiettoria del punto P resta interamente in una regione limitata di spazio.
> Supponiamo che esista una superficie-traiettoria S chiusa; questa superficie dividerà lo spazio in due regioni, l'una interiore, l'altra esteriore e nessuna traiettoria potrà passare da una di queste regioni all'altra. Se dunque la posizione iniziale del punto P è nella regione interiore, questo punto vi resterà per sempre; la sua traiettoria sarà interamente all'interno di S. Ci sarà dunque stabilità.[109]

La stabilità è dunque garantita dalla possibilità, all'interno dello spazio delle fasi, di stabilire per valori del tempo che tendono all'infinito (sia al passato che al futuro) i limiti entro cui si muove il punto *P*. Tenendo presente che *P* può essere inteso come una rappresentazione dello stato del sistema ciò equivale a dire che il sistema dei tre corpi è stabile qualora sia possibile delimitare, entro confini precisi, i suoi differenti stati; l'evoluzione del sistema è quindi circoscrivibile a una zona ben delimitata dello spazio delle fasi. Della stabilità in questi termini abbiamo già parlato nel capitolo precedente; in quel caso abbiamo visto l'impossibilità, da parte di Poincaré, di stabilire i confini entro cui la traiettoria di un punto *P'* oscilla e, dunque, l'incapacità di dimostrarne la stabilità. Come però lo stesso Poincaré commenta è anche dimostrabile che *P'* è destinato a passare infinite volte infinitamente vicino alla sua posizione di partenza: da questo punto

---

[109] "Nous aurons fréquemment dans la suite à nous occuper de la question de la stabilité. Il y aura *stabilité* si les trois qunatités x_1, x_2, x_3 restent inférieures à certaines limites quand le temps t varie depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; ou en d'autres termes, si la trajectoire du point P reste tout entière dans une ragion limite de l'espace. Supposons qu'il esiste une surface-trajetoire fermée S; cette surface partagera l'espace en deux régions, l'une intérieure, l'autre extérieure, et aucune trajectoire ne pourra passer d'une de ces régions dans l'autre. Si donc la position initiale du point P est dan la ragion intérieure, ce point y restera éternellement; sa trajectoire sera tout entière à l'interieur de S. Il aura donc stabilité". POINCARE J.-H., "Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique", *Œuvres* (cit. nota 12) p. 268.

di vista esso è stabile. La traiettoria di P' può per certi versi essere considerata stabile, per altri instabile. È facile osservare che in quella trattazione è coinvolta un'altra definizione di stabilità che non implica solamente la definizione dei limiti di oscillazione di una traiettoria: si tratta della stabilità di Poisson. Questa è la seconda definizione di stabilità che Poincaré enuncia dopo avere introdotto gli invarianti integrali[110]:

> Abbiamo definito sopra la stabilità dicendo che il punto mobile P deve rimanere a distanza finita; a volte è estesa in un altro senso. Perché ci sia stabilità, è necessario che il punto P dopo un intervallo di tempo sufficientemente lungo torni, se non alla sua posizione iniziale, almeno in una posizione vicina quanto si voglia alla posizione iniziale.
> È in quest'ultimo senso che Poisson intendeva la stabilità.[111]

L'utilizzo degli invarianti integrali si rivela efficace proprio nella dimostrazione di questo tipo di stabilità. Infatti attraverso la prima definizione di stabilità e l'utilizzo degli invarianti integrali è possibile dimostrare l'esistenza della stabilità di Poisson o, in altri termini, quello che è definito il *teorema di ricorrenza*[112]. Poincaré specifica che la validità di questo teorema è limitata alla scelta di precise condizioni iniziali per le quali si avranno infinite soluzioni particolari. È tuttavia necessario specificare, dice Poincaré, che esiste anche un'infinità di soluzioni del

---

[110] Poincaré in un primo momento dà una definizione generica di invariante integrale per metterne in evidenza solo successivamente il suo utilizzo nel problema dei tre corpi. In quest'ultimo caso l'utilizzo degli integrali invarianti avviene attraverso l'introduzione di superfici senza contatto e punti invarianti, strumenti matematici che abbiamo visto essere ideati da Poincaré negli articoli sulle equazioni differenziali. Nello specifico Poincaré dimostra con l'utilizzo degli integrali invarianti quella che è definita stabilità di Poisson. Per approfondimenti si veda: BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) p. 83-85; CHABERT J.- L., DALMEDICO DAHAN A., "Les idées nouvelles de Poincaré" (cit. nota 14) pp. 295-296.

[111] "Nous avons défini plus haut la stabilité en disant que le point mobile P doit rester à distance finie; on l'entend quelquefois dans un autre sens. Pour qu'il y ait stabilité, il faut que le point P revienne au bout d'un temps suffisamment long sinon à sa position initiale, du moins dans une position aussi voisine que l'on veut de cette position initiale", POINCARE J.-H., "Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique", *Œuvres* (cit. nota 12) p. 313.

[112] "Supposons que le point P reste à distance finie, et que le volume $\int dx_1\, dx_2\, dx_3$ soit un invariant intégral; si l'on considère une region r_0 quelconque, quelque petite que soit cette ragion, il y aura des trajectoires qui la traverseront une infinté des fois". *Ivi*, p. 314.

problema che non sono stabili (nel senso di Poisson) ma che a suo avviso possono essere ritenute "eccezionali"[113].

L'introduzione di queste definizioni di stabilità, la cui dimostrazione è legata alle proprietà degli invarianti integrali, è finalizzata a dimostrare l'esistenza di soluzioni stabili per il sistema dei tre corpi (nel caso ristretto). A questo tentativo è legato l'errore che Poincaré compie nella prima memoria e che verrà corretto nella seconda.

Prima di procedere è però necessario trattare un altro aspetto interessante della prima parte dell'articolo: quello riguardante le soluzioni periodiche. Come sottolinea Barrow-Green esso costituisce il punto centrale della memoria e in esso Poincaré fa confluire tanto le dimostrazioni effettuate nei capitoli precedenti quanto le tecniche e i risultati ottenuti già nei primi articoli sulle equazioni differenziali[114]. Le idee fondamentali sviluppate in questo capitolo sono essenzialmente due: la prima riguarda l'utilizzo degli esponenti caratteristici, la seconda la definizione delle soluzioni asintotiche.

Poincaré parte dal considerare un sistema di equazioni differenziali

$$dx_i/dt= X_i \qquad (\grave{\imath}= 1, 2, 3\ldots n) \qquad [7]$$

in cui gli X_i sono funzioni dei parametri x e μ. Nel caso del problema "ristretto", quest'ultimo indica il valore della massa del terzo corpo. Per valori di $\mu = 0$ si ricade dunque nel caso dei due corpi ed è facile stabilire che $x_i = \varphi(t)$ con φ_i periodica di periodo 2π. Successivamente Poincaré riesce a dimostrare l'esistenza di soluzioni periodiche anche per piccoli valori di $\mu \neq 0$. All'interno di questa dimostrazione egli si chiede come scompaiano, al variare di μ, le soluzioni periodiche. Poincaré conclude che una soluzione periodica scompare solo quando viene confondendosi con un'altra soluzione periodica. Un risultato, questo, che

[113] Come infatti puntualizzano Amy Dahan e Jean Luc Chambert il teorema di ricorrenza dimostrato da Poincaré ha una natura probabilistica. Egli sostiene che la probabilità di esistenza di soluzioni instabili, quindi non destinate a passare infinite volte infinitamente vicino alla posizione di partenza, sia pressoché nulla. Al contrario la probabilità che una soluzione sia stabile, nel senso di Poisson è pressoché uguale a 1. Si noti che anche nel caso di una soluzione stabile Poincaré non è però in grado di stabilire un limite temporale entro il quale essa verrà a riassumere un valore infinitamente vicino a quello dell'istante iniziale. Cfr. CHABERT J.-L., DALMEDICO DAHAN A., "Les idées nouvelles de Poincaré" (cit. nota 14) pp. 296-298.

[114] Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) p. 91.

permette di considerare determinati valori di μ come dei *punti di biforcazione* analoghi a quelli già visti nello studio dei fluidi in rotazione[115].

Il passo successivo è quello di dimostrare la stabilità delle soluzioni periodiche: qui entrano in gioco gli esponenti caratteristici. Prendendo in considerazione una soluzione periodica, Poincaré forma le equazioni variazionali a partire da essa; in altre parole cerca di studiare il comportamento di una soluzione nell'immediato intorno della soluzione periodica. Queste soluzioni sono regolate da un esponente α chiamato appunto esponente caratteristico. Poincaré comprende che indagare la stabilità delle soluzioni periodiche significa indagare i possibili valori di α; solo se essi sono puramente immaginari la soluzione periodica può essere considerata stabile. Se però, tramite la variazione degli esponenti caratteristici, è possibile studiare le condizioni di stabilità delle soluzioni periodiche, resta tuttavia di primario interesse lo studio delle soluzioni periodiche instabili (quelle per cui α assume valori reali). Come annota Barrow-Green, Poincaré si interessa allo studio delle soluzioni periodiche instabili e del comportamento delle altre soluzioni che ricadono nel loro intorno arrivando a stabilire l'esistenza di soluzioni asintotiche. Da un punto di vista qualitativo questo risultato si traduce dinamicamente nell'individuazione di due tipi di traiettorie: le prime ($t \to +\infty$) si avvicinano asintoticamente a una soluzione periodica, mentre le seconde ($t \to -\infty$) se ne allontano. Quindi, se nel primo caso l'orbita periodica di riferimento rappresenta il "futuro" della soluzione asintotica considerata, nel secondo ne rappresenta invece il passato. Dato inoltre che ogni serie di soluzioni individua una molteplicità di curve asintotiche è possibile parlare di *superfici asintotiche* distinguibili, anch'esse, in due casistiche differenti[116]. Nel tentativo di dimostrare l'esistenza di soluzioni asintotiche in spazi hamiltoniani autonomi, Poincaré stabilisce che le soluzioni asintotiche non vengono espresse da serie convergenti,

---

[115] Cfr. CHABERT J.-L., DALMEDICO DAHAN A., "Les idées nouvelles de Poincaré" (cit. nota 14) p. 298; DANIEL GOROFF, "Henri Poincaré and the birth of Chaos Theory: An Introduction to the English Translation of Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste" (cit. nota 106) pp. 44-46 e pp. 53-54.

[116] Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) pp. 99-102; CHABERT J.- L., DALMEDICO DAHAN A., "Les idées nouvelles de Poincaré" (cit. nota 14) pp. 290-291; VON ZEIPEL H., "L'œuvre astronomique d'Henri Poincaré" in POINCARÉ J.-H *Œuvres* (cit. nota 12) XI, pp. 324-326; DANIEL GOROFF, "Henri Poincaré and the birth of Chaos Theory: An Introduction to the English Translation of Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste" (cit. nota 106) pp. 52-53.

ma da serie asintotiche divergenti[117]: su questo punto, vedremo, si articolerà una parte dell'errore contenuto nella memoria originaria.

Con questo risultato si conclude la prima parte della memoria. In essa Poincaré ha introdotto la definizione di stabilità, gli integrali invarianti e ha formulato il teorema di ricorrenza. Si è quindi concentrato sullo studio delle soluzioni periodiche e delle condizioni necessarie per la loro stabilità; nel fare ciò ha introdotto il parametro α, detto *esponente caratteristico*. Infine si è dedicato allo studio delle soluzioni asintotiche generate a partire da soluzioni periodiche instabili.

3.4.3 Seconda parte

Nella seconda parte dell'articolo Poincaré si pone l'obiettivo di applicare al problema ristretto dei tre corpi quanto ottenuto in precedenza. La prima questione affrontata è quella di offrire una rappresentazione geometrica dello stato del sistema.

Prendendo in considerazione un sistema hamiltoniano con due gradi di libertà in cui:

$$dx_i/dt = \delta F/\delta y_i \qquad dy_i/dt = - \delta F/\delta x_i \qquad (i=1,2) \qquad [8]$$

Il sistema è quindi definito da quattro variabili x_1, x_2, y_1, y_2 di cui le prime due lineari e le seconde angolari. Esse sono vincolate dall'integrale di Jacobi[118]

$$F = (x_1,x_2,y_1,y_2) = C \qquad [9]$$

[117] Cfr. POINCARE J.-H., "Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique", *Œuvres* (cit. nota 12) pp. 379-394.

[118] L'integrale di Jacobi costituisce l'unico integrale del moto nel caso del problema dei tre corpi. Vedremo oltre che Poincaré dimostrerà l'impossibilità di determinare altri integrali del moto uniformi e analitici. L'integrale di Jacobi, pur non essendo sufficiente alla risoluzione completa del problema, consete di determinare le regioni di spazio accessibili al terzo corpo. In questi termini l'integrale di Jacobi venne utilizzato da Gorge W. Hill (1838-1914) nelle sue ricerche sul moto lunare. Hill, attraverso l'integrale di Jacobi, introdusse le superfici di velocità zero, ovvero dei veri e proprio limiti posti al moto della luna (terzo corpo) nello spazio. Ciò permetteva di stabilire la stabilità del moto lunare attorno alla terra. Per maggiori dettagli: BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) pp. 22-28; ROBERTO MARCOLONGO, *Il problema dei tre corpi da Newton (1686) ai giorni nostri* (cit. nota 104) pp.101-114.

dove *C* designa la costante delle forze vive. In questo modo le quattro variabili non sono più indipendenti, quindi per determinare lo stato del sistema è sufficiente conoscerne tre; il sistema diventa così rappresentabile attraverso un punto nello spazio. Questo approccio geometrico, inedito sia scientificamente che epistemologicamente, gli consente di prendere in considerazione le orbite periodiche instabili e le orbite asintotiche che si accompagnano a esse. Come si è già accennato le soluzioni asintotiche possono essere rappresentare da curve che formano, nel loro insieme, una superficie; stabilire le equazioni delle superfici asintotiche consente di stabilire anche il comportamento delle soluzioni asintotiche. Questo procedimento è condotto da Poincaré secondo tre ordini di approssimazione e attraverso l'utilizzo delle superfici senza contatto[119]. Tale strumento risulta funzionale, come si è visto, sia per la possibilità che offre di ridurre il problema trattato da tre a due dimensioni, sia per la peculiarità di mantenere la trattazione su un piano geometrico-qualitativo.

L'analisi è quindi concentrata sulle tracce che le superfici asintotiche lasciano su una superficie senza contatto. Poincaré arriva a stabilire che le traiettorie asintotiche mostrano un comportamento globale anomalo: per questo possono essere definite *doppiamente asintotiche*[120]. Il loro comportamenti qualitativi, estremamente complessi, rispecchiano una dinamica caotica. In particolare, la presenza di quelli che successivamente Poincaré chiamerà *punti omoclinici* determina l'appartenenza di uno stesso punto dinamico tanto a una traiettoria asintotica in avvicinamento, quanto a una in allontanamento. Questo comportamento determina una dinamica caotica che è impossibile comprendere e spiegare in termini tanto globali quanto analitici. Poincaré arriva inoltre a

[119] Cfr. POINCARE J.-H., "Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique", *Œuvres* (cit. nota 12) pp. 410-444; BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) pp. 108-122.

[120] Dopo aver stabilito che i due rami delle superfici asintotiche su *S* non collimano Poincaré si chiede se essi si intersechino: "Une seconde question à traiter est celle de savoir si les deux courbes O'B et O'B' prolongées se coupent. S'il en est ansi en effet, la trajectoire qui passera par le point d'intersection appartiendra à la fois aux deux nappes de la surface asymptotique. Ce sera une trajectoire *doublement asymptotique*". POINCARE J.-H., "Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique", *Œuvres* (cit. nota 12) p. 442 (corsivo dell'autore). Sulle superfici doppiamente asintotiche si vedano anche: ZEIPEL VON H., "L'œuvre astronomique d'Henri Poincaré" in POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit. nota 12) XI, pp. 348-351; GOROFF D., "Henri Poincaré and the birth of Chaos Theory: An Introduction to the English Translation of Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste" (cit. nota 106) pp. 58-61; CHABERT J.-L., DALMEDICO DAHAN A., "Les idées nouvelles de Poincaré" (cit. nota 14) pp. 298-299.

dimostrare che esistono un'infinità di soluzioni doppiamente asintotiche. Su questo aspetto si tornerà più in dettaglio nel paragrafo successivo.

Un altro risultato di notevole interesse è quello riguardante la dimostrazione di divergenza delle serie di Lindstedt[121]. Come si è già avuto modo di dire Poincaré non intende privare della loro utilità pratica le serie solitamente utilizzate, quanto mettere in luce il fatto che esse non possano stabilire, da un punto di vista matematico, una dimostrazione rigorosa di stabilità. Da questa conclusione Poincaré arriva a concludere che non esiste un integrale primo uniforme oltre a quello delle forze vive[122]. Da un punto di vista epistemologico ciò significa che non si è in grado di porre ulteriori vincoli al moto di un punto nello spazio delle fasi e quindi di sottrarre a esso dei gradi di libertà. Se ciò fosse possibile sarrebbe possibile anche definire delle serie convergenti che soddisfino le equazioni del sistema nello spazio delle fasi. L'assenza di integrali primi del moto si traduce nell'assenza di informazioni sull'evoluzione del sistema e nella conseguente impossibilità di prevederne lo sviluppo.

In conclusione, la generalizzazione al caso degli *n* corpi non è altro che, come lo definisce lo stesso Poincaré, un "tentativo". Egli stesso confida di aver creduto, all'inizio del suo lavoro, di poter generalizzare i risultati ottenuti per il problema ristretto dei tre corpi al caso generale e successivamente a un sistema di *n* corpi. Ammette però di essersi sbagliato e di riscontrare una serie di crescenti difficoltà che non consentono questa generalizzazione.

Quello che Poincaré è arrivato a stabilire nella memoria è l'esistenza di soluzioni periodiche stabili per il problema ristretto dei tre corpi. A queste tuttavia si affiancano soluzioni periodiche instabili, asintotiche e come si è visto doppiamente asintotiche. Da ciò ne deriva l'impossibilità di dimostrare

[121] Cfr. POINCARE J.-H., "Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique", *Œuvres* (cit. nota 12) pp. 462-470; ZEIPEL VON H., "L'œuvre astronomique d'Henri Poincaré" in POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit. nota 12) XI, pp. 327-333; BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) pp. 126-129; GOROFF D., "Henri Poincaré and the birth of Chaos Theory: An Introduction to the English Translation of Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste" (cit. nota 106) pp. 70-77, in queste pagine Goroff mette inoltre in evidenza la distinzione tra "convergenza degli astronomi" e "convergenza dei matematici".

[122] Cfr. POINCARE J.-H., "Sur le problème des trois corps et les équation de la dynamique", *Œuvres* (cit. nota 12) pp. 470-475; ZEIPEL VON H., "L'œuvre astronomique d'Henri Poincaré" in POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit. nota 12) XI, pp. 326-327; BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) pp. 127-129.

rigorosamente la stabilità di un sistema formato da tre corpi. Questa, però, non è stata la prima conclusione raggiunta da Poincaré.

3.4.4 L'errore di Poincaré

L'errore compiuto da Poincaré, nella prima versione della memoria presentata al concorso di re Oscar II, è senza alcun dubbio uno degli eventi più noti nella storia del problema di tre corpi.

Come già detto la ricostruzione storica migliore è quella di June Barrow-Green; in essa, peraltro, al lettore filosoficamente attento non può sfuggire un passaggio significativo:

> In sostanza egli [Poincaré] sbagliò nel valutare la totale gamma di possibilità coerenti con la conservazione dell'area imposta dall'esistenza di un invariante integrale[…]. Comunque, un argomento più convincente può essere che egli aveva un'idea preconcetta di come la curva doveva comportarsi. Pensando di trovare ciò che si aspettava non sentì il bisogno di controllare i suoi risultati, soprattutto avendo poco tempo a disposizione. Come si rivelò più tardi, il comportamento di una curva che interseca se stessa è estremamente complesso e abbastanza diverso da ciò che Poincaré (o chiunque altro) aveva incontrato prima. Infatti quando egli scoprì l'errore e le sue implicazioni, rimase scosso.[123]

Il carattere di sorpresa che accompagna la scoperta dell'errore si fonda sulla certezza di Poincaré nelle conclusioni raggiunte in precedenza. Tale certezza è dovuta, con tutta probabilità, all'inconsapevole attesa di quello che deve essere il comportamento della curva – ovvero della traiettoria del punto nello spazio delle fasi – e alla conseguente incapacità di vedere altre possibili soluzioni. L'osservazione di Barrow-Green richiama senza alcun dubbio alcuni passi di

[123] "In essence he failed to take into account the full range of possibilities consistent with the constraint of area-preservation imposed by the existence of the invariant integral […]. However, perhaps a more convincing argument might be that he had a preconceived idea about how he thought the curve would behave. If he thought he had found what he was expecting, he might not have felt the necessity to scrutinise his results, particulary if he felt pressed for time. As is revealed later, the behaviour of the self-intersecting curve is extremely complex and quite unlike anything Poincaré (or anybody elese) had previously encountered. Indeed when he discovered the mistake and its implication, it came as a complete shock". Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) pp. 90-91.

Science et Hypothèse laddove Poincaré nello spiegare il passaggio da esperienza a teoria mette in luce l'attitudine dello scienziato a concepire spiegazioni semplici e armoniose talvolta anche intervenendo a modificare i dati empirici[124]. Tanto l'osservazione di Barrow-Green, quanto la riflessione di Poincaré che a essa si aggancia, testimoniano la presenza nella pratica scientifica di un bagaglio culturale di convinzioni, saperi e preconcetti che orientano e determinano storicamente l'operare dello scienziato. Non a caso la scoperta dell'errore da parte di Poincaré e l'intuizione delle relative conseguenze viene definita come uno "shock". Lo stupore di Poincaré non è spiegabile sul piano tecnico, quanto su quello culturale. Il tentativo di dimostrare la stabilità del sistema solare si fonda su orientamenti culturali profondi che trovano nella trattazione matematica la possibilità di una fondazione scientifica. Per questo lo sguardo di Poincaré è teoricamente orientato; come egli stesso affermerà diversi anni dopo, a proposito della intuizione nella costruzione del sapere scientifico, l'obiettivo a cui tende una dimostrazione è spesso visibile già da lontano e la conclusione delle argomentazioni, che il metodo logico-deduttivo deve rendere rigorose, è decisa in partenza[125]. Capita tuttavia che l'intuizione inganni e che la meta intravista si riveli un miraggio.

L'errore di Poincaré ha tre facce: una geometrica, una analitica e una astronomica. Iniziamo da quella geometrica. Come si è visto la prima parte dell'articolo è dedicata ad "aspetti generali" trattati attraverso lo studio delle

---

[124] Nel 1902 in *La science et l'hypothèse* (riprendendo un discorso pronunciato in occasione del III Congresso Internazionale di Fisica tenutosi a Parigi dal 6 al 12 agosto 1900) Poincaré tematizza il ruolo dello scienziato nella formulazione delle leggi fisiche sottolineando l'importanza di ipotesi come quella della "semplicità delle leggi di natura". Ben consapelove dell'intricato rapporto dialettico tra complessità e semplicità nella comprensione dei fenomeni naturali Poincaré cerca di giustificare la fondatezza delle ipotesi scientifiche nell'edificarsi stesso della scienza e di chiarire in che termini questa non possa considerarsi una scienza arbitraria. È interessante chiedersi in che misura le riflessioni di Poincaré sul ruolo delle ipotesi nelle scienze fisiche possano essere state stimolate dalle sue ricerche sui moti celesti e come nelle sue argomentazioni si possa ritrovare quella distinzione epistemologica tra convergenza degli "astronomi" e dei "matematici" introdotta già nella memoria sul problema dei tre corpi.

[125] Poincaré attribuisce all'intuizione un ruolo creativo nelle discipline matematiche e la definisce come complementare all'intelligenza deduttivo-analitica. Entrambe queste forme d'intelligenza sono essenziali per il progresso del sapere matematico e come Poincaré spiega in *Science et Méthode*: "c'est par la logique que on démontre, c'est par l'intuition que on invente". Tuttavia lo scarso rigore dell'intuizione fa si che essa debba essere affiancata dal ragionamento logico il cui compito è proprio quello di verificare la correttezza di quanto è in precedenza intuito. Nel caso dell'errore di Poincaré si può scorgere la sovrapposizione di un errore intuitivo e un preconcetto culturale.

equazioni differenziali, degli integrali invarianti e della teoria delle soluzioni periodiche. In particolare per queste ultime Poincaré, con l'introduzione degli esponenti caratteristici, traccia una distinzione tra orbite periodiche stabili e instabili. Nel caso delle orbite instabili egli è interessato allo studio qualitativo delle traiettorie asintotiche. Prendendo in considerazione una superficie senza contatto è possibile studiare il loro comportamento attraverso l'intersezione della superficie con le superfici asintotiche. Le orbite asintotiche, si è detto, sono divisibili in due classi: quelle che si avvicinano asintoticamente a una traiettoria periodica e quelle che, al contrario, se ne allontano. Da un punto di vista geometrico questa situazione è rappresentabile su una superficie senza contatto; in essa un punto M rappresenta l'orbita periodica di riferimento e le orbite asintotiche sono invece rappresentate da due rami passanti per M[126]. Poincaré punta a dimostrare che questi due rami si chiudono (M appartiene così a una sorta di anello) e che dunque le due classi di soluzioni asintotiche sono circoscrivibili in limiti ben definiti[127]; da un punto di vista dinamico ciò equivale a dire che un qualsiasi punto P, appartenente a una traiettoria asintotica, rimane confinato in una regione precisa dello spazio di cui è possibile fissare i limiti in modo rigoroso. Ciò, accompagnato alla dimostrazione di esistenza di un integrale invariante, garantisce la stabilità di Poisson; questo è quanto Poincaré dimostra nella prima versione della sua memoria. Tuttavia, come annota Barrow-Green[128], Poincaré non prende in considerazione la possibilità che la conservazione delle aree, imposta dalla presenza di un invariante integrale, possa essere soddisfatta anche

---

[126] La spiegazione di come le superfici senza contatto vengano impiegate nello studio delle orbite asintotiche è rintracciabile in quasi ogni articolo o capitolo riguardante il problema dei tre corpi. Tra gli altri si vedano: EKELAND I., *Le Calcul, l'Imprevu, les figures du temps de Kepler à Thom* (cit. nota 14) pp. 48-63; CHABERT J.-L., DALMEDICO DAHAN A., "Les idées nouvelles de Poincaré" (cit. nota 14) pp. 292-295; GALISON P., *Einstein's clocks, Poincaré's maps: Empires of Time* (cit. nota 14) pp. 62-75; GOROFF D., "Henri Poincaré and the birth of Chaos Theory: An Introduction to the English Translation of Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste" (cit. nota 106) pp. 48-50; BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 14) pp. XXI-XXX;

[127] Ciò deriverebbe dal corollario del teorema III dimostrato nella prima versione dell'articolo. Cfr. BARROW-GREEN J., *Poincaré and the three Body Problem* (cit. nota 13) pp. 89-90.

[128] La riflessione di Barrow-Green trae spunto dal corollario del teorema tre: "Poincaré gave no proof of the corollar, simply observing that if the curve was only quasi-closed, then the distance AA_1 would have to be of *n*th order. What he did not explore was the possibility that the curve, rather then being closet, mightbe self-intersecting. In essence he failed to take into account the full range of possibilities consistent with the constraint of area-preservation imposed by the existence of the invariant integral". *Ivi*, p. 90.

nel caso in cui i due rami della curva si intersechino. Questa svista, di natura geometrica, sarà corretta da Poincaré nella seconda edizione dell'articolo dove verrà messa in luce l'esistenza di punti omoclinici e, di conseguenza, di orbite doppiamete asintotiche. Prima però di passare a questo aspetto è necessario soffermarsi sulla seconda faccia dell'errore di Poincaré: quella analitica.

Nella prima versione dell'articolo, all'interno della sezione dedicata alle soluzioni asintotiche Poincaré riesce a dimostrarne l'esprimibilità attraverso l'utilizzo di serie convergenti[129]. In questo modo, quanto è stato dimostrato precedentemente per via geometrica trova una conferma anche sul piano analitico. Nella seconda versione della memoria, Poincaré si renderà conto che queste serie in realtà divergono e che rientrano nel genere delle *serie asintotiche*, ovvero quelle serie che possono trovare una fruttuosa applicazione pratica in astronomia ma che non offrono una rigorosa dimostrazione matematica.

L'ultima faccia dell'errore è astronomica. Si è pensato di utilizzare questo termine non tanto per una peculiarità intrinseca di questo aspetto dell'errore, quanto piuttosto perché esso è contenuto nella seconda parte della memoria, quella cioè esplicitamente rivolta al caso "ristretto dei tre corpi". In questa sezione, Poincaré offre la costruzione precisa dell'intersezione tra le superfici asintotiche e la superficie senza contatto *S*. Da un punto di vista geometrico la situazione è del tutto analoga a quella che si è già presentata nell'applicazione degli invarianti integrali e anche in questo caso Poincaré conclude, erroneamente, che le curve delle superfici asintotiche formano un'unica curva chiusa. Da ciò si ricava la stabilità delle soluzioni asintotiche nel problema ristretto dei tre corpi. In particolare Poincaré ritiene di aver stabilito i limiti delle soluzioni asintotiche e di averne descritto l'andamento globale.

In effetti, in questi termini, la soluzione di Poincaré sarebbe stata un enorme passo avanti per l'astronomia; purtroppo però la segnalazione di Phragmén e la conseguente scoperta dell'errore hanno aperto scenari ben diversi. La scoperta delle traiettorie doppiamente asintotiche e di quelli che in *Les méthodes nouvelles*

---

[129] Cfr. *Ivi*, pp. 102-108.

de la mécanique céleste verranno chiamati *punti omoclinici*[130] obbliga Poincaré a confrontarsi con l'andamento caotico delle traiettorie asintotiche.

Come già visto, la conservazione delle aree comprese all'interno delle curve derivanti dall'intersezione delle superfici asintotiche con la superficie senza contatto *S* è compatibile anche con l'ipotesi che le curve non si chiudano perfettamente ma, piuttosto, si incrocino. Il loro punto di incrocio è chiamato *punto omoclinico*. I due rami delle curve asintotiche possono essere pensati, l'uno come espressione di traiettorie stabili[131] che convergono verso una traiettoria periodica, l'altro di traiettorie instabili che si allontanano all'infinito. Il loro incrocio avviene nel punto di passaggio *M* della soluzione periodica. La scoperta dei punti omoclinici mette in luce un comportamento dinamico quantomeno bizzarro. È facile comprendere che un punto *P* che si muove lungo una traiettoria instabile in allontanamento da *M* è destinato a proseguire lungo di essa per un tempo infinito. Il fatto che però la traiettoria asintotica instabile incroci in un altro punto (oltre a *M*) la traiettoria asintotica stabile fa si che quel punto *H* appartenga tanto all'una quanto all'altra. Quindi *P*, una volta passato da *H*, avrà una traiettoria che segue tanto l'asse stabile che quello instabile descrivendo in questo modo una curva estremamente complessa. Poincaré dimostra inoltre l'esistenza di infiniti punti omoclinici il che contribuisce a rendere la traiettoria di *P* indescrivibile e imprevedibile. Cade così qualsiasi tentativo di dimostrarne la stabilità.

È dunque con la comparsa dei punti omoclinici e delle correlate superfici doppiamente asintotiche che il caos si manifesta per la prima volta come risultato positivo all'interno di una dimostrazione scientifica. A oggi è difficile comprendere lo "shock culturale" che un tale risultato può aver causato; un

[130] Una trattazione tecnica dei punti omoclinici è rintracciabile in: ANDERSON K.G., "Poincaré's discovery of Homoclinic Points", *Archive for history of exact sciences*, 1994, 48: 133-147. Delle spiegazioni meno tecniche sono invece quelle di: EKELAND I., *Le Calcul, l'Imprevu, les figures du temps de Kepler à Thom* (cit. nota 14) pp. 149-157; GALISON P., *Einstein's clocks, Poincaré's maps: Empires of Time* (cit. nota 14) pp. 62-75.

[131] Le traiettorie in avvicinamento sono considerati stabili poiché esse tendono, per $t \rightarrow +\infty$, a una traiettoria periodica. Utilizzando una metafora intuitiva, ispirata alla teoria delle catastrofi, è come se queste traiettorie descrivessero un moto dalla cima al fondo di un imbuto. Al contrario una traiettoria asintotica è instabile può essere raffigurata come una traiettoria che risale la superficie dell'imbuto. Immaginando che le pareti di questo possano essere considerate di lunghezza infinità non sarà infatti possibile porre dei limiti ai punti percorrenti tali traiettorie asintotiche.

indizio può essere dato dal fatto che lo stesso Poincaré si definisca "confuso" dinanzi a quanto ricavato sviluppando le conseguenze del suo errore.

Nonostante inoltre il tutto venga minimizzato affermando che le condizioni iniziali per cui l'evoluzione del sistema è instabile sono altamente improbabili, tuttavia rimane in Poincaré la consapevolezza che la stabilità non può essere dimostrata con rigore, al pari della convergenza delle serie di Lindstedt. Più difficile è invece capire se la stessa consapevolezza si sia allargata all'intero ambiente scientifico. Il fatto che la trattazione di dinamiche non lineari (o caotiche) sia emersa con forza solo a partire dagli anni '60 del ventesimo secolo lascia intuire la gravità della ferita aperta da Poincaré in seno alla scienza classica.

3.5 *Tra biforcazioni e stabilità, alcune riflessioni*

A solo un anno di distanza dalla pubblicazione del suo articolo su *Acta Mathematica* Poincaré pubblica sulla *Revue générale des sciences pures et appliquées* un breve saggio divulgativo intitolato *Sur le problème des trois corps*[132], in cui traccia delle riflessioni a partire dai risultati ottenuti l'anno precedente.

L'articolo prende spunto da un ossimoro: la semplicità della legge di Newton si contrappone all'estrema difficoltà d'integrazione dell'equazione matematica che la esprime. In quest'immagine Poincaré riassume l'aspetto matematico del problema dei tre corpi. Prosegue, sempre con argomentazioni contrastanti, spiegando come questo problema "analitico" non sia ancora stato risolto nonostante gli sforzi dei "geometri"[133]. Si è già fatto cenno alla distinzione, nel pensiero di Poincaré, tra "geometri" e "analisti"; essa, tutt'altro che formale, rispecchia una differenza metodologica profonda che nella trattazione del problema dei tre corpi si traduce nel "punto di vista globale" della prospettiva geometrica. Appare dunque di una sferzante ironia l'affermazione di Poincaré

---

[132] POINCARE J.-H., "Le problème des trois corps", *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 1891, II: 1-5 oppure in POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit., nota 6) VIII, pp. 529-537. Da ora in poi faremo sempre riferimento all'edizione di *Œuvres*.

[133] "Ce problème est un des plus difficiles de l'Analyse, et malgré les recherches persévérantes des géomètres, il est ancore bien loin d'être résolu". *Ivi*, p. 529.

secondo cui nemmeno gli sforzi dei "geometri" (quindi nemmeno i suoi!) sono stati in grado di risolvere questo problema "analitico". Da un punto di vista epistemologico, l'integrazione dell'equazione differenziale che determina la seconda legge di Newton comporta la possibilità di prevedere con esattezza le reciproche posizioni dei corpi e di decretare la stabilità della loro evoluzione. Nel caso dei tre (o *n*) corpi l'approccio geometrico abbandona la prima finalità, quella di garantire una prevedibilità certa e assoluta[134], concentrandosi piuttosto sulla seconda. Si è visto come l'utilizzo delle superfici senza contatto e degli invarianti integrali abbia lo scopo di fissare la stabilità delle orbite asintotiche e dunque di riuscire a offrire per via geometrica una dimostrazione "rigorosa" della stabilità di un sistema a tre corpi. Proprio il "rigore" è uno dei punti più delicati su cui sono affondati diversi tentativi analitici di risoluzione del problema dei tre corpi. Poincaré parla dei tentativi di integrare le equazioni differenziali in questione attraverso l'utilizzo di approssimazioni successive. Nonostante queste abbiano un'indiscutibile utilità pratica, che è dimostrata dalla capacità di offrire delle previsioni dei moti celesti per intervalli di tempo finiti, manca la dimostrazione della loro convergenza e dunque della possibilità che esse forniscano uno strumento capace di dare delle previsioni certe per intervalli di tempo infiniti[135]. Poincaré puntualizza inoltre che nel caso si faccia ricorso alle serie di Lindstendt o di Delaunay, per quanto esse portino a delle approssimazioni molto precise, la non convergenza di esse emergerà già nella contraddittorietà dei loro sviluppi[136]. Il limite dell'approccio analitico è quindi doppio: da un lato le serie di

[134] Del resto questo obiettivo è quello a lungo perseguito dall'approccio analitico che, attraverso l'approssimazione per serie, ha tentato di trovare la funzione che descrivesse l'andamento di un sistema a tre corpi. Poincaré, dopo aver dimostrato la divergenza della serie di Lindstedt sembra persuaso del fatto che gli strumenti analitici siano inadeguati all'assolvimento di questo compito. La prospettiva geometrica, pur rinunciando alla prevedibilità analitica, può però contribuire a dimostrare la stabilità di un sistema di tre corpi.

[135] Poincarè mette anche in luce come le previsioni ottenute a partire dalle serie utilizzate dagli astronomi possano, nel tempo essere smentite dalle osservazioni. Quindi,affidandosi alla "convergenza degli astronomi" ciò che oggi è accettato come vero può essere smentito in futuro.

[136] Poincaré infatti precisa che provando ad applicare le due serie esse conduco a risultati contrastanti. Anche solo questo fatto lascia capire che una delle due serie non può essere convergente. Inoltre, come nota Hadamard, nell'utlizzo delle serie si è costretti ad arrestarsi a un certo ordine di approssimazione ignorando il fatto che l'approssimazione successiva possa introdurre dei termini suscettibili di influenzare molto i successivi sviluppi. Cfr. HADAMARD J., "Le problème des trois corps" in *Henri Poincaré, l'œuvre scientifique, l'œuvre philosophique* (Paris: Alcan, 1914) pp.51-114. In particolare per il passaggio a cui si è fatto riferimento, p. 92.

approssimazione sono sempre finite, dall'altro l'utilizzo di metodi differenti porta a contraddizioni.

La richiesta di Poincaré (che in questo caso si identifica con la richiesta dei geometri) è quella di un maggior "rigore" nello studio del problema dei tre corpi. Vale la pena notare che Poincaré richiede esattamente ciò che, a detta della commissione (in particolare di Weierstrass), manca alla memoria del 1888. Si è infatti visto che la dimostrazione lacunosa di Poincaré viene integrata con numerose aggiunte, in modo da renderla maggiormente "rigorosa". Tuttavia il rigore richiesto da Weierstrass è diverso da quello reclamato da Poincaré[137]. Mentre il primo è un'esplicitazione dei passaggi logici della dimostrazione, il secondo riguarda la possibilità di estendere all'infinito un risultato valido per un numero di casi (intervalli di tempo) finito.

Poincaré è ben consapevole che nel caso del problema ristretto dei tre corpi ciò non è stato possibile, tuttavia resta la possibilità di studiare alcune soluzioni particolari la cui presenza, sebbene non risolva in senso assoluto il problema, contribuisce a creare una "breccia" nella "roccaforte"[138]. Si tratta delle soluzioni periodiche, asintotiche e doppiamente asintotiche. In riferimento allo studio delle ultime Poincaré sottolinea di aver trovato: "[…] una prova lampante della complessità del problema dei tre corpi e dell'impossibilità di risolverlo con gli attuali strumenti dell'analisi"[139]. Da questa complessità deriva, si è visto, l'impossibilità di trovare delle serie convergenti e la conseguente assenza di un integrale primo del moto. Poincaré si chiede se il problema dei tre corpi possa

[137] Weierstrass è uno dei principali critici del metodo geometrico-intuitivo, ritenuto fonte di errori e poco rigoroso. In questa stessa critica rientra il suo tentativo di aritmetizzazione del sapere matematico. Poincaré stesso in *Le valeur de la Science* cita Weierstrass tra i rappresentati del metodo logico-deduttivo. Si è anche visto come per Poincaré solo l'intuizione possa essere all'origine dell'invenzione matematica.

[138] "Ne peut-on cependant établir aucun résultat relatif au mouvement des trois corps avec cette absolue riguerur à la quelle les géomètres sont habitués? S'il est possible d'en découvrir, ne pourrait-on y trouver un terrain solide sur le quel on s'appuierait pour marcher à de nouvelles conquêtes? N'aurait-on pas ouvert une brache qui permettrait d'entrer enfin dans la forteresse?", POINCARE J.-H., *Œuvres* (cit., nota 6) VIII, p. 531; trad. it. di BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 14) p. 42.

[139] Poincaré ha appena terminato di descrivere il comportamento di orbite giacenti su superfici doppiamente asintotiche: "Ce fait, pour peu qu'on prenne la peine d'y réfléchir, semblera une preuve éclatante de la complexité du problème des trois corps et de l'impossibilité de le résoudre avec les instruments actuels de l'Analyse". *Ivi*, p. 534.; trad. it. a cura di BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 14) p. 46.

essere considerato come insolubile. Questa domanda, conclude, è vuota[140], al più: "Tutto ciò che possiamo affermare è che il problema dei tre corpi non può essere risolto con gli strumenti di cui disponiamo oggi: quelli che occorrerà ideare e impiegare per arrivare alla soluzione dovranno essere di certo assai differenti e di natura ben più complessa"[141]. Alla complessità dei nuovi scenari, secondo Poincaré, si deve accompagnare la complessità di nuovi strumenti. Questa affermazione, letta al contrario, è un'implicita denuncia dell'inadeguatezza degli strumenti classici, del loro riduzionismo intrinseco, incapace di spiegare problemi la cui complessità trascende la loro natura. Per quanto l'affermazione di Poincaré non sia meno oscura dei nuovi scenari emersi, il riferimento a una diversa "natura" degli strumenti matematici lascia intendere la necessità di un cambiamento radicale, che faccia fronte a problemi radicalmente nuovi. In senso epistemologico cambiare la natura degli strumenti matematici significa cambiare la prospettiva di analisi a partire dalla quale questi strumenti sono stati creati. L'integrazione di equazioni differenziali, attraverso la costruzione di serie convergenti, rappresenta il tentativo della scienza classica di avvicinarsi alla spiegazione dei fenomeni in modo progressivo, procedendo dal semplice al complesso. Con tutta probabilità, Poincaré intuisce l'impossibilità di riuscire realmente a spiegare un problema come quello dei tre corpi attraverso questa prospettiva. Questo *modus agendi*, comunque utile e prezioso per la scienza, deve tuttavia cambiare "natura" al fine di offrire soluzioni rigorose a problemi di straordinaria complessità[142].

---

[140] Il tema della solubilità dei problemi matematici ritorna in un discorso pronunciato da Poincaré al *IV Congresso dei Matematici* tenutosi a Roma tra il 6 e l'11 aprile 1908. Questo discorso viene poi ripreso e pubblicato come capitolo di *Science et Méthode* intitolato *L'avenir des Mathématiques*. Qui Poincaré parlando proprio a proposito del metodo di approssimazione per serie scrive: "Mais alors il n'y aplus des problèmes résolus et d'autres qui ne le sont pas; il y a seulement des problèmes *plus ou moins* résolus […]"

[141] "Tout ce que nous pouvons dire, c'est que le problème des trois corps ne peut être résolu avec les instruments dont nous disposons actuellement; ceux qu'il faudra imaginer et employer pour obtenir la solution devront certainement être très différents et d'une nature beaucoup plus compliquée". POINCARÉ J.-H., *Œuvres* (cit., nota 6) VIII, p. 536; trad. it. a cura di BARTOCCI C., "Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica" (cit. nota 14) p. 48.

[142] Bertuglia e Vaio individuano il riduzionismo della scienza classica nella sua attitudine di spiegare i fenomeni attraverso una matematica lineare: "Le tecniche della matematica lineare sono efficaci in tutti quei casi in cui si riesce a descrivere la dinamica di un sistema come semplice somma delle dinamiche dei sottoinsiemi (o dei singoli componenti) che lo costituiscono. Questo modo di procedere, il riduzionismo, è strettamente legato alla linearità delle dinamiche; ne è, per così dire, l'altra faccia […]. Se il riduzionismo è efficace, infatti, vuol idre che possiamo

Nel 1893 all'interno del secondo volume di *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Poincaré torna sulla convergenza delle serie con argomentazioni che coinvolgono la nozione di "stabilità".

Dopo aver precisato la differenza tra "convergenza" in senso geometrico e in senso astronomico[143] Poincaré puntualizza, in riferimento alle serie divergenti:

> I termini di queste serie, in effetti, decrescono prima molto rapidamente e in seguito si mettono a crescere; ma, dato che gli astronomi si arrestano ai primi termini della serie e ben prima che questi termini abbiano cessato di decrescere, l'approssimazione è sufficiente per le esigenze pratiche. La divergenza di questi sviluppi non avrà inconvenienti a meno che non ce ne si voglia servire per stabilire rigorosamente certi risultati, ad esempio la stabilità del sistema solare[144].

Come annota Laskar[145], la stabilità cui Poincaré fa riferimento è quella definita su un tempo infinito; di contro la stabilità degli astronomi è "pratica" e assume il suo senso esclusivamente all'interno di un intervallo di tempo finito.

Rispetto a quanto detto finora, è possibile trarre qualcosa di più dal contenuto epistemologico della memoria del 1890. Legare la ricerca di una soluzione per il problema dei tre corpi alla convergenza delle serie di approssimazione mette in luce i risultati negativi degli sforzi scientifici. In questi termini, la complessità del fenomeno studiato si definisce in funzione dell'incapacità dello scienziato di affinare i suoi strumenti di analisi: ad esempio l'incapacità di costruire serie convergenti. Il risultato di Poincaré è però differente: esso non è l'indicazione di un limite contingente, di una difficoltà superabile, è piuttosto l'affermazione di un limite strutturale da cui il caos emerge come risultato positivo. Si è visto

---

scomporre i sistemi, studiare le dinamiche micro delle parti e ottenere la dinamica macro del sistema come somma di quelle micro". CRISTOFORO SERGIO BERTUGLIA, FRANCO VAIO, *Non linearità, caos, complessità, le dinamiche dei sitemi naturali e sociali* (Torino Bollati Boringhieri, 2003) p. 264.

143 Su questo argomento: LASKAR J., "La stabilité du système solaire" (cit. nota 14) p. 197.

144 "Les termes de ces séries, en effet décroissent d'abord très rapidement et se mettent ensuite à croître; mais, comme les astronomes s'arrêtent aux premiers termes de la série et bien avant que ces termes aient cessé de décroître, l'approximation est suffisante pour les besoins de la pratique. La divergence de ces développements n'aurait d'inconvéninets que si l'on voulait s'en servir pour établir rigoureusement certains résultats, par exemple la stabité du système solare" brano tratto da LASKAR J., "La stabilité du système solaire" (cit. nota 14) p. 198, traduzione mia.

145 "Il faut noter que Poincaré entend ici la stabilité sur un temps infini, ce qui est très différent de la stabilité pratique du système solare, qui n'a de sens que sur un intervalle de temps comparable à sa durée de vie". *Ibidem.*

l'inseguimento, in Poincaré, del "rigore" geometrico implicitamente inteso come rigore della dimostrazione di stabilità. Di fatto accade il contrario: la prima versione della dimostrazione di Poincaré è poco "rigorosa" e da essa egli conclude la stabilità del sistema a tre corpi. Viene però trovato un errore e, nella seconda versione perfezionata nel suo rigore dimostrativo, emerge il caos. Questo risultato contraddice le credenze di una parte del sapere scientifico classico. Per una volta infatti la stabilità è l'errore e il caos la soluzione. Un risultato di questo genere spinge Poincaré a comprendere che lo sviluppo corretto e rigoroso delle argomentazioni scientifiche da lui utilizzate non conduce alla finalità attesa, al contrario apre uno scenario impensabile, confuso ma corretto. La confusione di cui Poincaré parla a Mittag-Leffler può inserirsi in questa cornice, in questo capovolgimento delle attese, in cui la strada corretta è la meno comprensibile. La ricerca della stabilità, nell'opera di Poincaré, si traduce in un primo passo verso la decostruzione di questo concetto come meta delle dimostrazioni scientifiche. Si dà avvio, in questo modo, a uno scivolamento semantico che, alla "stabilità" intesa come prova dell'armonia e dell'ordine esistenti in natura, sostituisce la "stabilità" come proiezione delle aspettative dell'uomo sui fenomeni natura. Di questo aspetto Poincaré mostra coscienza anche nei lavori successivi, laddove la pratica scientifica viene presentata come volta all'edificazione di spiegazioni scientifiche semplici e armoniose. La "scoperta" del caos non implica una "bancarotta" della scienza che, come vedremo, mantiene tutto il suo valore pratico, mostra piuttosto la presenza di una forte componente soggettiva nella costruzione delle spiegazioni scientifiche. "Stabilità", "armonia" e "semplicità" non sono nella natura, ma nel pensiero umano applicato alla natura. La consapevolezza di ciò, ricavata dal ritrovamento del caos nei moti celesti – quelli considerati per eccellenza latori di una suprema armonia e perfezione – comporta un cambiamento culturale nella scienza e nel rapporto tra uomo e natura. Da qui deriva forse la difficoltà di assimilare culturalmente una rivoluzione di cui Poincaré non vede che l'inizio e che ancora non si è completata.

Anche la nozione di *biforcazione* compare nella trattazione del problema dei tre corpi dopo che Poincaré ne ha già parlato nello studio dei fluidi in rotazione. Si è visto che essa è legata alla variazione degli esponenti caratteristici e, nel caso del problema ristretto dei tre copi, fa sì che le soluzioni periodiche scompaiano a coppie. Nel caso invece dei fluidi in rotazione, una figura di biforcazione è una figura comune a due serie di equilibrio differenti: sebbene gli ambiti siano molto differenti, la sostanza non cambia.

Come annota Prigogine: "L'esistenza di biforcazioni conferisce un carattere storico all'evoluzione di un sistema"[146]. Prigogine intende mettere in luce l'aspetto "creativo" del tempo all'interno di un sistema in evoluzione attraverso stati di non equilibrio. In un altro passo egli aggiunge: "Chiamiamo biforcazione il punto critico a partire dal quale un nuovo stato diventa possibile. I punti di instabilità attorno ai quali una perturbazione infinitesimale è sufficiente a determinare il regime di funzionamento macroscopico di un sistema sono punti di biforcazione"[147]. In che misura le affermazioni di Prigogine si intersecano con la biforcazione di cui parla Poincaré? Nei fluidi in rotazione una serie di stati di equilibrio è determinata dal variare della velocità di rotazione. In effetti, una figura di biforcazione evolverà in uno stato macroscopico piuttosto che in un altro sulla base di differenze infinitesimali e ripercorrere la "storia" di una catena di stati di equilibrio implica ripercorrerne i punti di biforcazione. In questa storicizzazione del processo fisico, il tempo "unidirezionale" del secondo principio della termodinamica assume un valore aggiunto. Esso non è più il tempo "atemporale" della fisica classica formato da istanti fissi che si avvicendano in un gioco di continua morte e rinascita. Il tempo spazializzato e omogeneo viene sostituito dal tempo "creatore" della *durata*. Come Prigogine sottolinea, la biforcazione è espressione della creatività del sistema, del tempo concepito come latore di innovazione e dell'essere come espressione di mutamento ed evoluzione. La nozione di biforcazione offre, in questi termini, lo spunto per una critica scientifica del tempo per certi versi parallela alla critica di Heidegger del tempo "volgare". Il tempo riconcepito nella sua dinamicità non è più il tempo pensato a

---

[146] ILYA PRIGOGINE, *Le leggi del caos* (Bari: Laterza, 1993 rist. 2003) p. 18. Questo testo raccoglie le "lezioni italiane" tenute da Prigogine nel febbraio 1993 presso la cattedra di filosofia della scienza dell'Università degli Studi di Milano.

[147] "On appelle bifurcation le point critique à partir duquel un nouvel état devient possible. Les points d'instabilité autour desquels une perturbation infinitésimale suffit à déterminer le régime de fonctionnement macroscopique d'un système sont des points de bifurcation", PRIGOGINE I., ISABELLE STENGERS, *La Nouvelle Alliance, métamorphose de la science* (Paris: Gallimard, 1979 rist. 1986) p. 229; trad. italiana mia.

partire dal presente ma il tempo visto dal futuro in cui l'irreversibilità non è il lento degradarsi del presente, ma il profilarsi continuo di possibilità indeterminate[148]. Questo tempo è il compenetrarsi di ogni instante che, nel suo divenire indeterminabile, mantiene memoria degli istanti precedenti e "diviene", emergendo da essi, al di fuori di una logica di realizzazione della potenza in atto. Allo stesso modo il tempo della *durata* di Bergson si avvicina, al tempo della fisica dinamica di Prigogine che vede nel concetto di biforcazione, introdotto da Poincaré, uno dei suoi aspetti filosoficamente più interessanti.

Quanto le conseguenze filosofiche di un nuovo tempo fisico fossero presenti a Poincaré è difficile a dirsi. Quello che però Poincaré sicuramente intuisce è che la nozione di biforcazione permette di pensare all'incrocio di catene causali distinte in cui tanto il futuro quanto il passato si danno come indeterminabili univocamente[149]. In questi termini il punto di biforcazione si traduce nella metafora dell'istante creativo. Nel caso dei fluidi in rotazione esso rappresenta una figura di equilibrio comune a due serie distinte. A partire da essa non è quindi possibile determinare in modo univoco l'evoluzione del sistema. Una minima differenza può orientare verso una direzione piuttosto che l'altra e lo stesso stato del sistema può evolversi lungo cammini ben distinti. Inoltre, riprendendo il parallelismo con Leibniz del capitolo precedente, risulta naturale chiedersi se Poincaré, di fronte al fenomeno della biforcazione, non abbia pensato all'*esistenza di differenti mondi possibili*[150].

---

[148] Per un approfondimento di questi aspetti: GIANNETTO E., *Saggi di storie del pensiero scientifico* (cit. nota 33) pp. 323-325.

[149] Questo aspetto verrà ripreso da Poincaré nell'articolo *Le Hasard* pubblicato sulla *Revue du Mois* nel 1907 e inserito successivamente in *Science e Methode*. Su di esso avremo modo di tornare nel capitolo successivo.

[150] Leibniz introduce i differenti mondi possibili all'interno del più ampio dibattito sulla presenza del male nel mondo, della definizione dei concetti completi e sulla distinzione tra predicati necessari e contingenti. In questo contesto Leibniz si chiede se sia possibile pensare a un mondo identico al presente ma distinto da esso in una sua sola parte. La sua risposta è negativa; per quanto infatti lo scarto tra i due mondi sia minimo, esso comporterà la creazione di relazioni differenti tra le parti. Ciò implica che una picola differenza locale si traduca, per Leibniz, in una distinzione globale. Sorprende l'estrema attualità di tale intuzione che oltre a fondare l'idea di un "tutto unico e solidale" le cui parti non possono essere analizzate distintamente (e dunque ponendosi in opposizione alla prospettiva riduzionista), sembra in qualche modo anticipare l'idea stessa di sensibilità alle condizioni iniziali. Su questi temi si veda: ERIC J. AITON, *Leibniz*, ed. italiana a cura di Massimo Mugnai (Milano: Il saggiatore, 1991) p. 351; MUGNAI M., *Introduzione alla filosofia di Leibniz* (Torino: Einaudi, 2001) pp. 186-189; BOUQUIAUX LAURENCE, *L'Harmonie et le chaos, le rationalisme leibnizien et la "nouvelle science"* (Paris: Editions de l'institut supérieur de philosophie Louvain-la Neuve) pp. 264-274.

Le ricerche di Poincaré sui fluidi in rotazione e sul problema dei tre corpi, offrono un'immagine della scienza che si discosta, per i concetti introdotti e i risultati ottenuti, da quella della scienza classica. Credo sia allora legittimo chiedersi se sia accettabile la tesi storico-filosofica che vede in Poincaré uno scienziato geniale ma ancorato a una concezione classica della scienza[151]. Nemmeno, però, si può banalmente concludere cedendo alla tentazione tratteggiare un Poincaré "anticipatore" della *nouvelle science* contemporanea. È più interessante chiedersi in che misura queste ricerche scientifiche abbiano influito sul pensiero di Poincaré e sulle sue opere epistemologiche. Seguendo questa strada è forse possibile ricomporre il mosaico di una complicata riflessione sulla scienza e sull'uomo.

[151] Donald Gilles ravvisa, ad esempio, una sorta di contraddizione tra il Poincaré scienziato (che arriva a risultati rivoluzionari) e il Poincaré filosofo (che propone una metodologia conservatrice): DONALD GILLES, "Poincaré, a conservative methodologist but a revolutionary scientist" *Philosophy of Science*, 1996, 1: 60-69. In un altro articolo Giorgio Israel e Marta Menghini vedono invece nell'utilizzo di Poincaré dell'analisi qualitativa una metodologia che rimane subordinata al programma quantitativo e riduzionista: GIORGIO ISRAEL, MARTA MENEGHINI, "The 'Essential Tension' at Work in Qualitative Analysis: A Case Study of the Opposite Points of View of Poincaré and Enriques on the Relationships between Analysis and Geometry", *Historia Mathematica*, 1998, 25: 379-411.

4 PROBABILITÀ, CASO E CAOS

Rifessioni sugli scritti epistemologici di Poincaré

4.1 *Un pensiero in equilibrio*

Nell'ultimo decennio dell'Ottocento Poincaré pubblica i tre volumi di *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*[1], nei quali analizza con maggiore profondità i temi introdotti nella memoria del 1890. Le conclusioni cui egli arriva rispecchiano, sostanzialmente, quelle già raggiunte in precedenza: è impossibile effettuare una dimostrazione rigorosa della stabilità di un sistema a tre corpi.

Lungo un percorso che impegna Poincaré per circa vent'anni, il problema dei tre corpi si delinea come uno dei temi principali della sua ricerca scientifica. A differenza di altri settori, il successo di Poincaré in questo ambito è meno evidente. In parte ciò può essere ricondotto allo scandalo legato alla competizione indetta da re Oscar II, in parte al fatto che la conclusione di Poincaré, ben lontana dal dimostrare la stabilità del sistema a tre corpi, mette al contrario in discussione un intero sistema di convinzioni tanto scientifiche che culturali. In linguaggio kuhniano si potrebbe dire che il risultato raggiunto da Poincaré può essere visto come uno dei campanelli d'allarme del crollo di un intero paradigma scientifico e l'affacciarsi, con nuovi *rompicapi*, di un momento di transizione[2]. Se però il

[1] POINCARE J.-H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome I* (Paris: Gauthier-Villars, 1892); POINCARE J.-H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome II* (Paris: Gauthier-Villars, 1893); POINCARE J.-H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Tome III* (Paris: Gauthier-Villars, 1899).

[2] In realtà, rispetto alle rivoluzioni kuhniane, quella del caos presenta delle caratteristiche atipiche. Essa infatti, non è ben definibile all'interno di un settore specifico né emerge con il clamore di teorie quali la relatività e la fisica quantistica. Se infatti nella seconda metà del diciannovesimo secolo gli indizi di una imminente crisi dei fondamenti sono evidenti non è grazie a una consapevolezza della "rivoluzione" del caos. Come già detto nelle pagine precedenti e confermato dalla letteratura critica, una piena presa di coscienza del "caos" avverrà solo agli inizi degli anni '70 (e gli indizi se ne avranno a partire dagli anni '60), mentre molto più recenti sono le prime riflessioni epistemologiche su di esso. Questo permette di comprendere come, nell'epoca a cui risalgono i lavori di Poincaré, non ci fosse alcun tipo di predisposizione epistemologica, prima

problema dei tre corpi ha caratterizzato buona parte delle ricerche scientifiche di Poincaré, resta ancora da chiarire in che misura esso possa aver condizionato le sue successive riflessioni epistemologiche. Tra questi due aspetti non emerge un collegamento esplicito: nei suoi principali lavori filosofici infatti Poincaré non tratta il problema dei tre corpi in modo diretto. Ciò non toglie però che esso possa essere inteso come uno degli elementi fondanti il suo pensiero filosofico e l'immagine di scienza che egli elabora. La lettura "convenzionalista" che ha sempre caratterizzato l'interpretazione dei testi filosofici di Poincaré ha catalizzato il dibattito attorno ad alcune parti dei suoi scritti[3], senza mettere in evidenza altri passaggi di notevole interesse epistemologico. Le scarse riflessioni sulla scoperta delle dinamiche caotiche da parte di Poincaré soffrono particolarmente di questa menomazione.

Per questo si prenderà qui in esame *Le Hasard*[4], articolo pubblicato da Poincaré sulla *Revue du Mois* nel 1907, all'interno del quale egli offre quella che viene considerata la prima definizione di instabilità esponenziale.

Prima di fare questo è però necessario, seppur rapidamente, considerare il contesto all'interno del quale tale articolo va collocato. In quegli stessi anni, infatti, Poincaré pubblica le sue principali opere epistemologiche. La sua passione per la "controversia filosofica"[5] nasce, già negli anni Ottanta, attraverso la

---

ancora che scientifica, per comprendere pienamente la "rivoluzione" del caos. Sulla interdiscipinarità della teoria del caos e su alcune caratteristiche sociologiche che la riguardano si veda ad esempio: DAVID AUBIN, AMY DAHAN, "Writing the history of Dynamical System and Chaos: Loungue Durée and Revolution, Disiplines and Cultures", *Historia Mathematica*, 2002, 29: 273-339. Come ho detto le riflessioni epistemologiche sul caos sono solo molto recenti, in particolare posteriori alla conferenza di New York del 1977, in cui per la prima volta è stata introdotta l'idea di una teoria del caos, tra esse si vedano, ad esempio: JAMES GLEICK, *Chaos* (New York: Viking Pinguin, 1987); DAVID RUELLE, *Hasard et Chaos* (Paris: Odile Jacob, 1991); IVAR EKELAND, *Au Hasard* (Paris: Éditions du Seuil, 1991).

[3] In particolare gli interventi di Poincaré sui fondamenti della geometria sono stati al centro della maggior parte delle interpretazioni convenzionaliste. Questo probabilmente perché è proprio nella geometria che, solitamente, si è individuato il cuore del pensiero filosofico di Poincaré. Anche laddove, come nella lettura di Giedymin, si è individuata una distinzione tra convenzionalismo geometrico e fisico, quest'ultimo è sempre stato letto attraverso lo schema interpretativo del primo. Non è mia intenzione mettere in discussione la validità della lettura convenzionalista, vorrei piuttosto sottolineare che finora il dibattito attorno a Poincaré sembra essersi concentrato quasi esclusivamente sulla definizione di tale convenzionalismo e sul valore che a esso deve essere dato. Ciò ha forse impedito di valutare la profonda ricchezza epistemologica dei tesi di Poincaré che, invece, presentano al loro interno molteplici spunti di riflessione.

[4] POINCARE J.-H., "Le Hasard", *Revue du mois*, 1907, III: 257-276.

[5] PIERRE BOUTROUX, "L'œuvre philosophique", in VITO VOLTERRA, PAUL LANGEVIN, PIERRE BOUTROUX, *Henri Poincaré. L'œuvre scientifique, l' œuvre philosophique* (Paris: Alcan, 1914) pp. 205-259. Per la citazione si veda p. 207. Su questi aspetti si veda inoltre: CORRADO SINIGAGLIA,

frequentazione del Circolo di Boutroux[6], grazie al quale egli ha modo di entrare in contatto con le principali correnti di pensiero che contraddistinguono l'ambiente culturale francese dell'epoca. Viene in questo modo maturando un pensiero epistemologico che cerca di offrire un'immagine del sapere scientifico che si differenzi sia dal positivismo comtiano che dal reazionarismo di Ferdinand de Brunetière (1949-1906)[7]. Poincaré si trova quindi, nel ruolo di scienziato, a dover ammettere i limiti che il sapere scientifico ha mostrato ma allo stesso tempo a salvaguardarne il valore e la legittimità. In questo senso è doppio "l'esercizio di confine"[8] in cui egli si trova coinvolto. Il primo è quello che lo porta a rimanere in bilico tra scienza e filosofia, su quel terreno che lo contraddistingue come ultimo *savant universel*, il secondo, ben più difficile, lo costringe a elaborare un pensiero in cui vengano riconosciuti i limiti della scienza moderna, senza però cadere nella facile conclusione di una "bancarotta della scienza". Un pensiero in bilico, quello di Poincaré, costantemente volto a consolidare la sua posizione di equilibrio. Nell'espletazione di questo duplice esercizio di confine vengono a prendere forma, *La Science et L'Hypothèse* (1902), *Le Valeur de la Science* (1905) e *Science et Méthode* (1907), testi in cui Poincaré raccoglie e ordina articoli

---

"Introduzione" in POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi*, trad. it. con testo originale a fronte (Milano: Bompiani, 2003) pp. V-XXXIV, in particolare pp. VII-IX.

[6] Sul Circolo di Boutroux e sull'influenza che esso può aver avuto su Poincaré si veda: MARY JO NYE, "The Boutroux Circle and Poincaré's Conventionalism", *Journal of History of Ideas*, 1979, vol. 40, 1: 107-120. In questo articolo vengono particolarmente messi in evidenza gli aspetti filosofici riguardanti il pensiero di Emile Boutroux, Paul Tannery e Jules Tannery, cercando di sottolineare come essi siano stati determinanti nel maturare della prospettiva convenzionalista in Poincaré.

[7] Cfr. SINIGAGLIA C., "Introduzione" (cit. nota 5) p. VIII. In particolare l'autore mette in evidenza come Poincaré subisca l'influenza del clima culturale francese e in particolare dell'avversità all'ideologia positivista. Questo lo porterà a confrontarsi con le posizioni di Boutroux, di Le Roy e Renouvier cercando però di creare un'alternativa filosofica a un pensiero che rischia altrimenti di essere strumentalizzato da parte di chi sostiene il fallimento della scienza. Quest'ultima posizione in particolare è quella del pensatore reazionario Ferdinand de Brunetière (1849-1906) che nella difesa della fede religiosa sostiene un certa inconcludenza del pensiero scientifico, il quale pur avendo promesso di sopprimere la componente "misteriosa" della vita umana non ha, a suo avviso, fatto alcun progresso in questa direzione e nemmeno è riuscito a impostare in modo corretto le ricerche volte a rispondere alle questioni che più da vicino interessano l'umanità. Per approfondimenti si veda: FERDINAND DE BRUNETIERE, "Après une visite au vatican" *Revue des deux Mondes*, 1895, CXXVII: 97-118.

[8] L'espressione è presa da SINIGAGLIA C., "Introduzione" (cit. nota 5) e fa riferimento a un passo tratto da *Science et Méthode* in cui Poincaré sostiene che la matematica sia una disciplina confinante con la filosofia. Per questo lo scienziato che riflette filosoficamente sulla scienza si trova a muoversi al confine delle due discipline. Per il passo di Poincaré si veda: POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode*, *Philosophia Scientiae*, 1998-1999, Cahier Spécial 3, in particolare pp. 33.

pubblicati in precedenza[9]. Ciò non implica, però, che ciascuno di essi non sia composto secondo delle finalità ben precise.

Un'analisi dettagliata di queste tre opere implicherebbe una ricostruzione storica e un preciso esame interpretativo del vocabolario usato da Poincaré. Tuttavia questo compito trascende i limiti del presente lavoro. Ci si limiterà quindi a cercare di cogliere elementi che, all'interno di questi tre testi, possano in qualche modo essere messi in collegamento con gli studi di Poincaré sul problema dei tre corpi e con la scoperta del caos. In particolare sottolineando come alcune riflessioni filosofiche di Poincaré possano essere state motivate sulla base di questa sua esperienza scientifica.

4.2 *La Science et l'Hypothèse*

La Science et l'Hypothèse, costituisce un vero e proprio successo editoriale che permetterà la stampa di una seconda edizione, nel 1907, in cui Poincaré aggiungerà il capitolo di chiusura *La fin de la Matière*. Il testo è diviso in cinque parti nelle quali Poincaré espone con stile asciutto le sue riflessioni epistemologiche sulla scienza moderna, dai fondamenti dell'aritmetica a quelli della geometria sino all'analisi delle più moderne teorie fisiche. Il suo pensiero si muove dunque all'interno di un terreno scientifico estremamente ampio ed eterogeneo. Come già detto i diversi capitoli coincidono, più o meno fedelmente, con alcuni articoli precedentemente pubblicati da Poincaré. L'organizzazione con cui sono stati raggruppati non è però cronologica ma tematica. In particolare

[9] Questi tre testi vengono considerati i principali scritti di carattere filosofico pubblicati da Poincaré. A essi si potrebbe in realtà aggiungere la raccolta *Dernières Pensées*, pubblicata nel 1913 dopo la sua morte, ma da lui ideata come quarto volume delle sue opere sulla filosofia della scienza. Per i testi originali in francese si veda: POINCARÉ J.-H., *La Science et L'Hypothèse* (Paris: Flammarion, 1902, 2ª ed. ampliata 1907, rist. 1968) nella seconda edizione di questa raccolta si trovano articoli pubblicati da Poincaré tra il 1891 e il 1906; POINCARÉ J.-H., *La valeur de la science* (Paris: Flammarion, 1905, rist. 1970), qui si trovano invece articoli pubblicati tra il 1897 e il 1904; POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode* (Paris: Flammarion, 1908, rist. cit. nota 8) che raccoglie articoli pubblicati tra il 1900 e il 1908; POINCARÉ J.-H., *Dernières Pensées* (Paris: Flammarion, 1913) con testi già pubblicati dal 1909 al 1912. Dei primi tre volumi si segnalano inoltre le edizioni italiane: POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5); POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza*, a cura di Gaspare Polizzi (Firenze: La Nuova Italia, 1994); POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo,* a cura di Claudio Bartocci (Torino: Einaudi, 1997). Per ragioni di comodità, da qui in avanti, faremo riferimento ai testi nelle traduzioni italiane, tuttavia, qualora si ricorresse a delle citazioni, verrà inserito anche l'originale francese.

Poincaré sembra aver seguito un ordine espositivo che tenga conto del ruolo che l'esperienza gioca all'interno di una data disciplina scientifica. Per questo motivo egli prende le mosse dall'aritmetica, l'unica disciplina scientifica in cui opera un'autentica induzione matematica fondata sul ragionamento ricorsivo puro, per poi procedere verso la geometria, in cui l'esperienza guida la scelta dei *gruppi*, sino alla fisica, disciplina fondata sull'esperienza in cui l'innalzamento delle leggi (imprecise) a principi (precisi) avviene attraverso un atto creativo dello scienziato.

L'esperienza costituisce quindi lo scheletro attorno al quale è costruita l'opera e Poincaré cerca di spiegare in che misura essa possa giocare ruoli differenti nei diversi ambiti disciplinari. Tuttavia, sebbene l'esperienza permetta di differenziare lo statuto epistemologico delle varie discipline, ciò che invece le accomuna è il ricorso all'ipotesi. La certezza scientifica non deve più essere intesa come una verità indiscutibile che si impone all'uomo, alla natura e al Creatore[10]. Sebbene, riconosce Poincaré, questa sia l'immagine di scienza che solitamente viene data nelle scuole, è necessario rendersi invece consapevoli del ruolo che le ipotesi occupano nella costruzione della scienza. Questo riconoscimento passa, inevitabilmente e indirettamente, attraverso una presa di coscienza dell'elemento umano del sapere scientifico che, come Poincaré sottilmente annota, distingue la "*nostra* scienza" dalla natura[11]. Ciò non deve però portare a una deriva scettica che veda nella scienza la costruzione arbitraria di un edificio debole: "Dubitare di tutto o credere a tutto sono due soluzioni ugualmente comode, ma entrambe ci assolvono dall'onere del pensiero"[12]. Nell'assumersi questo onere Poincaré dà origine a un pensiero costantemente in bilico tra scetticismo e positivismo nel tentativo di tracciare un percorso che permetta di mettere in evidenza gli aspetti "ipotetici" del sapere scientifico senza però privare la scienza di ogni valore. Già l'interesse per un ripensamento del sapere scientifico che metta in discussione l'idea classica di "certezza scientifica" può essere considerato come un elemento in linea con le scoperte di Poincaré sul problema dei tre corpi. Come viene

[10] Cfr. POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5), p. 3.
[11] *Ivi*, p. 5.
[12] *Ivi*, p. 3. "Douter de tout ou tout croire, ce sont deux solutions égalment commodes, qui l'une et l'autre nous dispensent de réfléchir", *Ivi*, p. 2.

sottolineato da Barrow-Green[13], e come visto nel capitolo precedente[14], l'errore che Poincaré compie nella memoria consegnata a Mittag-Leffler nel 1889 si fonda proprio su un'ipotesi di partenza sbagliata. Le ripercussioni di questa leggerezza non possono non aver segnato il pensiero epistemologico di Poincaré[15].

Nella lettura di *La Science et l'Hypothèse* si avverte la consapevolezza, da parte Poincaré, di un'imminente crisi della scienza moderna (ricordiamo che buona parte degli articoli risale all'ultimo decennio del diciannovesimo secolo). Il problema dei tre corpi costituisce uno degli aspetti "tecnici" attraverso cui questa crisi si annuncia. Ciò che allora preoccupa Poincaré è chiarire come il riconoscimento di una scienza che è "nostra" possa conciliarsi con l'affermazione di un valore oggettivo di tale scienza. Egli prende esplicitamente le distanze dal nominalismo con cui Le Roy vorrebbe etichettarlo, precisando come esso costituisca una di quelle soluzioni che priverebbe la scienza di qualsiasi valore[16]. D'altro canto egli non accetta nemmeno che tale valore possa essere individuato in una regola d'azione. Quello che però è necessario fare è riformare alcuni concetti fondamentali su cui la scienza classica si è costruita, partendo da quello di realtà. A esso se ne accompagnano altri, come verità, armonia e semplicità, solo per citarne alcuni. In questo lavoro di ridefinizione, emerge forse il lato più

---

[13] Cfr. JUNE BARROW-GREEN, *Poincaré and the three body problem* (Providence: American Mathematical Society-London American Society, 1997) pp. 90-91.

[14] Cfr. pp. 176-181.

[15] A ciò si aggiunge certamente il contesto di frequentazioni filosofiche che contraddistinguono la vita di Poincaré già a partire dagli anni '70. Come sottolineato da Mary Joe Nye (cit. nota 6) è quindi verosimile pensare che Poincaré possa essere stato influenzato dalle critiche di Jules Tannery (conosciuto attraverso il cognato Emile Boutroux) alla meccanica e alla termodinamica. Allo stesso modo è pensabile che il "contingentismo" di Boutroux possa, in certo modo, aver condizionato Poincaré, sebbene esso ne prenda le distanze. Sempre attraverso lo stesso Boutroux, Poincaré si interessa a Leibniz (che come si è visto nel secondo capitolo gioca un ruolo nella formazione filosofica di Poincaré) ed entra in contatto con il pensiero filosofico tedesco di von Helmholtz (di cui Boutroux è stato allievo a Heidelberg). Anche alla luce di questo non si devono dimenticare, come annota Giedymin, le influenze su Poincaré, oltre che di Helmholtz e Hamilton per quanto concerne la fisica, anche di Riemann, Lie e Plucker per la geometria. Se quest'ultimo punti si veda, in particolare: JERZY GIEDYMIN, "On the origin and significance of Poincaré's conventonalism", *Studies in History and Philosophy of Science*, 1977, 8, n. 4: 271-301.

[16] Cfr. POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5), p. 5. Una lettura nominalista di Poincaré, verrà inoltre data dall'italiano Federigo Enriques che, nel suo *Problemi della Scienza* inserirà un paragrafo intitolato *Il nuovo nominalismo di H. Poincaré*. Come nel caso di Le Roy anche per Enriques, il convenzionalismo si risolve in una sorta di arbitrarietà che finirebbe per fondare la conoscenza scientifica su una sistema di simboli distaccati dal mondo fisico. Per quanto riguarda le "accuse" nominaliste di Le Roy si veda: ÉDUARD LEROY, "Science et Philosophie", *Revue de Métaphysique*, 1901, 1: 375-425, 503-562. Per quanto concerne invece il commento di Enriques: FEDERIGO ENRIQUES, *Problemi della scienza* (Bologna: Zanichelli, 1906, 2ª ed. 1909) pp. 154-157.

innovativo del pensiero di Poincaré che arriva a introdurre tematiche e spunti di riflessione estremamente attuali. Inoltre è sempre su questo terreno che il legame con il problema dei tre corpi e le riflessioni da esso indotte si fa più manifesto.

Il concetto di realtà resta forse uno dei più sfuggenti del pensiero di Poincaré. Un primo riferimento a esso è rintracciabile nell'introduzione di *La Science et l'Hypothèse*. Poincaré accenna una delle questioni più difficili che affronterà nel testo, quella riguardante il succedersi nella storia della scienza di teorie scientifiche differenti, e i conseguenti dubbi che una tale successione fa sorgere nei confronti del valore della scienza. A questo proposito egli scrive:

> Certo, le teorie ci appaiono a prima vista fragili e la storia della scienza ci mostra che sono effimere; eppure, esse non muoiono mai del tutto, di ognuna di esse resta qualcosa. Ed è questo qualcosa che bisogna cercare di rintracciare, poiché qui, e soltanto qui, che sta la genuina realtà.[17]

In queste righe la realtà appare come quell'elemento invariante sul quale possono essere costruite teorie scientifiche differenti. Questa "genuina realtà" non può, per Poincaré, essere però confusa con gli "oggetti reali che la natura ci nasconderà in eterno"[18]. Essa deve essere piuttosto intesa come il persistere invariante di "una certa relazione tra qualcosa e qualcosa d'altro"[19]. Per questo, sebbene la teoria elettromagnetica di Maxwell sia stata preferita a quella di Fresnel, ciò non implica che quest'ultima sia stata vana; semplicemente qualcosa chiamato prima "movimento" ora viene chiamato "corrente". Al di fuori di questi cambiamenti le

---

[17] POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5) p. 7. "Sans doute, au premier abord, les théories nous semblent fragiles, et l'histoire de la science nous prouve qu'elles sont éphémères: elles ne meurent pas tout entières pourtant, et de chacune d'elles il reste quelque chose. C'est ce quelque chose qu'il faut chercher à démêler, parce que c'est là, et là seulment, qu'est la véritable réalité". *Ivi*, p. 6.

[18] *Ivi*, p. 241. Poincaré scrive, a proposito delle denominazioni di cui fanno utilizzo le scienze fisiche: "Mais ces appellations n'étaient que des images substituées aux objets réels que la nature nous cachera éternellement. Le rapports véritable entre ces objects réels sont la seule réalité que nous puissonsatteindre, et la seule condition, c'est qu'il y ait les mêmes rapports entre ces objets qu'entre les images que nous sommes forcès de mettre à leur place". Non si può certamente fare a meno di notare come questa affermazione di Poincaré si riallacci alle ricerche nel campo della psicologica empirica di Helmholtz e alla critiche alla meccanica di Mach.

[19] *Ivi*, p. 241. L'idea d'invariante come elemento di realtà coglibile dallo scienziato deriva senz'altro da una epistemologizzazione effettuata da Poincaré del *Programma di Erlangen*. Così come esso riconduce l'essenza della geometria a un gruppo di trasformazioni che lascia invariate certe proprietà, allo stesso modo la realtà viene ricondotta da Poincaré a un elemento invariante, rappresentato dalle equazioni che soggiacciono alla base di una teoria scientifica.

equazioni differenziali alla base delle teorie restano le stesse e ciò che è prevedibile dalla teoria di Maxwell lo era già da quella di Fresnel. Poincaré sembra piuttosto rinunciare all'ambizione che la fisica possa farsi metafisica e cogliere gli oggetti reali, concepiti come indipendenti dal soggetto. La fisica può al più limitarsi a riscontrare relazione tra oggetti la cui profonda natura rimarrà sempre nascosta. Quello che però interessa cercare di chiarire è il significato preciso che Poincaré giunge ad attribuire al termine "realtà". Da un lato c'è la realtà degli oggetti, concepiti come a sé stanti, che rimane fuori dalla portata della scienza, dall'altro c'è la realtà delle relazioni che si creano tra questi oggetti: questa è la realtà cui mira la scienza. Per lo scienziato essa è una rete di relazioni, tradotta tecnicamente dalle equazioni differenziali. Una teoria fisica è in grado dunque di cogliere la realtà nella misura in cui le equazioni differenziali su cui essa si fonda sono capaci di rendere queste relazioni e, quindi, di effettuare previsioni. L'estensione di una teoria si misura sulla sua fertilità predittiva. Nel momento in cui una teoria non è più in grado di prevedere nuovi fenomeni empiricamente riscontrati significa che "la relazione affermata non è più reale"[20]. I confini di una teoria non sono quindi definiti una volta per tutte e la realtà non è un criterio definitivo, ciò che è reale per alcuni, in dato momento storico, può non esserlo per altri in un altro momento. È interessante notare che Poincaré non usa il termine "verità", ovvero non afferma che una teoria ritenuta vera, possa successivamente essere smentita, ma usa il termine "realtà", attribuendo implicitamente a tale termine una sfumatura soggettivista.

L'innalzamento di una legge empirica a principio è, per Poincaré, un atto della mente umana che avviene seguendo precise credenze (come, vedremo la credenza di semplicità) o ipotesi. Poincaré ha ben chiara la distinzione tra le relazioni, unico elemento della realtà che possiamo puntare ad afferrare, e la "nostra scienza" che queste relazioni cerca di cogliere. Nel fare questo vengono introdotte delle ipotesi, delle credenze, una di queste, ad esempio, è quella di semplicità. Interessante è notare che Poincaré parla di questo concetto come di una "credenza" senza la quale, tuttavia, non si darebbe conoscenza scientifica. La scienza, dice Poincaré, è possibile solo attraverso generalizzazioni e queste

[20] *Ivi*, p. 249.

poggiano su quelle che egli chiama “credenze di unità e semplicità”[21]. Sull’unità Poincaré non ha dubbi: le diverse parti dell’universo (proprio come l’universo armonioso di Leibniz) agiscono le une sulle altre e, proprio per questo, la nostra conoscenza non si limita a una sola di esse. La semplicità, sebbene costituisca una credenza legittima, è invece qualcosa che viene erroneamente riferito alla natura. Capita, afferma Poincaré, che dietro la semplicità apparente possa nascondersi una profonda complessità, come ad esempio nel caso dei moti celesti. Cosa esiste di più semplice della legge di gravitazione universale? E cosa di più complesso dei moti planetari? In questo caso, spiega Poincaré, la composizione di quelli che vengono considerati elementi semplici dà origine a un fenomeno estremamente complesso difficilmente spiegabile dalla conoscenza scientifica. Di fatto, in questo passaggio Poincaré introduce uno degli elementi che, in *Le Hasard*, riprenderà per definire l’essenza del caso. L’iterazione di uno stesso procedimento genera infatti causalità contribuendo a rendere gli effetti indipendenti dalle cause[22]. La semplicità assume, nel ragionamento di Poincaré un valore pratico. Perché la scienza sia possibile, ci si deve arrestare a un dato punto, “allorché si trova la semplicità”. La scienza si costruisce dunque seguendo questa regola di condotta in cui la semplicità diventa un criterio di giudizio. Quello di semplicità diventa nelle parole di Poincaré un criterio soggettivo, un espediente euristico attraverso cui si sviluppa la conoscenza scientifica. Non c’è più una semplicità oggettiva, data al di fuori del soggetto conoscente, cui in qualche modo tutti i fenomeni possono essere ricondotti. C’è, piuttosto, una semplicità indotta, che emerge come ipotesi nascosta su cui poggia la possibilità di effettuare delle generalizzazioni. Poincaré sembra però consapevole del fatto che questa ipotesi, che da un lato può risultare utile nell’elaborazione di principi generali, dall’altro rischia di nascondere l’essenza reale dei fenomeni: in linguaggio moderno si

[21] Cfr. *Ivi*, p. 221. Poincaré scrive: “Observons d’abord que toute généralisation suppose dans une certaine mesure la croyance à l’unité et à la simplicité de la nature”, *Ivi*, p. 220. Si noti che il capitolo nono di *La Science et l’Hypothèse*, costituisce una parte della relazione *Sur le rapports de la physique sperimentale et de la physique mathématique* presentata da Poincaré al III Congresso Internazionale di Fisica tenutosi a Roma nel 1900. Le riflessioni di Poincaré si collocano quindi poco dopo il termine dei tre volumi di *Les méthodes nouvelles* (cit. nota 1).

[22] Una trattazione di questi aspetti, qui solo accennati, è rimandata al paragrafo successivo.

potrebbe dire che Poincaré si pone il problema della *pertinenza*[23]. Scrive infatti Poincaré:

> Se la semplicità fosse reale e profonda resisterebbe alla crescente precisione dei nostri strumenti di misura; se dunque credessimo che la natura sia semplice in profondità dovremmo concludere da una semplicità approssimata una semplicità rigorosa. Lo si faceva un tempo; ma non abbiamo più il diritto di farlo.[24]

Anche in questo caso è possibile pensare un parallelismo con il problema dei tre corpi. L'errore di Poincaré, l'inferenza che lo ha portato a postulare che l'evoluzione di un sistema a tre corpi fosse sempre e comunque stabile, emerge come aspetto matematico di un pregiudizio più profondo; quello della semplicità. Poincaré introduce la stabilità perché in qualche modo dà per scontato che essa ci sia. Nell'articolo del 1889 Poincaré compie un errore tecnico, di natura matematica, che però lo porta a riflettere sulle ragioni profonde per cui esso è stato compiuto. Come visto nel secondo capitolo (e sottolineato da Ekeland) Poincaré abbandona l'approccio quantitativo nello studio del problema dei tre corpi, nella piena consapevolezza che la complessità del problema affrontato debba essere affrontata attraverso un metodo qualitativo-globale. Poincaré rinuncia quindi all'idea di effettuare previsioni precise sui moti dei corpi celesti, ma non alla convinzione che tali moti siano stabili. L'approccio qualitativo è in parte il riconoscimento di una complessità insondabile con gli strumenti di misura tradizionali, ma mantiene ferma la convinzione di una semplicità globale. L'errore

---

[23] Questo termine è stato introdotto da Isabelle Stengers in riferimento alla consapevolezza di chi fa scienza che le "domande" poste ai fenomeni per studiarli e il modo stesso in cui queste vengono formulate rischia in realtà di "far tacere" i fenomeni. In Poincaré sembra emergere la consapevolezza di questo rischio in riferimento alla semplicità. Il tentativo infatti di inferire un semplicità di fondo dei fenomeni naturali rischia invece di non far cogliere il fatto che essi si contraddistinguono per la loro complessità. Se dunque il criterio di semplicità è stato a lungo considerato come l'aspetto generale in cui era individuabile l'anima dei fenomeni, ora emerge invece come esso sia, di fatto una descrizione povera di questi fenomeni e in certi casi inadeguata. A proposito della "pertinenza" si veda: ISABELLE STENGERS, "Perché non può esserci un paradigma della complessità" in GIANLUCA BOCCHI, MAURO CERUTI (a cura di), *La sfida della complessità* (Milano: Bruno Mondatori, nuova ed. 2007).

[24] POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5) p. 227. "Si la simplicité était réelle et profonde, elle résisterait à la precision croissante de nos moyens de mesure; si donc nous croyons la nature profondément simple, nous devrions conclure d'une simplicité approchée à une simplicité rigureuse. C'est ce qu'on faisait autrefois; c'est ce que nous n'avons plus le droit de faire", *Ivi*, p. 226.

di Poincaré, mostra invece la natura ipotetica anche di quest'ultima affermando l'impossibilità di formulare una prevedibilità seppur globale dei moti celesti. Quindi, l'idea che la "semplicità" debba essere trasportata dalla natura all'uomo, il quale poi la proietta sul mondo esterno (come ipotesi inconsapevole), trova parte della sua origine negli scritti scientifici di Poincaré sul problema dei tre corpi. Questo, come già accennato sopra, consente a Poincaré di comprendere la natura simbolica della "semplicità" che si denota così come ipotesi fondante della conoscenza scientifica.

La presenza di una forte componente umana nella costruzione del sapere scientifico emerge come messaggio centrale di *La Science et l'Hypothèse*, testo in cui gli sforzi di Poincaré sono rivolti proprio a costruire una mediazione epistemologica tra l'ideale positivistico della scienza e le critiche anti-intelletualistiche diffuse nell'ambiente culturale francese.

4.2.1 La valeur de la Science

Il successo editoriale della prima opera, unito all'esigenza di puntualizzare alcuni aspetti del suo pensiero, porta Poincaré a pubblicare nel 1905 un secondo testo, *La valeur de la Science*. Anche in questo caso si tratta di una raccolta di articoli scritti in precedenza (tra il 1897 e il 1904), rimaneggiati e organizzati secondo una divisone tematica.

Già in *La Science et l'Hypothèse*, Poincaré prende esplicitamente le distanze dal nominalismo di Le Roy che, traendo spunto dai suoi articoli, è arrivato a costruire un'immagine della scienza "certa, ma priva di valore"[25]. Come allora viene anticipato nel titolo del suo secondo volume, Poincaré intende chiarire in cosa consista il valore della scienza. Se *La Science et l'Hypothèse* ha avuto come obiettivo quello di mettere in luce le ipotesi cui lo scienziato deve continuamente ricorrere nella pratica scientifica e di chiarire in che termini la "nostra scienza" non possa prescindere dallo spirito umano che la crea, in *La valeur de la Science* si tratta di completare la riflessione iniziata nel volume precedente mettendo invece in evidenza quale valore oggettivo conservi il sapere scientifico. Proprio

[25] Cfr. POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5) p. 5.

perché “dubitare di tutto o credere a tutto sono due soluzioni ugualmente comode”[26] Poincaré cerca invece di trovare un punto di equilibrio tra questi due estremi, una prospettiva epistemologica in cui soggettività e oggettività possano coesistere all’interno di una nuova immagine della scienza. Una sezione, in particolare, di *La valeur de la Science* verrà qui presa in considerazione. Si tratta della terza parte del libro, intitolata *La Valeur Objective de la Science*, ricavata da un rimaneggiamento di *Sur la valeur objective de la Science* articolo pubblicato del 1902 sulla *Revue de métaphysique et de morale*[27]. Al di là di alcuni cambiamenti nella parte conclusiva dell’edizione contenuta in *La valeur de la Science* (dovuti esclusivamente all’esigenza di legare questa sezione con quella successiva e l’insieme delle due a quanto affermato in *La Science et l’Hypothèse*) i due articoli appaiono identici. È qui, inoltre, che Poincaré introduce la divisone tra fatto bruto e fatto scientifico[28] che, nel 1906, verrà ripresa dall’italiano Federigo Enriques nel suo *Problemi della Scienza*. L’interpretazione che si intende offrire di questa sezione prende spunto dalla conclusione della versione contenuta nel testo del 1905. Qui infatti Poincaré sintetizza in poche righe, tanto concise quanto efficaci, l’essenza delle pagine precedenti. Egli infatti scrive:

> Tutto ciò che non è pensiero è puro nulla. E invero, non ci è dato pensare che il pensiero e tutte le parole di cui disponiamo per parlare delle cose non possono

[26] Cfr. nota 12.
[27] POINCARE J.-H., “Sur la valeur objective de la science”, *Revue de métaphysique et de morale*, 1902, 10: 263-293.
[28] La distinzione tra fatto bruto e fatto scientifico è uno dei punti che maggiormente ha interessato i commentatori di Poincaré. Egli, in sintesi, sostiene che la distanza che separa questi due tipi di fatti sia linguistica. Poincaré intende rispondere a chi, come LeRoy, riteneva i fatti scientifici come una libera creazione dello scienziato. Poincaré ribadisce che l’elemento creativo della scienza sta nell’linguaggio con cui essa rinuncia i fatti bruti, che non devono essere visti come esterni alla scienza stessa. In particolare nella formulazione di un fatto scientifico più fatti bruti vengono messi in relazione e proprio questa relazione è caratteristica dell’enunciato scientifico. Sottolinea Poincaré che è sulla base di questa peculiarità degli enunciati scientifici che essi permettono di formulare delle leggi, e dunque la possibilità di prevedere altri fatti. Ora, l’ammissione che lo scienziato possa creare un linguaggio con cui esprimere i fatti bruti non implica che i fatti scientifici siano delle libere creazioni. Come sottolinea Poincaré: “Per abile che sia l’operaio, la sua libertà è sempre limitata dalle proprietà della materia prima sulla quale opera”. Si veda a questo proposito: POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza* (cit. nota 9) pp. 160-169. La stessa distinzione, viene ripresa nel 1906 anche da Enriques. Egli però non parla di una distinzione “lingustica”. Il fatto bruto per Enriques è fondato su una serie di condizioni soggettive mentre il fatto scientifico trascende, attraverso un’operazione di generalizzazione, da esse. Come in Poincaré, anche in Enriques, il fatto scientificio è composto da più fatti bruti. Si veda. ENRIQUES F., *Problemi della scienza* (cit. nota 16) pp. 58-59.

esprimere che pensieri; dire che vi è qualcosa di diverso dal pensiero, è dunque un'affermazione che non può avere senso. E tuttavia – strana contraddizione per quelli che credono al tempo – la storia geologica ci mostra che la vita non è che un breve episodio tra due eternità di morte, e che, in questo stesso episodio, il pensiero cosciente non è durato e non durerà che un momento. Il pensiero non è che un lampo in mezzo a una lunga notte. Questo lampo, però, è tutto.[29]

Molte sono le tematiche che indirettamente vengono toccate da queste parole di Poincaré. Per il momento, però, l'attenzione sarà focalizzata sulla prima parte della citazione, su quella contrapposizione tra "pensiero" e "nulla". Un'affermazione di questo tipo potrebbe lasciar pensare a una sorta di neo-idealismo di Poincaré che, invece, trova in questa immagine la sintesi di una visione epistemologica assai complessa. Per ricostruirla è necessario mettere in relazioni alcuni passaggi del libro.

Nell'introduzione a *La valeur de la Science* Poincaré vede nel raggiungimento della verità il fine ultimo di ogni attività umana. Precisa però che: "[…] talora tuttavia la verità ci sgomenta. E infatti sappiamo che essa è talora ingannevole, che è un fantasma, il quale ci si mostra un istante per sfuggirci incessantemente, che bisogna inseguirla lontano e sempre più lontano, senza mai poterla raggiungere"[30] per poi aggiungere alcune righe dopo "La verità che ci è permesso d'intravedere non è affatto ciò che la maggioranza degli uomini chiama con questo nome"[31]. La verità cui fa riferimento Poincaré non è un obiettivo statico, cui la scienza possa mirare in modo assoluto. È piuttosto un miraggio, un'illusione che svanisce continuamente sotto la presa del pensiero scientifico. Ciò non

[29] *Ivi*, p. 198. "Tout ce qui n'est pas pensée est le pur néant; puisque nous ne pouvons penser que la pensée et que tous les mots dont nous disposons pour parler des choses ne peuvent exprimer que des pensées; dire qu'il y autre chose que la pensée, c'est donc une affirmation qui ne peut avoir de sens. Et ce pendant – étrange contradiction pour ceux qui croient au temps – l'histoire géologique nous montre que la vie n'est qu'un court épisode entre deux éternités de mort, et que, dans cet épisode même, la pensée consciente n'a duré et ne durera qu'un moment. La pensée n'est qu'un éclair au milieu d'une longue nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout". POINCARE J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) p. 187.

[30] POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza* (cit. nota 9) p. 3. "Cependant quelquefois la vérité nous effraye. Et en effet, nous savons qu' elle est quelquefois décevante, que c'est un fantôme qui ne se montre à nous un instant que pour fuir sans cesse, qu'il faut la poursuivre plus loin et toujours plus loin, sans jamais pouvoir l'atteindre". POINCARE J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) p. 19.

[31] POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza* (cit. nota 9) p. 5. "La vérité qu'il nous est permis d'entrevoir n'est pas tout à fait ce que la plupart des hommes appellent de ce nom". POINCARE J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) p. 5.

implica, però, che non si possa parlare di verità; essa deve semplicemente essere concepita nel suo valore simbolico, nel suo essere causa finale e causa efficiente del pensiero scientifico. La verità nel suo costituirsi come meta finale del progresso scientifico ne crea, allo stesso tempo, i presupposti. Senza una verità in continuo ridefinirsi non sarebbe infatti possibile parlare di un "progresso scientifico".

Il cammino che lo scienziato intraprende verso questa verità "illusoria" implica l'utilizzo dell'intelletto umano che, nel caso delle scienze fisiche, si traduce nella comprensione della natura attraverso lo strumento dell'analisi matematica. Sebbene resti il dubbio che essa fornisca un linguaggio artificiale "interposto tra la realtà e l'occhio del fisico"[32] tuttavia, senza il suo aiuto, secondo Poincaré "avremmo sempre ignorato l'armonia interna del mondo, che è, come vedremo, la sola vera realtà oggettiva"[33]. Tale armonia trova la sua espressione più alta nella legge: "una delle conquiste più recenti dello spirito umano"[34]. La verità scientifica sembra quindi confondersi, nelle parole di Poincaré con "l'armonia interna del mondo" invocata come "unica realtà oggettiva".

Le costruzioni delle leggi scientifiche non possono quindi essere considerate, in senso nominalista, come delle costruzioni arbitrarie dello scienziato. È dunque da scartare qualsiasi conclusione nominalista. Di contro, si chiede Poincaré, è possibile pensare all'armonia come qualcosa che esiste al di fuori dell'intelligenza umana che la concepisce?[35] La risposta negativa di Poincaré a questa domanda è netta e non lascia spazio a fraintendimenti. In essa egli introduce una ridefinizione di "realtà oggettiva" di notevole interesse:

---

[32] POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza* (cit. nota 9) p. 6. Poincaré infatti scrive a proposito dell'utilizzo dello strumento matematico per indagare i fenomeni naturali: "L'analyse mathématique, dont l'étude de ces cadres vides est l'objet principal, n'est-elle donc qu'un vain jeu de l'esprit? Elle ne peut donner au physicien qu'un langage commode; n'est-ce pas là un médiocre service, dont on aurait pu se passer à la rigueur; et même, n'est-il pas à craindre que ce langage artificiel ne soit un voile interposé entre la réalité et l'oeil du physicien? Loin de là, sans ce langage, la plupart des analogies intimes des choses nous seraient demeurées à jamais inconnues; et nous aurions toujours ignoré l'harmonie interne du monde, qui est, nous le verrons, la seule véritable réalité objective". POINCARE J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) pp. 23-24.

[33] POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza* (cit. nota 9) p. 6-7. Per l'originale in francese vedi nota precedente.

[34] *Ivi*, p. 7. Poincaré scrive: "La meilleure expression de cette harmonie, c' est la loi; la loi est une des conquêtes les plus récentes de l' esprit humain". POINCARE J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) p. 22.

[35] Cfr. POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza* (cit. nota 9) p. 8.

> No, senza dubbio, una realtà completamente indipendente dallo spirito che la concepisce, la vede o la sente, è un'impossibilità. Un mondo esterno come questo, anche se esistesse, ci sarebbe sempre inaccessibile. Ma ciò che noi chiamiamo la realtà oggettiva è, in ultima analisi, ciò che è comune a più esseri pensati, e potrebbe essere comune a tutti; questa parte comune, come vedremo, non può essere che l'armonia espressa dalle leggi matematiche. Questa armonia è dunque la sola realtà oggettiva, la sola verità che possiamo attingere […][36].

La realtà oggettiva cui Poincaré fa riferimento, accentuando in questo passo le influenze neocriticiste del suo pensiero filosofico, sembra acquisire un marcato valore soggettivo. Oggettività e soggettività si intrecciano all'interno di una prospettiva epistemologica che vede la prima affermarsi come elemento comune a più esseri pensanti. L'oggettività, in questa lettura, affonda le sue radici nel soggetto o meglio nell'intersoggettività. Per questo l'armonia, unica realtà oggettiva veramente comprensibile e che l'uomo "crede" (proprio come la semplicità anche l'armonia è una credenza) di trovare nella natura, non è in realtà pensabile al di fuori dell'intelletto umano che la concepisce. Poincaré accantona anche in questo passo l'idea che la scienza possa accedere alla realtà ultima dei fenomeni, a ciò che essi sono al di là della nostra percezione e del nostro pensiero. In ciò la scienza abbandona il sentiero della metafisica. Essa si concentra invece su quella realtà che è comune a più essere pensati e che, come visto in *La Science et l'Hypothèse*, Poincaré individua nelle relazioni. Va però subito chiarito che questa lettura non toglie alcune ambiguità insite nel passo citato e che, di fatto, Poincaré non sembra chiarire nemmeno in seguito. Ciò che infatti rimane in sospeso è se queste relazioni possano essere concepite con un elemento della realtà o piuttosto come delle funzioni simboliche della mente umana atte a descrivere, in termini comprensibili per l'uomo, dei processi reali. In altre parole, Poincaré non precisa se queste relazioni (e l'armonia che esse esprimono) siano

[36] "Non, sans doute, une réalité complètement indépendante de l'esprit qui la conçoit, la voit ou la sent, c'est une impossibilité. Un monde si extérieur que cela, si même il existait, nous serait à jamais inaccessible. Mais ce que nous appelons la réalité objective, c'est, en dernière analyse, ce qui est commun à plusieurs êtres pensants, et pourrait être commun à tous; cette partie commune, nous le verrons, ce ne peut être que l'harmonie exprimée par des lois mathématiques. C'est donc cette harmonie qui est la seule réalité objective, la seule vérité que nous puissions atteindre […]". POINCARE J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) p. 23.

reali in sé o siano, invece, descrizioni di processi reali. Tuttavia, ciò che interessa qui sottolineare non è la possibile soluzione a questo dubbio, quanto l'esistenza stessa del dubbio nel pensiero di Poincaré. Ciò apre infatti la possibilità di una duplice lettura: da un lato quella di un Poincaré che, ultimo tra gli scienziati moderni, affronta tematiche filosofiche tipiche della scienza classica, dall'altro quella di uno scienziato contemporaneo che proprio nel riconoscere l'importanza di tali questioni fa emergere una prospettiva epistemologica di sorprendente attualità.

L'idea di una messa in discussione dell'oggettività scientifica e la necessità di offrirne una nuova formulazione trova certamente origine nelle ricerche scientifiche di Poincaré. Se però viene solitamente messo in rilievo il ruolo che possono aver giocato le geometrie non euclidee in questo processo di ripensamento filosofico della scienza, difficilmente si considerano i lavori di Poincaré connessi al problema dei tre corpi[37]. In essi, tuttavia, Poincaré si scontra, prima con la necessità di elaborare un'alternativa ai metodi quantitativi classici (rinunciando quindi all'illusione di un mondo perfettamente integrabile), poi con l'emergenza di dinamiche caotiche che mettono in discussione la credenza di una sostanziale stabilità e armonia dei moti celesti. Si ritiene quindi che il pensiero epistemologico di Poincaré debba essere ricondotto anche ai frutti di queste ricerche.

A questo proposito particolarmente interessante è la definizione che, sempre in *La Valeur Objective de la Science*, Poincaré dà di "determinismo". Dopo aver stabilito che la scienza è possibile solo ammettendo la validità "pratica" del principio di induzione[38] Poincaré riduce tale principio alla classificazione di

---

[37] Il ruolo che le geometrie non euclidee e, più in generale, la riflessione sui fondamenti della geometria hanno giocato nel pensiero di Poincaré è chiaro e ha trovato un'ampia trattazione nella letteratura critica. Al contrario il problema dei tre corpi, e in generale gli interessi "fisici" di Poincaré, sembrano non trovare spazio nei tentativi messi in atto di ricostruire le basi scientifiche per il suo pensiero epistemologico. Al più il convenzionalismo è stato visto come un ostacolo epistemologico al tentativo di Poincaré di formulare una nuova dinamica relativistica. Si ha tuttavia motivo di ritenere che, al di là dell'etichetta convenzionalista, molti riflessioni che Poincaré esprime nei suoi scritti filosofici possano essere proprio ricondotte ai suoi interressi per la fisica e al problema dei tre corpi. A ciò si aggiunge l'interesse che Poincaré dimostra nei confronti della fisica intesa come "filosofia della natura" e che può trovare riscontro nel suo giovanile interesse per Leibniz e il suo appassionarsi alla "controversia filosofica".

[38] Poincaré dà prima l'enunciazione "ordinaria" del principio, secondo cui: "Quand le même antécédent se reproduit, le même conséquent doit se reproduire également" rendendosi tuttavia conto che essa si colloca a un livello d'astrazione tale da risultare vuota. È infatti impossibile che

eventi “pressappoco simili”. In ciò egli riconosce l’effettiva differenza e univocità dei singoli fenomeni, considerando l’attività dello scienziato come una scelta oculata di tratti comuni a distinte sequenze fenomeniche (distinte catene causali). Vi è in questo una classificazione dello scienziato che consente quindi di accostare sequenze differenti di fenomeni ritenute simili tra loro. Secondo quanto afferma Poincaré: “Alla possibilità e legittimità di una simile classificazione si riduce in ultima analisi il determinismo”[39], aggiungendo qualche riga dopo “[…] si è deterministi liberamente. E in effetti ogni classificazione suppone l’intervento attivo del classificatore”[40]. Il determinismo viene dunque presentato come un elemento non solo essenziale ma costitutivo del pensiero scientifico. Se dunque il determinismo è una scelta dello scienziato, tuttavia tale scelta non è motivata dal capriccio. L’attività classificatoria che presuppone la possibilità di ricavare leggi e formulare previsioni si fonda sul fatto che in natura si danno corpi tra loro simili, i quali si relazionano in sequenze causali altrettanto simili. Per questo il determinismo è la “possibilità” e la “legittimità” di compiere queste classificazioni. Se esso si risolvesse, in senso nominalista, in una sorta di capriccio dello scienziato, esso potrebbe forse essere possibile ma non legittimo. Poincaré, come in precedenza, ribadisce che l’unica realtà cui lo scienziato può avvicinarsi è quella delle relazioni: per questo si ripresentano però le ambiguità già viste. Il determinismo come viene descritto da Poincaré in queste pagine rispecchia uno dei fondamenti del pensiero scientifico classico e nulla ha a che fare con quello che viene oggi chiamato “caos deterministico”. È però naturale pensare che la consapevolezza di una necessaria riforma della nozione di

---

due antecedenti si presentino esattamente uguali. Il principio di induzione va allora riformulato in altro modo: “[…] si un antécédent a a produit une fois un conséquent b, un antécédent a’ peu différent de a, produira un conséquent b’ peu différent de b”. In questo modo il principio di induzione poggia anche sul principio di proporzionalità tra causa ed effetto. Di fatto, come lo stesso Poincaré sottolinerà qualche anno dopo, una piccola differenza negli antecedenti non è detto che corrisponda a una piccola differenza nei conseguenti. Ciò non toglie che la generalizzazione scientifica, e l’esigenza di effettuare previsioni poggino, nella scienza classica, su un principio di induzione come quello sopra enunciato. Per i passi citati si veda: POINCARÉ J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) p. 167.

[39] POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza* (cit. nota 9) p. 188. “C’est à la possibilité et à la légitimité d’une pareille classification que se réduit en fin de compte le déterminisme”. POINCARE J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) p. 178.

[40] POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza* (cit. nota 9) p. 188. “[…] c’est librement qu’on est déterministe. Et en effet toute classification suppose l’intervention active du classificateur”. POINCARE J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) p. 178.

determinismo, capace di mettere in evidenza in che termini esso non sia meramente riconducibile a un ordine del mondo indipendente dall'uomo, derivi proprio dalle ricerche scientifiche di Poincaré e dalla sua scoperta delle dinamiche caotiche. Ciò non porta Poincaré a pensare a una scienza post-determinista (che sarebbe a suo avviso impossibile), ma gli consente di riformare la nozione di determinismo ponendone il risalto il lato umano[41]. Per Poincaré la scienza continua a rimanere "la nostra scienza".

Si può quindi tornare all'affermazione di partenza: "Tutto ciò che non è pensiero è puro nulla". Il pensare, nelle parole di Poincaré, diventa un atto creativo (sebbene non arbitrario) ed è attraverso esso che si può dare una conoscenza, che si possono ricavare delle leggi ed effettuare delle previsioni. Da un lato Poincaré risponde alle illazioni anti-intellettualiste che vedono nel pensiero e nel discorso scientifico le negazioni di ogni genuina conoscenza, dall'altro raccoglie la sfida di un ripensamento della scienza che le consenta di oltrepassare il nominalismo, mantenendo intatto il suo valore. Questo comporta un ripensamento di concetti quali appunto quelli di "realtà", "oggettività", "armonia" e "determinismo" che ponga l'uomo al centro della sua scienza. In essa dunque, tutto è pensiero perché, in fondo, essa è costruita dal pensiero stesso e senza di

[41] Inoltre, come visto nei capitoli precedenti, la traduzione matematica dell'istanza determinista è rappresentata dall'integrazione delle equazioni differenziali utilizzate per descrivere l'evoluzione di un sistema. Tuttavia, le difficoltà tecniche associate a un'impresa di questo tipo, unite alla scoperta delle soluzioni singolari, ha portato a cogliere i limiti di questa metodologia sia sul piano scientifico che filosofico. Poincaré stesso si scontra con le difficoltà tecniche legate a un approccio classico allo studio delle equazioni differenziali e una volta elaborato un metodo geometrico e globale scopre, nello studio del problema dei tre corpi, i fenomeni caotici. È naturale pensare che questi aspetti delle ricerche scientifiche di Poincaré concorrano a dar forma alla definizione di "determinismo" riportata sopra. Una critica, forse più radicale della nozione di determinismo sarà successivamente quella di Cassirer. Secondo quanto egli afferma, il principio di causalità (considerato come la base del pensiero determinista) deve essere compreso nella sua natura euristica e trascendentale. Per questo il principio di causalità non è, in Cassirer, qualcosa che si dà oggettivamente nella realtà ma la ricerca di una legalità nell'analisi dell'esperienza. Quest'ultima viene però costruita sulla base stessa di questo principio che dunque, viene kantianamente inteso nella sua trascendentalità. Per maggiori informazioni sulla crisi del determinismo classico da un punto scientifico-matematico, si veda ad esempio: IAN HACKING, "Nineteenth Century Cracks in the concept of determinism", *Journal of the History of Ideas*; KARL POPPER, "Indeterminism in Quantum Physics and in Classical Physics", *The British Journal for the Philosophy of Science*, 1950, I: 117-133, 173-195; POPPER K., *The open universe. An Argument for Indeterminism* (London: Hutchinson, 1982); G. F. DEAR, "Determinism in Classical Physics", *The British Journal for the Philosophy of Science*, 1961, 11, 44: 208-304. Per quanto concerne invece il riferirimento a Cassirer si rimanda a: ERNST CASSIRER, *Determinismo e indeterminismo nella fisica moderna* (Firenze: Franco Angeli, 1970).

esso non sarebbe concepibile. In senso più generale, precisa Poincaré, i rapporti stessi delle cose, non avrebbero senso al di fuori del pensiero:

> […] la sola realtà oggettiva sono i rapporti delle cose da cui risulta l'armonia universale. Senza dubbio, questi rapporti, questa armonia non potrebbero concepirsi al di fuori di uno spirito che li pensa o li sente. Ma essi sono nondimeno oggettivi perché sono, diverranno o resteranno comuni a tutti gli esseri pensanti.[42]

In queste righe si trova riassunto quanto si è cercato di spiegare nelle pagine precedenti e due aspetti centrali del pensiero di Poincaré spiccano sugli altri. Da un lato l'unica realtà concepibile è quella delle relazioni: lo scienziato, rinunciando a qualsiasi velleità metafisica, riconosce l'impossibilità di cogliere la natura ultima delle cose. I rapporti tra esse restano l'unico elemento invariante che la scienza può cogliere e che è concepibile solo attraverso il pensiero. Con questo Poincaré non vuole escludere che i rapporti invarianti possano avere una realtà in sé (sebbene le sue affermazioni continuino a restare ambigue) ma chiarire che è solo attraverso il pensiero che essi possono essere colti. In questo senso la loro oggettività è comunque garantita dall'essere elementi comuni a tutti gli esseri pensanti.

In conclusione anche in *La valeur de la Science,* il pensiero di Poincaré è in bilico tra l'inevitabile riconoscimento dell'attività umana nella costruzione del sapere scientifico e la necessità di riaffermare il valore oggettivo di tale sapere. L'unica via per farlo è individuata da Poincaré in un ripensamento di concetti centrali quali quello di "realtà" "armonia" e "determinismo". Questo tentativo non ha lo scopo di accantonare tali concetti ma di renderne esplicito il contenuto, chiarendo in che termini essi debbano essere riferiti in parte allo scienziato e in parte alla realtà che egli studia.

Se però, come si è detto, l'attività dello scienziato è ordinatrice e classificatoria è necessario mettere in luce secondo quali regole e criteri essa si sviluppi. A questo argomento è dedicata la raccolta di articoli *Science et Méthode* pubblicata

[42] POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza* (cit. nota 9) p. 194. "[…] la seule réalité objective, ce sont les rapports des choses d'où résulte l'harmonie universelle. Sans doute ces rapports, cette harmonie ne sauraient être conçus en dehors d'un esprit qui les conçoit ou qui les sent". POINCARE J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) p. 184.

da Poincaré nel 1908. Anch'essa, come le precedenti raccolte, comprende articoli riguardanti differenti ambiti disciplinari, dalla matematica alla meccanica e all'astronomia. Si cercherà nelle prossime pagine di mettere in evidenza alcuni degli aspetti di *Science et Méthode* più interessanti alla luce di quanto finora detto. Particolare attenzione verrà dedicata all'articolo intitolato *Le Hasard* che, come si avrà modo di vedere, contiene una delle prime formulazioni del principio di instabilità esponenziale.

4.2.2 Science et Méthode

I primi tre capitoli di *Science et Méthode* sono ricavati da scritti pubblicati da Poincaré tra il 1907 e il 1908. Il primo, *Le Choix des Faits* compare per la prima volta nel 1907 come prefazione all'edizione americana di *La valeur de la Science*[43]. In esso Poincaré spiega "che i fatti vanno più svelti di noi, e noi non saremo mai in grado di acciuffarli"[44], per questo motivo la scienza si denota come scelta di fatti. Mutuando un'espressione che verrà successivamente utilizzata dallo stesso Poincaré, lo scienziato si trova costretto a "tagliare a fette" l'universo data l'impossibilità di poterlo abbracciare nella sua interezza. Queste "fette", però, non sono tagliate a caso e non possono quindi ridursi all'arbitrarietà dei nominalisti, come LeRoy. Lo scienziato sceglie al contrario quei fatti che giudica semplici, ovvero quei fatti che sembrano ripetersi; si tratta di quei fatti che permettono di ritenere simili due sequenze di fenomeni distinte. Tuttavia il criterio che consente di stabilire la semplicità di un fatto non è univoco e per questo Poincaré precisa:

> Ma esistono fatti semplici e, se esistono, come riconoscerli? Chi ci dice che ciò che crediamo semplice non nasconda una spaventosa complessità? Tutto quel che

[43] POINCARÉ J.-H., "The choice of facts" in *The value of science* (New York: Dover, 1907, rist. 1958). Tale prefazione compare successivamente come articolo in *The Monist*: POINCARÉ J.-H., "The choice of facts", *The Monist,* 1909 XIX: 231-239.

[44] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 10. Poincaré scrive: "Qu'il faille faire un choix, cela n'est pas contestable; quelle soit notre activité, les faits vont plus vite que nous, et nous ne saurions le rattraper", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 18.

possiamo dire è che dobbiamo preferire i fatti che *sembrano* semplici a quelli nei quali il nostro occhio imperfetto distingue elementi diversi.[45]

A questa sensazione di semplicità si lega una delle prime riflessioni di Poincaré sul caso. Egli infatti precisa che un fatto semplice può apparire tale a un osservatore ma essere in realtà il risultato di un "mélange intime" generato dal caso. In queste circostanze, rileva Poincaré, un aggregato a prima vista omogeneo ha comunque più probabilità di ripetersi rispetto a un insieme eterogeneo. Il caso, precisa Poincaré, riproduce più facilmente i fatti che sembrano semplici. Vedremo che questa riflessione verrà ripresa da Poincaré in *Le Hasard* nel tentativo di offrire una definizione esaustiva della nozione di "caso". Essa fa chiaramente riferimento alla teoria cinetica dei gas, dove un fatto apparentemente semplice, lo stato di un gas a un dato istante, può essere la risultante di una molteplicità di possibili configurazioni estremamente complesse. In questo senso, riprendendo l'espressione di Poincaré, il caso riproduce con maggior facilità un fatto (apparentemente) semplice ed è su esso che lo scienziato si basa per la ricerca di una regola. Si noti come, anche in questo esempio, Poincaré aggiri una possibile critica[46] anticipandola e minandola alle fondamenta. Non ha importanza, infatti, che la semplicità sia reale o apparente, in entrambi i casi il fatto scelto verrà considerato più facilmente riproducibile, soddisfacendo quindi le esigenze dello scienziato. Inoltre, in entrambi i casi, il fatto sarà utile per formulare una regola e poter prevedere altri fatti a esso simili.

Tuttavia, una volta stabilita una regola, i fatti che a essa di adattano perdono il loro interesse e lo scienziato si concentra su quelli che sembrano ribellarsi; ciò avviene nel costante tentativo di cercare, sotto l'apparente lontananza, delle

---

[45] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) pp. 11-12. "Mais y a-t-il des faits simplex, et s'il y en a, comment les reconnaître? Qui nous dit que ce que nous croyons simple ne recouvre pas une effroyable complexité? Tout ce que nous pouvons dire, c'est que nous devons préférer les faits qui paraissent simplex à ceux où notre œil grossier discerne des éléments dissemblables". POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 19.

[46] Quella secondo cui non è possibile offrire una definizione rigorosa di semplicità. Di fatto Poincaré utilizza spesso l'arma retorica dell'anticipazione costruendo in questo modo le sue riflessioni sulla base delle possibili obiezioni che potrebbero essere mosse. Questo stratagemma si colloca in linea con la capacità di Poincaré di trasformare risultati negativi – quindi ad esempio la messa in discussione di concetti fondamentali – in spunti per nuovi contenuti positivi.

"affinità nascoste"[47]. Secondo Poincaré tale ricerca è motivata da una spinta all'apprezzamento della bellezza e dell'armonia del mondo che possono essere colte solo dalla pura "intelligenza"[48]. Ricordiamo che queste parole vengono pensate da Poincaré come prefazione a *La valeur de la Science* e che dunque devono essere interpretate alla luce di quanto detto sopra. Per questo, espressioni come "armonia" e "bellezza del mondo" non possono essere ricondotte a una visione ingenua della scienza ma, piuttosto, comprese nel loro valore funzionale. Esse non sono semplicemente degli elementi della realtà che emergono attraverso la conoscenza scientifica, sono al contrario degli elementi che indirizzano questa stessa conoscenza. Per questo l'armonia del mondo, in Poincaré, non può prescindere né dal pensiero che la coglie né dalla scienza che la scopre. La bellezza e l'armonia non possono essere concepite come elementi di una realtà indipendente dall'uomo ma, al contrario, come strumenti euristici attraverso cui lo scienziato orienta la sua ricerca. Si potrebbe per certi versi concludere, a partire dalle argomentazioni di Poincaré, che non cogliamo l'armonia della natura, ma la natura attraverso l'armonia[49]. La ricerca della bellezza, dell'armonia e della semplicità sono elementi che nel pensiero di Poincaré strutturano il metodo scientifico.

A tale metodo sono dedicati i due capitoli successivi in cui Poincaré affronta la metodologia delle scienze matematiche. Entrambi risalgono al 1908 ma mentre il primo, *L'Avenir des mathématiques*, riprende il testo di un intervento tenutosi al IV Congresso internazionale di matematici di Roma[50], il secondo, *L'Invention*

[47] In questi termini riemerge il tentativo determinista di inserire all'interno di una stessa classe fenomeni apparentemente molto diversi tra loro. Anche la pratica della scelta rientra quindi il quel processo classificatorio a cui, in ultima analisi, Poincaré riduce il determinismo. In effetti se fossimo in grado di osservare lo svolgersi della storia dell'universo in ogni sua parte non avremmo più bisogno di né essere deterministi né di cercare una legalità nei fenomeni.

[48] Cfr. POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 15. Anche in questo passaggio Poincaré risponde indirettamente alle critiche anti-intelletualiste, cercando di sottolineare come la bellezza del mondo possa essere colta solo attraverso l'utilizzo dell'intelletto.

[49] Questo, ovviamente, non significa che tale imposizione sia un capriccio dello scienziato. La scelta dei fatti mostra infatti la possibilità di formulare leggi e fare previsioni sulla base una presunta armonia e un'indotta semplicità.

[50] POINCARÉ J.-H., "L'avenir des mathématiques" in *Atti del IV Congresso internazionale dei matematici* vol., I, pp. 167-182 (Roma: Tipografia della Reale Accademia dei Lincei, 1909). L'intervento è rintracciabile anche in: *Rendiconti del circolo matematico di Palermo*, 1908, XVI: 152-168; *Revue générale des sciences pure set appliquées*, 1909, XIX, pp. 930-939; *Scientia. Rivista di Scienza*, 1908, 2, III: 1-23; *Bulletin des sciences mathématiques*, 1908, 2, XXXII: 168-

Mathématiques è invece tratto da un discorso di Poincaré all'*Institut général psychologique* di Parigi[51]. Quest'ultimo, in particolare, ha goduto di una certa fama soprattutto tra gli studiosi di psicologia interessati all'analisi del pensiero creativo in matematica. In esso infatti Poincaré ricostruisce le dinamiche psicologiche che, a suo avviso, hanno caratterizzato le sue più rilevanti scoperte matematiche.

In *L'Avenir des mathématiques*, la matematica è definita come: "l'arte di dare lo stesso nome a cose diverse"[52]. Riprendendo quanto già detto in *La Science et l'Hypothèse*, Poincaré sottolinea il lato creativo della matematica che, tra tutte le scienze, è l'unica a formulare autentici giudici sintetici a priori. Il matematico è però accomunato al fisico dalla necessità di selezionare dei fatti al fine di creare nuovi e più fertili accostamenti:

> […] nemmeno il matematico può conservare, così alla rinfusa, tutti i fatti che gli si presentano; tanto più che, questi fatti, è lui stesso – stavo quasi per dire il suo capriccio – a crearli. È il matematico che costruisce di sana pianta una combinazione nuova accostando i vari elementi che la compongono; non è certo la natura, in generale, che gliela fornisce già bell'e pronta.[53]

All'essenza creativa della matematica si aggiunge la convinzione che obiettivo del pensiero matematico si quello di attuare il principio di economia teorizzato da Ernst Mach (1839-1916). Nel fare ciò, secondo Poincaré, la matematica crea nuovi termini cui spetta il compito di mettere in evidenza connessioni mai rilevate in precedenza (nota con esempio fatto da Poincaré). In questa rivendicazione dell'utilità dei nuovi termini è possibile rilevare un'ennesima risposta di Poincaré

---

190. Il capitolo di *Science et Méthode* presenta inoltre diversi tagli rispetto al testo originale della conferenza.

[51] POINCARE J.-H., "L'invention mathématique", *Bulletin de l'Institut général psychologique*, 1908, VIII, 175-187. Oppure in: *Revue du Mois*, 1908, VI: 9-21; *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 1908, XIX: 521-526; *L'enseignement mathématique*, 1908, X: 357-371.

[52] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 25-26. Poincaré scrive: "Je ne sais pas si je n'ai pas déjà dit quelque part que la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 32.

[53] "[…] le mathématicien, lui non plus, ne peut conserver pêle-mêle tous les faits qui se preséntent à lui; d'autant plus que ces faits c'est lui, j'allais dire c'est son caprice, qui les crée. C'est lui qui construit de toutes pièces une combinaison nouvelle en en rapprochant les éléments; ce n'est pas en général la nature qui la lui apporte toute faite", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 26.

alle critiche che l'intuizionismo volge al "discorso" inteso come strumento per una reale conoscenza. Del resto, già in *La valeur de la Science*, Poincaré ha avuto occasione di sottolineare come proprio il discorso sia la base attraverso cui creare una condivisione, tra più menti pensanti, di quelle relazioni che costituiscono la realtà oggettiva.

La matematica dunque, più delle scienze fisiche, è una creazione della mente umana e secondo Poincaré può diventare uno strumento stesso di comprensione dell'uomo:

> […] la nostra scienza confina sia con la filosofia che con la fisica, ed è per queste due vicine di casa che lavoriamo: abbiamo sempre visto e sempre vedremo, pertanto, i matematici camminare in due direzioni opposte. Da una parte la scienza matematica deve riflettere su se stessa. Questo è utile perché riflettere su se stessa significa riflettere sulla mente umana che l'ha creata – tanto più che, di tutte le creazioni, la matematica è quella che ha mutuato meno elementi dal mondo esterno. È per questo motivo che certe speculazioni matematiche sono utili, come quelle che hanno per oggetto lo studio dei postulati, delle geometrie insolite, delle funzioni dagli andamenti bizzarri. Più tali speculazioni si discosteranno dalle concezioni comunemente diffuse – e dunque dalla natura e dalle applicazioni – meglio ci mostreranno ciò di cui è capace la mente umana quando sempre più si sottrae alla tirannia del mondo esterno, e meglio, di conseguenza, ce la faranno conoscere di per se stessa.[54]

Queste parole di Poincaré sono ben lontane da una qualsiasi lettura empirista della matematica e consentono di vedere questa disciplina non più – o meglio non solo – come uno strumento attraverso cui scoprire i segreti di un mondo esterno e indipendente dallo scienziato ma, piuttosto, come il mezzo attraverso il quale

[54] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) pp. 25-26. Poincaré scrive: "[…] notre science confine à la fois à la philosophie et à la physique, et c'est pour nos deux voisines que nous travaillons; aussi nous avons toujours vu et nous verrons ancore les mathématiciens marcher dans deux directions opposées D'une part, la science mathématique doit réfléchir sur elle-même et cela est utile, parce que réfléchir sur elle-même, c'est réfléchir sur l'esprit humain qui l'a crée, d'autant plus que c'est celle des ses créations pour la quelle il a fait le moins d'emprunts au dehors. C'est pourquoi certaines spéculations mathématiques sont utiles, comme celles qui visent l'étude des postulats, des géométries inaccoutumées, des fonctions à allures étranges. Plus ces spéculations s'écarteront des conceptions les plus communes, et par conséquent de la nature et des applications, mieux elles nous montreront ce que l'esprit humain peut faire, quand il se soustrait de plus en plus à la tyrennie du monde extérieur, mieux par conséquent elles nous le front connaître en lui-même". POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 34.

l'uomo può analizzare se stesso e il suo intelletto. Per questo la matematica, secondo Poincaré, confina con la filosofia e può offrire il suo contributo alla psicologia.

In *L'Invention Mathématique* Poincaré sostiene con forza che: "La genesi dell'invenzione matematica è un problema che deve essere del più vivo interesse per lo psicologo. È questo l'atto nel quale la mente umana sembra trarre di meno dal mondo esterno, nel quale essa agisce soltanto attraverso se stessa e su se stessa […]"[55]. Nelle pagine successive Poincaré spiega come, a suo avviso, la vera comprensione matematica sia "l'intuizione dell'ordine matematico" sottolineando che: "Una dimostrazione matematica non è una mera giustapposizione di sillogismi; sono sillogismi disposti in un certo ordine, e l'ordine nel quale sono disposti è molto più importante degli elementi stessi"[56]. Nell'affermazione di supremazia dell'ordine sugli elementi costituenti, Poincaré sembra anticipare la critica mossa alla definizione di continuo data da Hilbert che, come si è visto nel secondo capitolo, è una delle basi su cui poggia il significato epistemologico dell'Analysis Situs. Precisa inoltre Poincaré che coloro che possiedono una tale intuizione non solo possono realmente comprendere la matematica, ma "potranno farsi creatori e tentare di inventare, con maggiore o minore successo a seconda che quell'intuizione sia in loro più o meno sviluppata"[57].

Proprio il tema dell'invenzione matematica diventa poi il soggetto principale di Poincaré e, nell'affrontarlo, egli descrive alcuni episodi della propria vita. In tutti i

---

[55] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 37. "La genèse de l'Invention mathématique est un problème qui doit inspirer le plus vif intérêt au psychologue. C'est l'acte dans le quel l'esprit humain semole le moins emprunter au monde extérieur, où il n'agit ou ne parît agir que par lui-même et sur lui-même", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 43.

[56] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 40. "Une démonstration mathématique n'est pas une simple juxtaposition de syllogismes, ce sont de syllogismes placés *dans un certain ordre*, et l'ordre dans le quel ces éléments sont placés est beaucoup plus important que ne le sont ces éléments eux-mêmes". POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 45-46.

[57] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 41. Poincaré cerca di spiegare in cosa consista l'intuizione matematica e scrive a propostio di coloro che posseggono questa qualità: "Ils pourront comprendre les mathématiques, quand même leur mémoire n'aurait rien d'extraordinaire, mais ils pourront devenir créateurs et chercher à inventer avec plus ou moins de scuccés, suivant que cette intuition est chez eux plus ou moins développée". POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 46. In questo passaggio Poincaré mette bene in luce come l'attività del matematico sia riconducibile a una forma di creatività, non definibile in termini di un processo logico deduttivo. Egli precisa inoltre come, in matematica, inventare significhi individuare delle combinazioni non sterili, scartando invece quelle inutili; in altre parole l'invenzione, in matematica, coincide con la scelta. Sul ruolo della creatività scientifica nel pensiero di Poincaré e in quello di Einstein si veda: MICHEL PATY, "La création scientifique selon Poincaré et Einstein" in MICHEL SERFATI, *La recherche de la verité* (Paris: Editions du Kankourou, 1999) pp. 241-280.

casi emerge l'istantaneità della scoperta matematica, il suo carattere fulmineo: "Quel che lascia colpiti è il fenomeno di queste improvvise illuminazioni, segno manifesto di un lungo lavoro inconscio precedente; il ruolo di questo lavoro inconscio nell'invenzione matematica mi pare incontestabile, e se ne troveranno tracce anche in altri casi, sebbene con minor evidenza"[58]. L'illuminazione matematica di cui parla Poincaré si configura, utilizzando un vocabolario moderno, come un "superamento di soglia" che consente l'emergere di una combinazione nuova, quindi di una nuova invenzione. Ma, si chiede Poincaré: "Quale causa fa sì che, fra i mille prodotti della nostra attività inconscia, soltanto alcuni siano destinati a oltrepassare la soglia, mentre altri ne rimangono al di qua?"[59]. Secondo Poincaré questo discernimento è riconducibile a una sorta di sensibilità estetica che caratterizza l'io subliminale del matematico e che viene stimolata solo dalle combinazioni armoniose.
Per questo egli dice:

> Quando un'improvvisa illuminazione pervade la mente del matematico, il più delle volte non lo inganna; ma, come ho detto, può anche succedere che essa non superi la prova di una verifica: ebbene, si osserva quasi sempre che questa idea falsa, se fosse stata vera, avrebbe lusingato il nostro istinto naturale dell'eleganza matematica.[60]

L'eleganza e l'armonia delle dimostrazioni matematiche sono, per Poincaré, degli "istinti naturali" e come tali vanno compresi. Nella citazione riportata si può vedere un'allusione all'errore commesso da Poincaré nell'articolo sul problema dei tre corpi e la consapevolezza che tale "svista" sia da ricondurre proprio a

---

[58] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 45. Poincaré scrive: "Ce qui frappera tout d'abord, ce sont ces apparences d'illumination subite, signes manifestes d'un long travail incoscient antérieur; le rôle de ce travail inconscient dans l'invention mathématique me paraît incontestabile, et on en trouverait trace dans d'autres cas où il est moins évident", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 50. L'importanza che Poincaré attribuisce all'inconscio si colloca senz'altro all'interno di un contesto culturale caratterizzato dagli studi di Alfred Binet (1857-1911) e Sigmund Freud (1856-1939).

[59] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 48. "Quelle est la cause qui fait que, parmi les mille produits de notre activité incosciente, il y en a qui sont appelés à franchir le seuil, tandis que d'autres restent en deçà?", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 53.

[60] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 48. "Quand une illumination subite envahit l'esprit du mathématicien, il arrive le plus souvent qu'elle ne le trompe pas; mais il arrive aussi quelquefois, je l'ai dit, qu'elle ne suporte pas l'épreuve d'une vérification; eh bien! On remarque preseque toujours que cette idée fauste, si elle avait été juste, aurait fletté notre instinct naturel de l'élégance mathématique". POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 54.

quell'esigenza di eleganza matematica che talvolta può trarre in inganno. *Science et Méthode* prosegue quindi con il capitolo dedicato a *Le Hasard*. A esso, per l'importanza che ricopre nella presente analisi, verrà riservata una lettura più approfondita che permetta di collocarlo, da un lato all'interno della riflessione di Poincaré sulla probabilità, e dall'altro nel dibattito sul caso che trova spazio nella *Revue du Mois*. Nel fare questo ci troveremo costretti, da un punto di vista storico, a fare ancora una volta un passo indietro, recuperando alcune parti di *La Science et l'Hypothèse*. Questa oscillazione storica della nostra analisi si rende però necessaria per cercare di spiegare al meglio un pensiero, come quello di Poincaré, che si contraddistingue per la sua frammentarietà ed eterogeneità.

In conclusione a quanto emerso da questa rapida rilettura delle opere epistemologiche di Poincaré è possibile mettere in evidenza il sottile equilibrio su cui si fonda il pensiero epistemologico che in esse emerge.

Da un lato Poincaré avverte certamente la necessità di dare una risposta scientifica alle critiche anti-intelletualiste e nominaliste che catalizzano il dibattito francese di quegli anni. Nel fare questo egli comprende però che non è possibile arroccarsi sulle posizioni della scienza positivista. Al contrario Poincaré sembra ben consapevole della necessità di ammettere i limiti concettuali ed epistemologici con cui la scienza classica è venuta a scontrarsi a partire dalla seconda metà del diciannovesimo secolo. Ciò implica la necessità di una riformulazione concettuale della "nostra scienza" che, pur salvandone il valore oggettivo, riconosca la presenza di una forte componente soggettiva. Nel fare questo Poincaré si interroga sulle "credenze" di semplicità e armonia (cercando di chiarirne le origini) così come sull'essenza della "realtà" scientifica.

Si ritiene che gli studi sul problema dei tre corpi e la scoperta del caos possano occupare una posizione di rilievo nella costruzione di questo pensiero in equilibrio tra valore oggettivo e natura soggettiva della scienza.

4.3 *Le Hasard*

4.3.1 Réflexion sur le calcul des probabilités

Nel 1907 Poincaré pubblica sulla *Revue du Mois* un breve articolo intitolato *Le Hasard*[61]. La formulazione, in esso contenuta, del principio di instabilità esponenziale, ha catalizzato l'attenzione dei rari riferimenti presenti tra la letteratura critica. Sebbene tale principio costituisca un punto di indiscusso interesse storico e teoretico, finora lo si è strumentalmente utilizzato al solo fine di gettare una luce di visionaria genialità sulla figura di Poincaré. Ciò, con tutta probabilità, per il fatto che *Le Hasard* è difficilmente inseribile nel resto della produzione filosofica di Poincaré (letta e interpretata esclusivamente attraverso il convenzionalismo) ma al contempo costituisce una riflessione di primario interesse, impossibile da trascurare totalmente[62]. Tuttavia se, come detto in precedenza, l'intrinseca eterogeneità degli scritti di Poincaré viene tematizzata e non esorcizzata è possibile trovare in *Le Hasard* stimolanti spunti di riflessione. In esso il principio di instabilità esponenziale costituisce un passaggio fondamentale che tuttavia non può essere astratto dal contesto dell'articolo e che anzi va ricompreso proprio in funzione delle argomentazioni sostenute da Poincaré. Nelle prossime pagine prenderemo in esame *Le Hasard* cercando di svolgerne un'analisi dettagliata che consenta sia di mettere in evidenza il suo ricco contenuto epistemologico sia di inserirlo nel proprio contesto storico. Obiettivo principale sarà quello di capire in che termini Poincaré proprio cercando di definire il "caso", concetto fondamentale del calcolo delle probabilità, si imbatta nel principio di instabilità esponenziale dietro il quale si nasconde, invece, il "caos".

La trattazione si manterrà sempre su un piano filosofico, senza quindi prendere in diretto esame gli aspetti matematici sviluppati da Poincaré inerenti il calcolo delle probabilità. Essi, per quanto di rilevante interesse storico e scientifico, non rientrano tra gli obiettivi della presente analisi[63]. In ultimo è necessario puntualizzare che in queste pagine non si ha l'ambizione di ricostruire nella sua

---

[61] POINCARE J.-H., "Le Hasard", *Revue du Mois*, 1907, III: 257-276. L'articolo è poi ripreso come quarto capitolo in: POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 59-79. In traduzione italiana è rintracciabile in: POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 53-76, oppure in: POINCARÉ J.-H., *Geometria e Caso* (Torino: Bollati Boringhieri, 1995) pp. 105-124.

[62] Una cernita dei principali articoli dedicati all'interpretazione del pensiero filosofico di Poincaré mostra che *Le Hasard*, nonostante l'importanza del suo contenuto, non viene mai preso in considerazione. Tuttavia esso appare come uno dei principali contributi epistemologici di Poincaré e dunque si rivela necessario cercare di collocarlo all'interno del suo pensiero.

[63] Per quanto concerne invece un'analisi di questi aspetti matematici si veda: OSCAR SHEYNIN, "H. Poincaré's Work on Probability", *Archive for History of Exact Scinces*, 1991, 42 (2): 137-171.

totalità il dibattito tra determinismo e indeterminismo caratterizzante la seconda metà dell'Ottocento. Esso comprende infatti una molteplicità di contributi e sfumature la cui ricostruzione richiederebbe un'analisi indipendente. Ci si limiterà quindi a uno solo di questi contributi, quello appunto fornito da Poincaré.

Benché *Le Hasard* sia il centro teorico della nostra analisi, esso non ne costituisce l'inizio storico che va invece rintracciato ben prima, a partire dal 1896, con la pubblicazione da parte di Poincaré delle dispense del suo corso di fisica matematica sotto il titolo di *Calcul des probabilités*[64]. Nelle pagine di queste dispense Poincaré, oltre a sviluppare un'introduzione al calcolo della probabilità, inserisce interessanti riflessioni epistemologiche riprese, nel 1899, in *Réflexion sur le calcul des probabilités* articolo pubblicato nella *Revue générale des Sciences Pures et Appliqueés*[65]. È bene però precisare che l'utilizzo della nozione di "convenzione" che vedremo poi essere alla base della definizione di probabilità data da Poincaré in questo articolo, risale già alle dispense del 1896.

La *Réflexion sur le calcul des probabilités* viene ripubblicata da Poincaré, con alcune modifiche, nella quarta parte di *La Science et l'Hypothèse* (1902), quella dedicata alla "Natura"[66]. In questa seconda versione vengono eliminati alcuni passaggi matematici ritenuti troppo tecnici e viene inserito un prologo che consente di legare l'articolo con il resto dell'opera. Un aspetto, quest'ultimo, niente affatto marginale e che non può essere considerato un semplice espediente retorico. Poincaré infatti inserisce il capitolo dedicato al calcolo delle probabilità all'interno di una riflessione più ampia sulla fisica e sull'utilizzo, in essa, delle ipotesi. Sebbene infatti le teorie fisiche poggino su un'esperienza che deve forzatamente essere vista come loro punto d'origine, il loro sviluppo, che avviene tramite un processo di generalizzazione, è invece possibile grazie alla formulazione di ipotesi. È in questo passaggio che il contributo del soggetto nella formulazione della teoria fisica emerge più chiaramente, ed è qui che si inserisce il calcolo delle probabilità. Questo è il terreno su cui Poincaré si muove nel

---

[64] POINCARE J.-H., *Calcul des Probabilités* (Paris: Gauthier-Villars, 1896). Una seconda edizione delle dispense viene pubblicata nel 1912 e a essa viene aggiunto, come introduzione, proprio l'articolo *Le Hasard*. Si veda: POINCARE J.-H., *Calcul des Probabilités* (Paris: Gabay, 2ª ed. 1912, rist. 1987) pp. 1-23.

[65] POINCARE J.-H., "Réflexion sur le calcul des probabilités", *Revue générale des Sciences Pures et Appliqueés*, 1899, 10: 262-269.

[66] Cfr. POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5) p. 271-307.

tentativo di conciliare esperienza e induzione seguendo un cammino teorico impervio tra empirismo e scetticismo, sempre alla ricerca una nuova prospettiva epistemologica che non assolva “dall’onere del pensiero”[67]. In che misura il metodo delle scienze fisiche s’intreccia con il calcolo delle probabilità? Secondo Poincaré questa è una domanda che si pone “naturalmente” al filosofo che voglia occuparsi di fisica[68]. La “naturalità” del rapporto tra fisica e calcolo delle probabilità si fonda sulle riflessioni metodologiche che interessano particolarmente il dibattito fisico-filosofico di fine Ottocento. Del resto già in precedenza si è avuto modo di sottolineare come l’articolo sul problema dei tre corpi, sia per l’impostazione a esso data da Poincaré che per le “modalità” dell’errore commesso, ponga sul piano del dibattito filosofico questioni di carattere metodologico. Il metodo è insomma una delle questioni centrali che la riflessione filosofico-scientifica dell’epoca affronta.

Poincaré riconosce la presenza, nelle generalizzazioni messe in atto dal fisico, di un elemento ipotetico che introduce, nella metodologia fisica, la “probabilità”. Il processo induttivo, che porta a ricavare previsioni a partire da dati empirici, non garantisce infatti che tali previsioni possano considerarsi certe in senso assoluto. Inoltre, il meccanismo stesso di generalizzazione, fondato su “credenze”, si articola seguendo inconsapevoli stime di probabilità. La probabilità gioca dunque in fisica un doppio ruolo[69]. Da un lato essa emerge nell’impossibilità di considerare le previsioni della fisica come certe in senso assoluto (una nuova esperienza potrebbe sempre intervenire per falsificarle o le previsioni formulate potrebbero essere disattese) dall’altro scandisce il processo di costruzione delle generalizzazioni che, di prassi, avviene seguendo i binari del “probabile”. Poincaré ritiene quindi doveroso, in *La Science et l’Hypothèse* riportare l’articolo del 1899 come intermezzo utile a chiarire un aspetto estremamente delicato del metodo fisico.

Dopo questa premessa Poincaré riporta il prologo della versione del 1899:

---

[67] Cfr. *Ivi*, p. 3.
[68] Cfr. *Ivi*, p. 271.
[69] Cfr. *Ibidem*.

> Già il nome di calcolo delle probabilità è un paradosso: la probabilità, opposta alla certezza, è ciò che non si sa, e come si può calcolare ciò che non si conosce? Tuttavia, molti illustri scienziati si sono occupati di questo calcolo, e non si può negare che la scienza non ne abbia tratto qualche vantaggio. Come spiegare tale apparente contraddizione?[70]

Come nell'articolo sul problema dei tre corpi del 1891, anche qui Poincaré prende le mosse da una contrapposizione, quella tra certezza e probabilità[71]. La rinuncia alla certezza dei risultati della fisica, implica il riconoscimento dei suoi limiti e la consapevolezza che lo scienziato si trova a operare al loro interno. Il calcolo delle probabilità costituisce lo strumento matematico attraverso cui il fisico riconosce i limiti delle sue conclusioni. Esso è la traduzione in linguaggio matematico della consapevolezza che la conoscenza dei fenomeni è, e sempre sarà, intrinsecamente parziale. Riconoscere che una previsione non può mai essere certa ma al più probabile, implica che nello svolgimento dei calcoli si tenga conto non solo di ciò che conosciamo ma anche di quello che ignoriamo. Per questo la conclusione, apparentemente paradossale, è che il calcolo delle probabilità coincide con il calcolo di ciò che ignoriamo. Sempre da un punto di vista epistemologico tale prospettiva risponde indirettamente alle pretese positiviste di una scienza fondata sul "dato positivo" inteso come unica fonte sapere scientifico. Al contrario il calcolo delle probabilità mostra come il sapere scientifico non si fonda solo su ciò che è dato ma anche sulla stima di ciò che si nasconde.

Il ruolo delicato della probabilità esige, secondo Poincaré, che ne venga offerta una definizione. Tuttavia proprio questa richiesta solleva i primi problemi. Poincaré è infatti consapevole che il modo più naturale di definire la probabilità è quello già adottato da Laplace, ovvero considerarla come il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi totali, considerando questi ultimi come

---

[70] *Ibidem.* Poincaré scrive:"Le nom seul de calcul des probabilités est un paradoxe: la probabilité opposée à la certitude, c'est ce qu'on ne sait pas, et comment peut-on calculer ce que l'on connaît pas? Cepandant, beaucoup des savants éminents se sont occupés de ce calcul, et l'on ne sauriat neir que la science n'en ait tiré quelque profit. Comment expliquer cette apparente contradiction?", *Ivi*, p. 270.

[71] Ricordiamo che nel caso dell'articolo sul problema dei tre corpi Poincaré prendeva le mosse dalla contrapposizione tra la semplicità della legge di gravitazione universale e l'estrema difficoltà che si incontra nella risoluzione delle equazioni differenziali che permettono di calcolare le coordinate dei corpi celesti.

ugualmente probabili. Tuttavia in questo modo si finisce in un circolo vizioso in cui la probabilità è definita attraverso se stessa. In realtà, come puntualizza Poincaré, ciò mette in evidenza come ogni stima di probabilità debba avere a suo fondamento una “convenzione” ovvero, un’ipotesi di base dettata dal buon senso che ci porta a credere che i differenti casi possano tutti essere considerati ugualmente probabili. Sebbene Poincaré riconosca che questo affidamento al buon senso possa essere considerato un “istinto oscuro” è tuttavia indiscutibile che senza di esso non vi potrebbe essere scienza[72]. Da ciò egli arriva a concludere che il calcolo delle probabilità, istintivamente contrario allo spirito scientifico in quanto latore di incertezza, ne costituisce tuttavia un presupposto irrinunciabile. Il suo rifiuto comporterebbe l’abbandono di qualsiasi ambizione di conoscenza scientifica.

Tale prospettiva rischia, tuttavia, di ridurre la scienza a una regola di azione pratica facente fronte all’ignoranza dello scienziato. Spiega infatti Poincaré che di fronte all’essenzialità del calcolo delle probabilità nella pratica scientifica si potrebbe reagire contrapponendo la necessità di agire all’impossibilità, da parte dello scienziato, di raggiungere una conoscenza assoluta. In questo modo il calcolo delle probabilità diventerebbe una guida per indirizzare l’azione, assumendo un valore completamente soggettivo e conducendo a un comodo scetticismo. Questa è una conclusione affrettata che richiede degli approfondimenti. Poincaré distingue per prima cosa tra una probabilità soggettiva, che dipende effettivamente dal nostro grado di ignoranza, e una probabilità oggettiva, che si limita invece a constatare su una serie di dati raccolti, la proporzione con cui essi si distribuiscono[73]. Quest’ultima è la probabilità su cui le compagnie di assicurazione si basano per stabilire i premi assicurativi, e quella su cui maldestri giocatori si affidano sperperando le loro ricchezze. Sebbene infatti la probabilità oggettiva consenta di rilevare delle frequenze “oggettive” a partire da una base empirica sufficientemente ampia e di indurre che tali frequenze

[72] Cfr. POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l’ipotesi* (cit. nota 5) p. 275.

[73] Cfr. *Ivi*, p. 277. Poincaré distingue sostanzialmente tra la stima soggettivista di probabilità, fondata sulla base delle conoscenze che si hanno di un sistema, e la teoria frequentista secondo cui la probabilità è data dal limite del rapporto tra casi favorevoli e casi possibili per numero di “sorteggi” che tende all’infinito.

tenderanno a mantenersi, non può invece dire nulla di più della probabilità soggettiva per quanto riguarda i singoli eventi.

Inoltre, se la probabilità (anziché la certezza) del realizzarsi di un dato evento è data dalla nostra ignoranza di tutte le cause in gioco, è tuttavia opportuno per Poincaré distinguere tra diversi tipi di ignoranza. Da un lato vi è infatti un'ignoranza "matematica" che si riscontra nei casi in cui, nonostante siano conosciute tutti gli elementi di partenza, si può prevedere il dato finale solo in modo probabilistico, dall'altro esiste un'ignoranza "fisica" in cui la probabilità di un evento deve essere calcolata solo a partire dalle leggi che lo regolano, senza che si sappia nulla sulle condizioni di partenza. Esiste infine un ultimo grado di ignoranza in cui né le condizioni iniziali né le leggi di evoluzione sono conosciute, in questo caso è impossibile effettuare delle previsioni probabilistiche. Queste casistiche riguardano quelle che possono essere definite probabilità degli effetti. Tuttavia può capitare, ed è il caso delle scienze empiriche, che a partire da una raccolta di dati si cerchi di stabilire la legge che li lega. In questo caso si ha la probabilità delle cause[74].

Senza entrare in dettagli che sarebbero inutili al fine della presente analisi, Poincaré arriva a concludere che, sia nel caso delle probabilità degli effetti che delle probabilità delle cause lo scienziato è costretto a porre "delle ipotesi o delle convenzioni che presentano sempre un certo grado di arbitrarietà"[75]. La formulazione di queste ipotesi è orientata dal principio di ragion sufficiente che, nella sua elasticità, può assumere diverse forme. Quella più riscontrata nel ragionamento scientifico è, secondo Poincaré, la "credenza di continuità"[76]. Ad esempio, nel caso della probabilità delle cause, l'idea che la legge ricavata dai dati

---

[74] Nel suo articolo *Le déterminisme de Pierre-Simon Laplace et le déterminisme aujourd'hui* Amy Dahan riporta la prima formulazione di probabilità delle cause formulata da Pierre Simon Laplace (1749-1827) che viene oggi conosciuto come teorema di Bayes. Da un punto di vista filosofico, come bene spiega Amy Dahan, questo teorema ha il compito di dimostrare che laddove viene percepita una simmetria nell'universo essa sia con molta più probabilità da ricondurre a una cuasa precisa, regolare, piuttosto che al caso. Per approfondimenti di veda: DAHAN D., "Le déterminisme de Pierre-Simon Laplace et le déterminisme aujourd'hui" in DAHAN DALMEDICO D., JEAN- LUC CHAMBERT, KARINE CHEMLA (eds.), *Chaos et déterminisme* (Paris: Éditions du Seuil, 1992) pp. 371-406.

[75] POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5) p. 307. Poincaré scrive: "Pour entreprendre un calcul quelconque de probabilité, et même pour que ce calcul ait un sens, il faut admetttre, comme point de départ, une hypothèse ou une convention qui comporte toujours un certain degré d'arbitrarie". *Ivi*, p. 306.

[76] Cfr. *Ivi*, p. 301.

raccolti possa essere descritta da una funzione continua risulta come più probabile rispetto al contrario. Una stima probabilistica effettuata *a priori* ci induce a pensare che i dati osservati possano essere uniti da una linea regolare, senza eccessive sinuosità. Attraverso questa linea è inoltre possibile stabilire i valori di quei termini non direttamente rilevati (ovvero effettuare un'interpolazione). Questa "credenza di continuità" è per Poincaré una base imprescindibile del sapere scientifico senza la quale non si potrebbe dare alcuna scienza. Ciò per il fatto che a partire dalla raccolta di dati è possibile formulare una legge solo a patto che questi dati possano essere considerati collegati tra loro secondo un principio di ragion sufficiente e non, al contrario, disposti a caso.

In conclusione, nell'articolo del 1899, Poincaré introduce la nozione di probabilità come elemento fondamentale della metodologia delle scienze fisiche attraverso cui, nella formulazione delle previsioni, viene considerato non solo ciò che si è positivamente acquisito ma anche la presenza di ciò che non è conosciuto. La definizione stessa di probabilità contiene inoltre al suo interno un elemento ipotetico-convenzionale imprescindibile per la comprensione della stessa. Questo stesso elemento si ritrova nella formulazione delle leggi fisiche. A partire dalla raccolta dei dati, le scienze empiriche formulano la legge ritenuta più probabile. In questo caso la convenzione basilare non ritiene tutte le possibili leggi come ugualmente probabili ma conferisce una maggiore probabilità alle leggi semplici e continue. In questa stima un ruolo determinante è quello della "credenza di continuità". Traspare dalle parole di Poincaré la convinzione che sebbene la probabilità sia una misura della nostra ignoranza essa non possa tutta via portare a una visione scettica e soggettiva. Al contrario la formulazione di una legge è l'intreccio di probabilità oggettive e soggettive. In essa la "credenza di continuità" si interseca a quella che Poincaré definisce la probabilità oggettiva. L'esperienza può infatti mostrarci che intensificando la raccolta dei dati questi si dispongono lungo una linea che grossomodo coincide con quella della funzione ricavata per induzione. In ciò si ha una sorta di riscontro oggettivo della "credenza di continuità". Ciò non esclude tuttavia che ulteriori esperienze possano portare a dati che non si allineano alla legge stabilita, per questo essa risulta probabile e non certa e per questo non consente di conferire certezza alla previsione degli eventi futuri che, in quanto tali, portano ineluttabilmente con sé un contenuto di indeterminabile in senso assoluto.

4.3.2 La *Revue du Mois* e il dibattito sul caso

Come già accennato nell'introduzione è nella *Revue du Mois*, diretta da Emile Borel (1871-1956), che viene pubblicato *Le Hasard*. Si tratta di una rivista "giovane", nata nel 1905 e fondata dallo stesso Borel con i 1000 franchi ricevuti dall'*Académie des Sciences* per la vincita del *Petit Prix d'Ormoy*. Laurent Mazliak sottolinea che la nascita della rivista avviene in un momento storico particolare per la Francia, sia sotto il profilo politico che culturale[77]. Questo fervore, unito all'accesso dibattito scientifico che caratterizza il passaggio dal diciannovesimo al ventesimo secolo, è probabilmente all'origine dell'idea di Borel e della moglie Margurite Appell (1883-1969, figlia di Paul Appell) di creare una rivista nella quale possano esporsi e confrontarsi le idee alla base dei più recenti sviluppi scientifici. Esplicita intenzione dei redattori è inoltre che tali confronti non avvengano tanto su un piano forzatamente tecnico quanto invece filosofico. Ciò allo scopo di mettere in risalto "il movimento" di idee provocato dai progressi della scienza.

Di fatto la vocazione multi-culturale della *Revue* porterà a un repertorio eterogeneo di articoli in settori disciplinari differenti, dalla scienza alla letteratura, dalla politica all'arte. Benché inoltre essa non possa vantare una tradizione consolidata sono molti i nomi di prestigio che interverranno dando il loro contributo[78]. Tuttavia, nonostante le forti motivazioni dei fondatori, la *Revue de*

[77] Cfr. LAURENT MAZLIAK, "Borel, probability and *La Revue du Mois*", *Electronical Journal for History of Probability and Statistics*, 2007, 3, 1: 1-3. Mazliak mette in particolare evidenza come la nascita della rivista avvenga immediatamente dopo le polemiche legate all'affare Dreyfus, e la proclamazione, nel 1905, della legge di separazione tra stato e chiesa. Alla luce di quest'ultimo evento venne alimentandosi un sentimento di contrasto a quello che veniva considerato l'oscurantismo della chiesa cattolica di Roma. Questa tendenza, di cui lo stesso Borel faceva parte, portò a una progressiva crescita di fiducia e di speranze nei confronti del progresso scientifico. Lo spirito della *Revue* è proprio quello di offrire un teatro per il dibattito culturale in cui le idee trovino un terreno di libero confronto.

[78] Cfr. *Ivi*, p.2. Tra i nomi più celebri che collaborano alla rivista si trovano: Paul Painlevé, Felix Le Dantec, Leon Blum. Inoltre proprio sulle pagine della *Revue* trova spazio una breve polemica "italiana" tra Federigo Enriques, all'epoca presidente Società Filosofica Italiana, e Giovanni Vailati. In particolare Enriques precisa, con una lettera invitata alla *Revue* in data 20 febbraio 1907

Mois avrà vita breve e conoscerà un significativo momento di arresto allo scoppio della prima guerra mondiale. Le attività riprenderanno nel 1919, ma dureranno solo pochi anni, fino al '26, anno di pubblicazione degli ultimi volumi.

Per una migliore comprensione e collocazione storica di *Le Hasard* non si può quindi prescindere dal taglio editoriale della *Revue du Mois* e dalle conseguenti finalità che l'articolo si pone. È inoltre necessario precisare che il contributo di Poincaré non è estemporaneo, bensì si inserisce all'interno di un preciso dibattito sul "caso" iniziato dallo stesso Borel nel primo numero della rivista. Non compaiono, tra le lettere della corrispondenza di Poincaré attualmente accessibili, contatti espliciti tra lui e Borel; non si sa dunque se Poincaré sia stato esplicitamente invitato a intervenire nella discussione in atto o seppure egli abbia liberamente scelto di farlo. E certo però che una valutazione più ampia del suo articolo implica un'analisi preliminare del contesto in cui si inserisce.

Come detto, un primo articolo dedicato alla teoria della probabilità e al "caso" viene pubblicato nel 1906 a firma dello stesso Borel[79]. Come riportato da Mazliak, riprendendo le testimonianze contenute nell'autobiografia scritta da Marguerite Appell, l'atteggiamento di Borel verso la trattazione matematica del "caso" si contraddistingue per un'alternanza di amore e odio[80]. Sebbene infatti nel 1914 egli dedichi un libro all'argomento, durante tutta la sua carriera più volte si dichiarerà "disgustato" da questa tematica che, a suo avviso, "guasterà" molto del suo tempo[81]. L'obiettivo dell'articolo di Borel, dichiarato già nel titolo, è quello di offrire una dimostrazione del valore pratico attribuibile al calcolo delle probabilità. Nel fare ciò egli tuttavia resta ben lontano dallo scrivere un elogio del

che l'articolo di Giovanni Vailati dedicato al "mouvement philosophique en italie" e pubblicato sul numero precedente della *Revue* non rispecchia nella sua interezza il dibattito filosofico in Italia ma ne rappresenta al contrario solo una piccola parte, quella cioè di un piccolo gruppo di giovani intellettuali riunita attorno alla rivista "Leonardo". Per l'articolo di Vailati si veda: GIOVANNI VAILATI, "De quelques caractères du mouvement philosophique contemporain en Italie", *La Revue du Mois*, 1907, 3: 162-183. Per quanto concerne invece la lettera di Enriques: ENRIQUES F., "A propos du Mouvement Philosophique en Italie", *Revue du Mois*, 1907, 3: 370-371.

[79] EMILE BOREL, "La Valeur Pratique du Calcul des Probabilités", *La revue du Mois*, 1906, 1: 424-437.

[80] Cfr. MAZLIAK L., "Borel, probability and *La Revue du Mois*" (cit. nota 77) p. 2. In riferimento all'autobiografia di Marguerite Appel, pubblicata con lo pseudonimo di Camille Marabo, si veda: CAMILLE MARABO, *A travers deux siècles, souvenirs et rencontres (1883-1967)* (Paris: Grasset, 1967) in particolare p. 172.

[81] Per quanto riguarda il libro pubblicato nel 1914 si veda: BOREL E., *Le Hasard* (Paris: Alcan, 1914).

calcolo delle probabilità, preoccupandosi invece di mettere in evidenza i limiti del suo impiego come guida pratica nelle scelte. In tutto l'articolo di Borel, Poincaré, seppur citato esplicitamente solo in un'occasione, traspare come punto di riferimento implicito. In *La valeur pratique du calcul des probabilités* il parallelismo con la *Réflexion* di Poincaré appare chiaro. Borel, come già Poincaré, introduce la probabilità attraverso una contraddizione. La probabilità è definita come "lo studio delle leggi del caso". Ciò appare tuttavia come una manifesta contraddizione; come è infatti possibile che il "caso" per definizione avulso da ogni tipo di legalità possa, al contrario, rispettare delle leggi[82]? Questo paradosso, utilizzato come espediente retorico dal quale avviare una riflessione sul significato epistemologico del calcolo delle probabilità, compare già in *Les lois du Hasard* breve saggio pubblicato nel 1870 da Joseph Bertrand (1822-1900) all'interno del suo più ampio *Calcul des Probabilités*[83]. È infatti proprio a partire da questa contraddizione tra "caso" e "legge" che è necessario chiarire la natura e il significato del calcolo delle probabilità. Se però l'intento di Poincaré nell'articolo del 1898 (e vedremo anche in *Le Hasard*) è stato quello di sollevare alcune questioni teoriche rilevanti del calcolo delle probabilità, Borel si preoccupa invece di chiarire entro quali limiti esso possa definire delle regole d'azione. In questo senso le leggi del caso potrebbero configurarsi come degli strumenti ausiliari nell'effettuare scelte in condizioni di incertezza. Borel precisa che la sua analisi non ha alcuna finalità morale. Le leggi del caso, ad esempio, non possono pronunciarsi sulle "ragioni morali" contrarie al gioco. Il punto di vista adottato è piuttosto quello utilitaristico di chi, trovandosi a giocare, deve scegliere una strategia di gioco piuttosto che un'altra. Questo, secondo Borel, è il piano su cui interviene il calcolo delle probabilità. Egli esclude che le leggi del caso, così come

---

[82] Borel scrive infatti: "*Le calcul des probabilités est l'étude des lois du hasard*. On a déjà fait remarquer que cette définition n'explique une contradiction que par une autre contradiction. Si l'on ne comprend pas comment l'on peut parler de *calcul* à propos de *probabilité*, on comprendra encore moins qu'il puisse être question de *lois* à propos du *hasard*", BOREL E., "La Valeur Pratique du Calcul des Porbabilités" (cit. nota 79) p. 424, corsivo dell'autore.

[83] JOSEPH BERTRAND, "Le lois du Hasard" in *Calcul des Probabiltés* (Paris: Gauthier-Villars, 1889) pp. VI-L. Bertrand scrive: "Comment oser parler des lois du hasard? Le Hasard n'est-il pas l'anthitèse de tout lois?", *op. cit.* p. VI. La contrapposizione tra legge e caso diventa quindi il luogo comune da cui prendere le mosse per una trattazione scientifica della probabilità. Nel linguaggio di Bachelard esso potrebbe essere inteso come l'ostacolo epistemologico (legato a un'esperienza primitiva) che è necessario superare per una trattazione scientifica (in senso moderno) della probabilità.

il calcolo delle probabilità costruito a partire da esse, possano diventare una guida sicura nella pratica. Se infatti esse permettono di stimare se le condizioni di una scommessa siano eque secondo un criterio di "speranza matematica", non potranno mai valutare la "convenienza" relativa di una giocata[84]. Quest'ultima, di natura esclusivamente soggettiva, trascende il dominio del calcolo (nota sul valore relativo del calcolo). Le nostre azioni, spiega Borel, sono comunque sempre fondate su considerazioni di carattere probabilistico. A partire dai dati in nostro possesso valutiamo l'evoluzione più probabile delle situazioni in cui ci troviamo, si apre in questo modo, uno squarcio nella certezza deterministica. Borel puntualizza che mentre i nostri calcoli sono precisi e rigorosi, non lo sono le approssimazioni numeriche da cui siamo partiti; è in questa incertezza iniziale che si annida la probabilità e la necessita di considerare le nostre previsioni non come certe ma, al più, molto probabili[85]. Tuttavia, nell'agire, l'abitudine porta a sovrapporre il "molto probabile" al "certo" fornendo, in questo modo, un carattere quasi-deterministico alle nostre azioni le quali sono sempre, anche, previsioni. Il valore pratico del calcolo delle probabilità diventa un duplice valore. Da un lato è una guida che permette di orientarci in situazioni di incertezza, in cui la realizzazione di differenti scenari è contemplata, dall'altro, come già in Poincaré, è l'inserimento nel pensiero scientifico del "dato negativo" di quello che non si

[84] Le considerazioni legate alla speranza matematica possono infatti dirci soltanto se una scommessa è equa oppure no. Al contrario la convenienza della scommessa è data dal rapporto tra la somma giocatae la somma totale che si ha a disposizione. Per questo, secondo Borel, una scommessa può essere vantaggiosa da un punto di vista matematico ma sconveniente per il giocatore che è costretto a investire tutti i suoi soldi. La convenieza quindi, a differenza della speranza matematica, ha un valore marcatamente soggettivo. Per questo il calcolo delle probabilità, per Borel, può orientarci nella scelta ma non la determina.

[85] Cfr. BOREL E., "La Valeur Pratique du Calcul des Probabilités" (cit. nota 79) pp. 431-432. In questo passaggio Borel tocca un aspetto molto importante che si colloca alla base della critica al determinismo. Egli infatti sottolinea come le cifre a partire dalle quali vengono costruiti calcoli "precisi" siano spesso il frutto di approssimazioni. Ciò implica che, nonstante l'esattezza dei processi di calcolo, i risultati ottenuti debbano essere intesi come probabili e non certi. Del resto, questa incertezza intrinseca è determinata dal fatto stesso di ricorrere all'utilizzo di numeri reali. Essi impongono sempre l'esigenza di una approssimazione la quale, a sua volta, apre la strada alla probabilità. Una critica di questo tipo sarà ripresa da una buona parte del pensiero epistemologico contemporaneo e su essa di fonderà demolizione del determinismo già a partire da una prospettiva "classica", prima quindi di aprirsi alle implicazioni della fisica quantistica. Su questi aspetti si veda oltre ai testi di Popper citati a nota 41: ENRICO GIANNETTO, *Saggi di Storie del Pensiero Scientifico* (Bergamo: Bergamo University Press, 2005) pp. 377-398. Qui l'autore, focalizzandosi in particolare sullo scambio epistolare tra Albert Einstein (1879-1955) e Max Born (1882-1870), mette in evidenza come le riflessioni di quest'ultimo possano portare a concludere un'incompletezza (e indeterminazione) di tutte le teorie fisiche.

conosce ma che può influire sul processo che si sta osservando. Il calcolo delle probabilità aiuta la pratica permettendo di utilizzare ciò che si sa, tenendo conto anche di ciò che non si sa. Tuttavia Borel non riduce la regola d'azione al calcolo. Seppure già questo non possa dispensare certezze, l'agire è reso ancora più precario dal sovrapporsi di considerazioni morali e soggettive che però, secondo Borel, non appartengono alla sfera della matematica. Se dunque l'agire si fonda, seppure solo in parte, sul calcolo delle probabilità, rimane da chiarire quando un evento molto probabile possa essere considerato "praticamente" certo. Su questo punto, secondo Borel, subentra un elemento di soggettività che determina le "relatività" delle considerazioni di certezza; queste sembrano perlopiù fondarsi sull'abitudine.

Da Poincaré, Borel riprende la distinzione tra probabilità oggettiva e soggettiva[86] sottolineando come queste, a suo avviso, non possano essere considerate differenti di natura ma esclusivamente di grado. Borel chiarisce meglio quanto intende dire specificando che una "probabilità oggettiva" è una probabilità talmente alta da confondersi, praticamente, con la certezza[87]. Sebbene questa conclusione possa essere tratta dalle argomentazioni di Poincaré, non sembra tuttavia rendere quella distinzione tra distribuzione oggettiva della probabilità e formulazione soggettiva di previsione che invece egli sottolinea nel suo articolo. Borel ha tuttavia il merito di riprendere dall'articolo di Poincaré l'idea che la probabilità oggettiva sia in qualche modo quella che guida la formulazione di una legge o di una condotta pratica. Il procedimento, messo in evidenza da Borel, con cui il calcolo delle probabilità ci guida nell'agire non è diverso da quello, sottolineato invece da Poincaré, utilizzato dallo scienziato nella formulazione delle leggi. Anche in quest'ultimo caso, come nel primo, bisogna però tenere conto di elementi soggettivi.

[86] In particolare Borel cita da *La Science et l'Hypothèse* l'analoga distinzione fatta da Poincaré e di cui si è parlato nelle pagine precedenti.
[87] Cfr. BOREL E., "La Valeur Pratique du Calcul des Probabilités" (cit. nota 79) pp. 433-434. Anche in Borel la probabilità oggettiva è di tipo frequentista. Per questo, ad esempio, lanciando una monetina un milione di volte la probabilità che testa e croce escano un numero di volte pressappoco uguale è talmente alta da essere considerata come certa.

Sempre nella *Revue de Mois*, ma nel 1907, appare un altro breve articolo intitolato *A Propos Du Hasard*[88] scritto da Robert de Montessus (1870-1937). Come viene precisato da una nota a piè pagina, quest'articolo, pur comparendo nello stesso volume in cui è pubblicato anche *Le Hasard*, è giunto alla rivista prima dell'articolo di Poincaré.

Montessus critica le diverse definizioni aprioristiche[89] che sono state date al "caso" insistendo invece sulla sua natura sperimentale. A torto il "caso" può essere visto come un sinonimo della nostra ignoranza, al contrario si deve sempre tenere presente che esso riguarda degli avvenimenti e che il suo studio non poggia su idee a priori, ma sull'indagine sperimentale degli avvenimenti stessi. Queste osservazioni seguono, per Montessus, il principio generale secondo cui le speculazioni metafisiche non possono che andare dalla realtà ai concetti e non viceversa. Suo scopo è quindi quello di chiarire gli elementi sperimentali e successivamente metafisici degli avvenimenti dovuti al caso. Attraverso questo esame sarà possibile a suo parere arrivare a una definizione logica del caso. Il "caso" è dunque un fatto empirico, resta da chiarire le peculiarità di tale fatto. Montessus prende in considerazione una serie di eventi dello stesso tipo, come ad esempio l'estrazione da una bussola di sfere colorate[90]. Se la bussola contiene un numero pari di sfere bianche e nere, è ovvio che una serie molto alta di estrazioni permetterà di dedurre che il rapporto tra le sfere bianche e il totale delle sfere è grossomodo pari a ½[91]. L'approssimarsi a questo rapporto avviene però, come spiega Montessus, in modo irregolare. Generalizzando, egli sostiene che la serie di estrazioni può essere considerata come una classe di avvenimenti che a sua volta si divide in categorie differenti; quella corrispondente all'estrazione di una sfera bianca e quella corrispondente all'estrazione di una sfera nera. L'estrazione delle

---

[88] ROBERT DE MONTESSUS, "A propos du Hasard", *Revue du Mois*, 1907, II: 364-369.

[89] Cfr. *Ivi*, p. 364. In particolare l'autore cita la definizione di Laplace secondo cui il caso non sarebbe null'altro che un termine per indicare la nostra ignoranza e quella di Renouvier che invece spiega il caso richiamandosi alla teoria dei *commencements absolus*. Quest'ultima si colloca all'interno di una revisione della nozione di tempo legata all'esigenza di offrire un'immagine più dinamica della realtà come contrapposta alla staticità della fisica classica. In questa prospettiva i *commencements absolus* si pongono come delle innovazioni radicali, degli istanti in cui inizia l'evoluzione di un fenomeno non riconducibile a quelli precedenti. Per questo viene meno anche l'idea di determinismo e nei *commencements absolus* si vede emergere la casualità.

[90] *Ivi*, p. 365-367.

[91] Ovviamente questo può avvenire a patto che ogni estrazione sia seguita dal reimbussolamento della sfera estratta.

sfere può allora essere definita come un’esperienza in cui il rapporto tra il numero di avvenimenti di una categoria e il numero di avvenimenti totali della classe tende irregolarmente a un limite determinato quando il numero di avvenimenti della classe tende a infinito. Secondo Montessus, l’esperienza di questi avvenimenti risveglia, in noi, “le sentiment de hasard”[92]. Resta solo da chiarire perché il rapporto tra il numero di eventi di una categoria e di una classe tendano a un limite e perché lo facciano in modo irregolare. De Montessus ritiene che la risposta alla prima questione risieda nel fatto che i gesti che determinano gli eventi di una categoria non hanno nessuna relazione con essa; l’estrazione di una sfera da un bussolotto non ha alcuna relazione con il fatto che questa sfera sia bianca o nera. L’irregolarità è invece determinata dall’indipendenza delle diverse estrazioni; in questa condizione infatti nessuna estrazione influisce sulla successiva.

L’aver chiarito questi aspetti, consente a De Montessus di offrire una definizione definitiva di caso: esso consiste nell’assenza di relazione tra le cause che determinano la divisione in categorie di eventi appartenenti a una stessa classe e i tratti distintivi di queste categorie[93]. L’articolo si chiude dunque con una posizione empirista, in cui il caso emerge dagli eventi come “assenza di relazione”. In comune con la definizione classica resta dunque la denotazione di un’assenza. Non si tratta più pero di ignoranza, ovvero di “assenza di conoscenza”, ritenuta da De Montesuss un fattore soggettivo su cui non può fondarsi una definizione rigorosa di caso. Si tratta al contrario di un’oggettiva assenza di relazioni, che emerge dall’esperienza e che induce il “sentimento di causalità”. La posizione di De Montesuss pur fondandosi anch’essa sulla negazione (di relazioni) come elemento costruttivo del caso è permeata di una forte contaminazione positivista. L’esperienza, intesa come acquisizione di dati, è lo strumento attraverso cui è possibile riscontrare la mancanza di relazioni dirette tra gesto ed evento e sancire, così, l’oggettività del caso. In realtà le argomentazioni di De Montessus non si sottraggono all’obbiezione secondo cui l’assenza di relazione può comunque essere causata dall’ignoranza

[92] DE MONTESSUS, “A propos du Hasard” (cit. nota 88) p. 367.
[93] *Ivi*, p. 369.

dell'osservatore; in altre parole non possiamo essere sicuri che il gesto della mano non influenzi il lancio della moneta.

L'articolo di De Montessus ha tuttavia il merito di affrontare, in modo esplicito, la necessità di offrire una definizione chiara del "caso", che non lasci spazio a fraintendimenti e che costituisca un'alternativa valida all'idea che "caso" sia semplicemente un termine per indicare la nostra ignoranza. La stessa intenzione, si vedrà, è alla base dell'articolo di Poincaré del 1907.

4.3.3 Le Hasard

Come si è già avuto modo di accennare, non ci sono pervenute lettere che testimonino un contatto diretto tra Poincaré e un qualche membro della redazione della *Revue de Mois*[94]. Non si può dunque sapere se l'intervento di Poincaré sia stato spontaneo o su invito, né si può capire se la scelta dell'argomento sia stata libera o caldeggiata dalla redazione. Certo è che il "caso" costituisce uno degli argomenti che maggiormente interessa Borel e, con tutta probabilità, uno dei concetti sui quali Poincaré ha avuto modo di riflettere sia nei suoi studi scientifici che nelle sue riflessioni filosofiche.

Si è visto, nella *Réflexion* del 1899, che la probabilità diventa spunto per riflettere sulla costruzione del sapere fisico, portando a mettere in evidenza come la legge dei grandi numeri e il calcolo delle probabilità debbano essere intesi come parte della fisica stessa[95]. Senza di essi, secondo Poincaré, non si darebbe scienza fisica. Nell'articolo del 1899 (ma già in precedenza nelle lezioni sul calcolo delle probabilità) Poincaré si interroga anche sulla necessità di offrire una definizione della probabilità senza però arrivare a formularne una e, come egli stesso dice, ponendo molte questioni senza risolverne alcuna[96].

Anche al centro di *Le Hasard* c'è la necessità di offrire una definizione, quella di "caso". Poincaré affronta dunque lo stesso soggetto di De Montessus, seguendo

---

[94] Tuttavia è necessario sottolineare che Marguerite Appell è figlia di Paul Appell, amico di Poincaré sin dai tempi dell'università e, successivamente, suo biografo. Per questo è ipotizzabile che un contatto tra Poincaré e *La Revue du Mois* possa essersi costituito attraverso questo canale.
[95] SHEYNIN O., "H. Poincaré's Work on Probability" (cit. nota 63) p. 143.
[96] Cfr. POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5) p. 307.

però uno stile ben diverso, volto più a sollevare dubbi che a dispensare certezze. Sempre seguendo lo schema dell'articolo del 1899, Poincaré prende le mosse da una contraddizione, un apparente paradosso. Per farlo utilizza però le parole tratte da *Les lois du hasard*, l'ampia introduzione scritta da Joseph Bertrand al suo *Cacul des probabilités* del 1889[97].

La probabilità, sottolinea Poincaré, è l'opposto della certezza, è ciò che non si sa. Appare quindi paradossale che si possa costruire un calcolo su quello che ignoriamo[98]. Quasi con lo stile di una provocazione, Poincaré riprende nelle prime righe di *Le Hasard* i contenuti dell'articolo del 1899. Seppure indirettamente, utilizzando l'espediente della contraddizione, egli mette ancora una volta in evidenza come le leggi del caso e il calcolo delle probabilità si fondino su ciò che non conosciamo. Il fascino della probabilità risiede proprio nel suo dare spazio all'elemento negativo della conoscenza.

Definire il caso, questa è la priorità che Poincaré individua come essenziale per cercare di risolvere il paradosso enunciato in precedenza. Questo è il punto centrale dell'articolo, la chiave di lettura attraverso cui *Le Hasard* può essere interpretato. Posto quest'obiettivo, Poincaré articola una riflessione che non si limita a offrire una risposta diretta e lineare all'esigenza di dare una definizione del caso. Al contrario si interroga implicitamente sulla possibilità stessa di offrire una tale definizione. Definire il caso significa anche cercare di capire cosa esso abbia rappresentato nella storia della conoscenza, come esso sia già stato definito. La scienza antica è il punto di partenza per Poincaré. La distinzione tra armonia e caso è il punto di partenza all'interno della scienza antica. Da un lato le leggi armoniose, dall'altro i fenomeni casuali. Questi ultimi, a differenza delle prime, denotano gli eventi "ribelli a ogni legge"[99], indeterminabili. Nel mondo del caso non regna l'armonia ma l'indeterminazione, ovvero il caos. I fenomeni casuali sono "ribelli", ostili, denotati negativamente dalla loro opposizione all'armonia delle leggi. Queste ultime non possono fare altro che tracciare i limiti entro cui il

---

[97] Vedi nota 84.

[98] Scrive infatti Poincaré: "La probabilité est opposée à la certitude; c'est donc ce qu'on ignore et par conséquent semble-t-il ce qu'on ne saurait calculer. Il y a là une contradiction au moins apparente et sur laquelle on a déjà beaucoup écrit". POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 59.

[99] *Ibdem*. A proposito degli eventi ritenuti casuali Poincaré scrive: " c'était ceux qu'on ne pouvait prévoir, parce qu'ils étaient rebelles à toute loi".

caso si manifesta. Nella concezione della scienza antica, precisa Poincaré, la definizione di caso è oggettiva: "ciò che era caso per l'uno era caso anche per l'altro, e perfino per gli dei"[100]. Non è più così per la scienza moderna. Questa, sottolinea Poincaré, si fonda sul determinismo assoluto, almeno nel mondo inorganico[101]. Ogni evento ha una causa e se essa non può essere rintracciata è esclusivamente per i limiti dell'intelletto umano. Ne deriva che per la scienza classico-determinista la definizione di caso ha una natura soggettiva: il "caso" non è che un termine indicante la nostra ignoranza[102]. Nel passare dalla scienza antica a quella moderna la casualità è slittata da un piano oggettivo, in cui rappresentava delle proprietà intrinseche dei fenomeni "ribelli", a un piano soggettivo, in cui invece appare come una mancanza dell'osservatore. Da un punto di vista epistemologico ciò induce a pensare che mentre la scienza antica contempla l'esistenza di un elemento casuale appartenente ai processi naturali, questa possibilità viene esclusa dalla scienza moderna. Nella prospettiva tracciata da quest'ultima la legalità della natura, fondata sul principio di ragion sufficiente, non è messa in discussione. Il caso non può allora che apparire come sintomo della debolezza umana, dell'insufficienza dell'intelletto di fronte alla perfezione della natura. Da ciò è ricavabile una visione, forse paradossale, della scienza antica come maggiormente aperta, rispetto alla scienza moderna, alla contingenza e imprevedibilità dei processi naturali, ovvero al loro divenire[103]. Di contro, il

[100] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 53. "Dans cette conception, le mot hasard avait un sens précis, objectif: ce qui était hasard pour l'un, était aussi hasard pour l'autre", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 59.

[101] Poincaré riconosce infatti, in questo passaggio, che il libero arbitrio fa si che il determinismo possa non applicarsi agli esseri viventi. Tuttavia esso rimane intatto per il mondo inorganico. Di fatto quello che Poincaré farà nel suo articolo, seppur indirettamente e in modo implicito, sarà mettere in luce come il determinismo cada anche per il mondo inorganico. Si noti inoltre come questa precisazione risulti funzionale a Poincaré per mettere in chiaro come la sua trattazione non abbia alcuna intenzione di toccare il piano "morale" riguardante appunto la compatibilità tra determinismo e libero arbitrio. In modo, forse più sottile, la critica di Poincaré al determinismo avviene solo sul piano scientifico.

[102] In riferimento a questa definizione Poincaré non può fare a meno di notare che per una mente infinitamente potente, ovvero il demone di Laplace, non solo il termine "caso" non avrebbe alcun senso, ma il caso non esisterebbe. Credo sia importante sottolineare come nella lettura che Poincaré dà del determinismo moderno ciò che viene messo in discussione è l'esistenza oggettiva del caso come elemento esterno al soggetto pensante. In questi termini è possibile riconoscere come *Le Hasard* si ricolleghi alle tematiche che Poincaré tratta nelle sue opere epistemologiche e di cui si è parlato nelle pagine precedenti.

[103] Per una tematizzazione dell'imprevedibilità e del caso come elementi essenziali di una parte della scienza antica si veda: MICHEL SERRES, *Lucrezio e l'origine della fisica* (Palermo: Sellerio, 2000).

determinismo classico, nato dall'esigenza di prevedere il divenire, finisce inevitabilmente per distruggerlo trasformando "l'imprevisto" in un elemento soggettivo[104]. Inoltre mentre "il caso" degli antichi ha valore assoluto non è così per il caso della scienza moderna. Come precisa Poincaré: "ciò che è caso per l'ignorante non lo è più per lo scienziato"[105]. Al soggettivismo si accompagna quindi il relativismo della casualità.

Il caso, tuttavia, non può essere semplicemente ridotto a uno strumento di misura della nostra ignoranza e, allo stesso modo, i fenomeni casuali non possono esclusivamente coincidere con quelli di cui non conosciamo le leggi. Poincaré ritiene pertanto insoddisfacente la definizione di caso data dalla scienza moderna. Non è affatto vero, egli spiega, che un fenomeno osservato e di cui non comprendiamo le leggi venga automaticamente ritenuto casuale. Il non conoscere una legge non implica il credere che essa non esista o non possa essere trovata. A ciò si aggiunge la contraddizione che sorge dal confronto tra la leggi di Mariotte e Gay-Lussac[106] e l'idea di caso come "misura di ignoranza". Come sarebbe infatti possibile, si domanda Poincaré, sostenere che possiamo prevedere un fenomeno (come ad esempio il comportamento di un gas) proprio perché ignoriamo le leggi precise che lo governano? Questa palese contraddizione impone che il caso non possa essere considerato, banalmente, frutto dell'ignoranza dello scienziato.

Secondo Poincaré è necessario cercare una definizione più soddisfacente del "caso" che prenda le mosse da una suddivisione dei fenomeni in "fortuiti" e "non fortuiti". Mentre i primi vengono trattati dal calcolo delle probabilità, i secondi restano del tutto oscuri finché non si siano determinate le leggi che li regolano.

---

[104] Su questi aspetti si veda: EMANUELE SEVERINO, *Legge e Caso* (Milano: Adelphi, 1979).

[105] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 53. "Et même sans sortir de notre faible humanité, ce qui est hasard pour l'ignorant, n'est plus hasard pour le savant", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 60.

[106] Ricordiamo che le leggi di Edme Mariotte (1620-1684) e Joseph Luis Gay Lussac (1778-1850) coinvolgono la temperatura, la pressione e il volume di un gas. La prima stabilisce che in condizioni di temperatura costante il volume di un gas è inversamente proporzionale alla sua pressione. La seconda dice invece che in condizioni di pressione costante il volume di un gas aumenta linearmente con la temperatura (Prima Legge di Gay Lussac). Da essa è poi ricavabile quella che è conosciuta come la Seconda Legge di Gay Lussac secondo cui in condizioni di volume costante la pressione di un gas aumenta linearmente con la sua temperatura. Si noti che tutte queste lette sono fondate su grandezze statistiche come la temperatura e la pressione e che quindi trovano il loro fondamento in una cornice probabilistica. L'impossibilità di monitorare i movimenti delle singole molecole del gas porta a considerare il loro movimento da un punto di vista globale, statistico secondo cui i singoli movimenti, nel complesso, si compensano.

Anche in questo passaggio, le argomentazioni di Poincaré proseguono mettendo in evidenza una contrapposizione, una rottura. I fenomeni fortuiti, secondo una prospettiva che sembra più vicina a quella della scienza antica, appaiono come quelli in cui il caso gioca un ruolo oggettivo. È attraverso essi che Poincaré cerca allora di offrire una definizione migliore di "caso".

Egli riconosce la presenza di una tipologia ampia di fenomeni "fortuiti". Un esempio, tra essi, è quello dell'equilibrio instabile:

> Se un cono poggia sul proprio vertice, sappiamo bene che esso finirà col cadere, ma non sappiamo da quale parte: ci sembra che solo il caso potrà deciderlo. Se il cono fosse perfettamente simmetrico, se l'asse fosse perfettamente verticale, se non fosse soggetto a nessuna altra forza oltre alla gravità, esso non cadrebbe affatto. Ma il minimo difetto di simmetria lo farà pendere leggermente da una parte o dall'altra, e non appena si troverà a pendere, seppure di pochissimo, cadrà precisamente da quella parte. E se anche la simmetria fosse perfetta, basterà una lievissima vibrazione, un refolo d'aria a farlo inclinare di pochi secondi d'arco, il che sarà sufficiente a determinare non solo la sua caduta, ma anche la direzione di quest'ultima, che sarà quella dell'inclinazione iniziale.
> Una causa minima, che ci sfugge, determina un effetto considerevole, del quale non possiamo non accorgerci: diciamo allora che questo effetto è dovuto al caso.[107]

Si è visto nei capitoli precedenti che Poincaré si è già occupato dell'equilibrio instabile, sia per il problema dei tre corpi, che per lo studio dei fluidi in rotazione. Si tratta quindi di un fenomeno a lui ben noto e che è stato al centro dei suoi interessi scientifici. Nel passaggio qui citato l'equilibrio instabile viene fenomenologicamente descritto come l'apparizione di quella che nel linguaggio scientifico contemporaneo verrebbe chiamata una "catastrofe". Tuttavia la

---

[107] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 55-56. "Si un cône repose sur sa pointe, nous savons bien qu'il va tomber, mais nous ne savons pas de quel côté; il nous semble que le hasard seul va en décider. Si le cône était parfaitement symétrique, si son axe était parfaitement vertical, s'il n'était soumis à aucune autre force que la pensateur, il ne tomberait pas du tout. Mais le moindre défaut de symétrie va le faire pencher légèrement d'un côté ou de l'autre, et dès qu'il penchra, si peu que ce soit, il tombera tout à fait de ce côté. Si même la symétrie est parfaite, uné trépidation très légère, un soufflé d'air pourra le faire incliner de quelques secondes d'arc; ce sera assez pour déterminer sa chute et même le sens da sa chute qui sera celui de l'inclinaison initiale. Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 61-62.

prospettiva di Poincaré è ben distante dalle pretese deterministe di Thom[108]. "Una minima causa, che ci sfugge, determina un effetto considerevole"[109], queste parole costituiscono il centro del ragionamento di Poincaré e introducono, nell'analisi del "caso", un elemento innovativo. Da una lettura superficiale potrebbe sembrare che Poincaré faccia ancora riferimento alla tematica, soggettivista, dell'ignoranza. Tuttavia, nelle righe seguenti, egli si preoccupa di chiarire meglio il suo pensiero al fine di evitare dei fraintendimenti. Da quanto detto, precisa Poincaré, si potrebbe pensare che conoscendo con esattezza le leggi dell'universo e il suo stato in un dato istante, se ne potrebbe dedurre con esattezza l'evoluzione negli istanti successivi. In altre parole, si potrebbe ricadere nel determinismo del demone di Laplace. Le cose però non stanno così. Poincaré puntualizza infatti che sebbene le leggi di natura possano essere conosciute con precisione, le condizioni iniziali dell'universo lo saranno sempre approssimativamente[110]. Questa affermazione, che Poincaré non approfondisce, merita di essere analizzata con particolare attenzione. Essa riprende il tema laplaciano dell'ignoranza dello scienziato portandolo però alle estreme conseguenze e svuotandolo, in questo modo, del suo soggettivismo. Come già detto, nella prospettiva determinista, il caso viene

[108] Come infatti nella nota *Querelle du déterminisme*, da un punto di vista epistemologico la prospettiva di Thom si contrappone a quella di Prigogine, che vede nel caso un elemento fondamentale della scienza contemporanea (in particolare nella derivazione delle biforcazioni a partire da fluttuazioni imprevedibili). Come bene sottolinea Jean Petitot l'obiettivo di Thom è quello di offrie una "eidetica descrittivo-geometrica" che cerchi di spiegare il descrivibile che emerge dall'indescrivibile. Thom non rinuncia in questo alla vocazione determinista dello spirito scientifico. Si veda in particilare: A.A.V.V., *La querelle du déterminisme* (Paris: Gallimard, 1990). Il testo raggruppa diversi articoli, scritti da personalità di spicco della scienza e della filosofia francese della seconda metà del Novecento, in cui si confrontano posizioni differenti sul tema del determinismo. La raccoltà è inoltre introdotta da una bel saggio di Krzysztof Pomian che ripercorre la storia del determinismo.

[109] In questa formula si trova una prima formulazione (Poincaré ne darà poche righ dopo una più articolata) quello che oggi viene chiamato principio di Instabilità Esponenziale che viene utilizzato per descrivere l'evoluzione di sistemi sensibili alle condizioni iniziali. La comprensione di un tale principio non è certamente da ricondurre, originariamente, a Poincaré. Senza addentrarci in una questione che meriterebbe una ricerca specifica è sufficiente far notare che tale principio emerge già in Blaise Pascal (1588-1651) che peraltro sappiamo fu tra i pionieri di una teoria della probabilità, in Gottfried Leibniz (1646-1716) e, in epoca più vicina a Poincaré, in Charles Renouvier (1815-1903). Su quest'ultimo autore in particolare si avrà modo di tornare data la sua possibile influenza su Poincaré. Se dunque questo principio appare già nella su formulazione quale può essere l'aspetto innovativo in Poincaré? Credo che esso possa essere rintracciato nel fatto che Poincaré lo utilizza come elemento critico, interno alla scienza stessa, nei confronti dell'ideologia determinista. Con Poincaré, quindi, il principio di instabilità esponenziale viene inglobato nel sapere scientifico come indice del limite stesso di questo sapere se inteso in senso determinista. Poincaré è inoltre il primo a identificare l'applicazione di questo princio nello studio delle condizioni atmosferiche.

[110] Cfr. POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 56.

interamente ricondotto alla sfera soggettiva. Esso non è un elemento oggettivamente rintracciabile all'interno dei fenomeni naturali (il cui divenire è al contrario scandito da una legalità armoniosa e assoluta) o nell'apparato concettuale scientifico attraverso cui questi fenomeni vengono compresi e spiegati. Al contrario, l'affermazione di Poincaré stravolge il significato attribuito all'ignoranza dalla scienza classica. Non si tratta più di grossolanità dei sensi o dell'intelletto, ma di una deficienza sistematica e oggettiva del pensiero scientifico (inteso in senso moderno) applicato alla natura. Le condizioni iniziali di un sistema non possono essere conosciute che approssimativamente perché, nella scienza moderna, esse vengono descritte ricorrendo all'utilizzo dei numeri reali. Affinché lo scienziato possa formulare delle ipotesi, sulla base delle quali individuare le leggi di evoluzione dei fenomeni, è necessario dunque che attui delle approssimazioni, ovvero che consideri i numeri reali, esprimenti le condizioni iniziali del sistema, secondo un dato grado, maggiore o minore che sia, di approssimazione. Ciò fa sì che le condizioni iniziali di un sistema restino indeterminate e indeterminabili in senso assoluto e che, come diversi anni dopo verrà sottolineato da Max Born (1882-1970), già la meccanica classica debba essere considerata come essenzialmente indeterminista e statistica[111].

Per questo si potranno avere delle approssimazioni migliori e quindi delle previsioni più precise, ma per il "caso" rimarrà, sempre e comunque, un margine d'azione. Ciò potrebbe tuttavia essere arginato dal principio di proporzionalità tra causa ed effetto. Alla luce di questo, spiega Poincaré, conoscendo lo stato di un sistema con una data approssimazione, sarebbe possibile conoscere i suoi stati successivi con la medesima approssimazione. In questo modo, pur ammettendo l'esistenza di una "zona d'ombra" nella spiegazione scientifica, si ricadrebbe

[111] Sui lavori di Max Born torneremo nelle pagine successive. Come però si è già accennato essi mirano a dimostrare che, ben prima della fisica quantistica, già la meccanica classia sia essenzialmente in determinista. Si vedano: MAX BORN, "The conceptual Situation in Physics and the Prospects of the future", *Proc. Phys. Soc.*, 1953, 66: 501-513. Questo saggio è contenuto anche in BORN M., *Physik im Wandel Meiner Zeit* (Braunsweig: Friedr. Vieweg, 1957); trad. it. a cura di C. Carrà, *La fisica e il nostro tempo* (Firenze: Sansoni, 1961); BORN M., "Statistical interpretation of quantum mechanics", *Science*, 1955, 122: 675-679, ristampato anche in. BORN M, *Physik im Wandel Meiner Zeit*, cit. Per una analisi storica dei lavori di questi lavori di Born si veda: GIANNETTO E., "Max Born e la nascita della nuova fisica del caos", *Atti del XIII Congresso Nazionale di Storia della Fisica*, a cura di Arcangelo Rossi (Lecce: Conte, 1995) pp. 189-214; GIANNETTO E., "Max Born, il caos e il mito del determinismo meccanicista", in GIANNETTO E., *Saggi di Storie del Pensiero Scientifico* (Bergamo: Sestante 2005), pp. 377-398.

all'interno di una prospettiva determinista; si sarebbe infatti ben consapevoli del grado di approssimazione delle previsioni formulate. Tuttavia, secondo Poincaré anche il principio di proporzionalità tra causa ed effetto va messo in discussione: non sempre l'approssimazione segue un percorso lineare nel passaggio dalla causa all'effetto:

> […] può succedere che piccole differenze nelle condizioni iniziali generino differenze grandissime nei fenomeni finali; un piccolo errore a proposito delle prime genererebbe allora un errore enorme a proposito di questi ultimi; siamo di fronte al fenomeno fortuito.[112]

Queste poche righe sono tra le più citate dell'opera di Poincaré. Come si è già detto, nella maggior parte dei casi esse vengono utilizzate per offrire un esempio "clamoroso" dell'attualità dei suoi lavori scientifici. Egli è sostanzialmente presentato come l'anticipatore del caos, colui che è stato capace di intuire i più moderni sviluppi della matematica contemporanea. Non c'è dubbio che nelle parole di Poincaré sia possibile rintracciare la formulazione del principio di instabilità esponenziale e che ciò avvenga con largo anticipo rispetto a Edward Lorenz (1917-2008) e al resto della matematica contemporanea. Tuttavia non è su questo aspetto che ci si vuole soffermare. Non si crede infatti che la "precocità storica" di Poincaré costituisca l'aspetto più interessante delle sue riflessioni sul caso. Al contrario la modernità di Poincaré è rintracciabile nella sua capacità di cogliere le criticità della scienza moderna affrontandole apertamente e arrivando a offrire riflessioni epistemologiche estremamente sottili. In questa cornice si crede vada interpretata la sua introduzione del principio di instabilità esponenziale, inteso come elemento attraverso il quale è possibile superare la concezione moderna e soggettivista del "caso". Del resto, sul piano storico, alcune formulazioni più o meno esplicite del principio di instabilità esponenziale sono

[112] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 56. "[…] il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 62. In questa formulazione Poincaré mette bene in evidenza come il principio di instabilità esponenziale porti al superamento anche dell'idea di proporzionalità tra causa ed effetto. In particolare l'appossimazione che caratterizza le condizioni iniziali e che può sembrare inizialmente ininfluente finisce per turbare notevolmente l'evoluzione del sistema.

già presenti in autori antecedenti a Poincaré. Un esempio è quello di Charles Renouvier (1815-1903) che nel suo *Esquisse d'une classification systématique des doctrines philosophiques*[113](1885-1886) scrive: "Ora, è provato che le minime forze introdotte, turbando gli stati di equilibrio, hanno il potere di causare le più considerevoli rivoluzioni in un sistema meccanico"[114].

Sempre all'interno della stessa opera, Renouvier esprime la convinzione che il determinismo della scienza moderna non abbia alcuna base scientifica, ovvero che non sia giustificabile se non sulla base di ipotesi e credenze. Questa posizione, e in particolare l'utilizzo di termini come "hypothèses" e "croyance", lascia pensare che ci possa essere stata una qualche influenza di Renouvier su Poincaré. Tuttavia, data l'assenza di prove esplicite, si è costretti a rimanere sul piano delle ipotesi[115].

È invece certo che l'intervento di Poincaré debba essere inserito in un contesto molto più ampio e articolato anziché essere ridotto all'interpretazione di poche righe alla luce degli sviluppi successivi della scienza. Il dibattito sul determinismo, si è già detto, occupa un ruolo di primo piano nel passaggio dal diciannovesimo al ventesimo secolo. Diverse sono le sfumature che esso assume, comprendo un ventaglio di tematiche che spazia dalle scienze fisiche-matematiche (e quindi questioni tecniche) alle questioni etiche e metafisifche riguardanti il libero arbitrio. Poincaré, come molti, isola il terreno del suo intervento, limitandosi a una prospettiva scientifica ed epistemologica. La formulazione del principio di instabilità esponenziale può allora essere ricondotta a una visione critica della meccanica classica, disciplina attraverso la quale il determinismo assoluto è venuto affermandosi come paradigma dominante nell'interpretazione dei fenomeni fisici. Mettendo in discussione tanto la prospettiva soggettivista del caso, quanto il principio di proporzionalità tra causa ed effetto, Poincaré mostra l'inadeguatezza del determinismo meccanico come strumento attraverso il quale

---

113 CHARLES RENOUVIER, *Esquisse d'une classification systématique des doctrines philosophiques* (Paris: Critique philosophique, 1885-1886). Uno dei temi che attraversano quest'opera di Renouvier è la critica al meccanicismo e, in particolare, al principio di conservazione dell'energia che a suo avviso eliminerebbe qualsiasi possibilità d'azione dello spirito e dell'intelletto. Il meccanicismo viene criticato soprattutto nelle sue implicazioni etiche e morali che emergono qualora esso si avvicini alle scienze del viente.

114 Renouvier scrive: "Or, il est prouvé, que les moindres forces introduites, troublant des états d'équilibre, ont le pouvoir de produire les révoulions mécaniques les plus considérables". *Ivi*, vol. I, p. 289; traduzione mia.

115 In realtà è probabile che l'avvicinamento al pensiero di Renouvier possa essere avvenuto, per Poincaré, attraverso la frequenatazione del Circolo di Boutroux.

interpretare i fenomeni fisici. Anche su questo punto egli può essere accostato a Renouvier seppure quest'ultimo articoli la sua critica alla meccanica su un terreno più psicologista. La modernità di Poincaré, ricompresa storicamente e non attraverso interpretazioni date *a posteriori*, va allora ravvisata nella sua capacità di cogliere i limiti epistemologici, prima ancora che tecnici, di una scienza che, nei primi anni del Novecento, si trova ad attraversare una fase di transizione estremamente delicata e destinata a mutarne radicalmente i tratti. Nelle righe di Poincaré non si deve tanto leggere un'illuminazione avveniristica, quanto la consapevolezza di una complessità dei fenomeni naturali (con cui Poincaré si è scontrato in prima persona) che non trova, negli strumenti concettuali della scienza moderna, una piena e adeguata espressione. A ciò si accompagna la consapevolezza dei limiti tecnici dello strumento matematico. Quando infatti Poincaré parla di "piccolo errore" nelle condizioni iniziali e di "grande errore" nella determinazione delle condizioni finali, sembra utilizzare una perifrasi per spiegare la situazione dello scienziato costretto ad arrotondare i dati raccolti a una data cifra decimale, senza tener conto del fatto che il piccolo errore inevitabilmente introdotto in questo modo può crescere esponenzialmente negli stadi successivi.

Un secondo esempio, a cui Poincaré ricorre, è quello della meteorologia. Come ben noto questo è l'ambito in cui, agli inizi degli anni sessanta, il caos riemergerà attraverso gli studi di Lorenz[116]. È quindi legittimo domandarsi se l'interesse per lo studio dei cambiamenti climatici possa essere nato in Lorenz attraverso Birkrhoff, suo insegnante al MIT e studioso profondamente interessato ai lavori di Poincaré[117]. Nel caso della meteorologia, secondo Poincaré, si ha uno degli esempi più chiari di equilibrio instabile. L'impossibilità di determinare le condizioni climatiche in un dato istante con precisione assoluta si traduce nell'ignoranza di fattori in seguito determinanti nell'evoluzione del sistema. Per questo le previsioni climatiche possono estendersi esclusivamente per un breve

---

[116] È all'inizio degli anni '60 che Edward Lorenz, ricercatore del Mit, pubblica tre articoli considerati fondamentali per la matematica del caos. Si tratta di: LORENZ E., "Deterministic nonperiodic flow", *Journal of Atmospheric Sciences*, 1963, 20: 130-141. Sui lavori di Lorenz si veda ad esempio: JAMES GLEICK, *Caos, la nascita di una nuova scienza* (Milano: Rizzoli, 1989, 5ª ed. 2005) in particolare pp. 15-36.
[117] Cfr. GLEICK J, *Caos, la nascita di una nuova scienza* (cit. nota 116) p. 315, nota 8.

lasso di tempo oltre il quale regna l'assoluta impredicibilità. Si noti che, in questo caso, l'accento non è posto tanto sull'incompletezza di informazioni riguardanti il sistema studiato in un dato istante iniziale, quanto sul fatto che non è possibile prevedere in che misura le informazioni "mancanti" influiranno sull'evoluzione di tale sistema; in altre parole è la dinamica del sistema che sfugge. Inoltre la caduta del principio di proporzionalità tra causa ed effetto trascina con sé la caduta della prevedibilità, intesa come fine ultimo del sapere scientifico.

La mancanza di proporzionalità tra causa ed effetto è rintracciabile, secondo Poincaré, anche in altre situazioni come, ad esempio, quella della distribuzione dei pianeti sullo zodiaco (già citata nella *Réflexion* del 1899) e quella del gioco della roulette. Questa, in particolare, risulta interessante in quanto fornisce indirettamente una critica alla definizione di caso data da De Montessus. Si è visto che, secondo quest'ultimo, il "caso" è un concetto empirico e un fenomeno è definito casuale quando è empiricamente verificato che non esiste nessun legame tra gesto ed evento. L'argomentazione di Poincaré mette tuttavia in luce che l'assenza di un tale legame è solo apparente. L'ago della roulette può fermarsi su un settore rosso o nero e, secondo De Montessus, l'accadere di un evento piuttosto che l'altro non ha nessun legame con la spinta inizialmente data all'ago; per questo l'evento è casuale. Poincaré mostra invece come un minimo scarto di intensità tra due spinte successive, possa tradursi nell'occupazione da parte dell'ago di un settore rosso piuttosto che nero. Anche in questo caso un minimo scarto tra le condizioni iniziali si traduce in uno scarto considerevole nelle condizioni finali. In più ciò che determina l'apparizione del "caso" non è l'assenza di relazione tra gesto ed evento, ma, piuttosto, la mancanza di proporzionalità tra causa ed effetto[118].

A questo punto Poincaré interrompe il flusso delle sue riflessioni, inserisce una breve parentesi, una digressione, che spezza la catena di esempi attraverso la quale egli sta cercando di definire il "caso". La digressione non è introdotta. Come spesso capita in Poincaré, essa è semplicemente annunciata, senza che il

[118] In quest'ultimo passaggio Poincaré sembra introdurre quello che oggi è conosciuto come "Caos Deterministico". In altre parole non viene negato un effettivo legame tra antecedente e conseguente ma viene messa in discussione in primo luogo la proporzionalità tra questi due e, di conseguenza, la possibilità di effettuare previsioni. In questi termini viene a corllare l'ideale classico di determinismo che veniva a sovrapporsi alla prevedibilità e calcolabilità mateamatica.

filo del discorso vi si conduca "naturalmente". Il suo inserimento deve allora essere giustificato dall'esigenza di precisare quanto detto in precedenza, dalla necessità di chiarire ciò che può essere frainteso. Sotto questo profilo, lo stile "spezzato" di Poincaré riflette l'affastellarsi dei pensieri che, nel dispiegarsi delle argomentazioni, portano all'emergere di nuove riflessioni. Quest'ultime, spesso, non sono originate da uno svolgimento lineare delle argomentazioni, ma dalla comparsa di intuizioni istantanee. Per questo, l'introduzione dell'instabilità esponenziale tra causa ed effetto porta Poincaré a interrogarsi sul contrario, ovvero sulla mancanza di proporzionalità tra effetto e causa. Tuttavia, prima di arrivare a questo punto è necessario sciogliere un altro nodo, collegato alla stessa questione e situato nel cuore del determinismo classico. Se è possibile dire che il futuro è determinato dal passato, è altrettanto possibile affermare che il passato lo sia dal futuro? Per lo scienziato, la risposta a questa domanda è affermativa; le leggi scientifiche impongono che la relazione tra antecedente e conseguente sia biiettiva[119]. Tuttavia, come spiega Poincaré, può non essere così per il filosofo per il quale ci può essere un solo effetto per una data causa, ma più cause per uno stesso effetto. Per il filosofo, dunque, la relazione tra antecedente e conseguente non sarebbe biiettiva ma suriettiva. Poincaré non si limita a smentire il filosofo, si interroga piuttosto sulle origini di questa osservazione. Secondo il principio di Carnot gli eventi sono irreversibili e l'universo tende verso l'uniformità. L'esempio classico è quello di due corpi, a diversa temperatura, messi a contatto. Dopo un lasso sufficientemente ampio di tempo i due corpi presenteranno la medesima temperatura, e non sarà più possibile determinare quale dei due fosse più caldo e quale più freddo. Anche in questo caso, tuttavia, subentra l'impossibilità intrinseca di determinare con esattezza le condizioni iniziali del sistema. Come infatti nota Poincaré, tra i due corpi rimarrà sempre un minimo scarto di temperatura che, per quanto i nostri strumenti di misura possano essere precisi, non sarà mai completamente rilevabile. In altre parole si sarà sempre constretti a ricorrere a un'approssimazione. Si tratta quindi di un'indeterminazione intrinseca delle condizioni iniziali. In ogni caso, ciò che

[119] Questo non è altro che un'ennesima formulazione del determinismo classico che da un punto di vista matematico si traduce nel principio di esistenza e unicità delle soluzioni. Ogni effetto ha una causa e viceversa.

Poincaré sottolinea, è che a un minimo scarto tra gli effetti può corrispondere un enorme scarto tra le cause[120]. Dunque, anche tra effetto e causa può esserci una mancanza di proporzionalità che conduce, inevitabilmente, all'assenza di un collegamento lineare tra le due. Anche in questo esempio, come nei precedenti, il "caso" non emerge né come ignoranza soggettiva né come assenza di legame tra antecedente e conseguente. L'oggettività del caso si definisce piuttosto nell'impossibilità intrinseca di determinare completamente le condizioni del sistema e nell'assenza di linearità nella catena di eventi che lega il "prima" al "dopo" e viceversa. A ciò, si aggiunge anche l'irreversibilità universale, ovvero il lento ma implacabile cammino dell'universo verso l'uniformità e verso lo smussamento di ogni differenza. L'azione continua di tale irreversibilità, implica necessariamente che venga meno la proporzionalità tra differenze nelle cause e negli effetti e che dunque risulti difficile pensare che ciò che ai nostri occhi appare molto vicino, possa invece essere stato molto lontano nel passato. A questo proposito Poincaré richiama anche un esempio tratto da *Lumen*[121], testo pubblicato del 1872 da Camille Flammarion (1846-1936). Si immagina un osservatore che si allontani dalla terra a una velocità superiore a quella della luce; per lui l'ordine temporale degli eventi si invertirebbe e Waterloo verrebbe prima di Austerlitz[122]. A causa dell'irreversibilità universale, per questo osservatore gli eventi apparirebbero caratterizzati da un costante equilibrio instabile e "[…] la natura gli apparirebbe interamente in balia del caso"[123]. Con questa frase si conclude la digressione di Poincaré. È importante osservare che l'assenza di proporzionalità tra effetti e cause è un fenomeno incontrato da Poincaré nei suoi studi sui fluidi in rotazione; si tratta del caso delle figure di equilibrio. Come visto nel capitolo precedente una figura di equilibrio appare come un punto di intersezione tra due catene causali distinte. A partire da essa, è dunque impossibile determinarne l'origine. Inoltre, le figure d'equilibrio da cui le diverse serie (in

---

[120]Cfr. POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 59.
[121] CAMILLE FLAMMARION, *Lumen* (Paris: Flammarion, 1872, rist.1887).
[122] Molto prima che una analoga metafora fosse usata da Einstein, Camille Flammarion intitola un paragrafo del suo testo *Voyage dans un rayon de lumière* in cui immagina l'ipotetico viaggio di un osservatore sopra un raggio di luce. Per questo osservatore, spiega Flammarion, il corso degli eventi si invertirebbe. Cfr. FLAMMARION C., "Voyage dans un rayon de lumière", *Ivi*, pp. 55-73.
[123] Cfr. POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 59. "[…] la nature entière lui apparaîtrait comme livrée au hasard", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 65.

effetti, le serie possono essere anche più di due) hanno origine sono molto differenti tra loro Questo è un caso in cui un'evoluzione irreversibile mostra all'osservatore degli effetti molto simili originatisi da cause estremamente diverse. Si noti infine che nell'esempio riportato da Poincaré nella digressione così come in quelli descritti in precedenza, ciò che viene messo in discussione è il determinismo della scienza classica, ovvero l'idea che il legame tra antecedente e conseguente possa essere concepito come prevedibile e univocamente determinabile. Poincaré non nega esplicitamente che vi sia un effettivo legame tra differenti stati di un sistema e che, in effetti, ogni stato determini quello successivo. Tuttavia questa determinazione né è determinabile a priori, né possiede i caratteri della linearità. Ciò introduce quello che oggi viene chiamato "caos deterministico", ovvero il riconoscimento che sebbene esista un legame tra diversi stati di un sistema è intrinsecamente impossibile prevedere e determinare univocamente l'evoluzione di tale sistema[124]. Si apre in questo modo una prospettiva epistemologica che certamente sradica l'idea di "caso" da qualsiasi definizione soggettivistica ma che allo stesso tempo non consente di confondere l'oggettività del "caso" con la mancanza di legami tra i fenomeni naturali. L'idea che Poincaré avanza è semplicemente quella di una realtà dinamica, contraddistinta dal divenire, contrapposta all'immagine statica che viene offerta dalla meccanica classica. In questa nuova prospettiva, la rappresentazione dell'evoluzione di un sistema, attraverso l'immagine della successione di stati determinabili e indipendenti, perde la sua efficacia. L'impossibilità, infatti, di determinare in modo assoluto lo stato di un sistema rende impossibile una definizione univoca della sua evoluzione[125].

---

[124] Per una approfondimento sulla nozione di caos deterministico si veda, ad esempio: ANGELO VULPIANI, *Determinismo e Caos* (Roma: Carrocci, 1994) in particolare pp. 13-28. In queste pagine la nozione di caos deterministico viene definita anche alla luce del determinismo classico e della probabilità. Si veda anche: DAVID RUELLE, *Hasard et Chaos* (Paris: Odile Jacob, 1991, rist. 2000) in particolare pp.53-58;

[125] Si ritiene inoltre che la formulazione da parte di Poincaré di una prospettiva di questo genere sia da ricollegare alle influenze filosofiche del cognato Emile Boutroux e degli altri frequentatori del Circolo, in particolare Henri Bergson. Da questo punto di vista Poincaré appare tutt'altro che impermeabile alle critiche mosse al sapere scientifico da parte del pensiero filosofico dell'epoca. In particolare egli sembra comprendere la necessità che la scienza possa essere in grado di cogliere il dinamismo intrinseco della Natura anziché limitarsi a offrirne una visione statica. Nel fare ciò Poincaré si imbatte in problemi epistemologici di notevole spessore che lo obbligano pertanto a trovare una mediazione tra l'esigenza predittiva della scienza(che però rischia di portarla a una visione statica della Natura) e i limiti che questa esigenza ha mostrato.

Chiusa la digressione, Poincaré riprende il discorso da dove l'aveva interrotto, ovvero dalla descrizione di esempi volti a offrire un'adeguata definizione del caso: "Passiamo ora ad altri eventi nei quali vedremo comparire caratteristiche un po' differenti. Esaminiamo anzitutto la teoria cinetica dei gas"[126]. Da un punto di vista meccanico un contenitore pieno di gas può essere visto come un aggregato di molecole che rimbalzano da una parete all'atra del recipiente scontrandosi tra loro. In questo caso gli innumerevoli urti di una molecola ne determinano la traiettoria. Essa però è talmente complessa da risultare imprevedibile. In questo esempio, secondo Poincaré, ciò che colpisce maggiormente non è tanto la "piccolezza" delle cause quanto la loro "complessità". Questo, precisa Poincaré, attribuisce all'instabilità esponenziale un ruolo fondamentale. Dati due urti separati da uno scarto infinitesimo a essi seguiranno due traiettorie radicalmente differenti.

> Di conseguenza, se il primo urto ha moltiplicato la deviazione per un numero molto grande A, dopo *n* urti questa sarà moltiplicata per A^n: la deviazione sarà diventata grandissima non soltanto perché A è grande – cioè perché cause piccole producono effetti considerevoli –, ma anche perché è grande l'esponente *n* – cioè perché gli urti sono molto numerosi e le cause complesse.[127]

La casualità della traiettoria di una molecola di gas risulta dunque dal sovrapporsi di due fattori. Il primo, l'instabilità esponenziale, implica che una minima deviazione si moltiplichi rapidamente di un numero "molto grande" (andamento esponenziale). Il secondo, la complessità, è dato dal fatto che il numero degli urti della molecola è estremamente elevato. Nella definizione di caso si inserisce

---

[126] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 60. "Voici maintenant d'autres exemples où nous allons voir apparaître des caractères un peu différents. Prenons d'abord la théorie cinétique de gaz". POINCARE J.-H., *Science et Méthode*, p. 65. Poincaré, nelle sue ricerche scientifiche, si interessò anche alla teoria cinetica dei gas, di cui, nel 1894 presentò una trattazione più divulgativa. Si veda: POINCARE J.-H., "Sur la théorie cinétique des gaz", *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 1894, V: 513-521, oppure in POINCARE J.-H., *Œuvres*, XI vols. (Paris: Gauthier-Villars, 1916-1956) vol. X, pp. 246-263. Un traduzione italiana, curata da Claudio Bartocci, è inserita in: POINCARÉ J.-H., *Geometria e Caso* (cit. nota 61) pp. 92-113.

[127] POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 60. "De sorte que si le premier choc a multiplié la déviation par un très grand nombre A, après *n* chocs, elle sera multipliée par A^n; elle sera donc devenue trè grande, non seulement parce que A est grand, c'est-à-dire parce que les petites causes produisent de grands effets, mais parce que l'exposant *n* est grand, c'est-à-dire parce que les chocs sont très nombreux et que les causes sont très complexes". POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 65.

dunque un nuovo elemento, quello della "complessità delle cause" (fare nota su biliardo caotico). Poincaré non offre una definizione esplicita e rigorosa di complessità, ma dagli esempi riportati "una legge complessa" o "una causa complessa" appaiono come una legge o una causa non sintetizzabili. Poincaré, ad esempio, descrivendo il caso di un recipiente d'acqua nel quale vengono messi in sospensione dei granelli di polvere, dice: "Il recipiente è solcato da correnti di cui ignoriamo la legge, sappiamo solo che è molto complessa: trascorso un certo lasso di tempo, i granelli saranno distribuiti a caso, cioè uniformemente, all'interno del recipiente. E ciò è dovuto per l'appunto alla complessità di quelle correnti […]"[128]. Le leggi che regolano l'andamento delle correnti sono definite "complesse" in quanto non catturabili, non sintetizzabili in un'unica formula, ciascuna dipende da un numero di variabili estremamente elevato e di dimensioni infinitesime[129]. Risulta dunque impossibile "catturare" il comportamento del gas ricostruendo le singole traiettorie delle molecole e nemmeno è possibile formulare una legge generale a partire dalla quale esse siano ricavabili. Per questo motivo Poincaré ritiene tali leggi complesse. Esempi analoghi mostrano il ruolo della "complessità" nella definizione dei fenomeni casuali; si può considerare la distribuzione delle gocce di pioggia in un acquazzone oppure una miscela di liquidi e polveri. Tutti questi fenomeni, ritenuti unanimemente casuali, sono caratterizzati da una profonda complessità ed è a partire da essa che devono essere spiegati. Un ultimo esempio, su cui Poincaré attira l'attenzione, è quello legato alla teoria degli errori[130]. Una volta prese le misure necessarie per aggirare gli

[128] POINCARE J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 61. "[…] le vase est silloné par des courants dont nous ingnorons la loi, nous savons seulement qu'elle est très compliquée, au bout d'un certain temps, les grains seront distribuès au hasard, c'est-à-dire uniformént, dans ce vase; et cela est dû précisément à la complication de ces courants". POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode*, p. 66. Si noti che il termine "complication" viene tradotto nella versione italiano con "complessità". In effeti Poincaré non sembra mostrare la consapevolezza di una distinzione epistemologica tra i due termini che, solo in seguito, è stata tematizzata da Isabelle Stenger. Si veda: STENGERS I., "Perché non può esserci un paradigma della complessità" (cit. nota 23) in particolare pp. 39-44.

[129] Da questo punto di vista la complessità delle leggi di cui parla Poincaré sembra avvicinarsi all'incompressibilità algoritmica con cui il caos è stato definito in seguito.

[130] Già nella *Réflexion* del 1899, Poincaré dedica un paragrafo alla teoria degli errori. In particolare egli distingue tra errori sistematici ed errori accidentali. L'errore sistematico, si ripete inalterato a ogni misurazione e può essere dovuto all'imprecisione degli strumenti utilizzati. Con il miglioramento di questi, l'importanza dell'errore può però essere ridimensionata. Al contrario gli errori accidentali, dovuti invece all'osservatore, risultano meno semplici da eliminare ed essi possono essere gestiti attraverso l'utilizzo del calcolo probabilistico (in particolare l'applicazione della legge di Gauss).

errori sistematici, resta comunque l'insidia degli errori accidentali, dati dall'accumularsi degli effetti di tanti piccoli errori. In questo caso, precisa Poincaré, non si hanno che piccole cause che danno piccoli effetti. Il principio di proporzionalità è dunque rispettato. Tuttavia, l'elemento di casualità è introdotto dall'elevato numero di piccoli errori e dalla loro complessità, ovvero dall'impossibilità di determinarne la causa per via generale. Questi due elementi concorrono a definire gli errori accidentali come errori casuali.

Complessità e instabilità esponenziale appaiono dunque come i due elementi caratterizzanti il "caso". Secondo Poincaré si può però adottare un terzo punto di vista, seppur "meno importante dei primi due"[131]. In questo modo si apre quella che potremmo definire una seconda digressione, in cui viene presa in esame una terza, possibile, definizione del "caso". In essa Poincaré si avvicina a uno dei temi più presenti nelle sue riflessioni epistemologiche: la scelta dei fatti da parte dello scienziato. La possibilità di effettuare delle previsioni si fonda sull'isolare degli elementi che vengono ritenuti "causa" dell'evento studiato. Nel fare ciò lo scienziato non può abbracciare l'intero universo sebbene, in linea teorica, esso concorra nella sua interezza a determinare ogni singolo evento. Lo scienziato si trova invece costretto a scegliere e, nel farlo, si limita a considerare gli elementi vicini all'evento considerato. Tuttavia, precisa Poincaré: "[…] ci può succedere di aver trascurato delle circostanze che a prima vista ci sembravano del tutto estranee al fatto previsto, alle quali non avremmo mai pensato di attribuire alcuna influenza e che invece, al contrario di ogni previsione, si trovano a svolgere un ruolo decisivo"[132]. Nella divisione fittizia che dell'universo che abbiamo effettuato può capitare che una parte finisca con l'influenzare l'altra. Aggiunge ancora Poincaré: "La nostra debolezza non ci permette di abbracciare tutto l'universo e ci obbliga a tagliarlo a fette. Cerchiamo di farlo nel modo meno artificioso possibile: ciò nondimeno, di tanto in tanto, succede che due di queste

---

[131] Cfr. POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 62. "On peut se placer encore à un troisième point de vue qui a moins d'importance que les deux premiers et sur lequel j'insisterai moins". POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 65.
[132] Cfr. POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 62-63. "Notre faiblesse ne nous permet pas d'embrasser l'univers tout entier, et nous oblige à le découper en tranches. Nous cherchons à le faire aussi peu artificiellement que possible, et néanmoins, il arrive, de temps en temps, que deux de ces tranches réagissent l'une sur l'autre. Les effets de cette action mutuelle nous paraissent alors dus au hasard". POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 68.

fette abbiano delle ripercussioni l'una sull'altra. Gli effetti di questa azione reciproca ci appaiono allora dovuti al caso". Può essere, questa, un terza definizione del caso? Secondo Poincaré non esattamente e, dalla spiegazione che egli ne offre, almeno per un duplice motivo. Egli ritiene, infatti, che l'incrocio di catene causali distinte possa sempre essere spiegato in funzione delle prime due definizioni di caso. In effetti esso può essere motivato sia sulla base della complessità delle cause sia, soprattutto, sulla base dell'instabilità esponenziale. L'incrocio tra catene causali diverse è riconducibile, in gran parte dei casi, a piccole cause, che deviando il "cammino" degli eventi, determinano incroci inattesi. A ciò si aggiunge una ragione di origine differente, più intrinseca a questa terza definizione. In essa, infatti, l'elemento soggettivo è determinante. È a causa della debolezza dell'intelletto umano che l'universo viene "tagliato a fette". L'esistenza di catene causali indipendenti non si dà oggettivamente nei fenomeni, viene piuttosto introdotta dall'osservatore. Ciò comporta che tale distinzione abbia un carattere soggettivo e che eventi separati per l'uno possano non essere tali per l'altro[133]. Il pericolo maggiore di questa terza definizione è dunque quello di riportare il "caso" sul terreno della soggettività e della debolezza dell'intelletto umano. Ciò, oltre a impedire una definizione soddisfacente del caso, implicherebbe una visione statica dei fenomeni naturali, che finirebbe con lo svuotare di senso la nozione stessa di "divenire". Al contrario la presenza di elementi intrinsecamente casuali consente di pensare il divenire dei fenomeni come latore di novità, ovvero di ciò che non può essere anticipato con rigore assoluto. Questa seconda digressione si chiude, dunque, mettendo in evidenza l'insufficienza di questa terza definizione di "caso" e cercando, principalmente, di ricondurla alle prime due.

Messe in luce le proprietà fondamentali del "caso" Poincaré passa ad affrontare la questione con cui ha aperto l'articolo: come è possibile parlare di leggi del caso? Per l'ennesima volta l'argomentazione procede attraverso la messa in luce

[133] Del resto lo stesso Poincaré, come visto in precedenza, ha spiegato che la "creazione" di leggi scientifiche nuove poggia sull'individuazione di legami tra fenomeni considerati, in precedenza separati. Questo porta a pensare che catene causali ritenute inizialmente distinte, e quindi spiegate in ambiti differenti, possano successivamente essere riunite. Si è inoltr visto nel capitolo precedente come, anche da un punto di vista matematico, l'idea di catene causali distinte abbia mostrato dei limiti consistenti.

di una contraddizione, un nodo da sciogliere. La causalità è stata ricondotta all'instabilità e alla complessità ma resta da chiarire in che termini sia possibile vedere in queste due degli elementi fondanti le leggi del caso: come, in altre parole, ciò che è alla base del "caso" possa essere anche alla base di una "legge". Ciò che Poincaré vuole maggiormente mettere in evidenza è che proprio l'esistenza di fenomeni ritenuti casuali permette la formulazione di leggi capaci di generalizzare il funzionamento di sistemi altrimenti indeterminabili. È il caso, ad esempio, della teoria cinetica dei gas. Proprio l'impossibilità di determinare con precisione la traiettoria di ogni singola molecola consente di ritenere queste come distribuite in modo uniforme e di analizzare il comportamento dei gas, nella loro globalità, prendendo come riferimento dei valori medi: si applica, così facendo, la legge dei grandi numeri. Poincaré prende come esempio il gioco della roulette[134]. Si è visto che in esso un piccolo cambiamento nelle condizioni iniziali si moltiplica esponenzialmente portando a risultati estremamente diversi. È dunque possibile immaginare che una data posizione dell'ago della roulette sia determinata a partire da un preciso impulso iniziale a. Poincaré si chiede allora quale sia la probabilità che l'impulso iniziale abbia il valore a. Questo non è possibile saperlo, ma certamente sappiamo che la funzione di probabilità è continua. Ciò significa che, dato un intervallo $[a, a+\varepsilon]$ (con ε piccolo a piacere) la probabilità che l'impulso cada tra questi due valori è pressappoco uguale a quella che esso cada nell'intervallo $[a+\varepsilon, a+2\varepsilon]$: " Le piccole variazioni della funzione sono proporzionali alle piccole variazioni delle variabili"[135]. Dato che però, in funzione dell'instabilità esponenziale, un piccolo scarto tra due cause è all'origine di un grande scarto tra due effetti, si avrà che mentre all'intervallo $[a, a+\varepsilon]$ corrisponde un settore rosso della roulette a $[a+\varepsilon, a+2\varepsilon]$ corrisponde invece un intervallo nero. In base a quanto detto in precedenza la probabilità che l'ago si fermi in un settore rosso o nero è identica e, complessivamente, la probabilità del rosso è uguale alla probabilità del nero. In questo modo, dato un numero di lanci che tende all'infinito i casi in cui l'ago si fermerà sul rosso e quelli in cui si fermerà sul nero saranno ripartiti in modo uniforme. In altre parole, la proprietà di

[134] Cfr. POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 63-65.
[135] *Ivi*, p. 64. "Les petites variations de la fonction sont proportionelles aux petites variations de la variable". POINCARÉ J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9) p. 68.

continuità che caratterizza la funzione di probabilità così come essa viene concepita, rende possibile che fenomeni caratterizzati da instabilità esponenziale obbediscano alle leggi del caso. L'attribuzione di continuità alla funzione di probabilità, costituisce la base stessa su cui fondare le "leggi" del caso e permette di pensare la distribuzione di fenomeni apparentemente aleatori come uniforme. Sulla base di ciò si edifica anche quella che Poincaré già nel 1899 chiama probabilità oggettiva.

Un esempio analogo è legato alla complessità. In quest'ultimo la reiterazione di uno stesso processo, ad esempio il mescolamento di un mazzo di carte, genera uniformità nella probabilità delle serie ottenibili. In altre parole, cause complesse sono all'origine di un risultato semplice. L'uniformità, conclude Poincaré, è alla base del calcolo delle probabilità. Essa è garantita dalla complessità delle cause. Al contrario, se le cause fossero troppo semplici, ovvero se "qualcosa" si mantenesse inalterato[136] lo stato finale del sistema non potrebbe più essere "indipendente" da quello iniziale e verrebbe dunque meno l'uniformità. In conclusione, gli elementi che determinano l'aleatorietà dei singoli fenomeni sono gli stessi che permettono l'emergenza delle leggi del caso. Si è inoltre visto che condizione necessaria per l'apparizione delle leggi del caso è che la probabilità delle cause sia proporzionale all'intervallo che separa una causa dall'altra, ammesso che questo sia molto piccolo. Poincaré torna su questo punto per affrontare quello che viene considerato l'ennesimo paradosso. Nel farlo richiama l'esempio dell'uomo di Flammarion: perché nel suo caso non è possibile parlare di leggi del caso? Perché, risponde Poincaré, verrebbe a mancare proprio la proporzionalità tra probabilità e intervallo all'interno del quale tale probabilità resta costante. Saltando questa condizione, argomenta Poincaré, viene comunque conservata la continuità "analitica" della funzione di probabilità: ovvero a variazioni infinitesimali nelle ascisse corrisponderanno variazioni infinitesimali nelle ordinate. Tuttavia ciò che verrà meno è la continuità "pratica", cioè a variazioni molto piccole nella ascissa non corrisponderanno più variazioni molto piccole nell'ordinata. Ciò implica che, a differenza del caso illustrato in

[136] Con questa espressione Poincaré intende indicare l'eventuale presenza di un integrale uniforme, ovvero una quantità ad esempio l'energia totale, che nell'evoluzione del sistema studiato resta uniforme. Cfr. POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 63-65.

precedenza, la funzione di probabilità possa presentare una curva difficilmente rappresentabile. In altre parole, conclude Poincaré, mentre noi possiamo ammettere che la funzione di probabilità presenti una continuità pratica, non è così per l'uomo di Flammarion. Ciò accade per il fatto che le nostre cause sono frutto di una "storia anteriore", di uno svolgersi degli eventi che contribuisce a livellare le differenze a "colmare" le valli[137]. In questo modo possiamo avere un ventaglio di cause separate da piccoli intervalli proporzionali alle differenti probabilità: si pone dunque la condizione indispensabile per l'emergenza delle leggi del caso. Per l'uomo di Flammarion le condizioni iniziali sono del tutto differenti: non c'è alcuna proporzionalità tra intervallo che separa le cause e probabilità attribuita a esso. Non si dà quindi alcun tipo di continuità. Non sarà quindi possibile, in questo esempio, parlare di leggi del caso. Al contrario, dice Poincaré, vi sarà puro capriccio.

Il "caso" definito da Poincaré ha le sue leggi. In esso, come per l'approccio qualitativo, la rinuncia alla determinazione dei singoli eventi (delle singole traiettorie di una molecola di gas, ad esempio) consente la formulazione di leggi sull'andamento globale di un sistema. Ma può, si chiede Poincaré, il "caso" così definito essere considerato oggettivo? Si è infatti parlato di cause "piccole" e "complesse", ma l'utilizzo di questi termini apre la strada a una prospettiva relativista. Per questo, secondo Poincaré è necessario puntualizzarne il significato. Dire che due cause sono "molto piccole" (ovvero che è molto piccola la differenza che le separa) equivale a dire che nell'intervallo che le separa la funzione di probabilità riamane pressappoco costante e ciò è dato dal fatto che essa è rappresentata da una curva continua, non solo, dice Poincaré, analiticamente ma anche praticamente. Essa cioè è una curva che non presenta un andamento con curve eccessivamente acute. Questa condizione, base per la formulazione delle leggi del caso, è realizzata dall'azione da parte del tempo di un intreccio

[137] Si noti, in questo passaggio, che Poincaré è ben consapevole della dimensione storica dei fenomeni naturali e dell'importanza che a essa deve essere attribuita nel loro studio. Sicuramente questa consapevolezza deriva sia dal secondo principio della termodinamica che dalla scoperta dei fenomeni di "isteresi" il cui studio viene affrontato attraverso l'utilizzo di equazioni integro-differenziali. In ogni caso Poincaré coglie l'importanza che nella scienza contemporanea avrà la nozione di "storia" cosiderata invece esterna al sapere scientifico classico. Anche da questo punto di vista, con tutta probabilità, Poincaré non è immune da contaminazioni filosofiche soprattutto legate all'idea di tempo in autori come Bergson.

complesso di fattori che contribuisce, come visto in precedenza, a livellare le differenze, ad appianare i dislivelli e a far sì che ciò che un tempo era separato da grandi differenze si avvicini sempre più fino a quasi confondersi. L'azione del tempo porta all'uniformità e questa, a sua volta, alle leggi del caso. Da questa prospettiva le "piccole cause" non sono relative all'osservatore, ma al momento storico. Ciò che oggi appare piccolo, domani apparirà piccolissimo: il secondo principio della termodinamica orienta l'evoluzione dei fenomeni nella direzione di una crescente uniformità. Per questo, dice Poincaré, l'espressione "molto piccolo":

> […] cambierà significato quando il mondo sarà diventato più uniforme, quando tutte le cose si saranno mescolate fra loro ancora di più. Ma allora gli uomini non potranno probabilmente più vivere e dovranno lasciare il posto ad altre creature: debbo dire molto più piccole e molto più grandi? In questo modo, il nostro criterio, che rimane vero per tutti gli uomini, mantiene un suo significato oggettivo.[138]

Con queste parole Poincaré introduce una tematica di estrema attualità nel dibattito filosofico dell'epoca: la contingenza dei fenomeni naturali. In riferimento a ciò, la definizione di "piccola causa" non può essere rapportata all'osservatore. Poincaré sembra voler fugare ogni dubbio su ciò: l'aggettivo "piccola" non è relativo alla sensibilità dell'osservatore. Al contrario esso entra in relazione con l'evoluzione storica delle leggi di natura e il suo significato si chiarisce al loro interno. In questi termini, l'espressione "piccole cause" si fa portatrice del lento cammino verso l'uniformità dell'universo, cammino scandito da un processo storico irreversibile. Per questo ciò che ieri era "grande" oggi è "piccolo" e domani sarà "piccolissimo". Tuttavia, quando l'uniformità avrà guadagnato terreno, probabilmente non esisterà più nemmeno un uomo (almeno come noi lo intendiamo) che possa rilevare questi cambiamenti. In questa affermazione traspare l'idea di una profonda contingenza dell'universo così come lo

[138] Cfr. POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 63-65. "[…] il changera des sens quand le monde sera devenu plus uniforme, que toutes le choses se seront mélangées plus encore. Mais alors sans doute les hommes ne pourront plus vivre et devront faire place à d'autres êtres; dois-je dire beaucoup plus petits ou beaucoup plus grands? De sorte que notre critérium, restant vrai pour tous les hommes, conserve un sens objective", POINCARE J.-H., *Science et Méthode* (cit. nota 9), p. 76.

conosciamo. A ciò si aggiunge la contingenza dell'uomo che, seppur osservatore, non può essere considerato come "esterno" all'universo ma, al contrario, ne è parte integrante. Questa concezione apre le porte a una visione leibniziana di completa solidarietà tra le parti dell'universo, nella quale il minimo cambiamento di una di queste si ripercuote inevitabilmente su tutte le altre. L'uomo, così come noi lo intendiamo, può dunque essere spettatore solo di un universo come quello che si presenta nelle condizioni attuali. Solo all'interno di esso si creano le condizioni essenziali di esistenza dell'*uomo-osservatore*[139]. Cambiate queste condizioni, fatto un ulteriore passo verso l'uniformità, si potranno aprire nuove possibilità per altre "creature" ma non per l'uomo, la cui esistenza è strettamente dipendente dal sussistere delle condizioni attuali. In conclusione l'uomo osserva questo universo anche perché non potrebbe osservane alcun altro. La profondità dell'idea di contingenza contenuta in questa affermazione si unisce alla convinzione che lo scienziato-osservatore non possa in alcun modo essere considerato come un elemento esterno al sistema osservato.

Resta in ultimo da chiarire in che termini anche la "complessità delle cause" possa avere un valore oggettivo. Da un lato c'è una spiegazione di tipo analitico. Quando le equazioni differenziali che descrivono l'evoluzione di un sistema ammettono un integrale uniforme, ovvero l'esistenza di un invariante, allora esse sono troppo "semplici", non ammettono l'esistenza di leggi del caso a cui il sistema sia riconducibile. In linguaggio epistemologico si può dire che, nella sua evoluzione, il sistema porta sempre con sé qualcosa delle condizioni iniziali che resta invariato. Dunque, in un qualsiasi istante t, lo stato del sistema non può essere considerato indipendente da t_0 (fissato come istante iniziale) e per questo non si possono applicare le leggi del caso. Di conseguenza la complessità delle cause è matematicamente espressa dell'inesistenza di un integrale uniforme: è questo il caso del problema dei tre corpi.

[139] Da un punto di vista esclusivamente epistemologico, Poincaré sembra qui anticipare l'idea di sistema che verrà poi sviluppata dall'Epistemologia della Complessità nel Ventesimo secolo. In questa prospettiva non si può parlare di un osservatore esterno al sistema osservato (ad esempio l'uiverso) ma l'osservatore è parte stessa del sistema. L'universo di cui parla Poincaré non è qualcosa di esterno all'uomo che tenta di comprenderlo, al contrario egli ne fa parte. Per questo motivo l'universo che osserviamo non è l'unico concepibile, ma l'unico che possiamo osservare in quanto uomini. Un cambiamento nelle sue condizioni attuali (del tutto compatibile al secondo principio della termodinamica) precluderebbe quindi la possibilità di esistenza dell'umanità.

Oltre a questa spiegazione analitica, la complessità delle cause resta oggettiva nell'esistenza, intrinseca e non contingente, di un limite oltre il quale né l'uomo né i suoi strumenti di misura possono andare. L'impossibilità di dissipare fino in fondo la complessità di una miscela di liquidi o di un composto gassoso crea un terreno oggettivo su cui la "complessità delle cause" si fonda.

La relatività della "complessità" non è da ricondurre alle potenzialità dell'osservatore quanto, piuttosto, a diversi gradi di complessità. Poincaré mette indirettamente in evidenza che l'idea di un osservatore capace dissipare completamente la complessità delle cause non ha alcun valore fisico.

Egli argomenta in questo modo l'oggettività degli elementi costitutivi del caso e, di conseguenza, del caso stesso. A differenza della concezione classica, il caso non viene più considerato un nome attribuito all'ignoranza dell'osservatore, esso trova al contrario fondamento nei fenomeni ed emerge come limite strutturale dei mezzi impiegati per la comprensione di questi stessi fenomeni. La condizione di "ignoranza" in cui l'uomo sembra trovarsi nel tentativo di spiegare i fenomeni fisici, non viene più considerata una contingenza risolvibile che non riguarda degli strumenti teorici e pratici della scienza. Al contrario il limite della conoscenza è intrinsecamente appartenente a questi stessi strumenti senza i quali, tuttavia, non potrebbe esservi scienza. A differenza del determinismo classico, il nuovo "determinismo caotico" non ha più come modello ideale una determinazione assoluta dei fenomeni. Essi vengono al contrario ricompresi nel loro divenire non lineare. Si costruisce così una nuova prospettiva epistemologica capace di considerare la novità come elemento oggettivamente caratterizzante l'evoluzione dei fenomeni e non elemento a essi estraneo e riconducibile alla limitatezza dell'osservatore.

Tuttavia, una volta definito il "caso" all'interno delle scienze naturali Poincaré si chiede se le sue leggi possano trovare applicazione nelle scienze morali. La storia offre a Poincaré un esempio calzante. Come lo scienziato, lo storico si trova a effettuare delle scelte, a dare un preciso taglio storiografico alle sue ricerche: anche lo storico si trova costretto a "fare a fette" la storia. Nella ricostruzione storica, i fatti scelti dallo storico vengono messi in relazione in modo tale che gli antecedenti spieghino i conseguenti, secondo una rigida catena deterministica. Se un determinato fatto, non trova spiegazione tra i suoi antecedenti, si dirà allora che è dovuto al caso. Un fatto di poco conto, non riportato dagli storici, può essere a fondamento di un evento importantissimo nel secolo successivo. La nascita di un grande uomo che ha segnato con le sue azioni lo svolgimento della storia è un altro esempio di fenomeno casuale. In entrambi questi casi a piccole cause corrispondono grandi effetti. Come sottolinea Poincaré, sarebbe bastato davvero poco perché Napoleone non nascesse e la nostra storia fosse dunque completamente diversa. In ogni caso, per lo storico come per lo scienziato, la possibilità di una spiegazione completa è impensabile. Non solo, infatti, è impossibile avere una conoscenza assoluta e completa di tutto ciò che accade ma è impossibile comprendere secondo che criteri i fatti si combineranno tra loro determinando l'emergenza di eventi imprevedibili a partire dai soli antecedenti[140]. Se dunque, par quanto concerne la storia, si può parlare di "caso" inteso come visto in precedenza, non è invece così per le scienze morali, dove dunque è impensabile un'applicazione delle leggi di probabilità. Nelle scienze morali, infatti, le cause non sono sufficientemente complesse e dunque il conseguente non può essere considerato come indipendente dall'antecedente. In una giuria, riunita per emettere un verdetto, molti fattori entrano in gioco: tuttavia qualcosa resta immutato, l'attitudine delle persone a lasciarsi influenzare, ad esempio[141].

[140] Il riferimento fatto da Poincaré al "caso" come elemento di cui è necessario parlare nella ricerca storica può essere ricondotto a quanto analogamente dice Pascal nei suoi *Pensées*. Che gli eventi della storia possano essere considerati casuali è, secondo Poincaré, un elemento comune alla ricerca storiografica e scientifica. Credo che meriti particolare attenzione questo accostamento che sancisce un ulteriore avvicinamento tra storia e scienza. Lo studio dei fenomeni naturali, cosi come quello degli eventi umani, viene visto da Poincaré come regolato dalle stesse dinamiche. Nell'argomentazione di Poincaré sembrerebbe quasi che il caso costiuisca un elemento di avvicinamente della ricerca storiografica a quella scientifica. In realtà, è con tutta probabilità Poincaré ne aveva una qualche consapevolezza, quello che accade è esattamente il cotrario. La rigida divisione tra scienze empiriche e scienze umane sembra cadere non perché quest'ultime hanno raggiunto il grado di perfezione della prime, ma al contrario perché le prime hanno scoperto la condivisione di elementi (e il caso è uno di questi) che hanno sempre caratterizzato le seconde. I fenomeni naturali, come le gesta umane, hanno una loro storia e sulla base di questa devono essere compresi e valutati. Ciò comporta la valutazione della contigenza dei fenomeni naturali e il riconoscimento della unidirezionalità del tempo scientifico. Per questo la dinamica dei sistemi naturali, così come quella dei sistemi umani, spesso non è lineare e l'emergenza di aspetti indeducibili dalle condizioni iniziali non è più un elemento da esorcizare ma da studiare.

[141] Come sottolinea Bartocci, Poincaré fa qui riferimento alla sua partecipazione a una commissione nominata dalla Corte di Cassazione per fare un esame scientifico del lavoro di Alphonse Bertillon, accusatore si Alfred Dreyfus. Tuttavia la commisione concluse che un applicazione del metodo probabilistico alla risoluzione delle questioni sottoposte non era possibile. Cfr. POINCARÉ J.-H., *Scienza e Metodo* (cit. nota 9) p. 74, nota 5.

Poincaré dedica l'ultimo paragrafo del suo articolo al tentativo di offrire risposta per un'ultima questione. In che occasioni lo scienziato può attribuire i risultati da lui ottenuti a una causa semplice piuttosto che al caso? Provare un'ipotesi, da un punto di vista strettamente formale, implicherebbe una successione infinita di verificazioni. Ciò non è possibile da un punto di vista pratico, quindi lo scienziato si accontenta di effettuare un numero finito di prove e se esse rispettano i risultati attesi si dirà che l'ipotesi è verificata. In questo caso non si pensa che i risultati ottenuti siano dovuti al caso, poiché dei risultati semplici, ad esempio l'ottenimento di una cifra tonda nei calcoli, sono ricondotti a cause semplici. Si ritiene infatti molto più probabile che queste ultime generino un risultato semplice, piuttosto che quest'ultimo sia frutto del caso, ovvero di un insieme di cause complesse. Al contrario nel caso di un risultato complesso, delle cause semplici non avranno più probabilità di averlo prodotto, rispetto a delle cause complesse. Semplicità e complessità rappresentano dunque due aspetti complementari di cui lo scienziato deve necessariamente tener conto. La complessità, inoltre, non può essere dissolta in una semplicità nascosta agli occhi dello scienziato, ma deve al contrario essere ricompresa come elemento oggettivamente presente dei fenomeni; la complessità non è una mera complicazione. Nel fare ciò la prospettiva epistemologica di Poincaré abbandona gli schemi rigidi del determinismo classico a favore di una nuova forma di determinismo "caotico" in cui il futuro non è ridotto all'immagine di un presente non ancora realizzato e il divenire dei fenomeni è accettato nella sua autenticità.

4.4 *Un pensiero controverso*

Parafrasando un'espressione di Poincaré, si potrebbe dire che nelle pagine precedenti si sono sollevate molte questioni senza peraltro risolverne alcuna. Del resto il pensiero di Poincaré, privo di una qualsiasi forma di esposizione sistematica, si presenta di difficile interpretazione e diversi passaggi appaiono ambigui se non contraddittori.

Nelle pagine precedenti si è tentato di comprendere in che termini l'interesse scientifico di Poincaré per il problema dei tre corpi possa aver influito sul suo pensiero filosofico conosciuto, oggi, con il nome di convenzionalismo. Quest'operazione, tuttavia, sarebbe risultata inutile se non si fossero considerate anche le pressioni filosofiche dell'ambiente francese con cui Poincaré viene a contatto frequentando il Circolo del cognato Emile Boutroux[142].

Su queste basi si è dedotta l'immagine di un "pensiero in equilibrio", ovvero di un pensiero costantemente teso da un lato a rispondere alle accuse di nominalismo e di "bancarotta della scienza", dall'altro a salvaguardare il valore della scienza pur nel riconoscimento dei suoi limiti.

Nel fare ciò Poincaré affronta i grandi temi del pensiero filosofico ed epistemologico arrivando, ad esempio, a cogliere l'importanza di una rivalutazione culturale della scienza che sfati il mito di una scienza pura, priva di preconcetti e credenze. Nelle pagine delle sue opere epistemologiche, infatti, Poincaré mette bene in evidenza l'importanza che hanno le credenze di "semplicità" e "armonia" nella costruzione del pensiero scientifico. L'idea che la scienza poggi su un sostrato di credenze extrascientifiche è ben presente a Poincaré e con tutta probabilità il problema dei tre corpi ha giocato un ruolo nella formazione di questa convinzione.

Si è inoltre visto che Poincaré arriva anche a una riformulazione di alcuni concetti fondamentali del sapere scientifico, come quello di realtà oggettiva o di verità e, proprio in riferimento a questi, sono sorte alcune ambiguità interpretative.

In particolare ciò che resta di difficile comprensione è se le relazioni, unica realtà oggettiva espressa dalle teorie fisiche, possano essere considerate come ontologicamente indipendenti dall'osservatore (nella fattispecie dallo scienziato). Da un lato, infatti, sembrerebbe di sì. Poincaré stesso, in *La Science et*

---

[142] Tradizionalmente il pensiero epistemologico di Poincaré è stato interpretato attraverso i suoi interessi per le teorie fisiche di Hamilton, Maxwell e Hertz. In particolare proprio nella fusione tra ottica ed elettromagnetismo attuata da Maxwell e nell'abbandono di un realismo ingenuo che cerchi di individuare l'essenza degli oggetti fisici, è stata visto l'elemento centrale del convenzionalismo fisico di Poincaré. Tuttavia ciò che questa riscotuzione storica, senz'altro pertinente, non prende in esame è l'influenza che le frequentazioni filosofiche di Poincaré possono avere avuto sul suo pensiero scientifico. A questo proposito è possibile valutare gli scritti di Poincaré come delle risposte a precise accuse che la cultura filosofica francese dell'epoca muove nei confronti del pensiero scientifico. Per quanto concerne la ricostruzione storica di cui si è parlato si vedano: GIEDYMIN J., "On the origin and significance of Poincaré's conventonalism" (cit. nota 15); STATHIS PSILLOS, "Poincaré's Conception of Mechanical Explanation" in JEAN-LUIS GREFFE, GERHARD HEINZMANN, KUNO LORENZ (eds.), *Henri Poincaré: science et philosophie* (Berlin: Akademie Verlag, 1994) pp. 177-191. Una lettura di questo tipo è stata più recentemente ripresa in: ELIE DURING, *La Science et l'hypothèse* (Paris: Ellipses, 2001) in particolare pp. 72-80.

l'Hypothèse, nel riaffermare il valore della scienza come forma di conoscenza oggettiva, scrive: "[…] ciò che la scienza può attingere non sono le cose in sé, come ritengono i dogmatici ingenui, ma solo le relazioni tra le cose. Al di fuori di tali relazioni non c'è realtà conoscibile"[143]. Sulla base di questa affermazione (e di altre simili) è nata l'interpretazione secondo cui Poincaré adotterebbe una sorta di *realismo strutturale*. Elie Zahar spiega infatti come Poincaré avrebbe fatto sua l'idea secondo cui le relazioni espresse in una teoria empiricamente consolidata rispecchiano la struttura ontologica della realtà[144]. Secondo questa visione, la struttura matematica di un sistema scientifico riflette globalmente la realtà, senza che però vi sia una corrispondenza tale per cui ogni componente del sistema riflette un elemento indipendente. La lettura data da Zahar non si limita però a un realismo ingenuo secondo cui vi sarebbe una netta divisione tra mente e realtà. Al contrario il cervello e la mente vengono concepiti come elementi integranti quella realtà che essi si prefiggono di spiegare e risultando regolati dalle stesse leggi: da ciò deriva la possibilità di cogliere parzialmente queste leggi senza che però esse possano mai venir comprese fino in fondo. Questa lettura solleva tuttavia dei problemi interpretativi. Con tutta probabilità, la precisazione fatta da Zahar è fondata sulla presenza, nell'opera di Poincaré, di affermazioni che sembrano contraddire quella riportata qui sopra. Come si è già visto, in *La Valeur de la Science* Poincaré scrive: "Riassumendo, la sola realtà oggettiva sono i rapporti delle cose, da cui risulta l'armonia universale. Senza dubbio, questi rapporti, questa armonia non potrebbero concepirsi al di fuori di uno spirito che li pensa o li sente. Ma essi sono nondimeno oggettivi perché sono, diverranno o resteranno comuni a tutti gli esseri pensanti"[145]. I rapporti delle cose sono quindi "l'unica realtà oggettiva" ma, come specificato poco dopo, essi sono inconcepibili al di fuori di uno spirito che li pensa o li sente. È ancora verosimile credere che le

[143] POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5) p. 5. "[…] mais ce qu'elle peut atteindre, ce ne sont pas les choses elles-mêmes, comme le pensent les dogmaitistes naïfs, ce sont seulement les rapports entre les choses; en dehors de ces rapports, il n'y a pu de réalité connaisssable". *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5) p. 4.
[144] Cfr. ELIE ZAHAR, *Poincaré's Philosophy, from Conventionalism to Phenomenology* (Chicago: Open Court, 2001) in particolare pp. 37-64.
[145] POINCARÉ J.-H., *Il valore della scienza* (cit. nota 9) p. 194. "En résumé, la seule réalité objective, ce sont les rapports des choses d'où résulte l'harmonie universelle. Sans doute ces rapports, cette harmonie ne sauraient être conçus eh dehors d'un esprit qui les conçoit ou qui le sent. Mais ils sont néanmoins objectifs parce qu'ils sont, deviendront, ou resteront communs à tous les êtres pensants". POINCARE J.-H., *La valeur de la science* (cit. nota 9) p. 184.

relazioni espresse dalle leggi scientifiche riflettano l'organizzazione ontologica di una realtà indipendente dalla mente? Probabilmente è per rispondere a questo interrogativo che Zahar avanza l'ipotesi di un realismo strutturale in cui la mente è parte della realtà che tenta di spiegare. Tuttavia questa posizione si scontra con altri problemi. L'idea infatti che il cervello e la mente, come dice Zahar, non debbano essere concepiti come esterni alla realtà che tentano di descrivere ma ne facciano piuttosto parte sottomettendosi alle sue leggi, presuppone comunque l'indipendenza di queste leggi e una loro dimensione ontologica che trascende il soggetto. In altre parole nella prospettiva di Zahar le leggi esistono indipendentemente dal soggetto il quale, anzi, è a loro sottomesso.

Ciò che resta però di difficile interpretazione è il significato che Poincaré intende attribuire all'impossibilità di concepire le relazioni (e l'armonia che esse esprimono) al di fuori di uno spirito che le possa pensare. Da un lato un'affermazione di questo tipo potrebbe essere accostata ad altre formulate da Poincaré e che sono state interpretate come uno sbarramento alla metafisica da parte dello scienziato francese. Dall'altro si può invece vedere in queste parole una precisa difesa del pensiero scientifico che si oppone ai suoi detrattori e a coloro che vedono nella scienza esclusivamente un sapere statico, inadeguato a comprendere la dinamicità che invece caratterizza i fenomeni naturali[146]. Poincaré, consapevole della pertinenza di queste critiche e dei limiti che il pensiero scientifico moderno ha mostrato, non condivide tuttavia l'idea di una forma di conoscenza alternativa a quella del pensiero discorsivo-scientifico. Esso solo, applicato allo studio dei fenomeni, è in grado di farci cogliere le relazioni che sembrano regolarli. Secondo la lettura bachelardiana di Elie During[147], Poincaré andrebbe così ricompreso all'interno di quel superamento dell'ostacolo sostanzialista che segna la scienza e l'epistemologia di fine Ottocento e che individua nelle relazioni il vero contenuto delle teorie scientifiche.

[146] Come si è già avuto modo di precisare nelle pagine precedenti, la passione di Poincaré per la "controversia filosofica" unita alla profonda amicizia che lo lega a Emile Boutroux, lo conducono a entrare in contatto con l'ambiente filosofico francese dell'epoca. Per questo le prospettive critiche di Le Roy, Bergson e dello stesso Boutroux fanno parte del pensiero epistemologico di Poincaré e sebbene la sua posizione si distanzi da quella di questi autori ne comprende comunque degli aspetti.

[147] Cfr. DURING E. *La Science et l'hypothèse* (cit. nota 142) pp.78-80.

Tuttavia, per quanto sia condivisibile l'interpretazione secondo cui Poincaré vedrebbe nelle relazioni il contenuto essenziale delle teorie fisiche, non è invece scontato dedurre che la sua prospettiva dia a tali relazioni un valore ontologico. Al più si può dedurre che i fenomeni naturali non possono essere studiati se non attraverso un pensiero discorsivo che li concepisce in termini relazionali. L'approccio intuitivo sostenuto da autori come Bergson è limitante, precisa Poincaré, perché non può generare una forma di conoscenza condivisibile, essendo esso precluso a qualsiasi forma discorsiva.

Alla luce di quanto detto finora si può capire perché, secondo Poincaré, le relazioni non sarebbero concepibili al di fuori di uno spirito che le pensa. Questa posizione sintetizza inoltre la forte tensione che attraversa i suoi scritti. Da un lato la necessità di giustificare i limiti del sapere scientifico, dall'altro l'esigenza di difenderlo in quanto unica forma possibile di conoscenza. Poincaré riconosce l'esistenza di una realtà indipendente dal pensiero, ciò di cui è però consapevole è che il pensiero si rapporta a essa in termini relazionali. Il tentativo di individuare delle leggi e delle regolarità è prova di ciò.

Come si è visto, nell'introduzione di *La Science et l'Hypothèse*, Poincaré sottolinea che le convenzioni sono dei decreti che si impongono alla "nostra scienza" ma non alla natura. Non sembra insomma che egli consideri lecito attribuire alla natura quella legalità che appartiene piuttosto alla mente umana. Sicuramente le leggi hanno una conferma empirica, certamente esse poggiano su dei processi reali, ma da ciò non si può concludere la loro realtà ontologica[148]. Seguendo le argomentazioni di Poincaré non si può parlare di leggi che scandiscono i processi naturali, ma di leggi "umane" che cercano di comprendere i processi naturali. Come visto nel primo paragrafo è in questa cornice che si inserisce la "realtà oggettiva" di cui Poincaré parla e che di fatto si rivela come

[148] In altre parole dal successo predittivo delle leggi non è legittimo concludere l'esistenza reale delle relazioni che esse descrivono. Tuttavia le relazioni matematiche non sono né il frutto di un'invenzione arbitraria dello scienziato (quindi non si deve cadere nel nominalismo) né semplici strumenti predittivi. Esse rappresentano lo sforzo del pensiero di comprendere i processi naturali. Tale sforzo è però per sua natura sempre approssimato e da ciò deriva l'impossibilità da parte sua di una comprensione definitiva dei fenomeni, anche in termini strutturali. L'invarianza è un elemento centrale nella conoscenza scientifica e l'esperienza (per definizione mediata dai sensi) conduce lo scienziato a scoprirla nella Natura. Anche in questo caso tuttavia, la legittimità di ragionare in termini di rapporti invarianti non implica una loro esistenza reale in senso rigoroso. Essi derivano piuttosto dalla teoricizzazione che la scienza edifica a partire dall'esperienza e sulla base della quale l'esperienza stessa è costruita.

una forma di invarianza intersoggettiva. Al di fuori delle relazioni non c'è, per Poincaré, "realtà conoscibile" poiché il pensiero razionale-discorsivo non può conoscere se non in termini relazionali. Esse inoltre costituiscono la realtà oggettiva che è permesso conoscere in virtù di quell'invarianza che le rende comuni a più esseri pensanti. Per questo stesso motivo le relazioni sono per Poincaré il nucleo duro delle teorie scientifiche che rimane invariante nel passaggio da una teoria all'altra.

L'invarianza delle relazioni è stabilita dal permanere delle stesse equazioni differenziali e rappresenta l'essenza teorica e matematica con cui il pensiero scientifico moderno si rapporta alla realtà. Si noti inoltre che i principi su cui vengono costruite le teorie fisiche si sottraggono in Poincaré alla verificazione empirica. Ciò tuttavia non li rende inattaccabili; essi al contrario verranno sostituiti quando perderanno la loro fertilità predittiva ovvero quando, usando le parole di Poincaré, "la relazione affermata non è più reale"[149]. Questa affermazione lascia emergere una concezione quantomeno anomala di "realtà". Cosa può infatti significare che ciò che prima era reale ora non lo è più? In che termini i confini della realtà possono essere ridefiniti? In generale una concezione così elastica della realtà non sembra adattarsi pienamente a un realismo strutturale. L'idea che le relazioni espresse matematicamente dalle equazioni differenziali possano rispecchiare delle leggi reali ontologicamente, lascia spazio a una prospettiva in cui le relazioni sono la modalità stessa con cui il pensiero scientifico moderno cerca di comprendere la realtà[150]. Per questo delle relazioni considerate reali possono smettere di esserlo quando non sono più utili a effettuare

[149] POINCARÉ J.-H., *La Scienza e l'ipotesi* (cit. nota 5) p. 249. Poincaré scrive a proposito della possibilità di invalidare per via indiretta un principio: "comment donc serons-nous avertis quand il aura atteint toute l'extension qu'on peut légitimement lui donner? C'est tout simplement quand il cessera de nous être utile, c'est-à-dire de nous faire prévoir sans nous tromper des phénomènes nouveaux. Nous serons sûrs en pareil cas que le rapport affirmé n'est plus reel", *Ivi*, p. 248.

[150] Per questo stesso motivo, come già visto in precedenza, secondo Poincaré conoscere è soprattutto scegliere. Nella pratica classificatoria a cui si può ricondurre la scienza avviene una selezione di eventi, considerati simili, e spiegabili attraverso le stesse relazioni, cioè le stesse strutture matematiche. Poincaré è però consapevole che questo "fare a fette" il mondo implica una divisione artificiale dei fenomeni. In questa consapevolezza si vedono confluire due aspetti. Da un lato la già citata influenza leibniziana che spinge Poincaré a considerare l'universo come un tutto in cui ogni parte è in relazione con le altre, dall'altro l'elemento dinamico che invece appartiene al pensiero filosofico francese dell'epoca e che si ritrova, ad esempio, nelle opere di Renouvier, Boutroux e Bergson. Poincaré non sembra perdere mai di vista l'artificialità delle classificazioni e delle relazioni su cui esse sono fondate, per questo leggere il suo pensiero in termini di realismo strutturale può condurre a dei problemi interpretativi.

previsioni, o semplicemente quando, come dice Poincaré, hanno esaurito la loro estensione. Implicitamente appare l'idea di una realtà dinamica, fluida, contraddistinta dal mutamento, che effettivamente non può essere pienamente spiegata da un pensiero statico, continuamente teso alla ricerca dell'invarianza. Tuttavia esso rappresenta l'unico strumento attraverso cui è possibile conoscere ed effettuare previsioni. Poincaré riconosce le critiche filosofiche ma difende il pensiero scientifico. Non si tratta allora solo di considerare le teorie fisiche in termini strumentali o strutturalisti. Si tratta invece di maturare la piena consapevolezza che lo sguardo dello scienziato non è mai neutro, che è impossibile prescindere totalmente da esso (ne ha senso pensare che si possa farlo) e che tale sguardo può infinitamente avvicinarsi ai fenomeni senza però mai coglierli nella loro pienezza[151]. Poincaré porta alle estreme conseguenze alcuni assunti della scienza classica, mostrandone per certi versi la paradossalità. In questo modo egli contribuisce alla costruzione di una visione critica della scienza ma, allo stesso tempo, ne salva il valore.

La stessa operazione avviene in *Le Hasard*. Poincaré si interroga su cosa sia il caso, quale definizione se ne possa dare. Il punto di partenza è l'idea laplaciana che il "caso" non sia altro che un termine utilizzato per indicare la nostra ignoranza. Tuttavia Poincaré non ritiene questa definizione sufficiente. Già negli studi sulle equazioni differenziali e successivamente affrontando il problema dei tre corpi, Poincaré ha avuto modo di comprendere i limiti strutturali del pensiero scientifico moderno e di come esso non possa essere in grado di realizzare fino in fondo quella predicibilità e determinabilità assoluta che pone come suo obiettivo. Non solo, l'idea stessa di predicibilità finisce con il teorizzare l'eliminazione di quell'elemento che invece caratterizza i fenomeni naturali, la loro spontaneità. Per questo il calcolo della probabilità diventa nel pensiero di Poincaré lo strumento che ridà spazio alla novità, all'imprevisto, lo stratagemma attraverso cui il sapere scientifico lascia spazio a ciò che non si può conoscere. All'interno di questa

[151] Pierre Duhem scriverà successivamente a proposito dell'utilizzo della matematica nelle teorie fisiche: "Le symbole mathématique forgé par la theorie s'applique à la réalité comme l'armure au corps d'un chevalier bardé de fer; plus l'armature compliquée, plus le métal rigide semble prendre de souplesse; la multitude des pièces qui s'imbriquent comme des écailles assure un contact plus parfait entre l'acier et le membre qu'il protège; mais, si nombreux que soient les fragments qui la composent, jamais l'armure n'épousera exactement le modelé du corps humain". PIERRE DUHEM, *La Théorie physique: son objet-sa structure* (Paris:Vrin, 1914, deuxième editions), pp. 265-266.

prospettiva, il caso, non è visto da Poincaré come il limite estensivo dell'intelletto umano. Una posizione di questo tipo, infatti, consente di concepire gli strumenti matematici di cui si avvale la scienza come neutri e potenzialmente capaci di cogliere nella sua interezza l'evoluzione dei fenomeni naturali. Il demone di Laplace utilizzerebbe infatti i nostri stessi strumenti, l'unica differenza sarebbe nell'estensione della sua conoscenza. Per Poincaré ciò non basta, l'incompletezza delle previsioni scientifiche, non può prescindere dagli strumenti con cui queste previsioni vengono formulate. Per questo, come visto sopra, ogni determinazione delle condizioni iniziali è sempre approssimata e a causa dell'instabilità esponenziale (quindi la rottura di proporzionalità tra causa ed effetto) viene meno la possibilità di effettuare una previsione rigorosa. In altre parole Poincaré è consapevole del fatto che il limite oltre il quale non è possibile effettuare previsioni non ha semplicemente un carattere estensivo ma riguarda la pertinenza degli strumenti che vengono utilizzati.

Come sottolinea Ekeland, Poincaré è il "maestro dei metodi quantitativi" e proprio per questo egli riesce a vederne il limite. Nel caso del determinismo è spingendone alle estreme conseguenze la formulazione classica che Poincaré ne mostra l'inadeguatezza. Si apre così la strada a quello che oggi viene chiamato determinismo caotico. La scienza classica riconduce i processi naturali all'interno di una prospettiva statica, in cui il mutamento non è tematizzato ma negato. Il punto di vista infinito del demone di Laplace svuota infatti di senso l'idea stessa di evoluzione temporale; in questa prospettiva essa sarebbe giustificabile solo in relazione a un osservatore limitato ma perderebbe qualsiasi significato per chi potesse avere una prospettiva infinita sugli eventi. Tuttavia quest'immagine statica contraddice l'esperienza fenomenologica di una natura che è essenzialmente dinamica, in cui il divenire è un elemento caratterizzante. Per questo è necessaria una nuova comprensione scientifica più orientata al divenire che all'essere[152].

[152] La consapevolezza che Poincaré mostra per queste problematiche lo avvicina ancora una volta a Leibniz. L'idea di *vis viva* è per Leibniz il tentativo di comprendere scientificamente la presenza nei fenomeni naturali di principi attivi. In contrapposizione alla prospettiva cartesiana e newtoniana per cui la natura è materia inerte (resa più attiva da Dio) Leibniz insiste su una visione "attiva" della natura. Da un punto di vista matematico, l'introduzione del calcolo differenziale ha proprio lo scopo di cogliere il dinamismo che contraddistingue i fenomeni.

Su questa base Poincaré valorizza la *storia* dei fenomeni, seppure non su un piano strettamente matematico, presentandola come elemento dal quale non è possibile prescindere per la loro comprensione. Anche ciò contribuisce alla costruzione di un determinismo riformato in cui lo stato di un sistema non può essere stabilito esclusivamente sulla base del suo stato nell'istante precedente ma tenendo conto di tutti gli stati anteriori, ovvero della sua storia. Di conseguenza, oltre all'impossibilità di stabilire in modo rigoroso le condizioni iniziali, si aggiunge l'impossibilità di conoscere nella sua integralità la storia di un fenomeno.

Il caso, sostiene Poincaré in conclusione a *Le Hasard*, compare anche nella storia. Su questa base egli avvicina ricerca scientifica e ricerca storiografica. Tuttavia il riconoscimento del ruolo che la causalità svolge nella storia risale già a Pascal e non può dunque essere considerato un elemento di originalità in Poincaré. Ciò che egli però attua è un avvicinamento tra storia e scienza del tutto inedito all'epoca. Tale accostamento non segue infatti la tendenza positivista che vorrebbe plasmare l'indagine storica sul modello di quella delle scienze naturali, non si tratta, in altre parole di imporre alla ricerca storica un metodo scientifico. Al contrario è la scienza che fa propri i dubbi della storia. La casualità emerge soprattutto nella storia umana, essa è l'espediente tramite il quale viene garantito l'esercizio del libero arbitrio negando la possibilità che la condotta umana possa essere ridotta all'interno di schemi deterministi. Questa stessa causalità emerge nella scienza dopo una decostruzione del determinismo classico.

Il significato oggettivo che Poincaré cerca di attribuire al caso, tornando con ciò a una definizione più vicina a quella della scienza antica che moderna, vede allora confluire in sé le diverse istanze dei suoi lavori scientifici e delle sue riflessioni filosofiche. L'inadeguatezza, tecnica ed epistemologica, del determinismo classico porta alla necessità di superare un'ideale di scienza che coincide con la prevedibilità dei fenomeni.

A ciò si aggiunge però la controversia filosofica che impone una riflessione sulla scienza e sui suoi concetti fondamentali. Per questo Poincaré si trova a riflettere sullo statuto ontologico delle leggi scientifiche e delle relazioni che esse esprimono. Senz'altro la sua posizione non si manifesta in modo netto e inequivocabile, tuttavia egli sembra maturare l'idea di una Natura che non è completamente riconducibile all'interno degli schemi che la nostra scienza cerca di imporle. Non si tratta allora di dichiarare la bancarotta della scienza ma, al contrario, di salvarne il suo valore oggettivo nella consapevolezza delle credenze su cui esso si fonda. Il caso emerge quindi non come un limite soggettivo, ma come il ricordo che la scienza è sempre e comunque la nostra scienza.

CONCLUSIONI

Uno dei tratti fondamentali emersi nelle pagine precedenti è che parlare di caos implica parlare di una rete di altri concetti che sottende l'essenza epistemologica della scienza moderna. Nell'introduzione si è utilizzata la metafora dell'assenza per cercare di segnalare uno dei tratti distintivi del caos; si è detto che il caos, sin dal pensiero mitico-religioso, è stato contraddistinto come assenza di ordine e distinzione. Si potrebbe in parte estendere questa metafora anche a livello epistemologico; laddove infatti si cerca di definire il caos e di comprenderne l'essenza in relazione al sapere scientifico ci si imbatte immancabilmente in una schiera di altri concetti e di altre problematiche, mentre il caos sembra scomparire. Per questo motivo, uno studio sul caos implica anche un'analisi delle nozioni di stabilità, probabilità, causa e determinismo, quelle nozioni insomma che stanno alla base del sapere scientifico moderno.

Nel primo capitolo si è visto, a titolo introduttivo, come il concetto di caos sia stato escluso dal terreno del discorso scientifico moderno attraverso una meccanicizzazione del sapere fisico che, successivamente, ha come diretta conseguenza l'instaurarsi di un ideale determinista in cui la contingenza e la casualità, concettualmente connesse al caos, vengono relegate entro i confini della debolezza umana. Gli effetti di una tale meccanicizzazione della filosofia naturale si estendono inoltre ad altri ambiti del sapere scientifico che, rinunciando in parte alle loro specificità, fanno propria la filosofia meccanicista. La metafora della macchina si estende allora ai sistemi viventi ai quali però l'applicazione dell'ideologia determinista crea problemi ben maggiori[1].

[1] A questo proposito si potrebbe già citare, come una delle prime forme di un certo pensiero meccanico applicato al campo dello studio degli esseri viventi, la filosofia cartesiana che, nella sua divisione tra *res cogitans* e *res extensa*, fa rientrare il mondo vegetale e animale in quest'ultima dandone, dunque, un'interpretazione esclusivamente meccanica. L'idea del corpo-macchina, estendendosi anche all'uomo, troverà un certo consenso all'interno delle correnti di pensiero

È bene sottolineare che la scoperta del caos si situa all'interno del determinismo, ovvero essa nasce da una radicalizzazione delle istanze che stanno alla base dell'ideologia determinista. Quello che infatti viene tradizionalmente chiamato caos deterministico non mette in discussione l'esistenza di una connessione causale tra antecedente e conseguente ma piuttosto l'impossibilità di formulare delle previsioni certe e univoche. Ciò avviene sia a causa della non linearità delle equazioni che determinano il sistema studiato sia per l'impossibilità di determinare in modo assoluto le condizioni iniziali e al contorno di tale sistema. L'evoluzione del determinismo, nella sua formalizzazione matematica, porta quindi all'esito paradossale di una sua messa in discussione. Esso infatti prevedrebbe la possibilità di una determinazione assoluta delle condizioni iniziali e al contorno che si rivela, però, impossibile.

Come si è cercato quindi di sottolineare nelle pagine precedenti, la scoperta delle dinamiche caotiche mette in evidenza, da un lato i limiti del determinismo, dall'altro l'emergenza di un'essenziale indeterminabilità e impredicibilità dei processi naturali. Questi ultimi, la cui caratteristica principale è il mutamento e l'emergenza di stati non deducibili *a priori*, non possono infatti trovare una completa spiegazione all'interno di un quadro concettuale che annulla, di principio, qualsiasi mutamento, relegandolo a una forma di comprensione soggettiva. Il mutamento, nella scienza moderna, è infatti riconducibile alla concezione del mutamento teorizzata da Spinoza, secondo cui esso sarebbe da considerare una forma di debolezza della mente umana. Sempre all'interno del punto di vista spinoziano, coincidente in buona parte con il quadro concettuale della scienza moderna, la prospettiva di Dio, *sub specie aeternitatis*, può abbracciare con un solo sguardo il concatenarsi degli eventi riducendo il tempo, e quindi quello che per noi è il mutamento, a una mera concatenazione causale predeterminata. La scienza moderna sarebbe quindi, in quest'ottica, una scienza dell'essere e non del divenire.

---

materialista che si svilupperanno in francia nel corso del Settecento. Si pensi, ad esempio, al pensiero di Offroy La Metrie (1709-1751) e alle sue convinzioni, espresse nell'*Histoire naturelle de l'âme* e in *L'homme machine* che il corpo umano, così come quello animale, debba essere inteso come una macchina le cui leggi non sono differenti da quelle degli oggetti inanimati.

Tuttavia, ciò che l'avvento del caos permette di comprendere è l'illusorietà di tale prospettiva mettendo di conseguenza in evidenza i limiti del determinismo.

Come in parte già visto nel secondo capitolo, l'utilizzo di sistemi di equazioni differenziali, che si confronta oltre che con le dinamiche non lineari anche con l'indeterminabilità delle condizioni iniziali, non può però tener conto dell'indeterminabilità dovuta alla storia globale del sistema. Da un punto di vista strettamente tecnico questa problematica viene formalizzata solo nelle equazioni intergro-differenziali della meccanica ereditaria di Vito Volterra[2], mentre non sembra trovare spazio nella matematica del caos. Si è visto inoltre come i limiti del determinismo emergano anche nella scoperta delle soluzioni singolari e, quindi, nella scomparsa della credenza di univocità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali[3]. Il caos, le equazioni integro-differenziali e le soluzioni singolari, nascono a partire dalla formalizzazione matematica che il determinismo, inteso in senso filosofico, ha avuto all'interno della scienza moderna. L'inadeguatezza di questa rappresentazione matematica del determinismo non si limita però solo a mettere in evidenza la limitatezza del modello matematico, ma costituisce una prova dell'illusorietà del determinismo anche sul piano filosofico, contribuendo dunque al suo sgretolamento[4].

Si apre così la possibilità di una riflessione sulla nozione di determinismo e sul ruolo fondamentale che essa ha assunto all'interno del pensiero scientifico

---

[2] Per un'introduzione all'argomento si veda: VITO VOLTERRA, *Saggi scientifici* (Bologna: Zanichelli, 1920 rist.1990) in particolare pp. 191-218.

[3] Per un'introduzione a questo argomento si veda: MICHAEL A.B. DEAKIN, "Nineteen Century Anticipation of Modern Theory of Dynamical Systems", *Archive for History of Exact Sciences*, 1988, *39*: 183-194.

[4] Sulla crisi del determinismo si veda, inoltre: IAN HACKING, *The Taming of Chance* (Cambridge: Cambridge University press, 1990) trad. it. a cura di S. Morini, *Il caso domato* (Milano: Il saggiatore, 1994). La prospettiva in cui si pone Hacking tiene ampiamente conto dei fattori sociali che portarono, a suo avviso, a un progressivo ingresso del caso nel mondo scientifico. Questo ingresso passa attraverso le scienze sociali e, successivamente, si estende alle scienze naturali. In particolare Hacking sottolinea l'importanza dell'utilizzo di stime quantitative nella costruzione di nuovi metodi di indagine scientifica di carattere probabilistico. Molto interessante anche l'analisi della genealogia del termine determinismo. Hacking non ritiene che il determinismo nasca solo nel 1870 dalle parole di de Bois Reymond, ritiene piuttosto che il terminine "determinismo" così come lo intendiamo oggi, assuma tale significato già dalla metà dell'Ottocento. Tuttavia, secondo Hacking, si tratterebbe solo di una questione terminologica, una corrente scientifica come quella conosciuta oggi sotto l'etichetta di determinismo nasce già nel '600 da Descartes e segna l'evoluzione della scienza moderna. Si veda anche: HACKING I., "Nineteenth century cracks in the concept of determinism", *Journal of the history of ideas*, 1983, July: 455-475.

moderno. Nel 1892 in *The Doctrine of Necessity Examinated*[5], articolo pubblicato su *The Monist*, Charles Sanders Peirce (1839-1914) mette in evidenza come la convinzione che ogni evento sia determinato da una legge generale non sia altro che un postulato indimostrato della scienza moderna. L'esperienza, secondo Peirce, non legittima la spiegazione degli eventi attraverso delle leggi generali: al contrario essa mostra in che termini un dato fenomeno se ne discosti. Gli elementi che l'osservatore può realmente ricavare dall'esperienza sono la diversità e la specificità degli eventi. Tali peculiarità non possono essere riconducibili a leggi immutabili ma, piuttosto, alla presenza del caso. Il caso è, secondo Peirce, alla base della singolarità, della diversità e della specificità degli eventi. Il necessitarismo e il determinismo nascono a suo avviso dal bisogno di trovare orientamenti per la pratica scientifica e, quindi, di cercare elementi comuni a diverse esperienze. Pur collocandosi su di un piano differente, la spiegazione pragmatista di Peirce presenta degli elementi che l'accomunano ad alcune delle argomentazioni esposte da Poincaré e che sono state trattate nel quarto capitolo. Si è visto in particolare come anch'egli sia consapevole dell'artificiosità delle classificazioni scientifiche e della singolarità che, in termini rigorosi, contraddistingue i diversi fenomeni. Per il matematico francese, tuttavia, questo aspetto non diventa tanto strumento per una critica teorica del sapere scientifico, quanto elemento per la comprensione dei presupposti alla base di tale sapere. Egli individua il valore del sapere scientifico non tanto (o non solo) nel suo essere strumento per l'orientamento della pratica, quanto piuttosto nel suo essere l'espressione intersoggettiva dell'intelletto umano applicato alla comprensione dei fenomeni. Inoltre, nonostante non emergano dei collegamenti espliciti tra Poincaré e Peirce, è quanto meno da segnalare che l'articolo di quest'ultimo compare – non molti anni dopo la pubblicazione sugli *Acta Mathematica* dell'articolo sul problema dei tre corpi – su una rivista ben nota a Poincaré e con la quale egli stesso collabora in diverse occasioni. La riflessione di Peirce contribuisce dunque a chiarire in che termini il determinismo non possa essere inteso in senso ontologico, ovvero come intrinsecamente appartenente ai

[5] CHARLES SANDERS PEIRCE, "The Doctrine of Necessity Examinated", *The Monist*, 1892, 2: 321-337, trad. it. in PEIRCE, *Scritti di Filosofia*, a cura di L. M. Leone (Milano: Fabbri Editori, 2004) pp. 194-208.

fenomeni. Si tratta, al contrario, di metterne in luce la natura epistemologica ed euristica.

In questa direzione possono essere anche rilette alcune riflessioni esposte da Ernst Cassirer (1874-1945) nel suo *Determinismus und Indeterminismus in der modernen Physik*[6], pubblicato nel 1937. L'opera di Cassirer si colloca storicamente all'interno del dibattito filosofico sul determinismo suscitato dalla nascita, nelle sue diverse formalizzazioni, della meccanica quantistica. Cassirer sviluppa una sottile riflessione sul ruolo del determinismo nella scienza moderna, arrivando a sostenere che esso debba essere inteso in senso categoriale e funzionale. Concetti come quello di "determinismo" e "causa" hanno così un valore metodologico-trascendentale e, anziché essere ricavati a partire dall'esperienza scientifica, impongono a questa stessa esperienza una legalità di tipo funzionale-matematico. In questi termini, secondo Cassirer, la fisica quantistica non metterebbe tanto in crisi le nozioni di "determinismo" e "causa" quanto quella di "oggetto fisico". Non è nostra intenzione addentrarci nelle considerazioni di Cassirer sulla fisica quantistica, ciò che ci preme tuttavia sottolineare è che nelle sue pagine dedicate al determinismo egli mette in evidenza come tale nozione non sia una componente oggettiva della scienza moderna, nata a partire dalla messa a punto del metodo empirico, ma una sua condizione trascendentale. Sebbene nelle argomentazioni neokantiane di Cassirer quest'operazione abbia la finalità di salvare il determinismo dagli attacchi della fisica quantistica, ciò che per contrasto emerge è piuttosto la necessità di considerare il determinismo come una componente soggettivo-ideologica della scienza moderna che, messa in discussione dai risultati di questa stessa scienza, non può essere difesa attraverso il ricorso al trascendentalismo.

Un ulteriore chiarimento è dato dalle riflessioni di Max Born (1882-1970). Sia all'interno della sua corrispondenza[7] con Albert Einsten (1879-1955), sia nel testo di alcune conferenze tenute tra la fine degli anni trenta e la metà degli anni

[6] ERNST CASSIRER, *Determinismus und Indeterminismus in der modernen Physik* (Göteborg: Elanders Boktryckeri Aktiebolag, 1937) trad. it. a cura di G. A. de Toni con una presentazione di Giulio Preti, *Determinismo e indeterminismo nella fisica moderna* (Firenze: La nuova editrice,1970).

[7] ALBERT EINSTEIN, MAX BORN, HEDWIG BORN, *Briefwechsel 1916-1955* (München: Nymphenburger, 1969) trad. it. a cura di G. Scattone, *Einstein-Born. Scienza e Vita* (Torino: Einaudi, 1973).

cinquanta, egli elabora infatti una posizione originale, volta a dimostrare l'incompletezza non solo della meccanica quantistica, ma anche della relatività einsteniana e della meccanica classica. Nel caso di quest'ultima le argomentazioni di Born sono molteplici ma tutte rivolte in un'unica direzione esplicitata nel saggio del 1953, *La situazione concettuale della fisica*. Born scrive infatti: "[…] il supposto determinismo [della scienza classica] è semplicemente un'illusione"[8]. In questo stesso articolo, Born cita il caso dell'instabilità esponenziale e della mancanza di proporzionalità tra causa ed effetto che rende impossibile la determinazione dell'evoluzione di un sistema la cui dinamica sia non-lineare. Questo, però, non è l'unico punto toccato da Born. Nella conferenza tenuta nel 1954, in occasione dell'assegnazione del premio Nobel, egli infatti sottolinea:

> La meccanica newtoniana è deterministica nel seguente senso: quando lo stato iniziale (posizioni e velocità di tutte le particelle) di un sistema è dato esattamente, è possibile calcolare mediante le leggi della meccanica lo stato di qualsiasi altro istante (precedente e seguente). Secondo questo modello sono stati costruiti tutti gli altri rami della fisica classica. Gradualmente il determinismo meccanico divenne una specie di articolo di fede: il mondo come macchina, come automa. […] Io mi sono posto la domanda se ciò sia veramente giusto. Si possono effettivamente fare sulla base delle equazioni classiche previsioni per qualsiasi istante? Si vede facilmente con semplici esempi che è così se si ammette la possibilità di misure assolutamente esatte (di posizione, di velocità o di altre grandezze). […] Ha però un significato, voglio dire: un significato fisico, non metafisico, parlare di dati assoluti? È giusto dire: la coordinata $x = \pi$ *cm*, in cui $\pi = 3{,}1415\ldots$ è il noto numero trascendente che determina il rapporto fra la circonferenza del cerchio e il suo diametro? Come strumento matematico il concetto di numero reale, costituito da una frazione decimale infinita, è oltremodo importante e fruttuoso. Come misura di una grandezza fisica è un nonsenso. Quando si interrompe la frazione decimale per π alla 20sima o alla 25sima cifra si ottengono due numeri che non possono essere distinti l'uno dall'altro e dal vero π con nessuna misura. Secondo il principio euristico impiegato da Einstein nella teoria della relatività, da Heisenberg nella teoria dei

[8] BORN M., "The conceptual Situation in Physics and the Prospects of the future", *Proc. Phys. Soc.*, 1953, 66: 501-513. Questo saggio è contenuto anche in BORN M., *Physik im Wandel Meiner Zeit* (Braunsweig: Friedr. Vieweg, 1957) trad. it. a cura di C. Carrà, *La fisica e il nostro tempo* (Firenze: Sansoni, 1961). La citazione qui riportata è rintracciabile nella versione italiana a pp. 193-194. ENRICO GIANNETTO, "Max Born e la nascita della nuova fisica del caos", in ROSSI., A., *Atti del XIII Congresso Nazionale di Storie della Fisica*, Conte, Lecce, 1995, pp. 189-214.

> quanti, tali concetti che non corrispondono ad alcuna osservazione concepibile sono da eliminare.[…] Vorrei solo mettere in evidenza che il determinismo della fisica classica si dimostra essere un'illusione, generata da una sopravvalutazione di costruzioni concettuali logico-matematiche.[9]

Born mette in piena luce il significato strettamente metafisico che "le costruzioni logico-matematiche" hanno giocato nella fisica classica e mostra come il determinismo che da esse deriva non abbia alcun senso fisico. Certamente l'utilizzo di un continuo matematico nella comprensione meccanica dei fenomeni fisici è alla base del determinismo della fisica classica[10], ciò non toglie però che esso debba essere riconosciuto nella sua essenza ideologica e metafisica. Secondo Born, dunque, anche la meccanica classica sarebbe intrinsecamente statistica e indeterminata. Anche nel caso della meccanica classica ciò che emerge, al di là delle concettualizzazioni matematiche, è dunque la natura indeterminata degli eventi fisici, il loro non lasciarsi ridurre all'interno di uno schema deterministico.

Uno degli obiettivi di questa ricerca è stato quello di mettere in evidenza la partecipazione di Poincaré a queste tematiche, il suo contributo a una riflessione sulla scienza che si trasforma in riflessione sull'uomo. Come si è più volte ripetuto, al di là delle poche righe contenute in *Le Hasard*, Poincaré non dà grande spazio al caos nelle sue riflessioni filosofiche. Tuttavia, le conseguenze teoriche ed epistemologiche derivanti dalla scoperta delle dinamiche caotiche contribuiscono a dar forma alla sua riflessione sulla fisica.

Nel caso specifico di Poincaré, inoltre, la scoperta di risultati negativi diventa sempre stimolo per nuove aperture teoriche[11]. Ciò accade già, per certi versi, nell'elaborazione di un nuovo approccio geometrico-qualitativo pensato a partire dai limiti dei classici metodi quantitativi. La scoperta delle dinamiche caotiche apre poi la strada a nuovi risultati che Poincaré sviluppa sia in *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* che nelle *Leçons de mécanique céleste*. Lo

---

[9] BORN M., "Statistical interpretation of quantum mechanics", *Science*, 1955, 122: 675-679, ristampato anche in. BORN M, *Physik im Wandel Meiner Zeit* (cit. nota 160). Il passo che è qui riporato è tratto dalla traduzione italiana di quest'ultimo teso (cit. nota 160) pp. 287-289.

[10] Su questo aspetto si veda: FRANCIS BAILLY, GIUSEPPE LONGO, *Mathématques et sciences de la nature. La singularité physique du vivant* (Paris: Hermann, 2006).

[11] Sul valore euristico dei risultati negativi nell'opera in Poincaré e più in generale nella fisica e della matematica del Novecento si veda: LONGO G., "Savoir critique et savoir positif: l'importance des résultats négatifs", *Intellectia*, 2005, 1, 40: 109-113.

stesso accade per il suo pensiero filosofico. Anche in questo caso, la presenza di risultati negativi che provengono sia dall'ambito scientifico che dalle critiche filosofiche, stimola Poincaré allo sviluppo di una prospettiva filosofica che possa gettare una nuova luce sul sapere fisico. La scoperta del caos è, in questa prospettiva, uno tra i principali elementi che concorrono a dar forma alle argomentazioni epistemologiche di Poincaré.

Il suo pensiero filosofico, talvolta considerato come legato a un'immagine classica della scienza, si rivela al contrario ricco di spunti riconducibili al contenuto rivoluzionario dei suoi lavori scientifici. Nei suoi articoli, Poincaré sviluppa una critica radicale dei concetti fondamentali della scienza moderna, mostrando come essi siano privi di senso già all'interno della meccanica classica[12].

Probabilmente il pregiudizio che a lungo ha gravato sul pensiero di Poincaré è riconducibile sia alle interpretazioni tradizionali di cui si è parlato nel primo capitolo, sia alle difficoltà di comprensione dei suoi articoli, per lo più caratterizzati da uno stile estremamente conciso, poco incline alla spiegazione dei dettagli. A ciò si aggiunge il fatto che Poincaré non ha mai avuto l'intezione di dare al proprio pensiero epistemologico un'organizzazione sistematica. Questo rende impossibile riunire *a posteriori* i diversi aspetti della sua posizione epistemologica all'interno di una prospettiva coerente e ordinata. Se quindi il pensiero di Poincaré non costituisce un sistema non deve essere interpretato come tale. Per questo l'analisi che è stata qui condotta ha come unico fine quello di

[12] È il caso, per esempio, della nozione di tempo assoluto così come dei concetti di spazio e di moto assoluti. Almeno a partire dal 1895 la critica di Poincaré alla meccanica si concretizza infatti in una "decostruzione" delle sue nozioni principali. In questo anno, in un articolo intitolato *A propos de la théorie de Larmor*, Poincaré afferma l'impossibilità di osservare il moto assoluto. In *La mesure du temps*, pubblicato nel 1898 sulla *Revue de métaphysique et de morale*, Poincaré mostra quindi il carattere convenzionale del tempo introducendo, nel 1900, il suo metodo di sincronizzazione degli orologi per mezzo di segnali luminosi. Sempre nel 1900, in una conferenza *Sur les principes de la mécanique*, mostra che tempo assoluto, spazio assoluto e moto assoluto sono nozioni vuote già nella meccanica classica. Si vedano a questo proposito: POINCARE J.-H., "A propos de la Théorie de M. Larmor", *Eclairage Electrique*, t. III e IV, 1895; pubblicato anche in *Œuvres*, IX, pp. 369-426; POINCARE J.-H., "La mesure du temps", *Revue de métaphysique et de morale*, VI, 1898, pp. 1-13; POINCARE J.-H., "Sur les principes de la mécanique", *Bibliothèque du Congrès international de philosophie*, tome III, Paris, pp. 457-494, anche in: POINCARE J.-H., *La science et l'hypothèse* (Flammarion: Paris, 2ème ed. 1907) cap. VI e VII. Si veda inoltre: GIANNETTO E., "The Rise of Special Relativity: Henri Poincaré's Works Before Einstein", *Atti del XVIII congresso di storia della fisica e dell'astronomia* (Milano: Universita degli Studi di Milano, 1999) pp. 171-207.

avanzare una possible interpretazione di alcuni aspetti, quelli legati alla fisica, delle riflessioni di Poincaré. Non sarebbere corretto, né storicamente né teoricamente, pensare che la tematica del caos possa offrire la chiave di lettura definitiva del pensiero di Poincaré. Ciò non toglie che essa apra degli spunti interpretativi inediti che contribuiscono a collocare il pensiero del matematico francese entro un nuovo orizzonte teorico. Nelle pagine e nei passi, tratti dalle opere di Poincaré, che sono stati commentati nel quarto capitolo si è infatti visto come egli metta in evidenza i presupposti metodologici ed euristici della fisica. È in questo tipo di riflessioni che, con tutta probabilità, il caos influenza il pensiero di Poincaré.

Sebbene infatti la rivoluzione del caos possa essere ritenuta, sul piano tecnico e concettuale, meno radicale della relatività e della fisica quantistica, essa impone comunque una profonda riflessione sugli elementi ideologici che segnano la nascita della scienza moderna. Riflettere sul caos, così come esso si manifesta nella scienza contemporanea, conduce a una riflessione che investe la scienza nella sua globalità, mettendone in discussione numerosi presupposti. Si è visto come, da un punto di vista sociologico, il caos si presenti negli anni settanta come argomento transdisciplinare, che coinvolge scienziati provenienti da ambiti completamente diversi[13]. La presa di coscienza di queste peculiarità, non può però fermarsi al semplice riconoscimento che la teoria del caos ha condotto a uno sconvolgimento degli assetti disciplinari e alla nascita di nuovi dipartimenti. Quello che invece emerge, da un punto di vista epistemologico, è la totale arbitrarietà e artificialità delle divisioni disciplinari, che lungi dal fondarsi su alcun elemento reale, rispondono esclusivamente alle esigenze di specializzazione della ricerca. Non solo, la transdisciplinarità della teoria del caos fa capire che le differenti discipline poggiano su un comune sostrato teorico che, come già detto nell'introduzione, è quello dalla filosofia meccanica. Il caos rappresenta, in primo luogo, una crisi interna a tale filosofia che, di conseguenza, si ripercuote su tutti gli ambiti in cui essa ha trionfato. Il primo, ovviamente, è quello della fisica, in cui il caos non fa altro che palesare i limiti concettuali e tecnici del riduzionismo meccanicista.

[13] DAVID AUBIN, AMY DAHAN, "Writing the history of Dynamical System and Chaos: Loungue Durée and Revolution, Disiplines and Cultures", *Historia Mathematica*, 2002, 29: 273-339.

Per questo, la conclusione dell'analisi sul concetto di caos e su come esso emerga nei lavori di Poincaré si configura in realtà come una nuova apertura. In particolare essa pone le basi per un ulteriore approfondimento sui fondamenti della fisica moderna e sulle condizioni sociali, politiche e religiose che hanno accompagnato la sua nascita. Questo permetterebbe di chiarire le dinamiche che hanno segnato il progressivo allontanamento, alla nascita della scienza moderna, del caos, della casualità, della singolarità e della contigenza dal discorso scientifico. Inoltre sarebbe possibile sviluppare una riflessione sul caos che parta dall'assunto fondamentale che la scienza è un prodotto culturale umano e che interrogarsi sui suoi fondamenti coincide con l'interrogarsi sulle istanze culturali che l'hanno prodotta.

Fonti primarie

Opere di Jules-Henri Poincaré

Buona parte degli articoli indicati in seguito sono raccolti anche in J.-H., Poincaré, *Œuvres,* XI Vols. Gauthier-Villars, Paris, 1916-156. Abbiamo indicato, di volta in volta, gli estremi bibliografici degli articoli rintracciabili in questa raccolta.

- *Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partialles* (Paris: Gauthiers-Villars, 1879) contenuta anche in J.-H. POINCARE, *Œuvres*, cit., vol. I pp. LX-CIXXX.

- «Note sur les principes de la mécanique dans Descartes et dans Leibnitz», par Henri Poincaré, ingénieur des mines, chargé de cours à la Faculté des sciences de Caen, in Boutroux, E. (ed.), *La monadologie*, Edition annotée et précédée d'une exposition du système de Leibnitz, Delagrave, Paris 1880.

- «Mémoire sur le courbes définies par une équation différentielle (première partie)», *Journal des mathématiques pures et appliquées*, VII, 1881: 375-422 oppure in Poincaré, J.-H., *Œuvres*, cit., vol. I, pp. 3-44.

- «Théorie des groupes fuchsiens», *Acta Mathematica*, 1, 1882: 1-62.

- «Sur les séries trigonométriques», *Comptes Rendus de l'Académie de Science*, 1882, t. 92: 766-768 oppure in *Œuvres*, cit., IV, pp. 162-163.

- «Sur les courbes définies par les équations différentielles», *Comptes rendus de l'Accademie des Sciences*, 94, 1882, pp. 416-418 oppure in *Œuvres*, vol. I, pp. 159-161.

- «Sur les courbes définies par les équations différentielles», *Comptes rendus de l'Accademie des Sciences*, 94, 1882, pp. 577-578 oppure in *Œuvres*, vol. I, pp. 162-163.

- «Mémoire sur le courbes définies par une équation différentielle (deuxième partie)», *Journal des mathématiques pures et appliquées*, 1882, VIII: 251-296, oppure in *Œuvres,* vol. I, pp. 44-84.

- «Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps», *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 97, 1883: 251-252, oppure in *Œuvres*, cit., VII, pp. 251-252.

- «Sur les séries trigonométriques», *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 97, 1883: 1471-1473, oppure in *Œuvres*, cit., IV, pp. 588-590.

- «Sur la convergence des séries trigonométriques», *Bulletin Astronomique*, 1884, 1: 319-327 oppure in *Œuvres*, cit., IV, pp. 591-598.

- «Sur les courbes définies par une équation différentielle», *Comptes rendus de l'Accademie des Sciences*, 1884, *98*: 287-289 oppure in *Œuvres*, cit., vol. I, pp. 87-89.

- «Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps», *Bulletin astronomique*, 1, 1884: 65-74, oppure in *Œuvres,* cit.,VII, pp. 253-261.

- «Sur la convergence des séries trigonométriques», *Bulletin astronomique*, 1, 1884: 319-327, oppure in *Œuvres*, cit., IV, pp. 591-598.

- «Sur les séries trigonométriques», *Comptes Rendus de l'Académie de Science*, t. 101, 1885: 1131-1134 oppure POINCARE J.-H., *Œuvres*, cit., I, pp. 164-166.

- «Sur le courbes définies par les équations différentielle (troisième partie)», *Journal des mathématiques pures et appliquées*, I, 1885: 167-244, oppure in *Œuvres*, vol. I, pp. 90-161.

- «Note sur la stabilité de l'anneau de Saturne», *Bulletin astronomique*, 2, 1885: 507-508, oppure in *Œuvres*, cit., VIII, pp. 457-458.

- «Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation», *Acta Mathematica,* 7, 1885: 259-380, oppure in *Œuvres*, cit., VII, pp. 40-140.

- «Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation», *Bulletin astronomique*, 2, 1885: 109-118, oppure in *Œuvres*, cit., VII, pp. 17-25.

- «Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation», *Bulletin astronomique*, 2, 1885: 405-413, oppure in *Œuvres*, cit., VII, pp. 26-33.

- «Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation», *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 100, 1885: 346-348, oppure in *Œuvres*, cit., VII, pp. 14-16.

- «Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation», *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 100, 1885: 1068-1070, oppure in *Œuvres*, cit., VII, pp 34-36.

- «Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation», *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 101, 1885: 307-309, oppure in *Œuvres*, cit., VII, pp. 37-39.

- «Sur un moyen d’augmenter la convergence des séries trigonométriques», *Bulletin Astronomique*, 3, 1886: 521-528, oppure in *Œuvres*, cit., IV, pp. 599-606.

- «Sur le courbes définies par les équations différentielle (quatrième partie)», *Journal des mathématiques pures et appliquées*, II, 1886:151-217, oppure in *Œuvres,* cit., vol. I, pp. 167-222.

- «Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie», *Bulletin de la société mathématique de France,* 15, 1887: 203-216.

- «Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique», *Acta mathematica*, XIII, 1890, oppure in *Œuvres*, cit., VII, pp. 262-479.

- *Electricité et optique*, Blondin, Jules and Brunhes, Bernard, Paris, 1890-1891.

- «Les géométries non euclidiennes», *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 2, 1891: 769-774, oppure in: H. Poincaré, *La science et l’hypothèse*, Flammarion, Paris, (1902), 1968, chap. III.

- «Le problème des trois corps», *Revue générale des sciences pures et appliquées,* II (1891): 1-5, oppure in *Œuvres*, cit., VIII, pp. 529-37.

- «Sur l’analysis situs», *Comptes rendus de l’academie de France*, 115, 1892: 633-636 oppure in *Œuvres*, cit., VI, pp. 189-192.

- *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière*, Georges Carré, Paris, 1892.

- *Thermodynamique. Leçons professées pendant le premier semestre 1888-1889, par H. Poincaré, membre de l'Institut. Rédigées par J. Blondin, agrégé de l'Université,* Georges Carré, Paris,1892.

- *Théorie de l'élasticité*, Georges Carré, Paris, 1892.

- «Le formes d’équilibre d’une masse fluide en rotation», *Revue générale des sciences pures et appliquées*, III, 1892: 809-15, oppure in *Œuvre*s, cit., VII, pp. 203-17.

- *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* 3 Vols., Gauthier-Villars, Paris, 1892-1899.

- «Sur les géométries non euclidiennes», *Revue générale des sciences pure et appliquées*, 3, 1892: 74-75.

- «Mécanisme et expérience», *Revue de métaphysique et de morale*, 1, 1893: 534-537.

- «Analysis Situs», *Journal de l’école Polytechnique*, 1895, ser.2 (1): 1-121, oppure in *Œuvres*, cit., VI, pp. 193-288.

- «L’espace et la géométrie», *Revue de métaphysique et de morale*, 3, 1895: 631-646.

- *Calcul des probabilités,* Gauthier-Villars, Paris, 1896.

- «Sur le rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique», *Acta Mathematica,* 21, 1897: 331-341.

- «Les idées de Hertz sur la mécanique», *Revue générale des sciences*, 8, 1897: 734- 743, oppure in *Œuvres,* cit., VII, pp. 231-250.

- «On the Foundations of Geometry», *The Monist*, 9, 1898: 1-43. (Tradotto da Thomas J. McCormack a partire da un manoscritto di Poincaré. Ritradotto in francese: *Des fondements de la géométrie*, Chiron, Paris. Parzialmente pubblicato come capitolo V di *La science et l'hypothèse*).

- «A propos de la Théorie de M. Larmor», *Eclairage Electrique*, t. III e IV, 1895, oppure in *Œuvres,* cit., IX, pp. 369-426

- «La mesure du temps», *Revue de métaphysique et de morale*, 6, 1898: 1-13;. parzialmente ripubblicato in: H. Poincaré, *La valeur de la scienc*e, Flammarion, Paris 1905.

- «Sur la stabilité du système solaire», *Annuaire du Bureau des longitudes*, pp. B1-B16, oppure in *Revue scientifique*, ser 4, IX, 1898: 609-613, oppure in *Œuvres,* VIII, pp. 538-47.

- «Réflexion sur le calcul des probabilités», *Revue générale des Sciences Pure set Appliquées*, 10, 1899: 262-269.

- «Complèment à l'Analysis Situs», *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo,* 13, 1899: 285-343 oppure in *Œuvres*, cit., VI, pp. 290-337.

- «Des fondements de la géométrie. A propos d'un livre de M. Russell», *Revue de Métaphysique et de Morale*, VII, 1899: 251-279.

- *La théorie de Maxwell et les oscillations hertziennes. La télégraphie sans fil*, G. Carré & C. Naud, Paris 1899.

- «Second complèment à l'Analysis Situs», *Proceedings of the London Mathematical Society,* 32, 1900: 277-308, oppure in *Œuvres*, cit., VI, pp. 387-370.

- «Les géométries non euclidiennes» in: Rouché, E., de Comberousse, Ch., *Traité de géométrie,* Gauthier-Villars, Paris 1900, pp. 581-583.

- «Sur les principes de la géométrie. Réponse à M. Russell», *Revue de métaphysique et de morale,* 8, 1900: 73-86.

- «Les relations entre la physique expérimentale et la physique mathématique», *Rapports du Congrès international de physique*, tome I, Paris, 1900, pp. 1-29, oppure in *Revue générale des sciences pures et appliquées,* 11: 1163-1175, e in *Revue scientifique,* 14, 4ème série: 705-715. Parzialmente ripubblicato in *La science et l'hypothèse*, capitoli IX e X.

- «La théorie de Lorentz et le principe de réaction», *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles*, 2ème série, 5, 1900: 252-278, oppure in *Œuvres*, cit., IX, pp. 464-488.

- «Sur les principes de la mécanique» in *Bibliothèque du Congres International de Philosophie tenu à Paris du 1 au 5 août 1900*, Colin, Paris 1901, pp. 457-494.

- «Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'Analysis Situs», *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1902, *30*: 49-70, oppure in *Œuvres*, cit., VI, pp. 373-392.

- «Sur les cycles des surfaces algébriques; quatrième complément à l'Analysis Situs», *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 8, 1902: 169-214 oppure in *Œuvres*, cit., VI, pp. 397-434.

- *La science et l'hypothèse,* (1902) Flammarion, Paris 1968.

- «Les fondements de la géométrie», *Journal des savants*, 1902: 252-271, oppure in *Œuvres*, cit., XI, pp. 92-113.

- «L'espace et ses trois dimensions», *Revue de métaphysique et de morale*, 11, 1903: 281-301 e 407-429. Parzialmente ripubblicato in *La valeur de la science*, capitoli, III et IV.

- «L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique», *Bulletin des sciences mathématiques*, 28, 1904, 2ème série: 302-324, oppure in *La revue des idées*, 1ère année, (15 novembre 1904): 801-814, anche in *La valeur de la science*, cap. VII, VIII e IX.

- «Cinquième complément à l'Analysis Situs», *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 18, 1904: 45-110, oppure in *Œuvres*, cit., VI, pp. 435-498.

- *La valeur de la science*, (1905) Flammarion, Paris 1970.

- «Sur la dynamique de l'électron», *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 140, 1905, pp. 1504-1508. *Œuvres*, IX, pp. 489-493, oppure in *La mécanique nouvelle. Conférence, mémoire et notes sur la théorie de la relativité*, par E. Guillaume, Gauthier-Villars, Paris 1924, pp. 77-81.

- «Sur la dynamique de l'électron», *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 21, 1906: 129-176, oppure in *Œuvres*, cit., IX, pp. 494-550.

- «La fin de la matière», *Athenaeum*, 4086 (17 février 1906): 201-212.

- «Le hasard», *Revue de mois*, III, 1907: 257-76, oppure in *Science et méthode*, Flammarion, Paris, (1908), 1970, pp. 64-94, oppure in *Science et Méthode, Philosophia Scientiae*, 1998-1999, Cahier Spécial 3, pp. 59-79.

- *The value of science*, Dover, New York 1907, rist. 1958.

- *Science et méthode*, Flammarion, Paris 1908.

- «Sur la théorie des quanta», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, CLIII, 1911: 1103-1108.

- «L'hypothèse des quanta», *Revue Scientifique*, ser. 4, XVII, 1912: 225-232.

- «Pourquoi l'espace a trois dimensions», *Revue de métaphysique et de morale*, 20, 1912: 483-504, oppure in *Dernières pensées*, Flammarion, Paris 1913, cap. III.

- «L'espace et le temps», *Scientia (Rivista di Scienza)*, 12, 191: 159-171.

- «Les conceptions nouvelles de la matière», *Foi et vie* (Paris), 15, 1912: 185-191.

- *La dynamique de l'électron*, Dumas, Paris 1913.

- *Dernières pensée,* Flammarion, Paris 1913.

- «Analyse des ses travaux scientifiques fait par H. Poincaré», *Acta Mathematica,* 38, 1921: 36-135.

- «Les Limites de la Loi de Newton», cours Sorbonne (1906-07), *Bulletin astronomique (observatoire de Paris), Gauthier-Villars*, XVII, 1953: 121-269.

- *Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsiennes*, par J. Gray et S. Walter, Akademie Verlag, Berlin-Albert Blanchard, Paris 1997.

Corrispondenza di Jules-Henri Poincaré:

Dugac, P., «La correspondance de Henri Poincaré avec des mathématiciens de A à H», *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 7, 1886: 59-219.

—, «Henri Poincaré. La correspondance avec des mathématiciens de J à Z», *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 10, 1889: 83-229.

Miller, A.I., «A Glimpse into Poincaré Archives», *Philosophia Scientiae,* 2 (3), 199: 51-72.

Nabonnand, P., «The Correspondance Between Poincaré and Mittag-Leffler», *The Mathematical Intelligencer*, 21, 1999: 58-64.

Poincaré, H., «Correspondance d'Henri Poincaré et de Felix Klein (1881, 1882)», *Acta Mathematica*, 39: 94-132, oppure in *Œuvres*, cit., XI, pp. 26-65.

—, *La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler / Présentée et annotée par P. Nabonnand. Avec en annexe les lettres échangées par*

Poincaré avec Fredholm, Gyldén et Phragmén, Birkäuser Verlag, Basel 1999.

—, *La correspondance entre Henri Poincaré et les physiciens, chimistes et ingénieurs*, présentée et annotée par Scott Walter en collaboration avec Étienne Bolmont et André Coret, Birkhäuser, Basel, 2007.

La Correspondance d'Henri Poincaré, édition électronique, sous la direction des Archives Henri Poincaré, version du 2007-12-13.

Opere di altri autori

Aristotele, *De coelo* in *Opere complete*, a cura di G. Giannantoni, Laterza, Bari, 1982-1984.

Bachelard, G., *La dialectique de la durée*, P.U.F., Paris 1950.

Bertrand, J., «Le lois du Hasard» in *Calcul des Probabiltés*, Gauthier-Villars, Paris 1889.

Born, M., «The conceptual Situation in Physics and the Prospects of the future», *Proc. Phys. Soc.*, 1953, 66: 501-513 oppure, in tedesco, in: Id., *Physik im Wandel Meiner Zeit*, Friedr. Vieweg, Braunschweig 1957.

—, « Statistical interpretation of quantum mechanics », *Science*, 1955, 122: 675-679 oppure in: Id., *Physik im Wandel Meiner Zeit*, Friedr. Vieweg Braunschweig, 1957.

—, «Ist die klassische Mechanik tatsäschlich deterministisch?», *Phys. Blätter*, 1955, 11: 49-54.

Born, M., Born, H., Einstein, A., *Briefwechsel 1916-1955*, Nymphenburger, München 1969.

Boutroux, E., *De la contingence des lois de la nature*, Presses Universitaires de France, Paris 1874.

—, *De l'idée de loi naturelle dans la science et la philosophie contemporaines*, Lecène, Oudin et Cie, Paris 1895.

—, «Henri Poincaré», *La Revue de Paris*, 20, 1913: 673-702.

—, «L' œuvre philosophique», in: Volterra, V., Langevin, P., Boutroux, P., *Henri Poincaré. L'œuvre scientifique, l'œuvre philosophique*, Alcan, Paris 1914, pp. 205-259.

Borel E., «La Valeur Pratique du Calcul des Probabilités», *La revue du Mois*, 1, 1906: 424-437.

—, *Le Hasard*, Alcan, Paris 1914.

Briot, C., Bouquet, J. C., «Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles», *Journal de l'École Polytechnique*, Cahier XLV, 1878: 13-26.

Cartan, E., «Sur les invariants intégraux des certaines espaces homogènes clos et les propriétés topologiques des ces espace» in *Œuvres Complètes*, 3 parts, Gauthiers-Villars, Paris, 1952, part. 1, vol. 2, pp. 1081-1125.

Cassirer, E., *Determinismus und Indeterminismus in der modernen Physik*, Elanders Botryckery Aktiebolag, Göteborg, 1938; trad. it., *Determinismo e indeterminismo nella fisica moderna*, a cura di G. A. de Toni con una presentazione di Giulio Preti, La nuova Italia, Firenze 1970.

Cauchy, A.-L., «Memoires sur le calcul des limites», *Comptes rendus des séances de l'Academie Sciences*, tomi XIV, XV, XVI.

Clairaut, A., «Du système du monde dans les principes de la gravitation universelles» in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, anno 1745, stampato 1749, pp. 329-364.

D'Alembert Le Rond, J.-B., «Méthode générale pour determiner les orbites et les mouvements de toutes les planets, en ayant égard à leur action mutuelle», *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*, Paris, anno 1745, stampato 1749, pp. 365-390.

De Brunetière, F. «Après une visite au Vatican», *Revue des deux Mondes*, CXXVII, 1895: 97-118.

Delaunay, C.-E., «Nouvelle théorie analytique du mouvement de la lune», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 1846, 23: 968-970.

—, «Théorie du movement de la lune I», *Mémoire de l'Académie des Sciences*, 1860, 28: 1-883.

—, «Théorie du movement de la lune II», *Mémoire de l'Académie des Sciences*, 1867, 29: 1-931.

De Montessus, R., «A propos du Hasard», *Revue du Mois*, II, 1907: 364-369.

Descartes, R., *Principia Philosophiae*, trad. it. a cura di Paolo Cristofolini, *I principi della filosofia*, Bollati Boringhieri, Torino 1967, rist. 1992.

—, *Le Monde ou traité su la lumière*, trad. it. a cura di Eugenio Garin, Gallo Galli, Maria Garin, *Il Mondo o Trattato della luce*, Laterza, Roma-Bari 1986.

Enriques, F., *Lezioni di Geometria Proiettiva*, Zanichelli, Bologna 1898, rist. 1904.

—, *Problemi della Scienza*, Garzanti, Bologna 1906, 2ª ed. ampliata 1909, rist. 1989.

—, *Il significato della storia del pensiero scientifico,* nuova ed. a cura di M. Castellana e A. Rossi Barbieri, Taranto 2004.

—, «A propos du Mouvement Philosophique en Italie», *Revue du Mois,* 3, 1907: 370-371.

Euler, L., *Theoria motuum Lunae. Nova methodo pertractata (1772),* in Id., *Opera Omnia,* ser. 2, 31 Vols, vol. 22, Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, Lausanne 1958.

Flammarion, C., *Lumen,* Flammarion, Paris 1872, rist. 1887.

Gyldén, J. A. H., «Untersuchungen über die Convergenz der Reigen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet warden», *Acta Mathematica,* 9, 1887: 185-294.

—, «Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes», *Acta Mathematica*, 1891, 15: 65-189.

—, «Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planets», *Acta Mathematica,*1893, 17: 1-168.

Heidegger, M., «La questione della Tecnica», trad. it a cura di Gianni Vattimo, in Heidegger, M., *Saggi e Discorsi,* Mursia, Milano 1976.

Hill, G. W., *On the part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and Moon*, John Wilson & Son, Cambridge 1877, oppure in *Acta Mathematica*, 8, 1886: 1-36, e in Id., *Collected Mathematical Works*, 4 Vols., vol. 1, No 29, Carnegie Institution, Washington 1905, pp. 243-270.

—, «Researches into the Lunar Theory», *American Journal of Mathematics*, 1878, I: 5-26: 129-147, 245-260, oppure in *Collected Mathematical Works*, vol. 1, (cité nota 108) No 32, pp. 284-335.

Huygens, C., *Œuvres complètes de Christiaan Huygens*, 22 vols. Vol 8, Société Hollandaise des sciences, La Haye 1888.

Jacobi, K. G. J., «Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 15, 1842: 236-255.

Klein, F., *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, Deichert Erlangen, 1872, anche in Id., *Gesammelte matematische abhandlungen*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1973; trad. it. a cura di Bernardo Antonio *Il programma di Erlangen*, La Scuola, Brescia 1998.

Kovalevskaja, S., «Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe», *Astronomische Nachrichten,* 1885, n° 2643.

—, *Memorie d'infanzia,* ed. italiana a cura di Laura Guidotti Pendragon, Bologna 2000.

Lagrange, J.-L., «Essai sur le problème des trois corps» in Lagrange, J.-L., *Œuvres completes*, 14 Vols, vol. 6, Gauthier-Villars, Paris 1873, pp. 229-234.

Laplace, P.-S., «Essai philosophique sur les probabilités» in Laplace, P.-S., *Œuvres complètes de Laplace*, Gauthier-Villars, Paris 1878-1912; trad. it. a cura di S. Oliva e F. Abergamo, *Saggio filosofico sulle probabilità*, Laterza, Roma-Bari 1951.

—, *Traité de Mécanique Céleste*, 5 Vols, Gauthier-Villars, Paris 1891-1904.

—, *Exposition du système du monde*, Fayard, Paris, rist. 1996.

Leibniz, G. W., «De analysis Situs» in Leibniz, G. W., *Mathematische Schriften*, 7 vols., vol. 5, Georg Olms verlag, Hildesheim, Zurich, New York 2004.

—, «Studies in a Geometry of Situation with a letter to Christian Huygens» in *Philosophical papers and letters*, ed. by Leroy E. Loemker, Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston 1969, pp. 248-258.

—, «Brevis demostratio erroris memorabilis cartesii et aliorum circa legem naturalem, secundum quam volunt a Deo eandem semper quantitatem motus conservar, qua et in re mechanica abutuntur», *Acta eruditorum*, 1686, pp. 161-163.

—, *Opuscoles et fragments inédits de Leibniz*, Alcan, Paris 1903.

—, *Monadologie*, accompagnée d'éclaircissements par Emile Boutroux, Delagrave, Paris 1881.

—, *Monadologia*, trad. it a cura di Salvatore Cariati con testo originale a fronte e aggiunta della versione latina e tedesca, Bompiani, Milano 2001.

Le Roy, E., «Science et Philosophie», *Revue de Métaphysique et de Morale*, 7, 1899: 375-425, 503-562, 708-751 e in *Revue de Métaphysique et de Morale*, 8, 1900: 37-72.

Li, T. Y., Yorke, J. A., «Period Three Implied Chaos», *The American Mathematical Monthly*, 82, 20, 1975: 985-992.

Lindstedt, A., «Beitrag zur integration der differentialgleichungen der störungstheorie», *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétrsbourg*, (7), 31, No. 4, 1883: 1-19;

—, «Sur la forme des expressions des distances mutuelles dans le problem des trois corps», *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 97, 1883: 1276-1278, 1253-1255.

—, «Sur la détermination des distances mutuelles dans le problèm des trois corps», *Annales de l'École Normale*, (3), 1, 1884: 85-102.

Lorenz, E., «Deterministic Non-periodic Flow», *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20, 2, 1963: 130-141.

Lyapunov, A. M., «Sur la stabilité des figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation», *Annales de la Faculté. des sceinces de Touluse*, (2), 6, 1904: 5-116.

Marabo, C., *A travers deux siècles, souvenirs et rencontres (1883-1967)*, Grasset, Paris 1967.

Maxwell, J. C., *On the Stability of the Motion of Saturn's Rings*, Mac Millan, London, 1859, oppure in Maxwell J.C., *The scientific Papers of James Clerk Maxwell*, 2 vols., Dover, New York 1965, vol. I, pp. 289-374.

Newton, I., *Opticks*, 3.31, Dover Pubblication, London: 4th ed., 1730, rist., New York 1979.

Pauli, W., «Der Einfluss archetypischer Vorstellungen auf die Bildung naturwissenschaftlichen Theorien bei Kepler» in *Naturerklärung und Psyche*, Rascher Verlag, Zürich 1952. pp. 119-190; trad. it a cura di Giuseppe Trautteur, «L'influsso delle immagini archetipiche sulla formazione delle teorie scientifiche di Keplero» in *Natura e Psiche*, Adelphi, Milano 2006, pp. 57-122.

Peirce, C.S., «The Doctrine of Necessity Examined», *The Monist*, n. 2, 1892: pp. 321-337.

Platone, *La Repubblica*, ed. a cura di Giuseppe Lozza, Arnoldo Mondadori, Milano 1990.

—, *Timeo*, ed. e cura di Giovanni Reale, Bompiani, Milano 2000.

Popper, K., *Logik der Forschung*, Springer, Vienna 1934; tradottp in inglese dallo stesso autore: *The Logic of Scientific Discovery*, Springer, Berlin 1959.

—, *Conjectures and Refutations*, Routledge and Kegan Paul, London 1969.

—, «Indeterminism in Quantum Physics and in Classical Physics», *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 1, No. 2 (Aug., 1950): 117-133.

—,«Indeterminism in Quantum Physics and in Classical Physics», *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 1, No. 3 (Nov., 1950):173-195.

Reichenbach, H., *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*, De Gruyter, Berlin & Leipzig 1928, pubblicato anche in *Gesammelte Werke Bd. 2*, Vieweg Verlag, Braunschweig 1977; tr. ingl. a cura di M. Reichenbach, *Philosophy of Space and Time*, Dover Pubblication, New York 1958; trad. it. dall'inglese a cura di A. Carugo, *Filosofia dello spazio e del tempo*, Feltrinelli, Milano 1977.

Renouvier, C., *Esquisse d'une classification systématique des doctrines philosophiques*, Critique philosophique, Paris 1885-1886.

Riemann, B., «Über die Hypotesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen», in *Bernhard Riemann Gesammelte mathematische Werke, wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Fac-simile dell'edizione di Leipzig: B.G. Teubner 1892, pp. 304-319.

Ruelle, D., Takens, F., «On the nature of turbulence», *Communications of Mathematical Physics*, 20,1971: 167-192.

Russell, B., *An Essay on the Foundations of Geometry*, Dover Publications, New York 1897.

Smale, S., «What is global analysis?», *American Mathematical Monthly*, 76, 1, 1969: 4-9.

Sturm, J. C.-F., «Mémoire sur les équations differentielles linéaires du second ordre», *Journal de Mathematiques Purées et Appliquées*, I, 1836: 106-186.

Sundman, K. F., «Recherches sur le problème de trois corps», *Acta Societatis Scientiarum Fennicae*, 34. N° 6, 1907: 1-43.

—, «Nouvelles recherces sur le problème des trois corps», *Acta Societatis Scientiarum Fennicae,* 35, N° 9, 1909: 1-27.

—, «Mémoire sur le problème des trois corps», *Acta Mathematica,* 36, 1912: 105-179.

Tait, P. G., Thomson, W., *A Treatise of Natural Philosophy*, Cambridge university press, Cambridge 1879.

Volterra, V., *Saggi scientifici*, Zanichelli, Bologna 1920 rist.1990.

Weierstrass, K., «Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen», *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissen-schaften zu Berlin*, II, 1885: 633-639.

—, «Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen», *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissen-schaften zu Berlin*, II, 1885: 789-805.

Fonti secondarie

A.A.V.V., *La querelle du déterminisme. Philosophie de la science d'aujourd'hui*, Gallimard, Paris 1990.

Adhémar, R., *Henri Poncaré,* Libraire Bloud et Gay, Paris 1914.

Aiton, E., *Leibniz,* trad it. a cura di M. Mugnai, il Saggiatore, Milano 1991.

Alexander, H. G., *The Leibniz-Clarke correspondence*, Manchester University press, Manchester 1956, rist.1998.

Allen, J. P., *Genesis in Egypt. The philosophy of ancient Egypt creation accounts* New Haven, Connecticut 1988.

—, «The cosmology of the Pyramid Texts» in Allen J. P., Assmann J., Lloyd A. B., Ritner R. K., Silverman D. P., *Religion and philosophy in ancient Egypt*, New Haven Connecticut 1989.

Anderson, K.G., «Poincaré's discovery of Homoclinic Points», *Archive for history of exact sciences*, 48, 1994: 133-147.

Assman, J., *La morte come tema culturale. Immagini e riti mortuari nell'antico Egitto*, Einaudi, Torino 2002.

Appell, P., *Henri Poincaré*, Plon, Paris 1925.

Aubin, D., Dahan, A., «Writing the history of Dynamical System and Chaos: Loungue Durée and Revolution, Disciplines and Cultures», *Historia Mathematica*, 29, 2002: 273-339.

Bailly, F., Longo G., *Mathématiques et sciences de la nature*, Hermann, Paris 2006.

Barker, P., Goldstein, B. R., «Theological Foundation of Kepler's Astronomy», *Osiris*, 2001, 16: 88-113.

Barletta G., *Chronos. Figure filosofiche del tempo*, Dedalo, Bari 1992.

Barrow-Green, J., «Oscar II's prize competition and the error in Poincaré's memoir on the three body problem», *Arch. Hist. Exact Sci.* 48 (2), 1994: 107-131.

—, *Poincaré and the Three Body Problem*, American Mathematical Society/London Mathematical Society, Providence 1997.

—, «Henri Poincaré, memoir on the three body problem» in Grattan-Guinness, I., Cooke R., (eds.), *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, Elsevier, Amsterdam 2005, pp. 627-638.

Bartocci, C., «Equazioni e orbite celesti: gli albori della dinamica topologica» in: Poincaré, J. H., *Geometria e caso*, Bollati Boringhieri, Torino 1995, pp. XIII-XV.

—, «La geometria del sapere» in: Poincaré, J.-H., *Scienza e metodo*, Einaudi, Torino 1997, pp. VII-XVII.

Belaval Y., *Leibniz. Initiation à sa philosophie*, Vrin, Paris 1952.

—, *Leibniz critique de Descartes*, Gallimard, Paris 1960.

Bellone, E., «Newton» in: Rossi, P., (diretta da), *Storia della scienza moderna e contemporanea*, cit., pp. 419-447.

—, «Il modello a nebulosa: Laplace e Herschel» in: Rossi, P., (diretta da), *Storia della scienza moderna e contemporanea*, cit., vol. I, pp.751-755.

Bergé, P., Dubois, M., «Chaos déterministe expérimental et attracteurs étranges» in: Chabert J.- L., Dalmedico A. (eds.), *Chaos et déterminisme*, cit., pp. 115-169.

Bertuglia, C. S., Vaio, F., *Non linearità, Caos, Complessità*, Bollati Boringhieri, Torino 2003.

Blair, A., «Natural Philosophy» in: Park K., Daston L., *The Cambridge History of Science*, 7 Vols., Cambridge University press, Cambridge 2006, vol.3, pp. 365-405.

Bocchi, G., Ceruti, M., (ed.), *La sfida della Complessità*, Feltrinelli, Milano 1985.

Boi, L., «Filosofia trascendentale, convenzionalismo e realismo matematico. Un tentativo di reinterpretazione», in: Collectif (Ed.), *La scienza tra filosofia e storia in Italia nel novecento*, Roma 1987, Edizione della Presidenza del Consiglio dei Ministri, pp. 443-463.

Boi, L., Flament D. & Salanskis J.-M. (ed.), *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, Springer, Berlin 1992.

—, *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*, Springer Hedelbeg, Berlin and New York 1995.

—, «La conception qualitative des mathématiques et le statut épistémologique du concept de groupe», in: Greffe, J. L., Heinzmann, G., Lorenz K., (ed.), *Henri Poincaré. Science et philosophie*, Akademie-Blanchard, Berlin-Paris 1996, pp. 315-332.

—, «Sur la philosophie de Henri Poincaré», *Préfaces*, 5, 1998: 127-130.

—, «Le 'synthétique a priori' et le conventionnalisme géométrique de Poincaré» in: Petitot, J. (Ed.), *Rationalité et objectivité-Actes du Colloque de Cerisy*, Editions Patino, 1993.

—,«Mathematical, physical and epistemological remarks on symmetry, symmetry breaking and bifurcation in dynamical systems» in: Boi, L. (ed.), *Symétries, Brisures des Symétries et Complexité, en mathématiques, physique et biologie*, Peter Lang, Berne 2005, pp. 1-52.

—, «Geometry of dynamical systems and topological stability: from bifurcation and chaos to dynamics in the natural and life sciences», *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2008, forthcoming.

—, et Bois, E., «Mathématiques créatives, physiques significatives et le livre ouvert de la nature: quelque remarks sur la théorie des systèmes dynamiques, l’espace des phases et le statut du temps», *Cahiers du Cams*, 73, Ehess, Paris 2007.

Botterweck, J., Ringgren H. (ed.), *Grande Lessico dell’Antico Testamento*, 7 vols., Vol. 1, Paideia, Brescia 2007, pp. 335-342.

Bouquiaux, L., *L’harmonie et le chaos. Le rationalisme leibnizien et la “nouvelle science”*, Editions de l’institut supérieur de philosophie Louvain-La-Neuve, Paris 1994.

Boutot, A., *L’invention des formes*, Editions Odile Jacob, Paris 1993.

Bracco, C., Provost, J.P., «Poincaré et l’éther relativiste», *Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales*, 211, 2005: 11-36.

Brenner, A. «Géométrie et genèse de l’espace selon Poincaré», *Philosophiques*, vol. 31, n. 1, 2004: 115-130.

Bucciantini, M., *Galileo e Keplero. Filosofia, cosmologia e teologia nell'Età della Controriforma*, Einaudi, Torino 2003.

Camerota, M., *Galileo Galilei e la cultura scientifica nell'età della Controriforma*, Salerno Editrice, Roma 2004.

Caspar, M., *Johannes Kepler*, W.Kohlhammer, Stuttgart 1948.

Cavallo, G., Messina A., «Cosmologia», *Enciclopedia Einaudi*, 16 vols., Vol. 3 Einaudi, Torino 1977-1984, pp. 1193-1249.

Ceruti, M., *La danza che crea. Evoluzione e cognizione nell’epistemologia genetica*, Feltrinelli, Milano 2000.

Chabert, J.-L., Chemla, K., Dalmedico Dahan, A., (ed.), *Chaos et Déterminisme*, Editions du seuil, Paris 1992.

Chabert, J.-L., Dahan Dalmedico, A., «Les idées nouvelles de Poincaré» in: Chabert J.- L., Chemla, K., Dahan Dalmedico, A. (ed.), *Chaos et déterminisme*, cit., pp. 274-305.

Cottingham, J., *The Cambridge Companion to Descartes*, Cambridge University Press, Cambridge 1992.

Cox, C. B., «A defence of Leibniz’s spatial relativism», *Studies in History and Philosophy of Science*, 6 (2), 1975: 87-111.

Crombie, A. C., *Augustine to Galileo: The History of Science A.D. 400-1650*, Harvard University Press, Cambridge, 2nd Edition 1961; trad. it., *Da Sant’Agostino a Galileo. Storia della scienza dal V al XVII secolo*, Feltrinelli, Milano 1982.

Cvitanovic, P., *Universality in Chaos*, Adam Hilger, Bristol 1984.

Dahan Dalmedico, A., «La difficile héritage de Henri Poincaré en systèmes dynamiques» in: Greffe J.-L., Heinzmann G., Lorenz K. (eds.), *Henri Poincaré. Science et philosophie*, cit., pp. 13-33.

—, «Le déterminisme de Pierre-Simon Laplace et le déterminisme aujourd'hui» in: Dahan Dalmedico, A. Chambert, J. L., Chemla, K. (eds.), *Chaos et déterminisme*, Éditions du Seuil, Paris 1992, pp. 371-406.

Dantzig, T., *Henri Poincaré, critic of crisis*, Charles Scriber's sons, New York 1954.

Deakin M., «Nineteenth Century Anticipations of Modern Theory of Dynamical Systems», *Arch. For Hist. of Exact. Sci*., XXXIX, 1988, 2: 183-194.

Deason, G. B., «Reformation Theology and the Mechanistic Conception of Nature» in: Lindberg D. C.,. Numbers R. L (ed.), *God and Nauture. Historical Essays on the Encounter Between Christianity and Science*, University of California Press, London-Berkeley-Los Angeles 1986, pp. 167-191; trad. it. a cura Paolo Lombardi, «La teologia riformata e la concezione meccanicista della natura» in *Dio e Natura. Saggi storci sul rapporto tra cristianesimo e scienza*, La Nuova Italia, Firenze 1994, pp. 195-226.

De Ferrari, A. «Cassini, Giovan Domenico», *Dizionario biografico degli Italiani*, vols. 68, Istituto Enciclopedia Italiana Treccani, Roma 2005, vol. 21, 484-487.

Deleuze, G., *Le Pli. Leibniz et le Baroque*, Les Éditions de Minuit, Paris 1988, pp. 5-19; trad. it, *La piega. Leibniz e il Barocco*, Einaudi, Torino 1990.

Dear, G. F., «Determinism in Classical Physics», *The British Journal for the Philosophy of Science*, 11, 44, 1961: 208-304.

Denjoy, A., «Un savant français: Henri Poincaré», *Revue Philosophique de la France et de l'Etranger*, XC, 1920: 321-350.

De Santillana, G., von Dechend, H., *Hamlet's Mill. An essay on myth and the frame of time*, David R. Godine, Boston 1969; trad. it. a cura di Alessandro Passi e Saverio Marchignoli, *Il mulino di Amleto. Saggio sul mito e sulla struttura del Tempo*, Adelphi, Milano 1983, rist. seconda ed. 2006.

—, *Reflections on Men and Ideas*, Massachussetts Institute of Technology, Cambridge 1968; trad. it. a cura di Alessandro Passi e Romano Mastromattei, *Fato antico, Fato moderno*, Adelphi, Milano 1985.

Dieudonné, J., «Poincaré, Jules-Henri» en Gillespie, C. C., *Dictionary of Scientific Biography*, 17 Vols, vol. 11/12, Scriber's Sons, New York 1981, pp. 51-61.

Domar, Y., «On the foundation of Acta matematica», *Acta Mathematica*, 148, 1982: 3-8.

Donahue, W., «Astronomy» in: Park, K., Daston, L., *The Cambridge History of Science Cambridge University press,* Cambridge 2006, pp. 562-595.

Drago, A., *La riforma della dinamica secondo G.W. Leibniz,* Hevelius, Benevento 2003.

Dreyer, J. L. E., *History of the planetary systems from Thales to Kepler* (1906); trad. it. *Storia dell'astronomia da Talete a Keplero*, Feltrinelli, Milano 1953, rist. 1980.

Duchensneau, F., *La dynamique de Leibniz,* Vrin, Paris 1994.

Dugac, P. «Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874-1883)» *Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques*, 5, 1984: 49-285.

Dugas, R., *Histoire de la mécanique*, Griffon, Neuchâtel 1950.

Duhem, P., *La Theorie Physique Son Objet-Sa Structure*, 2. Edition Marcel Rivière, Paris 1914.

During, E., *La Science et l'hypothèse*, Ellipses, Paris 2001.

Eckmann, J.-P., «Mesures dans un système dynamique chaotique» in: Chabert J.-L., Dalmedico A. (eds.), *Chaos et déterminisme,* cit., pp. 91-114.

Ekeland, I., *Le Calcul, l'Imprevu, les figures du temps de Kepler à Thom*, Editions du Seuil, Paris 1984.

—, *Au Hasard, la chance, la science et le monde*, Editions du seuil, Paris 1991.

—, *Le meilleur des mondes possibles,* Editions du seuil, Paris 2000.

Eisler, R., *Wörterbuch der philosophischen Begriffe*, 3 voll., E. S. Mittler und Sohn, Berlin 1910.

Ferrari, M., *Il neocriticismo*, Laterza, Bari 1997.

Field, J. V., *Kepler's Geometrical Cosmology*, The Athlone Press, New York 1988.

Folina, J., *Poincaré and the Philosophy of Mathematics,* Scots Philosophical Club, London 1992.

Friedman, M., «Poincaré's conventionalism and the logical positivists», *Foundations of Science*, vol. 1, n. 2, 1995: 299-314.

Fumagalli Beonio Brocchieri, M., Parodi, M., *Storia della filosofia medievale. Da Boezio a Wyclif*, Laterza, Roma-Bari, 2ª ed., 1998.

Galison, P., *Einstein's Clocks, Poincaré's Maps. Empires of Time,* Norton, New York 2003.

Garber D., *Descartes' Metaphysical Physics*, University of Chicago Press, Chicago 1992.

—, «Physics and Foundations» in: Park, K. Daston, L., *The Cambridge History of Science*, cit., pp. 21-69.

Gaukroger, S., *Descartes: An Intellectual Biography*, Claredon Press, Oxford 1995.

Gleick, J., *Chaos*, Viking Penguin Inc, New York 1987.

Geymonat, L., *Galileo Galilei*, Einaudi, Torino 1957.

Giannetto, E., «The Rise of Special Relativity: Henri Poincaré's Works Before Einstein», *Atti del XVIII congresso di storia della fisica e dell'astronomia*, pp. 171-207.

—, «Note sul tempo e sul moto attraverso la storia della fisica e le critiche filosofiche» in: Rossi, A., (ed.), *Atti del XIII Congresso Nazionale di Storia della Fisica*, Conte, Lecce 1995, pp. 9-43.

—, «Max Born e la nascita della nuova fisica del caos» in: Rossi, A., (ed.), *Atti del XIII Congresso Nazionale di Storie della Fisica*, Conte, Lecce 1995, pp. 189- 214.

—, «Physical Theories and Theoretical Physics» in: Rossi, A., (ed.), *Atti del XIII Congresso Nazionale di Storia della Fisica*, cit., pp. 163-177.

—, «Note storico-critiche sul mutamento e il 'realismo': Henri Poincaré, la Relatività Speciale e le Teorie Fisiche», in: Giuliani, G., (ed.), *Ancora sul Realismo. Aspetti di una controversia della fisica contemporanea*,Goliardica Pavese, Pavia 1995, pp. 241-249.

—, «La questione del tempo: Agostino e la fisica contemporanea» in Valle, L., Pulina, P., (ed.), *Sant'Agostino e l'Occidente*, Ibis, Como 1999, pp. 129-169.

—, «Elena Freda, Vito Volterra and the conception of hysterical nature» in: Babini, V. P., Simili, R., (eds.), *More than pupils, Italian Women in Science at the Turn of the 20th Century*, Olschki, Firenze, 2007, pp. 107-123.

—, «From the Electromagnetic Conception of Nature to Virtual Reality Physics», en Bevilacqua, F., Giannetto, E. A., *Volta and the History of Electricity*, Hoepli, Milano 2003, pp. 409-423.

—, *Saggi di Storie del Pensiero Scientifico*, Sestante, Bergamo 2005.

Giedymin, J., «On the Origin and Significance of Poincaré's Conventionalism», *Studies in History and Philosophy of Science*, 8, 1977: 271-301.

—, *Science and convention. Essay on Henri Poincaré's philosophy of science and the conventionalist tradition*, Pergamon Press, Oxford 1982.

—, «Geometrical and Physical Conventionalism of Henri Poincaré in Epistemological Formulation», *Studies in History and Philosophy of Science* 22, 1991: 1-22.

—, «Conventionalism, the Pluralist Conception of Theories and the Nature of Interpretation», *Studies in History and Philosophy of Science*, 23, 1992: 423-443.

Gilain, C., «La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles», *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 1991, XXXIV: 215-242.

Gilles, D., «Poincaré: conservative methodologist but revolutionary scientist», *Philosophia Scientiae*, I, 1996: 59-67.

Giudice, F., «Genesi e sviluppo della teoria newtoniana della luce e dei colori» in: Newton, I., *Scritti sulla luce e sui colori*, Bur, Milano 2006, pp. 5-125.

Goroff, D. L., «Henri Poincaré and the birth of chaos theory: an introduction to the English translation of Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste», in: Poincaré, J. H., *New Methods of Celestial Mechanics*, American Istitute of Physics, New York 1993, pp. 1-107.

Gould, J. A., «The origin of Poincaré's conventionalism», *Revue Internationale de Philsophie*, 1961, XV: 115-118.

Gray, J.J, «Poincaré, topological dynamics, and the stability of the solar system» in: Harman, P. M., Shapiro, A. E., *The investigations of difficult things, essays on Newton and the history of exact sciences in honour of D.T. Whiteside*, Cambridge University Press, Cambridge 1992, pp. 503-524.

—, «Poincaré and Klein-Groups and Geometries» in: Boi L, Jean-Michael Salanskis, Dominique Flament (eds.), *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, Mathematics and History*, Springer, Berlin 1992, pp. 35-44.

—, «Poincaré and electromagnetic theory» in: Greffe J.-L., Heinzmann G., Lorenz K. (eds.), *Henri Poincaré. Science et philosophie*, cit., pp. 193-208.

—, Scott W., «Introduction», in: Poincaré J.-H., *Trois suppléments sur la découverte des fonctions fuchsiennes*, Gray, J., Walter, S., (eds.), Akademie Verlag, Albert Blanchard, Berlin, Paris 1997, pp. 1-26.

Greffe, J.-L., Heinzmann, G., Lorenz, K., *Henri Poncaré. Science et philosophie*, Akademie Verlag, Berlin 1996.

Grünbaum, A., *Philosophical Problems of Space and Time*, Alfred Knopf, New York 1963; deuxième édition (élargie), Dordrecht, Reidel 1973.

Guerolt, M., *Dynamique et métaphysique leibniziennes. Suivi d'une Note sur le principe de la moindre action chez Maupertis*, Les Belles Lettres, Paris 1934.

Hacking, I., «Nineteenth century cracks in the concept of determinism», *Journal of the history of ideas*, July, 1983: 455-475.

Hacking, I., *The Taming of Chance*, Cambridge University press, Cambridge 1990.

Hadamard, J., «Les equations differentielles» in: Hadamard, J., «L'œuvre mathématique de Poincaré», *Acta Mathematica*, XXXVII, 1921: 203-287, anche in: J.-H. Poincaré, *Œuvres*,cit., XI, pp. 187-204.

Hadamard, J., «Le problème des trois corps» in: Volterra, V., Hadamard, J., Langevin, P., Boutroux, P., (ed.), *Henri Poincaré l'œuvre scientifique, l'œuvre philosophique*, Alcan, Paris 1914, pp. 51-114.

Hayles, N. K., (ed.), *Chaos and Order*, Chicago University press, Chicago 1991.

Heinzmann, G., *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano*, Blanchard, Paris 1986.

—, «Poincaré et la philosophie des mathématiques», *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 9, 1988: 99-121.

—, «Helmholtz and Poincaré's Considerations on the Genesis of Geometry» in: Boi, L., Flament, D., Salanskis, J.-M., (ed.), *1830-1930: A Century of Geometry. Epistemology, History and Mathematics*, Springer, Berlin/Heidelberg/New York 1992, pp. 245-249.

—, «The foundations of Geometry and the Concept of Motion: Helmholtz and Poincaré», *Science in Context*, Volume 14, Issue 3, 2001: 457-470.

—, «La Philosophie des sciences de Henri Poincaré» in *L'épistémologie française de 1850 à 1950* (ed. J. Gayon), PUF, Paris 2002.

Heisenberg W., *Lo sfondo filosofico della fisica moderna*, Sellerio, Palermo 1999.

Henkel, M., «Sur la solution de Sundman du problème des trois corps», *Philosophia Scientiae*, 5 (2), 2001: 161-184.

Holmes, P., *Poincaré, celestial mechanics, dynamical systems theory and "chaos"*, in «Physics Reports», CXCIII: 137-163.

Holton, G., *Thematic Origins of Scientific Thought: Kepler to Einstein*, Harvard University Press, Cambridge 1973.

Israel, G., «Il Determinismo e la teoria delle equazioni differenziali ordinarie» *Physis*, 1991, I, fasc. 2: 305-358.

—, *L'histoire du principe du déterminisme et ses rencontres avec les mathématiques* in: Dahan Dalmedico A., Chabert J.-L. Chambert, Chemla K. (eds), *Chaos et déterminisme*, cit., pp. 249-273.

Israel, G., Menghini, M., «The 'essential tension' at work in qualitative analysis: a case study of the opposite points of view of Poincaré and

Enriques on the relationships between analysis and geometry», *History Mathematica*, 1998, XXV: 379-411.

Jammer, M., *Concepts of Space. The History of Theories of Spaces in Physics*, Harvard University Press, Harvard 1954.

—, *Concept of Force. A study in the foundation of dynamics*, Harvard University Press, Cambridge 1957.

Jaeger, W., *Die Theologie der Fruhen griechischen Denker*, Kohlhammer, Stuttgart, 1953; trad. it., *La teologia dei primi pensatori greci*, La Nuova Italia, Firenze 1961.

Julia, G., «Henri Poincaré, sa vie et son œuvre» in *Le livre du centenaire de a naissance de Henri Poincaré 1854-1954*, Gauthier-Villars, Paris 1955, pp. 165-173.

Kargon, R. H., *Atomism in England from Hariot to Newton*, Claredon press, Oxford 1966; trad. it. a cura di Davide Panzeri, *L'atomismo in Inghilterra da Hariot a Newton*, Il Mulino, Bologna 1983.

Kline, M., *Storia del pensiero matematico*, 2 Vols., vol. 1, Einaudi, Torino 1972, rist. 1999.

Koestler, A., *The Sleepwalkers: A History of Man's Changing Vision of the Universe*, Macmillan, New York 1959, rist. Arkana, London 1989.

Koyré, A., *La revolution astronomique: Copernic, Kepler, Borelli*, Hermann, Paris, 1961; trad. it a cura di Libero Sosio, *La rivoluzione astronomica: Copernico, Keplero, Borelli*, Feltrinelli, Milano 1966.

—, *Newtonian Studies*, Havard University Press, Cambridge 1965; trad. it. a cura di Paolo Galluzzi, *Studi Newtoniani*, Einaudi, Torino 1972.

Kozhamthadam, J., *The Discovery of Kepler's Law: The Interaction of Science, Philosophy and Religion*, University of Notre Dame press, Notre Dame 1994.

Kuhn, T. S., *The Copernican Revolution: Planetar Astronomy in the Development of Western Thought*, Harvard University press, Cambridge 1957; trad. it., *La rivoluzione copernicana*: *L'astronomia planetaria nello sviluppo del pensiero occidentale*, Einaudi, Torino 2000.

Laskar, J., «La stabilité du système solaire» in: Chabert, J.-L., Chemla, K., Dahan Dalmedico, A., (ed.), *Chaos et déterminisme*, Editions de Seuil, Paris 1992, pp. 170-211.

Lindberg, D. C., *The beginnings of Western Science*, The University of Chicago Press, Chicago 1992.

Lindberg, D. C., Ronald L. Numbers (eds.), *God and Nauture. Historical Essays on the Encounter Between Christianity and Science*, University of California Press, London-Berkeley-Los Angeles 1986; trad. it. a cura di Paolo Lombardi, *Dio e Natura. Saggi storici sul rapporto tra cristianesimo e scienza*, La Nuova Italia, Firenze 1994.

Lolli, G., *La crisalide e la farfalla*, Bollati Boringhieri,Torino 2000.

Longo, G., «Savoir critique et savoir positif: l'importance des résultats négatifs», *Intellectia*, 40, 1, 2005: 109-113.

Lynn, S. J., «Scientific Explanation from Formal Causes to Laws of Nature» in: Park, K., Daston L., *The Cambridge History of Science*, 7 vols, Cambridge University Press, Cambridge 2006, vol. 3, pp 70-105.

Logunov, A. A., *On the articles by Henri Poincaré "On the dynamics of the Electron"*, (ed. originale in russo), Moscow University Press, Mosca 1988; trad. inglese a cura di G. Pontecorvo, *On the articles by Henri Poincaré "On the dynamics of the Electron"*, Publishing Department of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna 1995; trad. francese a cura di V. Petrov e Christian Marchal, *Sur les articles de Henri Poincare "Sur la dynamique de l'electron" Le texte fondateur de la Relativite, en langage scientifique moderne*, ONERA Pub, 2000-1.

Maiocchi, R., «Elementi per una storia del convenzionalismo francese», *Acme*, XXX, fasc. 2, 1977: 213-252.

Maiocchi, R., «Pierre Duhem's The aim and structure of physical theory: a book against conventionalism», *Synthese*, 83, 1990: 385-400.

Mamiani M., *Introduzione a Newton*, Laterza, Roma-Bari 1990.

—, *Storia della Scienza Moderna*, Laterza, Roma-Bari 1998 rist. 2002.

Marcolongo, R., *Il problema dei tre corpi. Da Newton (1686) ai nostri giorni*, Hoepli, Milano 1919.

Mates, B., *The philosophy of Leibniz*, Oxford university press, Oxford 1986.

Mawhin J., «The early reception in France of the work of Poincaré and Lyapunov in the qualitative theory of differential equations», *Philosophia Scientiae*, I, 1996: 119-133.

—, «Poincaré's early use of Analysis Situs in non-linear differential equation: Variation around the theme of Kronecker's integral», *Philosophia Scientiae*, 4 (1), 2000: 103-143.

—, «Borel, probability and *La Revue du Mois*», *Electronical Journal for History of Probability and Statistics*, 3, 1, 2007: 1-3.

Meli, D. B., «Mechanics» in: Park K., Daston L., *The Cambridge History of Science*, 7 Vols., vol. 3, Cambridge University press, Cambridge 2006, pp. 632-672.

Micheli, G, «Caos/Cosmo» *Enciclopedia Einaudi*, 16 vols., Vol. 2, Einaudi, Torino 1977-1984, pp. 572-587.

Miller, A. L., «A study of Henri Poincaré's *Sur la dynamique de l'électron*», *Archive for History of Exact Sciences*, X, 1973: 207-328.

—, «Why did Poincaré not formulate special relativity in 1905?» in: Greffe J. L., Heinzmann G., Lorenz K., *Henri Poincaré. Science et philosophie*, cit., pp. 69-100.

Mittag-Leffler G., «Zur Bioraphie von Weierstrass», *Acta Mathematica*, XXXV, 1912: 29-65.

Mooij, J.J.A., *La philosophie des mathématiques de Henri Poincaré*, Gauthier Villars, Paris 1966.

Mugnai, M. «On Leibniz's theory of relations», in *Leibniz: questions de logique*, Wiesbaden-Steiner, Stuttgart, 1988: 145-161.

—, *Introduzione alla filosofia di Leibniz*, Einaudi, Torino 2001.

Nagel, E., *The Structure of Science: Problems in the Logic of Scientific Explanation*, Harcourt, Brace & World, New York 1961.

Nye, M.J., «The Boutroux Circle and Poincaré's conventionalism», *Journal for the History of Ideas*, 40, 1979: 107-120.

Nowak, G., «The concept of Space and Continuum in Poincaré's Analysis Situs» in: Greffe, J. L., Heinzmann, G., Lorenz K., (ed.), *Henri Poincaré. Science et philosophie*, cit., pp. 365-377.

Parrini, P., «Il convenzionalismo di Poincaré. La controversia Russell-Poincaré e la critica di Duhem», in: Parrini, P., *Fisica e Geometria dall'Ottocento a oggi*, Loescher, Torino 1979.

—, *Empirismo logico e convenzionalismo*, Franco Angeli, Milano 1983.

Paty, M., «Physical Geometry and Special Relativity, Einstein and Poincaré» in: Boi, L., et al. (eds), *1830-1930: A Century of Geometry*, cit., pp. 127-149.

—, «Poincaré et le principe de relativité» in: Greffe, J-L., Heinzmann, G., Lorenz, K. (eds), *Henri Poincaré: science et philosophie*, cit., pp. 101-143.

—, «La place des principes dans la physique mathématique au sens de Poincaré», *Philosophia Scientiae*, 3 (2), 1998-1999: 61-74.

—,« La création scientifique selon Poincaré et Einstein », in Serfati, M., *La recherche de la vérité* Editions du Kankourou, Paris, 1999. pp. 241-280.

Peterson, I., *Newton's clock. Chaos in the Solar System*, Freeman, New York 1993.

Petitot, J., «Forme» in *Encyclopædia Univer*salis, 1990, 9: 712-728.

—, «Note sur la querelle du déterminisme» in: A.A.V.V, *La querelle du déterminisme*, cit., pp. 202-227.

Plato von, J., «Probability and determinism», *Philosophy of Science*, 49, 1982: 51-66.

Polizzi, G., (ed.), *Scienza epistemologia in Francia (1900-1970)*, Loescher, Torino 1979.

Prigogine, I., Stengers I., *La Nouvelle Alliance*, Gallimard, Paris 1979.

—, *Entre le temps et l'éternité*, Fayard, Paris 1988.

—, «La querelle du détérminisme, six ans après» in: A.A.V.V., *La querelle du déterminisme*, cit., pp. 247-265.

Prigogine, I., *Le leggi del caos*, Laterza, Bari 1993.

Proust, D., *L'harmonie des sphères*, Editions du Seuil, Paris 2001.

Psillos, S., «Poincaré's Conception of Mechanical Explanation» in: Greffe, J.-L., Heinzmann, G., Lorenz K., (eds.), *Henri Poincaré: science et philosophie*, Akademie Verlag, Berlin 1994.

Rollet, L., «The Grünbaum-Giedymin Controversy Concerning the Philosophical Interpretation of Poincaré's Geometrical Conventionalism» in: Zamiara, K. (ed.), *TheProblems Concerning the Philosophy of Science and Science Itself*, Wydawnictwo Fundacji Humaniora, Poznan 1995, pp. 225-274.

—, *Henri Poincaré: Des mathématiques à la philosophie. Étude du parcours intellectuel social et politique d'un mathématicien au tournant du siècle*, Éditions du Septentrion, Lille 2000.

Rossi, A., «Alle origini della scienza moderna: Niccolò Copernico», *Sapere*, luglio 1971

—, «La concezione del rapporto scienza-tecnica alle origini della fisica moderna», *Il Veltro*, 5-6, 1984.

—, «Il concetto di rivoluzione. Scienza, storia, epistemologia», *Studium*, 4, 1989.

Rossi, P., (diretta da), *Storia della scienza moderna e contemporanea*, 3 vols, vol. 1, Tea, Milano 2000.

—, «La filosofia meccanica» in: Rossi, P., *Storia della scienza moderna e contemporanea*, cit., pp. 229-259.

—, «Il fascino della magia e l'immagine della scienza» in: Rossi, P., *Storia della scienza moderna e contemporanea*, cit., vol. 1, pp. 31-57.

—, «La rivoluzione astronomica» in: Rossi, P., *Storia della scienza moderna e contemporanea*, cit., pp. 189-190.

—, «Galileo Galilei» in: Rossi, P., *Storia della scienza moderna e contemporanea*, cit., pp. 193-228.

Ruelle, D., *Hasard et Chaos*, Odile Jacob, Paris 1991.

Sarkaria, K.S, «A look back at Poincaré's Analisis Situs» in: Greffe, J.-L., Heinzmann, G., Lorenz K., *Henri Poincaré, Science et philosophie*, cit., 1994, pp. 251-258.

Serres, M., *La naissance de la physique dans le texte de Lucrèce*, Les Éditions de Minuit, Paris 1977; trad. it. *Lucrezio e l'origine della fisica*, Sellerio, Palermo 2000.

— «Le système de Leibniz et ses modèles mathèmatiques» in: Serres, M., *Etoiles*, tome 1er, P.U.F., Paris 1968).

Severi, F., «Enrico Poincaré e la sua opera» in: Poincaré J. H., *Antologia di Scritti*, L'Arco, Firenze 1949, pp. 7-42.

Severino, E., *Legge e Caso*, Adelphi, Milano 1979.

Shea, W. R., *Galileo's Intellectual Revolution*, Macmillan, London 1972.

Shea W. R., *La magia dei numeri e del moto. René Descartes e la scienza del Seicento*, Bollati Boringhieri, Torino 1994.

Sheynin, O., «H. Poincaré's Work on Probability», *Archive for History of Exact Scinces*, 42 (2), 1991: 137-171.

Sinaï, G. Y., «L'aléatoire du non-aléatoire» in: Chabert, J.-L., Chemla, K., Dalmedico A.D.,*Chaos et Deteminisme*, cit., 1992: 68-87.

Sinigaglia, C., *La seduzione dello spazio*, Unicopli, Milano 2000.

—,«Introduzione» in: H. Poincaré, *La scienza e l'ipotesi*, a cura di C. Sinigaglia, Bompiani, Milano 2003.

Smirnov, V. I., Pavlovitch Youchkevitch, A.-A., (eds.), «Correspondance de A. M. Lyapunov avec H. Poincaré», *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 8, 1987: 1-18.

Solomon, G., «Leibniz and topological equivalence», *Dialogue* 32 (4), 1993: 721-724.

Stengers, I., «Perché non può esserci un paradigma della complessità» in: Bocchi, G., Ceruti, M. (a cura di), *La sfida della complessità*, Bruno Mondatori, Milano, nuova ed. 2007.

Stephenson, B., *Kepler's Physical Astronomy*, Springer, New York 1987.

Stewart I., *Does God play dice?*, Penguin Books, London 1990.

Stillwellm J., «Poincaré, Geometry and Topology» in: Greffe, J.-L., Heinzmann, G., Lorenz K., (eds.), *Henri Poincaré, Science et philosophie*, cit., 1994, pp. 231-240.

Thom, R., *Stabilité structurelle et Morphogénèse: essai d'une théorie générale des modèles*, Intereditions, Paris 1977.

—, *Paraboles et Catastrophes*, Flammarion, Paris 1983.

—, *Prédire n'est pas expliques*, Flammarion, Paris, 2ème ed., 1993.

Thoren, V. E., *The lord of Uraniborg: A Biography of Tycho Brahe*, Cambridge University press, Cambridge1990.

Toraldo di Francia, G., van Frassen, B., *Problems in the Foundation of Physics*, North-Holland, Amsterdam 1979.

Torretti, R., *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*, Reidel, Dordrecht-Boston, Mass. 1984.

Uebel, T.E., «Transformations of 'Conventionalism' in the Vienna Circle», *Philosophia Scientiae*, vol. 3, n. 2: 75-94.

Vailati, G., «De quelques caractères du mouvement philosophique contemporain en Italie», *La Revue du Mois*, 3, 1907: 162-183.

Vuillemin, J., «Poincaré's philosophy of space», *Synthèse* XXIV, 1972: 161-179.

—, «Conventionnalisme géométrique et théories des espaces à courbure constante», *Science et métaphysique* (sous la dir. de S. Docks), Beauchesne, Paris 1976, p. 65-105.

—, «L'espace représentatif selon Poincaré», in Greffe, J-L., Heinzmann, G., Lorenz, K., (eds), *Henri Poincaré:science et philosophie*, op. cit.

Vulpiani, A., *Determinismo e Caos*, Carrocci, Roma 1994.

Westfall, R. S., «The Rise of Science and the Decline of Orthodox Christianity: A Study of Kepler, Descartes, and Newton» in: Lindberg, D.C., Ronald L. Numbers, (eds.), *God and Nauture. Historical Essays on the Encounter Between Christianity and Science*, cit., pp. 218-237; trad. it. a cura di Paolo Lombardi «L'ascesa della scienza e il declino del cristianesimo ortodosso: saggio su Keplero, Descartes e Newton» in *Dio e Natura. Saggi storci sul rapporto tra cristianesimo e scienza*, cit., pp. 261-286.

—, *Never at Rest. A Biography of Isaac Newton*, Cambridge University Press, Cambridge 1980; trad. it. *Newton*, Einaudi, Torino 1980.

Westman, R. S., «The Copernicans and the Churches» in: Lindberg, K., Numbers, L., (eds.), *God and Nauture. Historical Essays on the Encounter Between Christianity and Science*, pp. 76-113; trad. it. a cura di Paolo Lombardi «I

Copernicani e le Chiese» in *Dio e Natura. Saggi storci sul rapporto tra cristianesimo e scienza*, La Nuova Italia, Firenze 1994, pp. 75-122.

Whittaker, E. T., «The Relativity Theory of Poincaré and Lorentz», *A History of the theories of Aether and Electricity. The Modern Theories 1900-1926*, Nelson, London 1953, pp. 27-77.

Zahar, E., «Les fondements des mathématiques d'après Poincaré et Russell», *Fundamenta Scientiae*, VIII, 1987: 31-56.

—, «Paradoxes in Poincaré's Philosophy», *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, 23, 1987: 109-130.

—, «Poincaré's philosophy of geometry, or does geometric conventionalism deserve its name?», *Studies in History and Philosophy of Sciences. B. Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, XXVIII, 2, 1997: 183-218.

—, *Poincaré's Philosophy from Conventionalism to Phenomenology*, Open Court, Chicago 2001.

Zeipel, von H., «L'œuvre astronomique d'Henri Poincaré» in *Œuvres*, cit., XI, pp. 327-333.