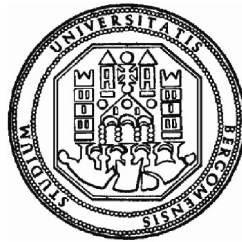


**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO**

**FACOLTA' DI INGEGNERIA**

Dottorato di ricerca in Meccatronica e Tecnologie Innovative

XXIV Ciclo



**CRITERI DI GESTIONE DELLA  
RIDONDANZA E CONTROLLO IN FORZA  
PER UN'INTERFACCIA APTICA  
RIDONDANTE**

**Relatore**

Chiar.mo Prof. Paolo Righettini

**Tesi di**

Andrea GINAMMI

matr. 37237

Anno Accademico 2011/2012



*A Sabrina ed ai miei genitori.*

*Andrea*





## Ringraziamenti

Un primo GRAZIE ai professori Paolo Righettini, Roberto Strada ed al collega Alberto Oldani che mi hanno seguito in questi tre anni di dottorato, dimostrando pazienza e disponibilità.

Un GRAZIE a Fabio Cortinovis con il quale ho condiviso i primi due anni del corso di dottorato.

Naturalmente un GRAZIE anche alla mia famiglia ed ai miei più cari amici che, anche se a volte trascurati, non mi hanno mai fatto mancare il loro appoggio e affetto permettendo di coltivare i miei interessi. Sono stati un punto fondamentale e di riferimento nei momenti difficili.

Ringrazio Sabrina per avermi aiutato nella correzione della tesi, nonostante la meccanica non sia proprio il suo campo.

Ringrazio la famiglia Ferrari per la calorosa ed affettuosa accoglienza e disponibilità che ha dimostrato anche in questi ultimi tre anni di studio.

Infine un ringraziamento a tutti i colleghi con i quali si è creato un piacevole clima di lavoro.

*Andrea*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Stato dell'arte e classificazioni</b>	<b>5</b>
1.1 Interfacce Aptiche . . . . .	5
1.2 Classificazione e applicazioni delle interfacce aptiche . . . . .	10
1.3 Robot a cinematica parallela . . . . .	16
1.4 Classificazione robot a cinematica parallela . . . . .	20
1.4.1 Robot a 6 g.d.l. . . . .	22
1.4.2 Robot a 4-5 g.d.l. rotazionali . . . . .	24
1.4.3 Robot a 3 g.d.l. rotazionali . . . . .	25
1.4.4 Robot a 3 g.d.l. per moto traslatorio . . . . .	26
1.4.5 Planari . . . . .	31
<b>2 Descrizione dispositivi</b>	<b>33</b>
2.1 Robot S.L.O.T.H. . . . .	33
2.2 Interfaccia Aptica . . . . .	37
2.3 Convenzioni e sistemi di riferimento . . . . .	43
<b>3 Analisi Cinematica Diretta</b>	<b>49</b>
3.1 Cinematica diretta manovellismo inferiore . . . . .	50
3.2 Cinematica diretta della struttura <i>Delta</i> . . . . .	52
3.3 Relazioni cinematiche della trasmissione . . . . .	57

<b>4</b>	<b>Analisi Cinematica Inversa</b>	<b>63</b>
4.1	Cinematica inversa mediante separazione delle catene cinematiche	64
4.2	Analisi matrice Jacobiana . . . . .	67
4.2.1	Matrice Jacobiana meccanismo <i>Delta</i> . . . . .	69
4.2.2	Matrice Jacobiana del manovellismo inferiore . . . . .	72
4.2.3	Matrice Jacobiana complessiva . . . . .	74
4.3	Ottimizzazione della cinematica inversa . . . . .	75
4.3.1	Proiezione nello spazio nullo . . . . .	75
4.3.2	Criterio di ottimizzazione . . . . .	78
4.4	Cinematica inversa nello spazio delle velocità (metodi $C^1$ ) . . . .	80
4.5	Cinematica inversa nello spazio delle posizioni (metodi $C^0$ ) . . . .	86
4.6	Cinematica inversa nello spazio delle accelerazioni (metodi $C^2$ ) . .	88
4.7	Analisi delle prestazioni dei metodi di gestione della ridondanza .	100
4.7.1	Analisi dell'inverso del numero di condizionamento totale (ICT) . . . . .	102
4.7.2	Analisi della coppia quadratica media richiesta ai motori (CRMS) . . . . .	104
4.7.3	Analisi della coppia massima richiesta ai motori (CMAX) . . . . .	106
4.7.4	Analisi della massima velocità angolare richiesta ai motori (WMAX) . . . . .	107
4.8	Conclusioni cinematica inversa . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Dinamica Inversa</b>	<b>111</b>
5.1	Modello dinamico . . . . .	112
5.1.1	Equazioni di vincolo $\Gamma_i$ . . . . .	116
5.1.2	Energia cinetica $K$ . . . . .	117
5.1.3	Energia potenziale $U$ . . . . .	120
5.1.4	Calcolo delle derivate della funzione Lagrangiana . . . . .	122

---

5.1.5	Derivate delle funzioni di vincolo . . . . .	128
5.1.6	Modello dinamico . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Dinamica Diretta</b>	<b>135</b>
6.1	Metodi di risoluzione della dinamica diretta . . . . .	135
6.2	Metodo implicito . . . . .	136
6.3	Applicazione all'interfaccia aptica . . . . .	139
6.4	Risoluzione del sistema di equazioni . . . . .	144
<b>7</b>	<b>Stato dell'arte dei controlli in forza</b>	<b>147</b>
7.1	Active stiffness control . . . . .	148
7.2	Controllo ibrido posizione-forza . . . . .	150
7.3	Controllo d'impedenza . . . . .	151
7.3.1	Principali tipologie di impedenze . . . . .	152
7.3.2	Esempio di controllo in impedenza . . . . .	154
7.4	Controllo d'ammettenza . . . . .	157
7.4.1	Esempio di controllo in ammettenza . . . . .	157
7.5	Scelta del controllo . . . . .	159
<b>8</b>	<b>Controllo in forza dell'interfaccia aptica</b>	<b>161</b>
8.1	Sistema di controllo . . . . .	162
8.1.1	Modello dinamico . . . . .	165
8.1.2	Controllo in forza . . . . .	166
8.1.3	Attrito . . . . .	168
8.1.4	Compensazione dei disturbi di coppia . . . . .	169
8.1.5	Modello contatto operatore-interfaccia . . . . .	172
8.1.6	Controllo moti interni . . . . .	174
8.1.7	Dinamica elettrica degli attuatori . . . . .	179
8.1.8	Discretizzazione dei segnali . . . . .	180

---

8.2	Modello multibody e co-simulazione . . . . .	184
8.3	Considerazioni . . . . .	186
8.3.1	Ambiente Molla . . . . .	190
8.3.2	Ambiente dissipativo . . . . .	192
8.3.3	Ambiente Ostacolo . . . . .	192
8.3.4	Trasparenza interfaccia . . . . .	194
<b>9</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>195</b>
<b>A</b>	<b>Complementi di algebra lineare</b>	<b>199</b>
A.1	Scomposizione ai valori singolari . . . . .	199
A.2	Numero di condizionamento . . . . .	201
A.3	Manipolabilità di un manipolatore . . . . .	203
A.4	Proprietà matrice pseudoinversa . . . . .	208
A.5	Differenze tra le matrici pseudoinverse pesata e non pesata . . . . .	209
A.6	Grandezze interfaccia aptica . . . . .	211
<b>B</b>	<b>Calcolo derivata matrice jacobiana</b>	<b>213</b>
<b>C</b>	<b>Matrici e vettori</b>	<b>217</b>
C.1	Matrici della dinamica diretta . . . . .	217
<b>D</b>	<b>Modelli d'attrito</b>	<b>231</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>235</b>

# Elenco delle figure

1	<i>Interfaccia aptica.</i>	1
1.1	<i>Schema del flusso d'informazioni operatore - interfaccia aptica.</i>	6
1.2	<i>Schema a blocchi di un dispositivo aptico.</i>	7
1.3	<i>Raymond Goertz con il sistema master-slave sviluppato.</i>	9
1.4	<i>Robot DaVinci impiegato per operazioni chirurgiche.</i>	9
1.5	<i>Manopola aptica a 1 g.d.l. e interfaccia iDrive montata su BMW.</i>	10
1.6	<i>Dispositivo PHANTOM OMNI (6 g.d.l.).</i>	10
1.7	<i>Guanto Virtual Technologies Inc.</i>	11
1.8	<i>Interfaccia aptica a cinematica parallela NOVINT FALCON.</i>	11
1.9	<i>Utensile chirurgico.</i>	12
1.10	<i>Il concetto del Museo delle Pure Forme.</i>	13
1.11	<i>Applicazione in un museo reale.</i>	13
1.12	<i>Componenti del sistema Da Vinci (da sinistra: console, manipolatore e polso rotante).</i>	14
1.13	<i>Interfaccia aptica per applicazione di viti peduncolari.</i>	15
1.14	<i>Simulatore di volo e simulatore per training dentario (MOOG).</i>	16
1.15	<i>PKM Adept Quattro s650H.</i>	17
1.16	<i>Robot di Willard L.V. Pollard, 1938.</i>	18
1.17	<i>Piattaforma di Gough.</i>	19
1.18	<i>Piattaforma di Stewart.</i>	19

1.19	<i>Prototipo originale di Clavel.</i>	20
1.20	<i>Robot Delta 270 sviluppato dal team di lavoro di Clavel.</i>	20
1.21	<i>Modello Flex Picker - ABB.</i>	20
1.22	<i>Modello M-3iA - Fanuc.</i>	20
1.23	<i>I robot Hexapod, 6X e Tornado.</i>	22
1.24	<i>Robot Fanuc F-200iB.</i>	23
1.25	<i>Robot Tricept.</i>	23
1.26	<i>Robot Sprint Z3.</i>	24
1.27	<i>Adept Quattro s650H.</i>	25
1.28	<i>Schemi di robot rotazionali.</i>	25
1.29	<i>Agile eye e suo schema.</i>	26
1.30	<i>Schema del robot Delta di Clavel.</i>	26
1.31	<i>Linea di confezionamento realizzata da Demarex.</i>	27
1.32	<i>Differenti possibilità di posizionamento degli attuatori lineari.</i>	28
1.33	<i>Prima applicazione del robot Linear Delta.</i>	29
1.34	<i>Triaglide di Grob-Werke.</i>	29
1.35	<i>Linapod, robot dell'Università dell'Aquila ed il robot Torx.</i>	29
1.36	<i>Robot Orthoglide.</i>	30
1.37	<i>Piattaforma di Tsai.</i>	31
1.38	<i>Robot planari: a)2 g.d.l. b)3 g.d.l.</i>	31
1.39	<i>IFH TU Braunschweig.</i>	32
2.1	<i>Robot S.L.O.T.H..</i>	34
2.2	<i>Volume di lavoro totale.</i>	35
2.3	<i>Volume di lavoro utile.</i>	35
2.4	<i>Andamento del determinante della matrice Jacobiana in una generica sezione nel piano <math>X - Y</math>.</i>	35
2.5	<i>Gruppo di attuazione di un singolo asse dello S.L.O.T.H..</i>	36
2.6	<i>Interfaccia aptica.</i>	37



2.7	a) <i>Meccanismo superiore Delta</i> . b) <i>Manovellismo inferiore</i> . . . . .	38
2.8	<i>Pianta del volume di lavoro, volume del meccanismo Delta (verde) e volume totale dell'interfaccia (rosso)</i> . . . . .	39
2.9	<i>Principali componenti dell'interfaccia aptica</i> . . . . .	40
2.10	<i>Dati caratteristici motori frameless Kollmorgen</i> . . . . .	41
2.11	<i>Relazione ampiezza-frequenza delle cicloidi operatore</i> . . . . .	41
2.12	<i>Sensore di forza e scheda elettronica degli estensimetri</i> . . . . .	42
2.13	<i>Sistemi di riferimento</i> . . . . .	43
2.14	<i>Descrizione degli angoli di giunto</i> . . . . .	45
2.15	<i>Angolo <math>\theta_{3i}</math></i> . . . . .	45
3.1	<i>Trasmissione completa</i> . . . . .	58
3.2	<i>Schema complessivo della trasmissione</i> . . . . .	58
3.3	<i>Schema cinematico della trasmissione</i> . . . . .	61
4.1	<i>Schema manovellismo inferiore</i> . . . . .	64
4.2	<i>Schema Delta</i> . . . . .	66
4.3	<i>Schema per <math>\mathbf{v}_p</math></i> . . . . .	70
4.4	<i>Configurazione singolare: tutti i parallelogrammi sono complanari</i> . . . . .	71
4.5	<i>Configurazione singolare: tutti i parallelogrammi sono paralleli</i> . . . . .	72
4.6	<i>Relazione tra spazio delle velocità ai giunti e spazio delle velocità all'end-effector</i> . . . . .	76
4.7	<i>Ellissoide di velocità - forza</i> . . . . .	78
4.8	<i>Andamento del rapporto di trasmissione, relativo al meccanismo inferiore, al variare dell'angolo <math>\theta_m</math></i> . . . . .	93
4.9	<i>"Molla" e "smorzatore" introdotti nel metodo 8</i> . . . . .	93
4.10	<i>Traiettoria 1</i> . . . . .	101
4.11	<i>Traiettoria 2</i> . . . . .	101
4.12	<i>Traiettoria 3</i> . . . . .	102

4.13	<i>Traiettoria 4.</i>	102
4.14	<i>ICT: valore medio.</i>	103
4.15	<i>ICT: deviazione standard.</i>	103
4.16	<i>CRMS traiettoria 1.</i>	105
4.17	<i>CRMS traiettoria 2.</i>	105
4.18	<i>CRMS traiettoria 3.</i>	105
4.19	<i>CRMS traiettoria 4.</i>	105
4.20	<i>CMAX traiettoria 1.</i>	106
4.21	<i>CMAX traiettoria 2.</i>	106
4.22	<i>CMAX traiettoria 3.</i>	107
4.23	<i>CMAX traiettoria 4.</i>	107
4.24	<i>WMAX traiettoria 1.</i>	108
4.25	<i>WMAX traiettoria 2.</i>	108
4.26	<i>WMAX traiettoria 3.</i>	108
4.27	<i>WMAX traiettoria 4.</i>	108
4.28	Andamento dell'indice di manipolabilità con $G_1 = 0$ .	110
4.29	Andamento dell'indice di manipolabilità $G_1 = 1$ .	110
4.30	Andamento delle coppie richieste ai motori con $G_1 = 0$ .	110
4.31	Andamento delle coppie richieste ai motori con $G_1 = 1$ .	110
5.1	<i>Schema a corpi rigidi dell'interfaccia aptica.</i>	114
5.2	<i>Schema della trasmissione della base mediana.</i>	115
5.3	<i>Confronto tra la coppia al giunto <math>Q_4</math> e la coppia motrice <math>Q_{mot4}</math>.</i>	133
7.1	<i>Schema a 1 g.d.l. dell'interazione ambiente-manipolatore.</i>	148
7.2	<i>Schema delle direzioni di contatto manipolatore-ambiente.</i>	150
7.3	<i>Schema a blocchi del controllo ibrido posizione-forza.</i>	151
7.4	<i>Schema impedenza inerziale.</i>	152
7.5	<i>Schema impedenza resistiva.</i>	153

---

7.6	<i>Schema impedenza capacitiva.</i>	154
7.7	<i>Schema a blocchi di un controllo in impedenza.</i>	154
7.8	<i>Schema a blocchi di un controllo d'ammettenza.</i>	157
8.1	<i>Schema complessivo del sistema di controllo sviluppato.</i>	162
8.2	<i>Schema a blocchi della parte di controllo.</i>	163
8.3	<i>Schematizzazione del controllo discreto.</i>	163
8.4	<i>Schema semplificato del controllo.</i>	164
8.5	<i>Schema Simulink del controllo sviluppato.</i>	164
8.6	<i>Schematizzazione della parte di controllo rin forza.</i>	167
8.7	<i>Schema Simulink del controllo in forza.</i>	167
8.8	<i>Elementi FRICTION nel modello multibody.</i>	168
8.9	<i>Superfici d'attrito considerate.</i>	168
8.10	<i>Parametri attrito elementi FRICTION.</i>	169
8.11	<i>Schema generico dell'osservatore di disturbo.</i>	170
8.12	<i>Schema dell'osservatore di disturbo utilizzato per l'interfaccia aptica.</i>	171
8.13	<i>Schema Simulink dell'osservatore di disturbo.</i>	171
8.14	<i>Schema a blocchi dell'implementazione del modello uomo-interfaccia.</i>	172
8.15	<i>Schema a blocchi controllo in impedenza.</i>	173
8.16	<i>Schema della parte di controllo dedicata ai moti interni.</i>	175
8.17	<i>Schema Simulink del controllo dei moti interni.</i>	175
8.18	<i>Schema a blocchi dell'anello di corrente.</i>	180
8.19	<i>Schema a blocchi di un controllo a tempo discreto.</i>	181
8.20	<i>Rappresentazione della logica di funzionamento dello ZOH.</i>	183
8.21	<i>Multibody in ADAMS; markers.</i>	185
8.22	<i>Multibody in ADAMS; joints.</i>	185
8.23	<i>Interfaccia Simulink-ADAMS; dinamica diretta.</i>	186
8.24	<i>Ambiente Ostacolo.</i>	188
8.25	<i>Traiettoria sinusoidale a bassa frequenza (traiettoria 1).</i>	189

8.26	<i>Traiettoria sinusoidale ad alta frequenza (traiettoria 2).</i>	189
8.27	<i>Traiettoria cicloidale lungo z (traiettoria 3).</i>	190
8.28	<i>Traiettoria a spirale con raggio variabile (traiettoria 4).</i>	190
8.29	<i>Velocità della traiettoria 4.</i>	190
8.30	<i>Errore in forza traiettoria 1.</i>	191
8.31	<i>Errore in forza traiettoria 2.</i>	191
8.32	<i>Forza desiderata e forza misurata con la traiettoria 1.</i>	191
8.33	<i>Forza desiderata e forza misurata con la traiettoria 2.</i>	191
8.34	<i>Forze desiderate e forze misurate con la traiettoria 4.</i>	192
8.35	<i>Errore in forza traiettoria 4.</i>	192
8.36	<i>Forze desiderate e misurate con traiettoria 3, velocità dell'interfaccia</i> <i><math>0.05\frac{m}{s}</math>.</i>	193
8.37	<i>Errore in forza con traiettoria 3, velocità dell'interfaccia <math>0.05\frac{m}{s}</math>.</i>	193
8.38	<i>Forze desiderate e misurate con traiettoria 3, velocità dell'interfaccia</i> <i><math>0.1\frac{m}{s}</math>.</i>	193
8.39	<i>Errore in forza con la traiettoria 3, velocità dell'interfaccia <math>0.1\frac{m}{s}</math>.</i>	193
8.40	<i>Andamento della forza misurata all'end-effector con <math>F_d = 0</math>.</i>	194
A.1	<i>Relazione tra spazio delle forze all'end-effector e spazio delle forze ai giunti</i>	207
A.2	<i>La pseudoinversa di Moore-Penrose minimizza la norma delle velocità ai giunti.</i>	211
A.3	<i>La pseudoinversa pesata con la massa <math>\mathbf{J}_H^\dagger</math> minimizza l'energia cinetica.</i>	211
D.1	<i>Attrito di Coulomb.</i>	232
D.2	<i>Attrito di Stribeck.</i>	232
D.3	<i>Attrito di Karnopp.</i>	233
D.4	<i>Transizione di stato nel modello di Hayward.</i>	234

# Introduzione

L'oggetto di questo lavoro di tesi è il dispositivo riportato in Figura 1, ossia un'interfaccia aptica a 3 g.d.l. una volta ridondante, con una struttura a cinematica parallela.



**Figura 1:** *Interfaccia aptica.*

Questo lavoro è inserito in un progetto che concerne lo sviluppo di un sistema telerobotico in cui l'interfaccia aptica, oggetto della tesi, ricopre il ruolo di robot master; il robot slave è il manipolatore a cinematica parallela S.L.O.T.H. (Linear Delta a 3 g.d.l. ad assi verticali), sviluppato in precedenti lavori di tesi. Entrambi i dispositivi sono collocati presso il Laboratorio di Meccatronica dell'Università degli Studi di Bergamo.

Come noto, le interfacce aptiche prevedono una stretta interazione uomo-macchina; infatti la peculiarità di questa tipologia di dispositivi è quella di fornire all'operatore degli stimoli in forza che, attraverso i canali tattile e cinestetico, gli permettano di percepire sensazioni di movimento che siano differenti dalle sole informazioni visive e uditive che è in grado di percepire autonomamente. In questo modo è quindi possibile simulare ambienti di lavoro reali o virtuali, garantendo all'operatore di avere il completo controllo del movimento dell'end-effector.

Il primo obiettivo di questo lavoro di tesi riguarda la definizione e l'analisi di metodologie che risolvano la cinematica inversa di un dispositivo ridondante e che permettano, al tempo stesso, di ottimizzarne il funzionamento all'interno del proprio volume di lavoro; l'idea di base è quella di sfruttare il grado di libertà ridondante per ottenere dei benefici sia da un punto di vista cinematico, evitando che la struttura assuma delle configurazioni singolari, sia da un punto di vista dinamico, minimizzando le coppie richieste agli attuatori.

Il secondo obiettivo di questo lavoro sarà quindi lo sviluppo dell'algoritmo di controllo in forza che permetta di gestire correttamente l'interazione uomo-macchina e di controllare i moti interni della struttura. In questo lavoro si valuterà il comportamento dell'interfaccia aptica simulando degli ambienti di lavoro virtuali, considerato che il robot master ed il robot slave, ad oggi, non sono ancora in grado di comunicare tra loro.

Nella prima parte della tesi si delinea lo stato dell'arte riguardo alle interfacce aptiche ed ai robot a cinematica parallela; inoltre si riporta una descrizione dei due dispositivi che costituiranno il sistema telerobotico, introducendo, per l'interfaccia aptica, i sistemi di riferimento e le convenzioni adottate per studiare il dispositivo.

Successivamente si riporta la risoluzione dell'analisi cinematica dell'interfaccia aptica focalizzando l'attenzione sull'approccio inverso, per il quale si propongono differenti metodologie di risoluzione: l'efficacia dei vari approcci descritti verrà valutata in funzione del comportamento cinematico dell'interfaccia aptica e del-

le coppie richieste agli attuatori. Tra le varie metodologie proposte, quella che permette di gestire al meglio i moti interni della struttura, sfrutta l'analisi in frequenza del movimento imposto all'end-effector per ottimizzare il funzionamento dell'intero dispositivo. A valle dell'analisi cinematica, si propone la risoluzione della dinamica diretta ed inversa del dispositivo.

Nell'ultima parte della tesi si affronta lo sviluppo del sistema di controllo in forza (in particolare in impedenza), sviluppato in ambiente Simulink e testato attraverso una co-simulazione con il software ADAMS; attraverso la co-simulazione è possibile avere un riscontro diretto e visivo del reale comportamento dell'interfaccia aptica in funzione dell'azione di controllo imposta.

Si riportano infine alcune considerazioni in merito ai risultati ottenuti ed ai possibili sviluppi futuri di questo lavoro.





# CAPITOLO 1

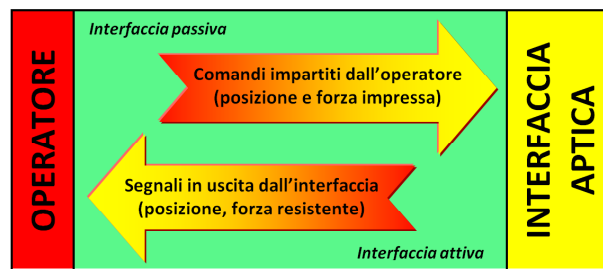
## STATO DELL'ARTE E CLASSIFICAZIONI

In questo capitolo si riporta una descrizione delle varie tipologie di interfacce aptiche e di robot a cinematica parallela. In particolare, per entrambe le famiglie di dispositivi, si definiscono i principi di funzionamento ed i principali criteri di classificazione, con lo scopo di dare un'ampia panoramica di quanto noto fino ad oggi nel mondo scientifico ed in quello industriale riguardo tali dispositivi.

### 1.1 Interfacce Aptiche

Le interfacce aptiche sono dispositivi robotici atti a gestire l'interazione tra uomo e computer; queste sono in grado di manovrare robot in ambiente reale o virtuale e di esercitare all'operatore (feedback), in modo interattivo, degli stimoli che inducono percezioni tattili e di forza.

Questi dispositivi, a differenza delle comuni interfacce, non interagiscono con l'operatore soltanto attraverso i canali uditivo e visivo ma, sfruttano anche il canale tattile (recettori posizionati sotto la pelle) e quello cinestetico (capacità di percepire il peso, la posizione ed il movimento del proprio corpo): in questo modo è possibile simulare, ad esempio, un campo di forze oppure la rugosità superficiale di un oggetto.

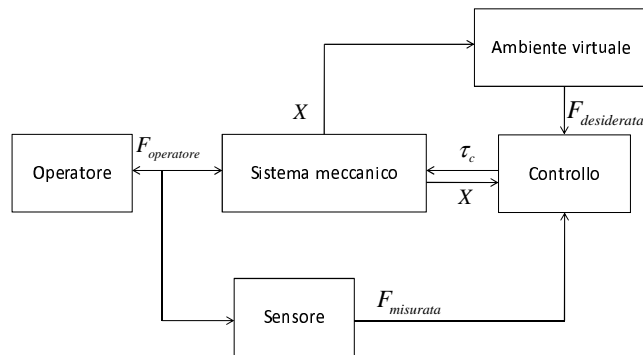


**Figura 1.1:** Schema del flusso d'informazioni operatore - interfaccia aptica.

La peculiarità delle interfacce aptiche è legata alla possibilità di avere delle proprietà meccaniche programmabili e permettere di realizzare uno scambio bidirezionale di informazioni tra l'operatore ed il mondo esterno. Questa bidirezionalità (Figura 1.1) contraddistingue le interfacce aptiche dalle più convenzionali interfacce uomo-macchina, come ad esempio mouse e tastiera. Un dispositivo aptico deve essere progettato per leggere e scrivere da e verso la “mano umana”.

Le interfacce aptiche sono a tutti gli effetti dei robot, vanno perciò trattate come tali; la loro peculiarità è quella di interagire direttamente con l'operatore, generalmente attraverso le sue mani. I movimenti dell'end-effector, che tipicamente è il punto di contatto tra operatore ed interfaccia, vengono imposti dall'operatore e rilevati da un sistema di controllo che aziona gli attuatori in modo da fornire all'utente il feedback di forza in funzione dello stato del sistema; per questo motivo una parte molto importante delle interfacce aptiche è costituita dall'insieme di algoritmi che correlano le informazioni ricevute dai sensori con gli input da inviare agli attuatori.

Nella figura che segue (Figura 1.2) è riportato uno schema a blocchi relativo l'accoppiamento tra l'operatore umano, il sistema meccanico e l'ambiente virtuale di una generica un'interfaccia aptica. L'ambiente virtuale è descritto da una funzione che, in relazione allo stato del sistema, fornisce una forza desiderata di riferimento che dev'essere percepita dall'operatore.



**Figura 1.2:** *Schema a blocchi di un dispositivo aptico.*

Affinché un'interfaccia aptica possa essere ritenuta idonea alla simulazione dell'interazione fisica con l'ambiente virtuale o reale, deve possedere tre caratteristiche fondamentali:

1. Elevata trasparenza.

Durante la fase in cui non si determinano interazioni con l'ambiente circostante, l'utente non deve avvertire la presenza del dispositivo aptico. Dal punto di vista tecnico, occorre ridurre al minimo le forze, indotte sull'operatore, dovute al peso proprio del dispositivo, agli attriti interni ed alle masse in movimento (forze inerziali). Questa condizione può essere ottenuta sia agendo, in fase di progetto, sulla componente meccanica del dispositivo (ottimizzazione della cinematica, scelta dei sistemi di trasmissione, configurazione dei vincoli strutturali, etc.) sia su quella di controllo degli attuatori (utilizzo di opportune tecniche di compensazione dell'attrito, dell'inerzia e della gravità).

2. Elevata rigidezza.

Durante la fase di interazione, il dispositivo deve essere in grado di indurre realisticamente la percezione del contatto con gli oggetti. Questi ultimi, nel caso limite, possono essere infinitamente rigidi. Il dispositivo, quindi,

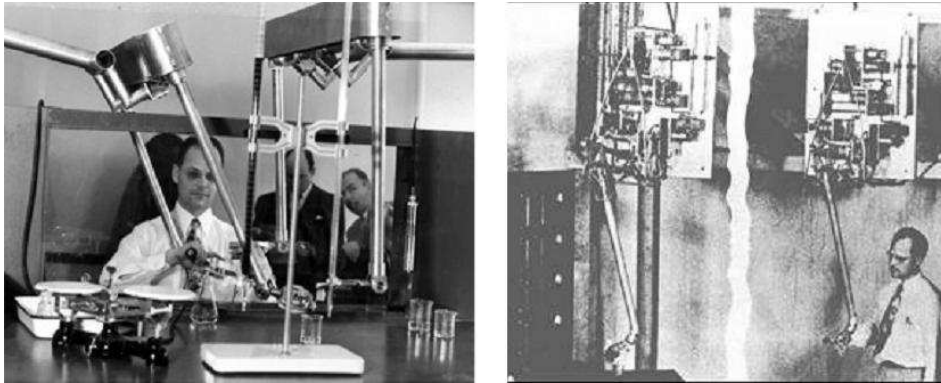
dovrà essere in grado di mostrare all'operatore rigidzze sufficientemente elevate. Anche in questo caso si può agire sia sulla componente meccanica (trasmissioni, parti strutturali) sia sulla componente di controllo (elevato guadagno d'anello).

### 3. Elevata banda passante.

Durante la transizione tra la fase di non contatto e quella di contatto, il dispositivo deve essere in grado di generare delle forze con elevata dinamica temporale (alto contenuto spettrale). Questo è particolarmente vero nel caso fosse necessario simulare degli urti con oggetti rigidi. Dal punto di vista tecnico, questa caratteristica può essere ottenuta aumentando la frequenza propria del sistema controllato.

Le tecnologie aptiche sono nate negli anni '60, contemporaneamente alla nascita ed allo sviluppo della robotica. Inizialmente, queste tecnologie, hanno trovato applicazione nello sviluppo di sistemi per il controllo remoto di robot, di bracci robotizzati nell'ambito di voli spaziali e nel trattamento di materiali altamente nocivi per l'uomo (come ad esempio i combustibili utilizzati nelle centrali nucleari). Il primo sistema robotizzato master-slave controllato in forza è stato sviluppato nel 1951 da Raymond Goertz che, per la Commissione per l'Energia Atomica, realizzò, presso il "*Argonne National Laboratory*", un manipolatore master-slave per la manipolazione di materiale radioattivo; ancora oggi questo robot è considerato la pietra miliare del controllo in forza.

Queste prime applicazioni impiegavano, in genere, un'interfaccia uomo-macchina (Human Machine Interface, HMI) connessa fisicamente con il dispositivo controllato, ma incapace di effettuare il force feedback, cioè non in grado di restituire sensazioni tattili o cinestetiche.



**Figura 1.3:** *Raymond Goertz con il sistema master-slave sviluppato.*

Solo a partire dalla seconda metà degli anni '80 sono state sviluppate le prime interfacce aptiche in grado di effettuare il force feedback e costituite da sistemi robotici collegati tramite la rete (LAN). Ciò ha permesso la nascita di innumerevoli nuove applicazioni basate sul controllo remoto e sensorizzato, come ad esempio la telechirurgia (vedi Figura 1.12). Negli ultimi anni abbiamo potuto assistere alla nascita di nuovi dispositivi aptici (con force feedback) dotati di una grande flessibilità; questa è garantita sia dalla possibilità di gestione di un elevato numero di gradi di libertà da parte del dispositivo stesso, sia dall'implementazione di nuovi algoritmi per la compensazione di ampi ritardi di trasmissione delle informazioni.



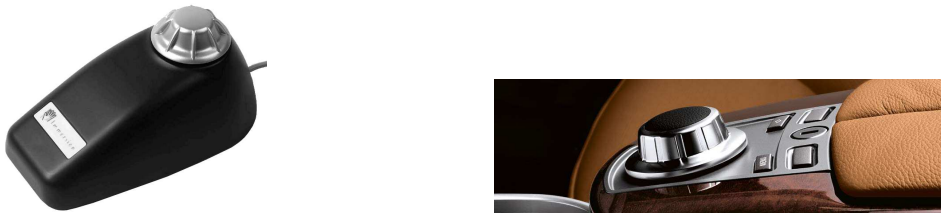
**Figura 1.4:** *Robot DaVinci impiegato per operazioni chirurgiche.*

## 1.2 Classificazione e applicazioni delle interfacce aptiche

Le interfacce aptiche sono classificate principalmente in funzione del loro numero di gradi di libertà; in generale si distingue tra:

- **Dispositivi con un numero ridotto di gradi di libertà.**

Questi dispositivi permettono di controllare al massimo 2 o 3 g.d.l. (gradi di libertà ); in genere due traslazioni e una rotazione o le tre traslazioni nello spazio (vedi Figura 1.5).



**Figura 1.5:** *Manopola aptica a 1 g.d.l. e interfaccia iDrive montata su BMW.*

- **Dispositivi con un alto numero di gradi di libertà.**

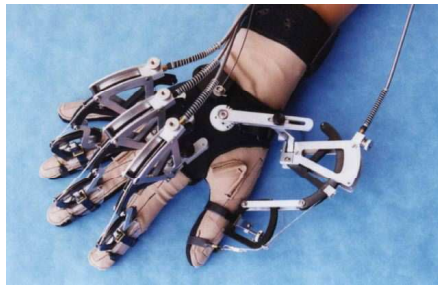
Appartengono a questa categoria quei dispositivi che mirano a riprodurre integralmente le interazioni con l'ambiente; tipicamente hanno al massimo 6 g.d.l. (Figura 1.6). In questa categoria si ritrovano solitamente i dispositivi che sono stati progettati per essere impugnati.



**Figura 1.6:** *Dispositivo PHANTOM OMNI (6 g.d.l.).*

- **Dispositivi con un elevato numero di gradi di libertà.**

In questi dispositivi la simulazione delle operazioni avviene sfruttando l'interazione del sistema meccanico con diverse parti del corpo dell'operatore. Le interfacce aptiche sono impiegate, ad esempio, per riprodurre i movimenti della mano, dell'intero braccio, del torso o delle gambe (Figura 1.7); il dispositivo finale assumerà la forma di un esoscheletro il cui peso viene completamente o parzialmente sorretto dall'uomo.



**Figura 1.7:** *Guanto Virtual Technologies Inc. .*

Di seguito si riportano altri criteri secondo i quali è possibile classificare le interfacce aptiche:

- *Tipo di cinematica:* in questo caso si distingue tra architettura seriale, parallela oppure ibrida.



**Figura 1.8:** *Interfaccia aptica a cinematica parallela NOVINT FALCON.*

- *Numero di punti di contatto*: in tal caso il dispositivo si classifica in funzione dell'interazione uomo-interfaccia, ossia se l'interfaccia aptica è in contatto con l'operatore in un solo punto (single-point), in almeno due punti (multi-point) oppure se è connessa per mezzo di un utensile analogo a quello necessario per eseguire le operazioni (task-replica).



**Figura 1.9:** *Utensile chirurgico.*

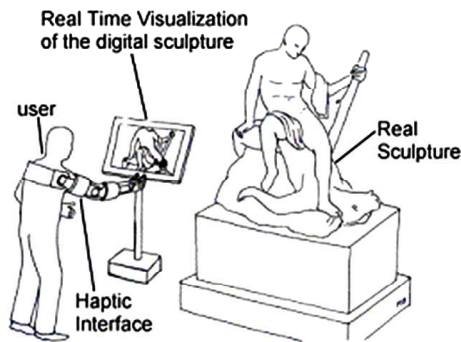
- *Morfologia costruttiva*: secondo questo criterio le interfacce aptiche vengono distinte a seconda che siano antropomorfe (riproducono la struttura cinematica dell'arto), portabili oppure desktop (un link della catena cinematica è posizionato a terra).

Come accennato precedentemente, ad oggi, sono state sviluppate differenti applicazioni delle interfacce aptiche che interessano settori molti diversi tra loro.

Il primo dispositivo che viene mostrato riguarda un'applicazione di computer grafica ed ambienti virtuali per realizzazioni artistiche. Negli ultimi tempi, in tutto il mondo, alcuni musei ed università hanno iniziato a digitalizzare le loro collezioni. Le copie digitali delle collezioni d'arte spaziano dalle immagini bidimensionali a quelle tridimensionali più complesse che possono essere osservate da diversi punti di vista e scalabili nelle dimensioni. Sebbene questi progetti ab-



biano raggiunto risultati di successo, nessuno di essi prende in considerazione la percezione aptica degli oggetti; l'unico senso utilizzato è quello della vista.



**Figura 1.10:** *Il concetto del Museo delle Pure Forme.*



**Figura 1.11:** *Applicazione in un museo reale.*

L'Interactive Art Museum (IAM), sviluppato all'Università di Southern California, è l'unico esempio intracciabile in letteratura che combina la tecnologia aptica e la computer grafica per creare un'esibizione d'arte virtuale. In questo ambiente, l'utente può interagire con oggetti tridimensionali usando sia il canale visivo, sia quello aptico. Esempio di queste particolari applicazioni è il *Museo delle Pure Forme* (Figura 1.10 e Figura 1.11) introdotto da M.Bergamasco <sup>1</sup>. Lo scopo del *Museo delle Pure Forme* è quello di cambiare radicalmente il modo in cui gli utenti percepiscono sculture, statue o più in generale qualsiasi tipo di manufatto artistico tridimensionale.

Un'applicazione che negli ultimi anni sembra aver riscosso particolare successo è l'impiego di interfacce aptiche in ambito medico, in particolare per l'esecuzione di operazioni chirurgiche.

Ad oggi, un sistema robotico in uso per il trattamento del cancro della prostata è il sistema robotizzato *Da Vinci*<sup>2</sup>: questo sistema permette di eseguire

<sup>1</sup>[2].

<sup>2</sup>[29].

l'intervento in modo più sicuro, rafforzando nel contempo la remissione del paziente; il chirurgo, che opera per mezzo di una console, ha la sensazione di avere le mani all'interno del corpo del paziente.

Il sistema *Da Vinci* permette al chirurgo di avere una migliore visualizzazione, destrezza e precisione rispetto alla chirurgia aperta o laparoscopica, consentendo operazioni mediante incisioni di soltanto 1-2 cm. In questo modo è possibile effettuare l'intervento alla prostata in modo più preciso e meno invasivo, proteggendo i nervi più delicati che controllano la vescica e la funzione sessuale.

Il sistema è costituito principalmente da quattro elementi:

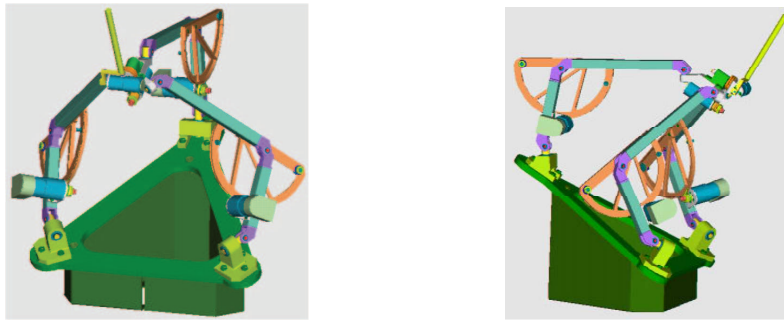
- una console, con la quale il chirurgo interagisce per comandare i vari bracci del robot remoto (i movimenti delle mani del chirurgo vengono ridimensionati dal robot *Da Vinci*);
- una postazione per il paziente, costituita da un lettino e da un robot a 7 g.d.l.;
- dei polsi rotanti, collegati ai bracci del robot, che permettono di raggiungere luoghi difficili della prostata e di suturare con precisione;
- un sistema di visione interno ad alta risoluzione.



**Figura 1.12:** Componenti del sistema *Da Vinci* (da sinistra: console, manipolatore e polso rotante).

Data l'elevata capacità del sistema aptico, la FDA ha autorizzato l'impiego del sistema robotico *Da Vinci* in interventi chirurgici quali: chirurgia laparoscopica generale, chirurgia toracoscopica, prostatactomia laparoscopica radicale e toracoscopica cardiovascolare assistita. Inoltre, il sistema di prostatactomia *Da Vinci* è attualmente coinvolto in un collaudo clinico-cardiovascolare negli Stati Uniti, per valutare il suo impiego per una completa chirurgia endoscopica coronaria e per impianti di by-pass.

Un'altra applicazione in ambito medico-ospedaliero, per quanto concerne la chirurgia spinale, riguarda l'impiego di un sistema aptico per l'applicazione di viti peduncolari utilizzate per fissare placchette di rinforzo alle vertebre (Figura 1.13)<sup>3</sup>.



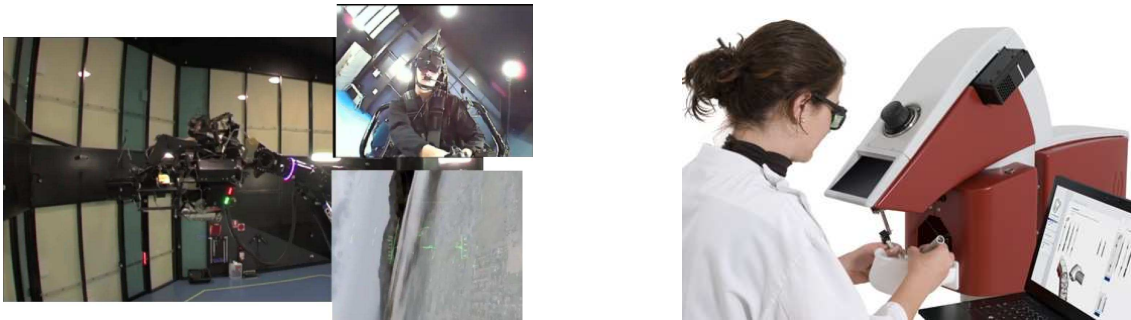
**Figura 1.13:** *Interfaccia aptica per applicazione di viti peduncolari.*

Infine, tra le varie applicazioni dei sistemi aptici, è possibile identificare la realizzazione di simulatori per la fase di addestramento di piloti oppure per la fase di training per operazioni dentarie<sup>4</sup>. Tutte queste applicazioni sfruttano l'impiego di una realtà virtuale che permette di riprendere fedelmente l'ambiente in cui ci si troverà ad operare.

---

<sup>3</sup>[1].

<sup>4</sup>[30].



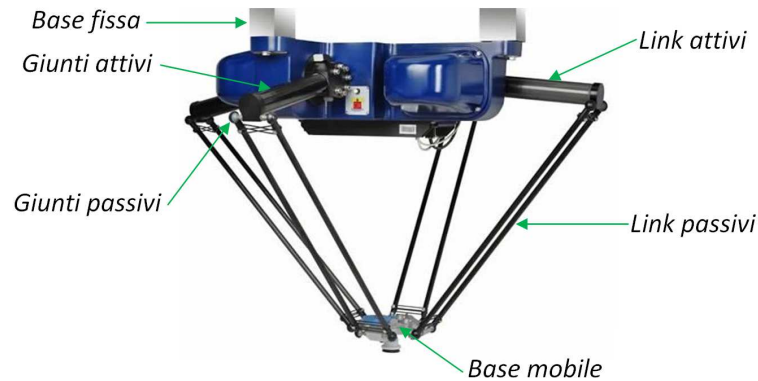
**Figura 1.14:** *Simulatore di volo e simulatore per training dentario (MOOG).*

Il continuo studio di nuove tecnologie aptiche ha portato allo sviluppo di dispositivi che sono oggi impiegati nella vita di tutti i giorni; basti pensare infatti ai moderni smart phone o ai joystick delle attuali console di gioco, in cui il giocatore, tramite una vibrazione del dispositivo impugnato, ha una percezione più realistica di ciò che sta vedendo sullo schermo. Inoltre, oggi sul mercato è possibile trovare i primi produttori e venditori di interfacce aptiche da impiegare come strumenti CAD oppure come joystick di gioco più sofisticati (ad esempio *Abacus Sistemi Cad Cam S.r.l.*).

### 1.3 Robot a cinematica parallela

I robot a cinematica parallela, meglio conosciuti come PKM (*Parallel Kinematic Machine*), sono manipolatori in cui l'end-effector è collegato alla base fissa mediante almeno due catene cinematiche indipendenti. Questi dispositivi si distinguono dai più comuni robot per la capacità di realizzare delle traiettorie con un'elevata dinamica all'interno del proprio volume di lavoro, mantenendo buone precisioni e consentendo di sopportare elevate forze.

Generalmente questa categoria di robot è caratterizzata dall'aver almeno una base fissa, una piattaforma mobile ed una serie di arti (*limb* o *leg*) che congiungono le due piattaforme, realizzando così delle catene cinematiche chiuse.



**Figura 1.15:** PKM Adept Quattro s650H.

Come è possibile intuire dalla Figura 1.15, i robot a cinematica parallela prevedono giunti attivi (motorizzati) e giunti passivi, la cui configurazione è funzione della posizione assunta istante per istante dai giunti attivi; questo aspetto li differenzia parecchio dai robot seriali in cui tutti i giunti sono motorizzati.

Come spesso accade, attraverso un buon progetto della struttura è possibile posizionare tutti i motori a terra (sulla base fissa), permettendo quindi di ridurre le masse in movimento e conseguentemente, a parità di potenza installata, ottenere delle accelerazioni dell'end-effector più elevate.

Tutti questi aspetti permettono di ottenere delle strutture snelle con prestazioni notevoli in termini di accelerazioni e velocità di lavoro, al contempo caratterizzate da un'elevata capacità di carico (se paragonata a quella dei robot seriali), fino ad ottenere un rapporto carico-peso che può superare anche l'unità (in un manipolatore tradizionale questo indice varia tra 0.01 e  $0.1^5$ ). Inoltre, la precisione di posizionamento all'interno del volume di lavoro è elevata in quanto l'errore dovuto ad un arto non si ripercuote su tutta la catena cinematica come nei robot seriali ma, anzi, ha un'influenza minore sulla posizione della base mo-

---

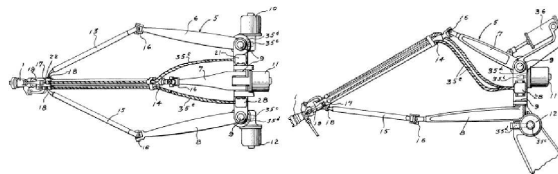
<sup>5</sup>[16].

bile. In generale i robot paralleli hanno una struttura meccanica più rigida con frequenze proprie più elevate.

D'altra parte questa tipologia di robot porta con sé anche degli aspetti negativi legati principalmente al volume di lavoro ed a problematiche di tipo costruttivo. Per quanto riguarda il primo aspetto, il volume di lavoro dei *PKM* è ridotto se paragonato a quello di un robot seriale: il rapporto *volume di lavoro/ingombro a terra* della struttura è molto basso, mentre per i robot seriali è elevato in quanto riescono a sfruttare molto bene lo spazio che li circonda. Inoltre, all'interno del volume di lavoro, esistono dei punti in cui il robot assume delle configurazioni *singolari* ossia, i link si dispongono in modo lungo alcune direzioni. Da un punto di vista costruttivo, l'aspetto più critico è rappresentato dalla presenza dei giunti passivi cardanici e sferici che, caratterizzati da giochi ed imprecisioni di lavorazione, portano a diminuire la rigidità teorica della struttura.

Infine, a differenza dei robot seriali, lo studio della cinematica diretta ed il calcolo del numero di gradi di libertà del manipolatore risultano essere più difficili e meno intuitivi.

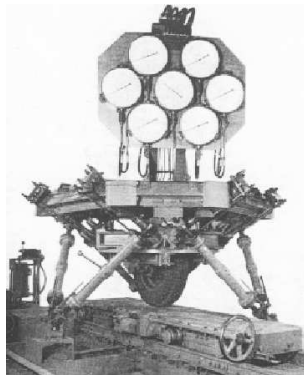
Tradizionalmente si fa risalire la nascita dei robot a cinematica parallela (*PKM*, Parallel Kinematic Machines) al 1813, anno in cui il matematico A. Cauchy discusse la possibilità di movimento e studiò la rigidità di un ottaedro articolato. Le prime applicazioni di questi robot risalgono alla seconda metà del 1900 ma, il primo disegno di un robot parallelo è datato 1938 (Figura 1.16), ad opera di Willard L.V. Pollard.



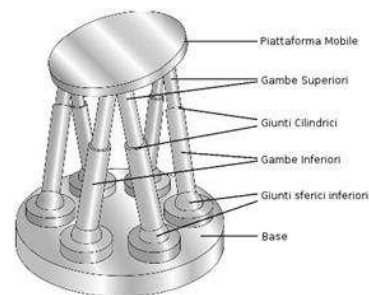
**Figura 1.16:** Robot di Willard L.V. Pollard, 1938.

Questo robot venne progettato per la verniciatura automatica delle automobili ed era costituito da una struttura parallela a 3 g.d.l. con una pinza sferica montata sulla piattaforma mobile; per l'inadeguatezza dei sistemi di controllo dell'epoca non fu però realizzato; al contrario oggi questa configurazione è ampiamente utilizzata nell'automazione industriale.

Pochi anni dopo, nel 1955, un ingegnere meccanico americano impiegato nell'industria aeronautica, V. E. Gough, ideò e realizzò una struttura parallela con 6 catene cinematiche per eseguire prove su pneumatici per aerei. Questa piattaforma venne poi ripresa e riadattata da Stewart (nel 1965) per realizzare un simulatore di volo.



**Figura 1.17:** *Piattaforma di Gough.*

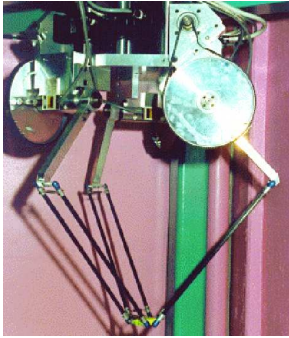


**Figura 1.18:** *Piattaforma di Stewart.*

Un ruolo fondamentale nella storia dei robot paralleli lo ricopre il *Delta*, progettato e realizzato da Raymond Clavel<sup>6</sup> alla fine degli anni '80; il prototipo originale (Figura 1.19) era in grado di raggiungere delle accelerazioni di quasi  $200 \text{ m/s}^2$ . Il gruppo di lavoro del professor Clavel, inoltre, progettò e costruì (presso l'*École Fédérale di Losanna*) il manipolatore a cinematica parallela (*Delta 270*) in grado di raggiungere accelerazioni di  $500 \text{ m/s}^2$  (ancora oggi è il robot più veloce che sia mai stato realizzato).

<sup>6</sup>[17].





**Figura 1.19:** *Prototipo originale di Clavel.*



**Figura 1.20:** *Robot Delta 270 sviluppato dal team di lavoro di Clavel.*

Il successo di questo modello di robot è legato alle numerose applicazioni che ha avuto in ambito industriale, soprattutto nel settore del packaging. Infatti, ad oggi, sul mercato è possibile trovare diversi produttori di robot *Delta* (ABB, Fanuc, Schneider e Bosch):



**Figura 1.21:** *Modello Flex Picker - ABB.*



**Figura 1.22:** *Modello M-3iA - Fanuc.*

## 1.4 Classificazione robot a cinematica parallela

I robot a cinematica parallela, visto le numerose applicazioni che hanno avuto nella storia, possono essere classificati secondo differenti criteri: numero di gradi di libertà, tipo di moto che compiono, tipo di giunti ed attuatori impiegati, simmetria della struttura, etc.. Un metodo ampiamente accettato è quello proposto



da Tsai e Merlet <sup>7</sup>, che adotta come criterio di classificazione il tipo di movimento effettuato dal manipolatore ed il numero di gradi di libertà dello stesso.

Si farà riferimento a robot simmetrici, cioè a quella particolare categoria di robot paralleli che rispettano le seguenti caratteristiche:

1. il numero di arti è pari al numero di gradi di libertà;
2. il tipo, il numero e la sequenza dei giunti è la medesima per ogni arto;
3. i giunti controllati sono gli stessi per ogni catena cinematica.

Nei robot simmetrici è possibile definire una relazione tra il numero di elementi che compongono il manipolatore ed il numero di gradi di libertà. Tipicamente si fa riferimento alla formulazione di Grüber (1917), in cui i gradi di libertà del manipolatore vengono calcolati come la differenza tra i gradi di libertà di ogni singolo link del robot e la sommatoria dei gradi di vincolo imposti dai giunti e dalle catene cinematiche chiuse presenti:

$$F = \lambda (n - j - 1) + \sum_{i=1}^j f_i$$

dove:

$F$  = gradi di libertà del robot

$\lambda$  = fattore spaziale: vale 3 nel piano e 6 nello spazio

$n$  = numero di corpi rigidi, compreso il telaio e l'end-effector

$j$  = numero di giunti

$f_i$  = gradi di moto relativo permessi dal giunto  $i$ -esimo

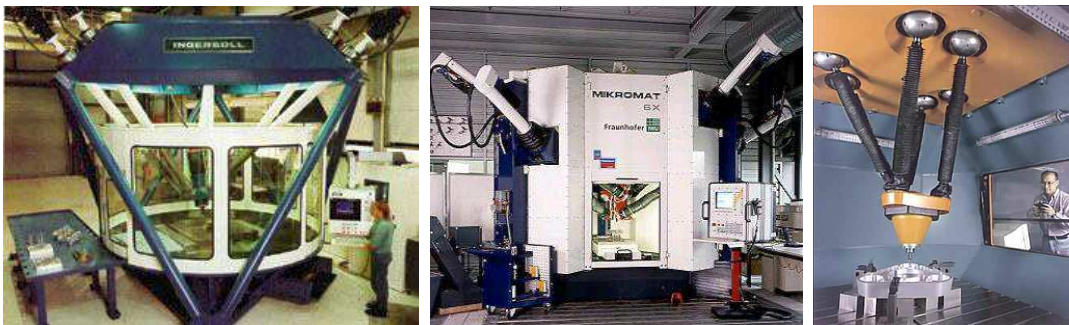
---

<sup>7</sup>[22].

Di seguito si riporta una breve classificazione dei robot a cinematica parallela secondo il criterio di Tsai e Merlet, ponendo particolare attenzione ai manipolatori *Delta* a 3 g.d.l., in quanto sia l'interfaccia aptica che il robot slave S.L.O.T.H., appartengono a questa categoria di manipolatori.

### 1.4.1 Robot a 6 g.d.l.

I robot a 6 g.d.l. hanno la possibilità di posizionare la piattaforma mobile in un punto qualsiasi dello spazio e definirne l'orientamento rispetto ogni direzione. A questa categoria appartengono i cosiddetti *esapodi* cioè robot la cui struttura è basata sul principio di funzionamento della piattaforma di Gough. Tra questi possiamo ricordare il *Variax* di Giddinss e Lewis, l'*Hexapod* di Ingersoll, la *6X milling machines* di Mikromat e *Tornado2000* di Hexel (Figura 1.23).



**Figura 1.23:** I robot *Hexapod*, *6X* e *Tornado*.

Questa tipologia di robot è oggi presente sul mercato e viene commercializzata da Fanuc, che propone questi manipolatori per operazioni in cui è richiesta una forza costante all'end-effector (ad esempio per eseguire operazioni di sbavatura o di taglio di particolari meccanici).



**Figura 1.24:** *Robot Fanuc F-200iB.*

Tra i robot a 6 g.d.l. possiamo considerare anche i robot *Ibridi*, ossia manipolatori con una architettura in parte parallela (generalmente possiede 3 g.d.l. e consente il posizionamento dell'end-effector nello spazio) ed in parte seriale (solitamente il polso). In questo modo si riescono a sfruttare i vantaggi offerti dalla cinematica parallela senza avere strutture eccessivamente complesse. Il tipico esempio di robot ibrido è il *Tricept* (Figura 1.25). Questo robot, proposto nel 1988 da Neumann, è attuato da motori lineari uniti alla base mobile tramite giunti sferici.



**Figura 1.25:** *Robot Tricept.*

Sul mercato questi manipolatori sono commercializzati dalla PKM Tricept S.L. che propone quattro differenti taglie di robot; principalmente, questa tipolo-

gia di robot, grazie all'elevata rigidità strutturale, viene impiegata per realizzare lavorazioni meccaniche come fresatura, sbavatura e taglio laser.

### 1.4.2 Robot a 4-5 g.d.l. rotazionali

Un esempio di robot a 5 g.d.l. è lo *Sprint Z3*, attualmente impiegato da industrie che operano nel settore aeronautico per la lavorazione di strutture in alluminio. Questa macchina è costituita da tre gambe di lunghezza fissa collegate ad una piattaforma mobile tramite giunti sferici e incernierate all'altra estremità ad un blocchetto che può traslare su di una guida lineare; in questo modo la base è in grado di inclinarsi in una qualsiasi direzione e di muoversi longitudinalmente. L'ultimo grado di libertà può essere affidato ad una base sulla quale viene montato il robot.



**Figura 1.26:** *Robot Sprint Z3.*

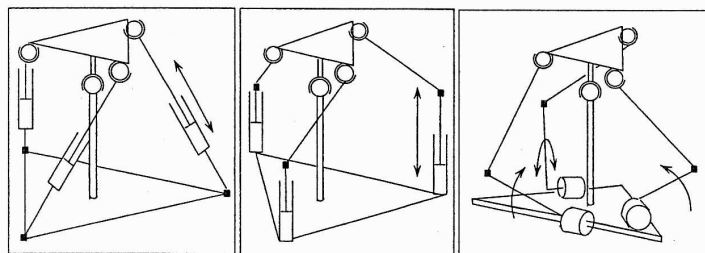
I robot a 4 g.d.l. generalmente consentono la traslazione della piattaforma mobile e la sua rotazione attorno ad un asse; questo li rende particolarmente adatti alle operazioni di pick&place e di material-handling. A questa categoria appartiene ad esempio il robot *Quattro s650H* di Adept, in cui si nota la tipica architettura di questi robot: quattro catene cinematiche ciascuna delle quali costituita da un quadrilatero articolato incernierato alla piattaforma mobile e pilotato da un motore rotazionale. In questo caso l'end-effector è in grado di ruotare soltanto attorno all'asse verticale  $z$ .



**Figura 1.27:** *Adept Quattro s650H.*

### 1.4.3 Robot a 3 g.d.l. rotazionali

I robot a 3 g.d.l. rotazionali sono manipolatori che consentono rotazioni attorno a tre assi tra loro perpendicolari mantenendo fisso nello spazio un punto della piattaforma mobile. Questi manipolatori rappresentano un'interessante alternativa ai polsi sferici con tre giunti rotoidali che generalmente vengono impiegati nei robot seriali; in Figura 1.28 sono rappresentati tre differenti schemi cinematici che è possibile trovare su questa tipologia di manipolatori.



**Figura 1.28:** *Schemi di robot rotazionali.*

Un'altra possibilità è quella di utilizzare catene cinematiche sferiche con azionamenti rotazionali i cui assi sono convergenti nel centro della piattaforma mobile. Questo approccio è stato utilizzato da Gosselin per realizzare il sistema di puntamento *Agile eye*.

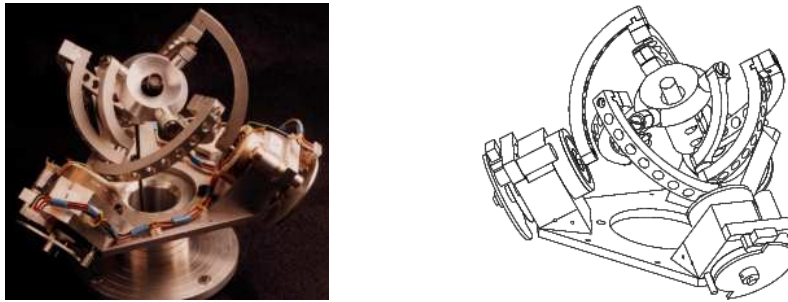


Figura 1.29: *Agile eye e suo schema.*

#### 1.4.4 Robot a 3 g.d.l. per moto traslatorio

La categoria di manipolatori a 3 g.d.l. per moto traslatorio ha riscosso un grande successo, attirando infatti l'attenzione di numerosi ricercatori. Questa architettura consente di beneficiare dei vantaggi dati da una struttura parallela senza limitare troppo l'area di lavoro, complicare eccessivamente la cinematica (spesso risolvibile in forma chiusa) e incorrere in problemi costruttivi. Il manipolatore più famoso appartenente a questa categoria è il robot *Delta* ideato da Clavel<sup>8</sup> nel 1985 ed ultimato nel 1988.

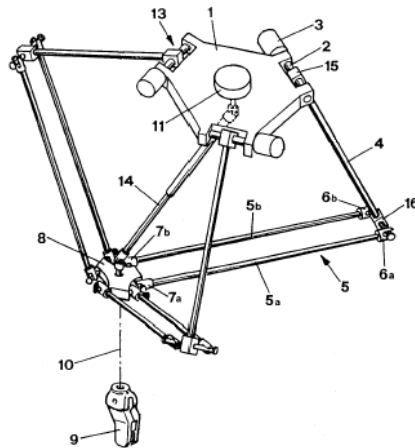


Figura 1.30: *Schema del robot Delta di Clavel.*

<sup>8</sup>[17].

In realtà si tratta di un robot a quattro gradi di libertà, di cui tre permettono la traslazione della piattaforma ed il quarto permette la rotazione di un eventuale polso posizionato sulla base mobile.

Come è possibile notare dalla Figura 1.30, il robot è costituito da una base fissa sulla quale sono incernierate tre aste equispaziate a  $120^\circ$  nel piano e comandate da motori elettrici; all'altra estremità di ogni asta è collegato, per mezzo di una cerniera, un parallelogramma articolato, costituito da quattro aste rigide e quattro giunti sferici. L'altra estremità dei parallelogrammi è collegata, anche qui tramite delle cerniere, alla base mobile del robot con la medesima distribuzione della base fissa (equispaziate a  $120^\circ$  nel piano).

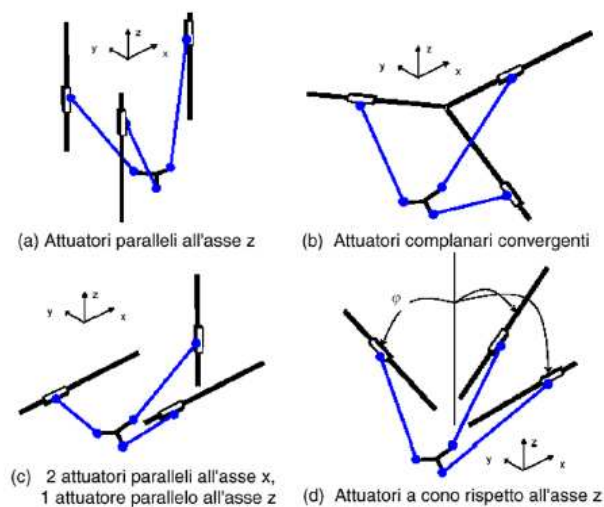
Originariamente questo robot fu concepito per applicazioni di pick&place, con l'obiettivo di riposizionare oggetti molto leggeri (10–30 *grammi*) ad una distanza di 20 *cm* e con una frequenza di tre volte al secondo: questo è il motivo della sua struttura scheletrica e molto leggera. I principali problemi di questo robot sono le numerose configurazioni singolari entro lo spazio di lavoro e le difficoltà nel realizzare un parallelogramma di sufficiente precisione.

La prima applicazione industriale del robot *Delta* fu realizzata da Demarex che utilizzò questi manipolatori in linee di confezionamento (Figura 1.31).



**Figura 1.31:** *Linea di confezionamento realizzata da Demarex.*

Il grande successo del robot *Delta*, ha fornito lo spunto per l'ideazione di numerose altre strutture; una delle più interessanti, nota col nome di *Linear Delta*, deriva dalla struttura classica di Clavel, alla quale sono state sostituite le aste di comando dei parallelogrammi con delle guide lineari: in questo modo l'estremità superiore dei parallelogrammi articolati non compie più una traiettoria circolare, ma rettilinea.



**Figura 1.32:** *Differenti possibilità di posizionamento degli attuatori lineari.*

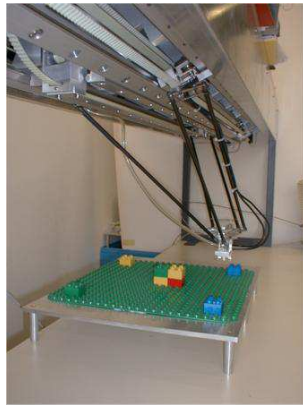
In funzione della disposizione degli assi lineari possono avere quattro differenti configurazioni di *Linear Delta* (Figura 1.32):

- attuatori paralleli;
- attuatori complanari convergenti;
- 2 attuatori paralleli ed uno ortogonale agli altri;
- attuatori a cono.

Il primo prototipo realizzato appartenente a questa famiglia di robot, è costituito da tre guide parallele su cui scorrono tre carrelli mossi da motori rotativi



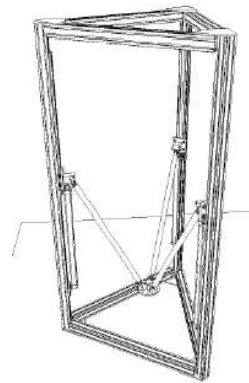
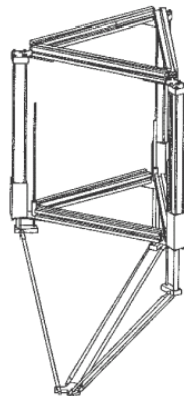
tramite una trasmissione a cinghia (Figura 1.33). Il vantaggio di questa configurazione è quello di ottenere un volume di lavoro la cui estensione è strettamente legata alla lunghezza degli attuatori lineari.



**Figura 1.33:** *Prima applicazione del robot Linear Delta.*

**Figura 1.34:** *Triaglido di Grob-Werke.*

Questa architettura è stata successivamente utilizzata per realizzare una macchina principalmente impiegata per il montaggio di motori (Figura 1.34).



**Figura 1.35:** *Linapod, robot dell'Università dell'Aquila ed il robot Torx.*

Diverse sono anche le applicazioni in cui gli attuatori sono stati posizionati lungo la direzione verticale: questa configurazione rende particolarmente adatti

questi robot al sollevamento di pesi, quindi a compiere operazioni di pick&place. Alcuni esempi di manipolatori appartenenti a questa categoria sono: il robot *Linapod* di ISW (Stuttgart University), il robot pneumatico dell'Università dell'Aquila ed il *Torx* pneumatico del Politecnico di Milano (Figura 1.35).

Infine, un'ultima configurazione di robot con architettura *Linear Delta* è quella dell'*Orthoglide* sviluppato da Wengler e Chablat; questo è costituito da tre attuatori lineari disposti ortogonalmente e convergenti nello stesso punto a cui sono vincolati i tre parallelogrammi che giacciono in piani tra loro ortogonali. La configurazione è molto robusta e si presta per essere impiegata in macchine utensili.



**Figura 1.36:** *Robot Orthoglide.*

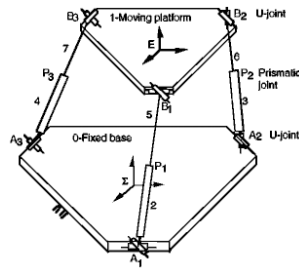
Un ulteriore sviluppo del robot *Delta* è rappresentato dalla piattaforma di Tsai<sup>9</sup> (Figura 1.37).

Nonostante, a prima vista la sua struttura sembri molto differente, uno sguardo più attento noterà molte similitudini. I motori rotativi sono stati sostituiti da motori lineari, il parallelogramma articolato è stato sostituito da una semplice asta con giunti cardanici alle sue estremità. L'inconveniente di questa struttura è

---

<sup>9</sup>[23].

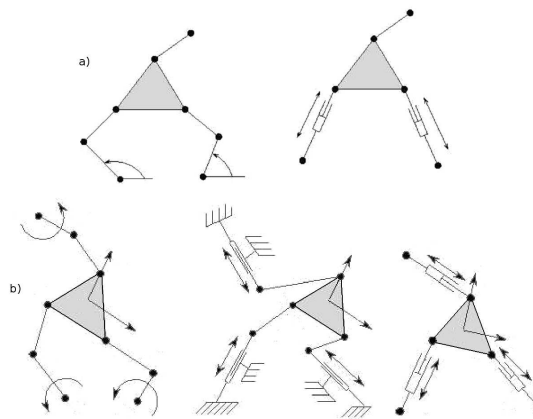
la configurazione degli attuatori che, così posizionati, possono ricevere carichi di torsione oltre a quelli di trazione e compressione; per tale motivo la loro struttura dev'essere robusta, a scapito della leggerezza e quindi delle prestazioni dinamiche.



**Figura 1.37:** *Piattaforma di Tsai.*

### 1.4.5 Planari

I robot paralleli più semplici appartengono alla categoria dei robot planari; questi possono essere a 2 o 3 g.d.l. con azionamenti lineari o rotativi.



**Figura 1.38:** *Robot planari: a) 2 g.d.l. b) 3 g.d.l.*

Con robot a due gradi di libertà è possibile posizionare, nel piano di lavoro, l'end-effector con un orientamento che è funzione della posizione raggiunta; la

rotazione può mantenersi costante all'interno del volume di lavoro o variare da punto a punto (moto accoppiato). Con un robot a 3 g.d.l. è invece possibile definire la posizione dell'end-effector in un qualsiasi punto dello spazio di lavoro e definire anche il suo orientamento.

Un esempio di robot planare è il *IFH TU Braunschweig* (Figura 1.39); si tratta di un robot planare a tre assi, con un asse  $z$  addizionale utilizzato per il micro assemblaggio di precisione.



**Figura 1.39:** *IFH TU Braunschweig*.

# CAPITOLO 2

## DESCRIZIONE DISPOSITIVI

In questo capitolo verranno descritte le principali caratteristiche del manipolatore S.L.O.T.H.<sup>1</sup> e dell'interfaccia aptica (entrambi i dispositivi si trovano presso il Laboratorio di Meccatronica dell'Università di Bergamo), che rappresentano rispettivamente il robot slave ed il robot master del sistema telerobotico che si vuole sviluppare. Inoltre, essendo questo lavoro di tesi focalizzato sullo studio dell'interfaccia aptica, verranno illustrate le convenzioni ed i sistemi di riferimento adottati per impostare l'analisi cinematica e dinamica del dispositivo aptica.

### 2.1 Robot S.L.O.T.H.

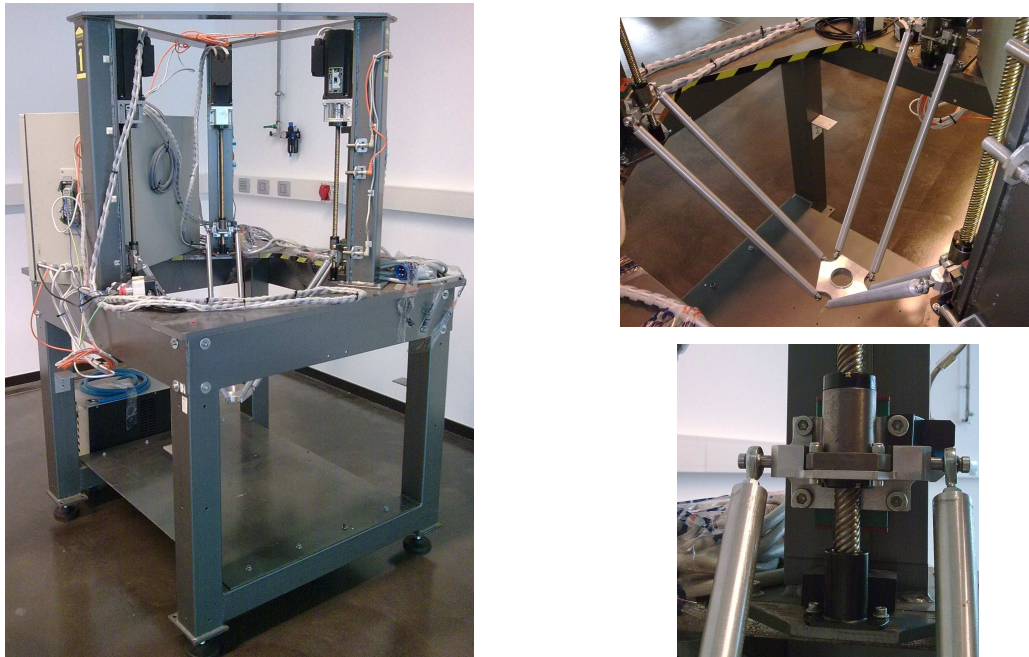
Il robot S.L.O.T.H. è un manipolatore a cinematica parallela a 3 g.d.l. appartenente alla famiglia dei *Delta*, nello specifico alla categoria dei *Linear Delta* con una configurazione ad assi verticali paralleli (vedi Figura 1.32).

Come si può notare dalla Figura 2.1, esso è costituito da tre colonne verticali (fissate al telaio del manipolatore) equispaziate a  $120^\circ$  nel piano orizzontale, sulle quali sono posizionati tre attuatori lineari disposti lungo la direzione verticale; a questi attuatori si collegano tre quadrilateri articolati che si interfacciano tutti

---

<sup>1</sup>[5].

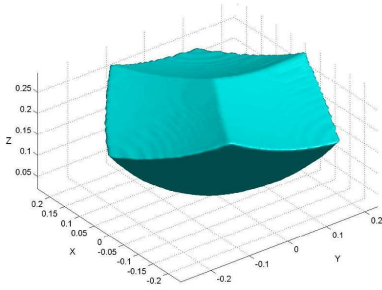
sulla base mobile del robot, formando anche qui un triangolo equilatero. La base mobile ha quindi la funzione di chiudere le catene cinematiche del robot e funge, inoltre, da supporto per eventuali utensili da installare sul manipolatore.



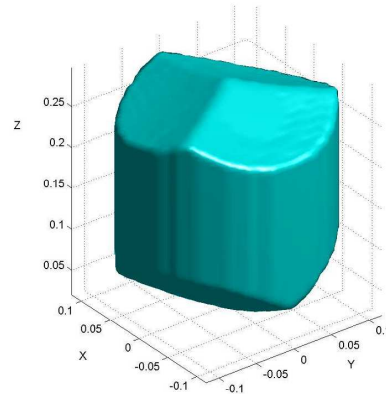
**Figura 2.1:** *Robot S.L.O.T.H.*

Tale configurazione consente all'end-effector di compiere solamente delle traslazioni lungo le tre direzioni dello spazio di lavoro ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ), bloccando quindi ogni possibile rotazione.

Il robot S.L.O.T.H. è caratterizzato da un volume di lavoro che si sviluppa prevalentemente lungo la direzione verticale (a causa degli attuatori lineari) e con un ingombro nel piano orizzontale contenuto all'interno della struttura meccanica (assimilabile ad un cilindro di diametro  $300\text{ mm}$  ed altezza  $260\text{ mm}$ ); questo volume di lavoro è una porzione del volume totale raggiungibile dal manipolatore (tipica forma a lente biconvessa dei robot paralleli).

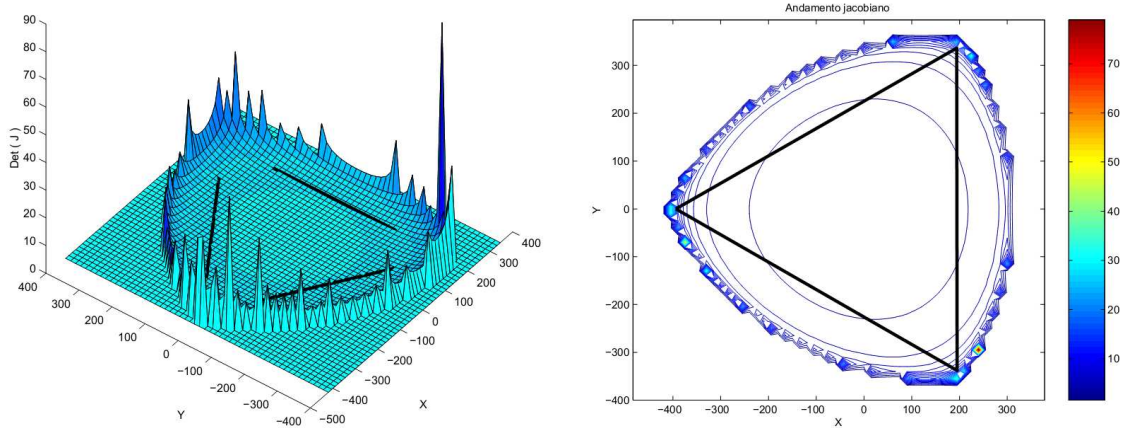


**Figura 2.2:** *Volume di lavoro totale.*



**Figura 2.3:** *Volume di lavoro utile.*

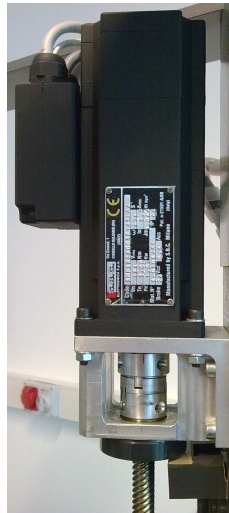
Il volume di lavoro utile dello S.L.O.T.H. è stato ricavato imponendo dei vincoli sui valori del determinante della matrice Jacobiana del manipolatore in modo da limitare i punti di singolarità cinematica. La particolare forma del volume di lavoro, prevalentemente sviluppata lungo la direzione verticale, porta ad avere un comportamento cinematico del robot costante in ogni piano  $X - Y$  (vedi Figura 2.4 , quindi indipendente dalla coordinata  $z$  (a meno dell'estremità superiore e di quella inferiore).



**Figura 2.4:** *Andamento del determinante della matrice Jacobiana in una generica sezione nel piano  $X - Y$ .*



Il singolo gruppo di attuazione è costituito da un carrello comandato da una vite a ricircolo di sfere, attuata a sua volta da un motore brushless. Il motore è collegato alla vite mediante un giunto Oldham (realizzato ad hoc per l'applicazione), in modo da poter compensare eventuali disallineamenti tra l'albero del motore e quello della vite.



**Figura 2.5:** Gruppo di attuazione di un singolo asse dello S.L.O.T.H..

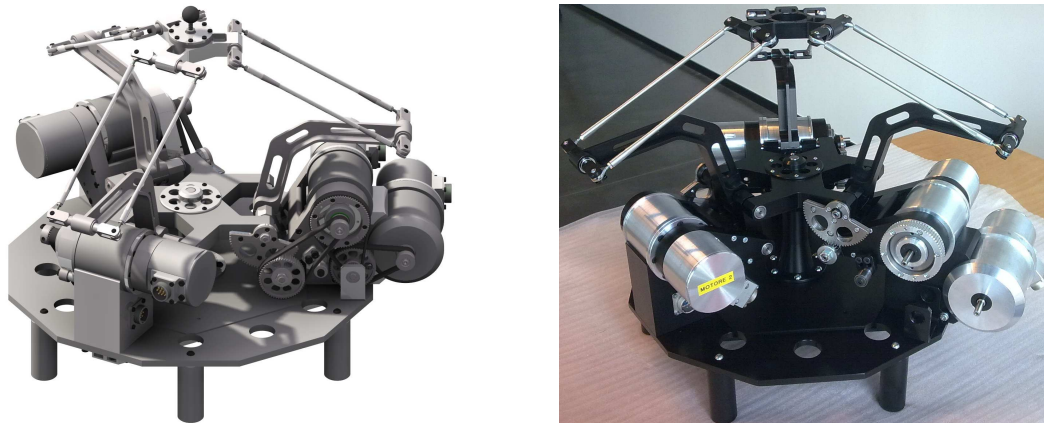
Tutte le parti in movimento, quindi i quadrilateri articolati e la base mobile (vedi Figura 2.3), sono state realizzate in alluminio in modo da ridurre le masse in gioco e quindi, a parità di potenza installata, aumentare le prestazioni dinamiche del robot.

Il robot S.L.O.T.H. è stato progettato per compiere operazioni di pick&place con una frequenza di  $2.5 \text{ Hz}$ ; in particolare la traiettoria di progetto prevedeva spostamenti di  $200 \text{ mm}$  lungo l'asse  $x$ , uno spostamento di  $50 \text{ mm}$  lungo l'asse  $z$  e due pause di  $25 \text{ ms}$  a metà ed al termine della traiettoria.



## 2.2 Interfaccia Aptica

L'interfaccia aptica è un dispositivo molto versatile sviluppato come banco prova per algoritmi di controllo da impiegare in applicazioni in cui siano richiesti movimenti in grande e/o in piccolo, riproduzione di forze ad alta e bassa intensità ed a basse ed elevate frequenze. In particolare, l'interfaccia aptica è stata progettata per garantire, all'interno del proprio volume di lavoro, una forza massima continuativa di  $20\text{ N}$  ed una forza di picco istantanea pari a circa  $40\text{ N}$ ; in questo modo è possibile simulare in modo adeguato delle sensazioni di contatto e di urto particolarmente realistiche, caratterizzate da elevate rigidità degli ostacoli virtuali<sup>2</sup>.



**Figura 2.6:** *Interfaccia aptica.*

Questa interfaccia, facendo riferimento alla classificazione riportata nel capitolo precedente, può essere considerato come un dispositivo desktop (con una base fissa), con un alto numero di gradi di libertà (3 g.d.l. più 1 g.d.l. ridondante), ad architettura parallela ed, infine, in grado di interfacciarsi con l'operatore mediante pochi punti di contatto (manopola collocata sulla base mobile).

La struttura dell'interfaccia aptica è stata così progettata per poter soddisfare alcuni requisiti fondamentali, tra cui: trasparenza all'operatore, compattezza, ele-

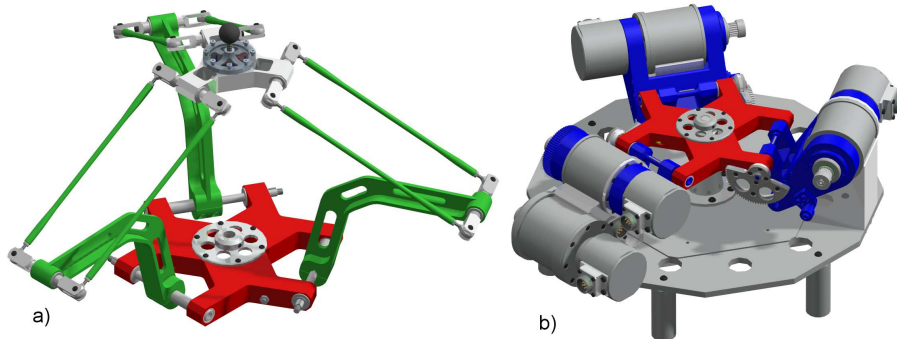
---

<sup>2</sup>[3].

vata banda passante e, prima di tutto, per poter avere un volume di lavoro molto ampio, in modo da potersi interfacciare con rapporto 1:1 al robot S.L.O.T.H. (in questo modo non è necessario scalare i movimenti tra robot master e robot slave). Il volume di lavoro dello S.L.O.T.H. (vedi par. 2.1) è generalmente adatto ad un manipolatore ma non ad un'interfaccia aptica, per la quale risulta infatti proibitivo, soprattutto lungo la direzione verticale (vedi Figura 2.3 ).

Tutte queste considerazioni hanno portato alla progettazione di un'interfaccia aptica con un elevato rapporto *volume di lavoro / ingombro a terra* e composta da due parti fondamentali:

- una struttura superiore a cinematica parallela con architettura *Delta*;
- un meccanismo inferiore per la movimentazione verticale della struttura superiore (manovellismo ordinario deviato).



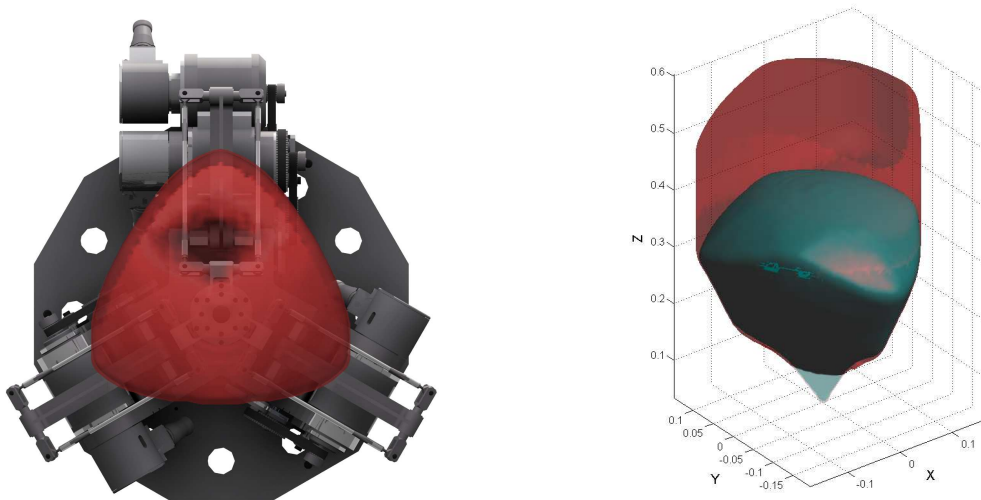
**Figura 2.7:** a) *Meccanismo superiore Delta*. b) *Manovellismo inferiore*.

Come si nota dalla Figura 2.7, il meccanismo *Delta* è costituito da 6 link disposti in 3 coppie orientate a  $120^\circ$  nel piano orizzontale; ogni coppia realizza una catena cinematica tra la base mediana e l'end-effector. Questo meccanismo, che conferisce all'end-effector 3 g.d.l. (le 3 traslazioni nello spazio), ha permesso di avere un volume di lavoro disposto prevalentemente nel piano orizzontale. Per poter ampliare tale volume lungo la direzione verticale è stato introdotto un

secondo meccanismo che, agendo direttamente sulla base del meccanismo *Delta*, permette di conferire all'end-effector una maggiore traslazione lungo l'asse  $z$ ; questo meccanismo di fatto realizza un'attuazione ridondante per la traslazione verticale.

Complessivamente, quindi, l'interfaccia aptica possiede quattro 4 g.d.l.: 3 conferiti dalla struttura superiore ed 1, ridondante, fornito dal meccanismo di sollevamento inferiore.

Attraverso questa architettura, è possibile sfruttare il meccanismo *Delta* per avere una buona sezione del volume di lavoro e sfruttare il meccanismo inferiore per aumentare lo sviluppo in direzione verticale del volume.



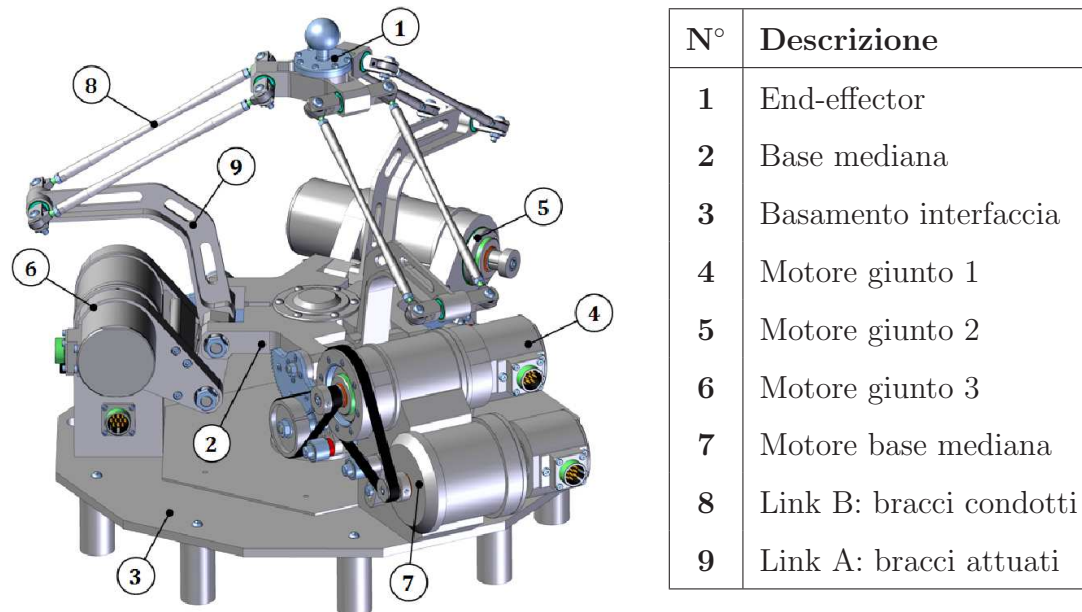
**Figura 2.8:** *Pianta del volume di lavoro, volume del meccanismo Delta (verde) e volume totale dell'interfaccia (rosso).*

Una struttura di questo tipo porta ad avere per ciascuno dei punti all'interno del volume di lavoro  $\infty^1$  soluzioni della cinematica inversa, a causa dei moti interni legati al grado di libertà ridondante.

Questi moti interni possono essere sfruttati per ottimizzare il funzionamento del dispositivo in modo che, all'interno del proprio volume di lavoro, la struttura non assuma delle configurazioni singolari, introdotte dal meccanismo superiore a

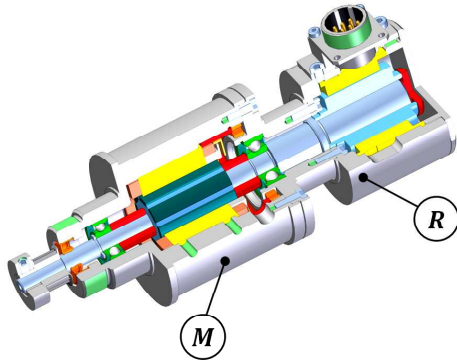
*Delta* e minimizzi le coppie richieste agli attuatori. Comandando opportunamente la base mediana, è possibile cambiare la configurazione meccanica dell'interfaccia aptica, mantenendo invariata la posizione dell'end-effector.

Di seguito viene riportato uno schema dettagliato del dispositivo aptico.



**Figura 2.9:** *Principali componenti dell'interfaccia aptica.*

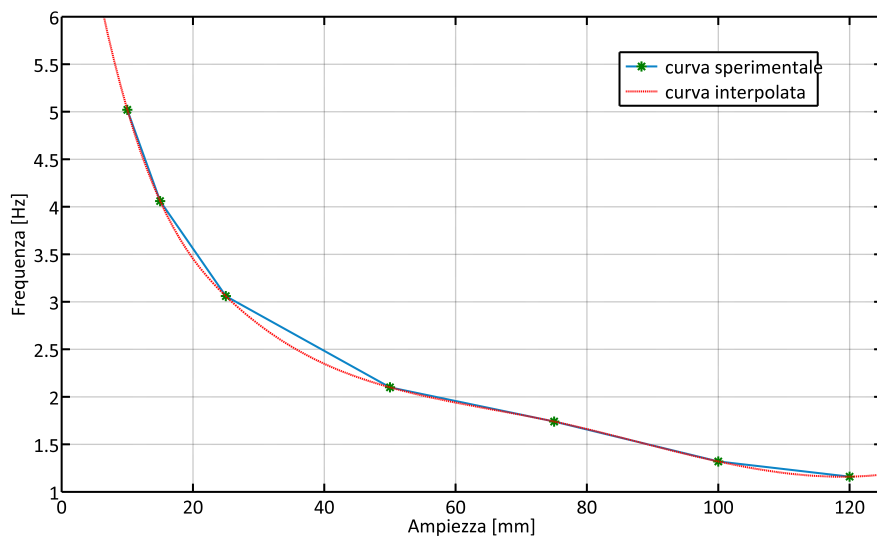
Come si può notare dalla figura, la struttura risulta estremamente compatta; questo è soprattutto merito dei motori frameless che sono stati installati. Questa scelta ha permesso di integrare, nella struttura del dispositivo, il telaio del motore, rendendolo parte strutturale del sistema. I motori installati sono di due taglie differenti: quelli di taglia più piccola (*Kollmorgen 1214*) sono stati utilizzati per l'attuazione dei link della struttura *Delta*, mentre il motore di taglia più grossa (*Kollmorgen 1514*) è stato impiegato per la movimentazione del meccanismo inferiore, quindi della base mediana. Questi attuatori sono provvisti di resolver in modo da poter definire in modo accurato la posizione angolare dei vari link.



Descrizione	Unità	Valore	
Modello	–	1214	1514
$C_{sta}$	$Nm$	0.469	0.808
$C_{nom}$	$Nm$	0.311	0.386
$C_{max}$	$Nm$	1.990	2.850
$RPM$	$giri/min$	6230	3570
$J_m$	$10^{-5}kgm^2$	1.98	5.44

**Figura 2.10:** *Dati caratteristici motori frameless Kollmorgen.*

Il campo di utilizzo limite del dispositivo stesso è stato stabilito attraverso prove empiriche con le quali è stato definito il legame tra l'ampiezza e la frequenza con cui un generico operatore riesce a realizzare, con la mano, delle traiettorie cicloidali<sup>3</sup>. Il grafico che segue riassume i risultati ottenuti da tali prove:



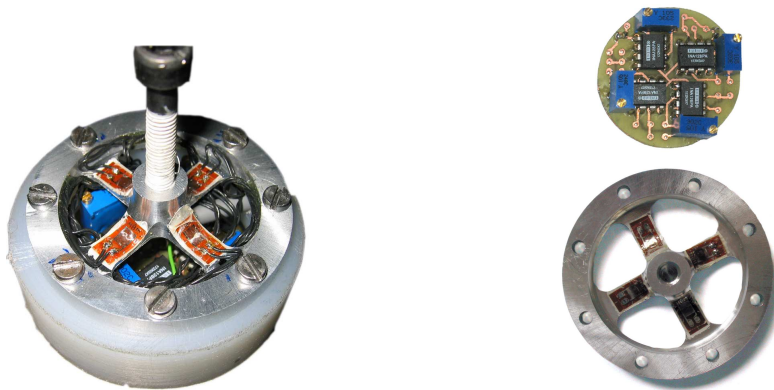
**Figura 2.11:** *Relazione ampiezza-frequenza delle cicloidi operatore.*

<sup>3</sup>[3].

Nel caso limite in cui si compiano delle traiettorie cicloidali con ampiezze ridotte ( $10\text{ mm}$ ), la frequenza massima di utilizzo è di  $5\text{ Hz}$ , mentre all' aumentare dell'ampiezza si arriva fino a frequenze nell'intorno di  $1\text{ Hz}$ .

Questi risultati sono stati utili per il dimensionamento dei motori e per definire le caratteristiche delle traiettorie campione con le quali validare il modello matematico dell'interfaccia aptica; inoltre questi valori risultano utili anche per la progettazione del controllo in forza dell'interfaccia in quanto permette di avere un termine di confronto in merito alla banda passante del controllo.

Nella Figura 2.9 si può notare il sensore di forza: questo è stato posizionato sull'end-effector della struttura superiore *Delta* (nella figura si riconosce la manopola) in modo da poter misurare, in modo diretto, le forze scambiate tra operatore ed interfaccia.



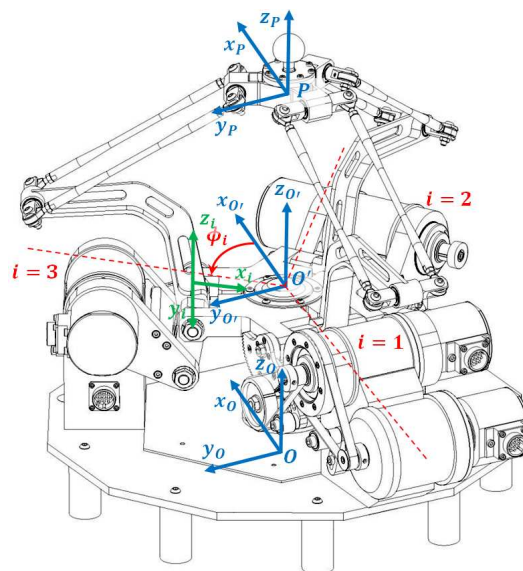
**Figura 2.12:** Sensore di forza e scheda elettronica degli estensimetri.

Il sensore di forza è stato progettato in modo tale da poter contenere anche tutta l'elettronica dedicata agli estensimetri (necessari per poter elaborare e filtrare tutti i segnali e ricavare le componenti di sforzo nelle tre direzioni di movimento) all'interno dell'end-effector della struttura *Delta*. In particolare, il sensore di forza è costituito da un unico elemento d'acciaio dal quale sono state ricavate quattro razze (che costituiscono la parte deformabile del sensore) sulle quali sono stati posizionati gli estensimetri. Attraverso un pomello, posizionato nel centro

dell'elemento d'acciaio, l'operatore deforma queste razze che, attraverso gli estensimetri, definiscono la forza caratteristica del movimento e, attraverso la lettura dei resolver degli attuatori, la posizione dell'end-effector. L'impiego di sensori di forza e di posizione è fondamentale per lo sviluppo di un adeguato sistema di controllo. Questo sistema dev'essere sviluppato in modo tale da poter nascondere all'operatore il peso della struttura e da poter garantire le specifiche di progetto, ossia un campo di forza continuativo di 20  $N$  all'interno di tutto il volume di lavoro e forze massime istantanee di 40  $N$ .

### 2.3 Convenzioni e sistemi di riferimento

In questo paragrafo si riportano alcune considerazioni in merito alle convenzioni adottate ed ai sistemi di riferimento considerati per l'analisi dell'interfaccia aptica; questi sono necessari per impostare correttamente lo studio della cinematica e della dinamica del dispositivo aptico.



**Figura 2.13:** Sistemi di riferimento.



Come è possibile notare dalla Figura 2.13, per il dispositivo aptico è possibile identificare quattro diversi sistemi di riferimento:

- sistema di riferimento assoluto  $(x_O, y_O, z_O)$  posizionato al centro della piattaforma fissa (origine nel punto  $O$ );
- sistema di riferimento mobile  $(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'})$  posizionato al centro della base mediana (origine nel punto  $O'$ );
- sistema di riferimento mobile  $(x_P, y_P, z_P)$  posizionato al centro della base dell'end-effector (origine nel punto  $P$ );
- sistemi di riferimento mobili posizionati in prossimità dei punti  $A_i$  (vedi Figura 2.14) e tali che: l'asse  $x_i$  sia in linea con il prolungamento del segmento  $\overline{O'A}$ , l'asse  $y_i$  sia diretto come l'asse di rotazione dell' $i$ -esimo giunto attivo del robot *Delta* e l'asse  $z_i$  sia parallelo all'asse  $z$ ; l'angolo  $\phi_i$  è misurato dall'asse  $x_{O'}$  all'asse  $x_i$  ed è un parametro costante della configurazione del manipolatore.

La disposizione di queste terne di riferimento è legata alla particolare conformazione dell'interfaccia che consente di disaccoppiare i giunti del robot *Delta* con quelli del manovellismo ordinario deviato.

In particolare si nota la disposizione dei sistemi di riferimento in cui il generico asse  $x$  è posizionato lungo la direzione che congiunge l'attuatore 1 al centro della base mediana.

Inoltre tutti i primi tre sistemi di riferimento, date le caratteristiche dell'interfaccia aptica, avranno sempre gli assi tra loro paralleli.

Lo schema delle catene cinematiche dell'interfaccia aptica è riportato in Figura 2.14 ed in Figura 2.15. In particolare, per quanto riguarda il meccanismo inferiore, data la disposizione simmetrica dei tre manovellismi, è possibile analizzare un solo meccanismo ordinario in luogo dei tre presenti.



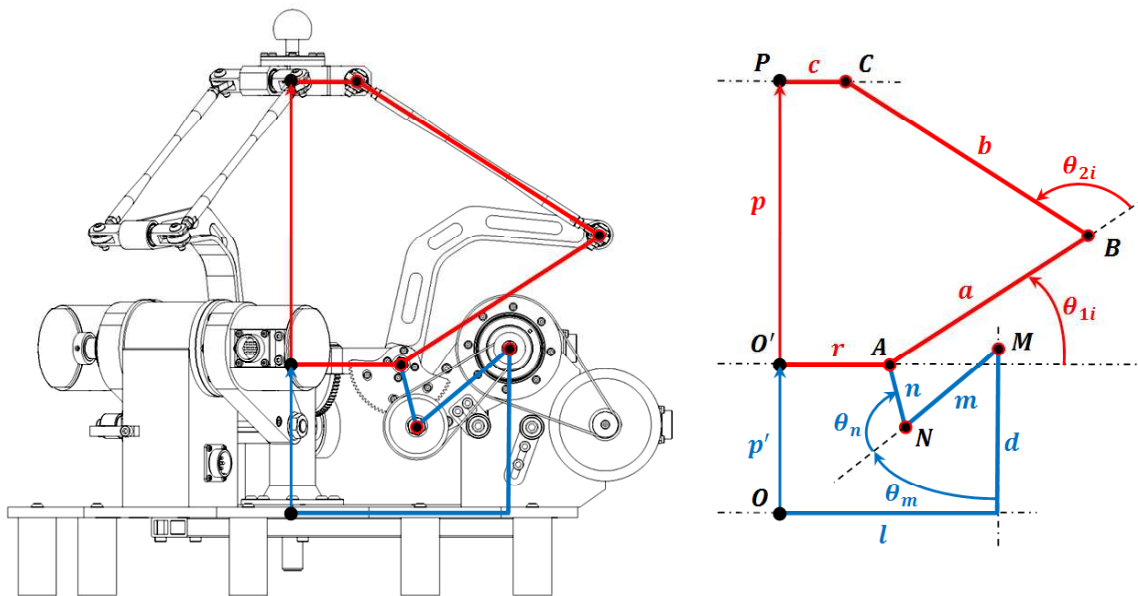


Figura 2.14: Descrizione degli angoli di giunto.

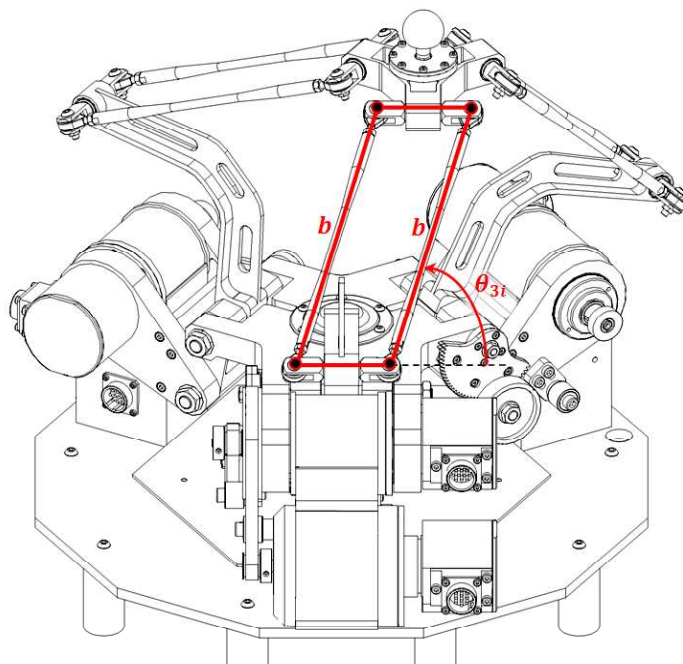


Figura 2.15: Angolo  $\theta_{3i}$ .

In merito alle figure sopra riportate, è possibile identificare le seguenti grandezze per il meccanismo superiore *Delta*:

- $r$  è il segmento che congiunge l'origine  $O'$  della terna di riferimento posizionata sulla base mediana con l'origine  $A_i$  dell' $i$ -esimo sistema di riferimento mobile;
- $a$  è pari al segmento  $\overline{A_i B_i}$  ed è il vettore che congiunge il punto di infulcro del giunto attuato con il giunto sferico che lo collega con il parallelogrammo corrispondente; è quindi la rappresentazione geometrica dell' $i$ -esimo giunto attuato;
- $b$  è pari al segmento  $\overline{B_i C_i}$  ed è il vettore che congiunge il giunto sferico dell' $i$ -esimo giunto attuato con il giunto sferico dell'end-effector (è definito dall'intersezione del piano su cui giace il parallelogrammo ed il piano  $x_i - z_i$ ); è quindi la rappresentazione geometrica dell' $i$ -esimo parallelogramma articolato;
- $c$  è il segmento che congiunge il sistema di riferimento mobile posizionato al centro dell'end-effector con il punto  $C$ ;
- $p$  è il vettore che congiunge l'origine  $O'$  della terna mobile posizionata sulla base mediana con l'origine  $P$  del sistema di riferimento mobile posizionato sull'end-effector; esso rappresenta quindi la distanza verticale tra la base mediana e l'end-effector;
- $\theta_{1i}$  è l'angolo formato tra l'asse  $x_i$  ed il segmento  $a$ ;
- $\theta_{2i}$  è l'angolo formato tra il prolungamento del segmento  $a$  ed il segmento  $b$ , misurato nel piano  $x_i - z_i$ ;
- $\theta_{3i}$  è l'angolo formato tra il prolungamento del segmento  $a$  (lungo la direzione  $y_i$ ) ed il segmento  $b$ , misurato nel piano  $y_i - z_i$ .

Riguardo al meccanismo inferiore è possibile identificare le seguenti grandezze:

- $l$  è il vettore che congiunge l'origine  $O$  del sistema di riferimento fisso con i bracci del telaio che consentono il sollevamento dell'interfaccia dal piano di appoggio;
- $d$  è il vettore, diretto come l'asse  $z$ , che congiunge la base fissa con il punto di infulcro della manovella del meccanismo inferiore;
- $m$  è il vettore che rappresenta la manovella del meccanismo inferiore;
- $n$  è il vettore che rappresenta la biella del manovellismo deviato;
- $p$  è il vettore che congiunge l'origine  $O$  della terna assoluta con l'origine  $O'$  del sistema di riferimento mobile posizionato sulla base mediana; esso rappresenta quindi la distanza verticale tra la base fissa e la base mediana;
- $\theta_m$  è l'angolo misurato tra il segmento  $d$  ed il segmento  $m$ ;
- $\theta_n$  è l'angolo misurato tra il prolungamento del segmento  $m$  ed il segmento  $n$  e rappresenta l'angolo interno al manovellismo.

Nella struttura *Delta*, gli angoli  $\theta_{1i}$  per  $i = 1, 2, 3$  sono considerati angoli di giunto, mentre per il manovellismo inferiore, l'angolo di giunto è rappresentato dalla variabile  $\theta_m$ .



## CAPITOLO 3

# ANALISI CINEMATICA DIRETTA

In questo capitolo si propone la risoluzione della cinematica diretta dell'interfaccia aptica, ossia la definizione delle posizioni, delle velocità e delle accelerazioni dell'end-effector a partire dalle posizioni, velocità ed accelerazioni dei giunti attivi.

Data la particolare struttura del dispositivo, è possibile disaccoppiare lo studio della cinematica del manovellismo inferiore da quella della struttura *Delta* superiore. Il legame tra le due catene cinematiche verrà definito attraverso la scrittura delle equazioni relative ai gruppi di trasmissione del dispositivo.

A causa della ridondanza del grado di libertà verticale, per questa interfaccia aptica risulta molto più semplice la risoluzione della cinematica diretta rispetto alla cinematica inversa: infatti, per ogni posizione dell'end-effector, esistono infinite configurazioni che soddisfano i vincoli cinematici, ognuna funzione della posizione della base mediana; per questo motivo è necessario definire una metodologia che permetta di gestire in modo adeguato i moti interni della struttura.

Per la scrittura delle equazione si fa riferimento alle convenzioni ed agli schemi riportati nel paragrafo 2.3; inoltre, il generico vettore verrà definito nel seguente modo  $\mathbf{v} = v\mathbf{i}_v$ , dove  $v$  è il modulo ed  $\mathbf{i}_v$  è il versore che ne indica la direzione.

### 3.1 Cinematica diretta manovellismo inferiore

Lo scopo di quest'analisi è quello di definire, noto l'angolo di giunto  $\theta_m$ , la posizione verticale della base mediana, quindi il vettore  $p'$ .

Un approccio intuitivo per la risoluzione della cinematica diretta potrebbe essere quello di trattare il problema da un punto di vista geometrico.

Dato un angolo  $\theta_m$ , si consideri il luogo di tutte le posizioni del punto  $O'$  dell' $i$ -esima catena cinematica. Visto che il link  $n$  è collegato alla manovella  $m$  attraverso una cerniera, il luogo dei punti percorsi dalla sua estremità non vincolata alla manovella (punto  $A$ ), è una circonferenza centrata nella cerniera  $N$ ; inoltre, il punto  $O'$  è posizionato ad una distanza pari ad  $r$  lungo la direzione individuata dal versore  $\mathbf{i}_r$ . Considerando tutte e tre le catene cinematiche ed i vincoli di accoppiamento cinematico presenti, il punto  $O'$  potrà trovarsi solo su una retta giacente lungo l'asse  $z$  della terna fissa. L'intersezione di questa retta con una delle tre circonferenze delle tre catene cinematiche del meccanismo inferiore, fornirà la posizione del punto  $O'$ .

Grazie alla simmetria del manovellismo inferiore, che conferisce alla struttura un solo grado di libertà, è possibile considerare un'unica equazione di chiusura vettoriale per la risoluzione della cinematica diretta (quindi un'unica circonferenza che vada ad intersecarsi con la retta su cui giace  $O'$ ). Dall'intersezione si possono presentare tre casi:

- *Soluzione generica*: si trovano due soluzioni dall'intersezione della circonferenza con la retta.
- *Soluzione singolare*: la circonferenza è tangente alla retta su cui giace  $O'$ , pertanto si ha una sola soluzione.
- *Nessuna soluzione*: la circonferenza non ammette alcuna intersezione con la retta.

Prima di procedere alla scrittura delle equazioni delle catene cinematiche è utile definire i versori corrispondenti al meccanismo inferiore:

$$\mathbf{i}_d = \mathbf{i}_{p'} = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (3.1)$$

$$\mathbf{i}_r = \mathbf{i}_l = [1 \quad 0 \quad 0]^T \quad (3.2)$$

$$\mathbf{i}_m = [\sin \theta_m \quad 0 \quad -\cos \theta_m]^T \quad (3.3)$$

Si può ora scrivere l'equazione di chiusura della catena cinematica:

$$\mathbf{l} + \mathbf{d} + \mathbf{m} + \mathbf{n} = \mathbf{p}' + \mathbf{r} \quad (3.4)$$

Definendo  $\mathbf{k} = \mathbf{l} - \mathbf{r}$  (vettore giacente nel piano  $x, y$ ) e  $\mathbf{g} = \mathbf{p}' - \mathbf{d}$  (vettore giacente nel piano  $x, z$ ) si può scrivere:

$$\mathbf{n} = -\mathbf{m} - \mathbf{k} + \mathbf{g}. \quad (3.5)$$

Elevando al quadrato i vari termini è possibile ottenere l'equazione di una circonferenza di raggio  $r$  e centrata nel punto  $N$ ; questo permette di semplificare i termini legati all'angolo interno  $\theta_n$  ancora incognito.

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^2 &= [\mathbf{g} - (\mathbf{m} + \mathbf{k})]^2 \\ \mathbf{n}^2 &= \mathbf{g}^2 + (\mathbf{m} + \mathbf{k})^2 - 2\mathbf{g}(\mathbf{m} + \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

esplicitando lungo le direzioni  $x, z$  si ottiene:

$$n^2 = g^2 + m^2 + k^2 + 2(m_x k_x + m_z k_z) - 2g_x(m_x + k_x) - 2g_z(m_z + k_z). \quad (3.7)$$

Considerando le componenti nulle dei versori (le componenti di  $k$  lungo  $z$  e le componenti di  $g$  lungo  $x$ ) è possibile semplificare l'equazione (3.7) e ottenere un'equazione di secondo grado in  $g_z$  le cui radici sono i punti di intersezione tra la circonferenza e la retta sopra descritte:

$$g_z^2 - 2g_z m_z + m^2 + k^2 + 2m_x k_x - n^2 = 0$$

L'equazione può essere quindi riscritta nel seguente modo:

$$Ag_z^2 + Bg_z + C = 0 \quad (3.8)$$

dove:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= 2m_z \\ C &= m^2 + k^2 + 2m_x k_x - n^2 \end{aligned}$$

le cui soluzioni sono:

$$g_z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (3.9)$$

Se l'equazione (3.9) presenta due soluzioni reali si considera la soluzione con segno “+” per ottenere la configurazione mostrata in Figura 2.14. Noto  $g_z$  è possibile determinare la posizione verticale della base mediana come  $p_{z'} = g_z + d_z$ .

Per calcolare l'angolo interno alla struttura  $\theta_n$  occorre procedere alla scrittura dell'equazione di chiusura della catena cinematica relativa all'asse  $z$  (quindi si scrivono tutte le componenti dei vari vettori lungo la direzione verticale).

$$d - m \cos \theta_m - n \cos(\theta_m + \theta_n) - p_{z'} = 0 \quad (3.10)$$

$$\theta_n = -\theta_m + \arccos\left(\frac{d - p_{z'} - m \cos \theta_m}{n}\right) \quad (3.11)$$

## 3.2 Cinematica diretta della struttura *Delta*

Lo scopo di quest'analisi è definire, noti gli angoli dei giunti  $\theta_{11}$ ,  $\theta_{12}$  e  $\theta_{13}$ , la posizione dell'end-effector, rispetto al sistema di riferimento  $x_{O'}$ ,  $y_{O'}$ ,  $z_{O'}$ , posizionato sulla base mediana. Anche in questo caso, come per il manovellismo inferiore, è possibile utilizzare un approccio di tipo geometrico considerando, questa volta, il luogo dei punti descritto dall'estremità libera del link  $b$ .



Si consideri il luogo di tutte le possibili posizioni del punto  $P$  dell' $i$ -esima catena cinematica con un dato angolo  $\theta_{1i}$ . Dato che il link  $b$  è collegato al braccio  $a$  attraverso un giunto sferico, la superficie generata dall'estremità non vincolata del link (punto  $C_i$ ) risulta essere una sfera centrata nel punto  $B_i$ ; inoltre, il punto  $P$  è posizionato ad una distanza pari a  $c$  lungo la direzione individuata dal versore  $\mathbf{i}_c$ . Considerando tutte e tre le catene cinematiche contemporaneamente, il punto  $P$  dovrà giacere contemporaneamente sulle tre sfere centrate nei punti  $B_i$ ; l'intersezione di queste tre sfere rappresenta la soluzione al problema della cinematica diretta. In generale, possono esserci due soluzioni perché l'intersezione di due sfere è una circonferenza e questa può intersecare l'ultima sfera in due punti.

Nota la geometria del robot possono presentarsi tre casi:

- *Soluzione generica*: dall'intersezione delle tre sfere si trovano due soluzioni (bisogna scegliere quella con il segno corretto).
- *Soluzione singolare*: una sfera è tangente alla circonferenza di intersezione delle altre due sfere, pertanto si ha una sola soluzione.
- *Nessuna soluzione*: le tre sfere non ammettono alcuna intersezione.

Riferendosi alla Figura 2.13, prima di passare alla scrittura delle equazioni delle catene cinematiche, è bene definire i versori della base mediana, dell'end-effector e dei link  $a$  della struttura superiore (link attuati):

$$\phi_1 = 180^\circ \quad \phi_2 = 300^\circ \quad \phi_3 = 60^\circ \quad (3.12)$$

$$\mathbf{i}_{r_i} = \mathbf{i}_{c_i} = [\cos \phi_i \quad \sin \phi_i \quad 0]^T \quad (3.13)$$

$$\mathbf{i}_{a_i} = [\cos \phi_i \cos \theta_{1i} \quad \sin \phi_i \cos \theta_{1i} \quad \sin \theta_{1i}]^T \quad (3.14)$$

E' ora possibile scrivere l'equazione di chiusura vettoriale della struttura superiore *Delta*:

$$\mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i = \mathbf{p} + \mathbf{c}_i \quad (3.15)$$

con  $i = 1, 2, 3$ .

Anche in questo caso, come per il meccanismo inferiore, si raccolgono le grandezze costanti in un unico vettore  $\mathbf{e}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{c}_i$  (è un vettore giacente nel piano  $x, y$ ) in modo da poter scrivere l'equazione (3.15) come:

$$\mathbf{b}_i = -\mathbf{a}_i - \mathbf{e}_i + \mathbf{p} \quad (3.16)$$

Eseguendo il quadrato di ogni equazione ( $i = 1, 2, 3$ ), si ottiene la relazione della generica sfera centrata nel punto  $B_i^1$ :

$$\mathbf{b}_i^2 = [\mathbf{p} - (\mathbf{a}_i + \mathbf{e}_i)]^2$$

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1^2 = \mathbf{p}^2 + (\mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_1)^2 - 2\mathbf{p}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_1) \\ \mathbf{b}_2^2 = \mathbf{p}^2 + (\mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_2)^2 - 2\mathbf{p}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_2) \\ \mathbf{b}_3^2 = \mathbf{p}^2 + (\mathbf{e}_3 + \mathbf{a}_3)^2 - 2\mathbf{p}(\mathbf{e}_3 + \mathbf{a}_3). \end{cases} \quad (3.17)$$

Si noti che, con l'equazione (3.17), si semplificano i termini legati agli angoli interni del robot *Delta* (termini  $\mathbf{b}_i$ ). Sottraendo la prima equazione alla terza e la seconda alla terza, si ottengono le equazioni dei due piani<sup>2</sup> che contengono le circonferenze nate dall'intersezione delle coppie di sfere 3-1 e 3-2:

$$\begin{cases} (\mathbf{e}_3 + \mathbf{a}_3)^2 - (\mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_1)^2 + 2\mathbf{p}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_3) = 0 \\ (\mathbf{e}_3 + \mathbf{a}_3)^2 - (\mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_2)^2 + 2\mathbf{p}(\mathbf{e}_2 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{a}_3) = 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Tali equazioni possono essere riscritte in forma più elegante; esplicitandole rispetto  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} m_1 p_x + m_2 p_y + m_3 p_z + m_4 = 0 \\ m_5 p_x + m_6 p_y + m_7 p_z + m_8 = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

<sup>1</sup>In geometria cartesiana, una superficie sferica con centro  $(x_0, y_0, z_0)$  e di raggio  $r$  è rappresentata dall'insieme di punti  $(x, y, z)$  tali che  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$ .

<sup>2</sup>L'equazione canonica del piano nello spazio tridimensionale  $R^3$  è del tipo:  $ax + by + cz + d = 0$ , in cui  $a, b, c$  e  $d$  sono parametri che definiscono l'orientamento del piano.

dove:

$$\begin{aligned}
m_1 &= 2 (e_{1,x} + a_{1,x} - e_{3,x} - a_{3,x}) \\
m_2 &= 2 (e_{1,y} + a_{1,y} - e_{3,y} - a_{3,y}) \\
m_3 &= 2 (a_{1,z} - a_{3,z}) \\
m_4 &= (e_3^2 - e_1^2) + (a_3^2 - a_1^2) + 2(e_{3,x} a_{3,x} + e_{3,y} a_{3,y} - e_{1,x} a_{1,x} - e_{1,y} a_{1,y}) \\
m_5 &= 2 (e_{2,x} + a_{2,x} - e_{3,x} - a_{3,x}) \\
m_6 &= 2 (e_{2,y} + a_{2,y} - e_{3,y} - a_{3,y}) \\
m_7 &= 2 (a_{2,z} - a_{3,z}) \\
m_8 &= (e_3^2 - e_2^2) + (a_3^2 - a_2^2) + 2(e_{3,x} a_{3,x} + e_{3,y} a_{3,y} - e_{2,x} a_{2,x} - e_{2,y} a_{2,y})
\end{aligned}$$

Ricavando  $p_y$  dalla prima delle (3.19) e sostituendolo nella seconda si ricava l'equazione parametrica della retta intersezione dei due piani:

$$\begin{cases} p_x = m_9 + m_{10}p_z \\ p_y = m_{11} + m_{12}p_z \end{cases} \quad (3.20)$$

dove:

$$\begin{aligned}
m_9 &= \frac{m_6 m_4 - m_8 m_2}{m_5 m_2 - m_6 m_1} & m_{10} &= \frac{m_6 m_3 - m_7 m_2}{m_5 m_2 - m_6 m_1} \\
m_{11} &= -\frac{m_1 m_9 + m_4}{m_2} & m_{12} &= -\frac{m_1 m_{10} + m_3}{m_2}
\end{aligned}$$

Su tale retta giace il punto  $P$  e per ricavarlo si cercano i punti di intersezione di tale retta con una delle sfere descritte dalle (3.17). Sostituendo  $p_x$  e  $p_y$  nella prima delle equazioni (3.17) si ottiene un'equazione di secondo grado nell'incognita  $p_z$ :

$$Ap_z^2 + Bp_z + C = 0 \quad (3.21)$$

dove:

$$A = m_{10}^2 + m_{12}^2 + 1$$

$$B = 2 [m_9 m_{10} + m_{11} m_{12} - m_{10}(e_{1,x} + a_{1,x}) - m_{12}(e_{1,y} + a_{1,y}) - a_{1,z}]$$

$$C = -b_1^2 + m_9^2 + m_{11}^2 + e_1^2 + a_1^2 + 2 [e_{1,x} a_{1,x} + e_{1,y} a_{1,y} - m_9(e_{1,x} + a_{1,x}) - m_{11}(e_{1,y} + a_{1,y})]$$

le cui soluzioni sono:

$$p_z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.22)$$

Se l'equazione presenta due soluzioni reali, si considera la soluzione con segno “+” per ottenere la configurazione mostrata in Figura 2.14.

Nota ora anche la posizione dell'end-effector lungo  $z$ , è possibile determinare, attraverso le relazioni (3.20) la posizione dell'end-effector rispetto tutte le direzioni di movimento.

Per calcolare gli angoli interni della struttura, occorre procedere alla scrittura delle equazioni di chiusura delle tre catene cinematiche relative ai tre vettori (3.15):

$$\begin{bmatrix} a \cos \theta_{1i} + b \sin \theta_{3i} \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \\ b \cos \theta_{3i} \\ a \sin \theta_{1i} + b \sin \theta_{3i} \sin(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi_i & \sin \phi_i & 0 \\ -\sin \phi_i & \cos \phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c - r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Utilizzando la seconda equazione delle (3.23) è possibile ricavare  $\theta_{3i}$ , mentre dalla prima equazione si determina  $\theta_{2i}$ :

$$\theta_{3i} = \arccos \left( \frac{-p_x \sin \phi_i + p_y \cos \phi_i}{b} \right) \quad (3.24)$$

$$\theta_{2i} = -\theta_{1i} + \arccos \left( \frac{p_x \cos \phi_i + p_y \sin \phi_i - a \cos \theta_{1i} + c - r}{b \sin \theta_{3i}} \right) \quad (3.25)$$

Nota quindi la posizione angolare del giunto attuato  $\theta_{1i}$  è possibile determinare gli angoli interni della struttura superiore *Delta*.

La posizione assoluta dell'end-effector sarà determinata sommando lungo la direzione  $z$  i contributi dati dai due meccanismi che costituiscono l'interfaccia, mentre, per la posizione lungo le direzioni  $x$  e  $y$ , si farà riferimento alle relazioni

(3.20):

$$\begin{cases} p_{ztot} = p_{z'} + p_z \\ p_x = m_9 + m_{10}p_z \\ p_y = m_{11} + m_{12}p_z \end{cases} \quad (3.26)$$

### 3.3 Relazioni cinematiche della trasmissione

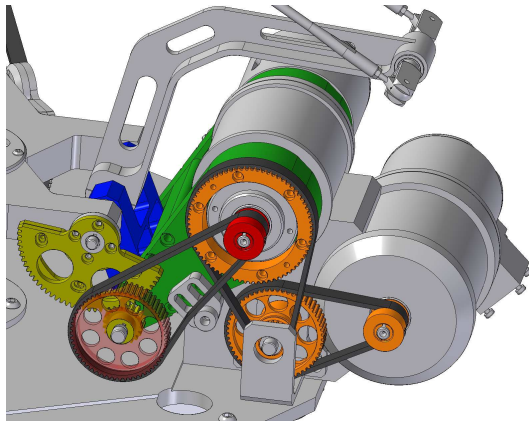
Nei paragrafi precedenti sono stati ricavati gli angoli relativi ai giunti attuati di entrambi i meccanismi che costituiscono l'interfaccia aptica; in questo paragrafo, invece, verranno definite tutte le relazioni cinematiche della trasmissione che permetteranno di legare la posizione dei giunti attuati con quella degli attuatori.

Il moto alla struttura *Delta* viene trasmesso tramite due rotismi:

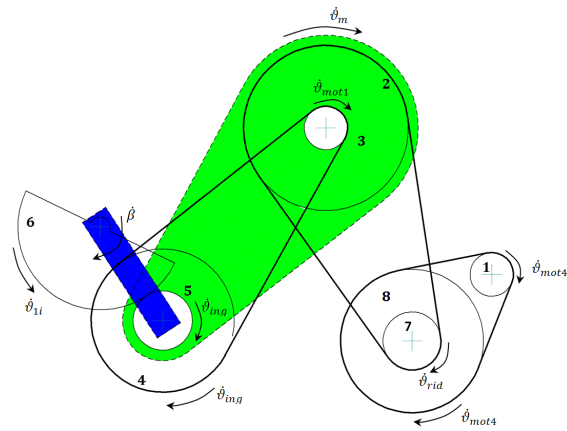
- *una trasmissione a cinghia* che attua la manovella del meccanismo inferiore;
- *un rotismo epicicloidale a due stadi* che trasmette il moto alla struttura *Delta* superiore.

Questa particolare configurazione della trasmissione ha permesso di realizzare un dispositivo molto compatto, in cui i motori fungono da elementi portanti per i due meccanismi.

Nei rotismi epicicloidali le ruote ad asse mobile sono montate su un telaio girevole detto *portatreno* (se questo fosse fisso il rotismo sarebbe di tipo ordinario); nel caso particolare dell'interfaccia aptica per entrambi gli stadi di riduzione, è il meccanismo inferiore a fungere da portatreno: per il primo stadio di riduzione è la manovella (nelle figure che seguono evidenziata in verde), mentre per il secondo stadio di riduzione è la biella (evidenziata in blu nelle figure che seguono).



**Figura 3.1:** *Trasmissione completa.*



**Figura 3.2:** *Schema complessivo della trasmissione.*

Di seguito si riportano il numero di denti degli ingranaggi e delle pulegge che trasmettono il moto dai motori agli altri elementi dei due meccanismi.

$$z_1 = 18$$

$$z_2 = 86$$

$$z_3 = 18$$

$$z_4 = 53$$

$$z_5 = 20$$

$$z_6 = 80$$

$$z_7 = 19$$

$$z_8 = 56$$

I rapporti di trasmissione sono i seguenti:

$$\tau_{18} = \frac{z_1}{z_8} \quad \tau_{72} = \frac{z_7}{z_2} \quad \tau_{34} = \frac{z_3}{z_4} \quad \tau_{56} = \frac{z_5}{z_6} \quad (3.27)$$

Facendo riferimento alla Figura 3.2, si consideri il semplice rotismo a cinghia che collega la ruota 1 alla ruota 2; la velocità di rotazione del motore che attua la base mediana è definita dalle seguenti relazioni:

$$\tau_{12} = \tau_{18} \cdot \tau_{72} = \frac{\dot{\theta}_m}{\dot{\theta}_{mot4}} \quad (3.28)$$

$$\dot{\theta}_{mot4} = \frac{\dot{\theta}_m}{\tau_{12}} \quad (3.29)$$

Integrando l'equazione (3.29) rispetto al tempo è possibile ottenere la rotazione  $\theta_{mot4}$  del motore 4:

$$\theta_{mot4} = \frac{\theta_m - \theta_{m0}}{\tau_{12}}. \quad (3.30)$$

Si considerino ora le catene cinematiche che attuano il meccanismo *Delta*; essendo tra loro identiche la procedura di calcolo verrà presentata solamente per il motore 1.

Per determinare la velocità del motore, bisogna ricorrere alla formula di Willis<sup>3</sup>, che definisce il rapporto di trasmissione di un gruppo di riduzione epicicloidale nel seguente modo:

$$\tau_w = \frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_1 - \Omega} \quad (3.31)$$

dove:

$\tau_w$  = rapporto di trasmissione complessivo dello stadio di riduzione;

$\Omega$  = velocità angolare del portatreno;

$\omega_2$  = velocità angolare della ruota montata sul portatreno;

$\omega_1$  = velocità angolare della ruota posizionata a "terra".

Si consideri inizialmente il primo stadio di riduzione che trasferisce il moto dalla ruota 3 alla ruota 4 (Figura 3.2); quest'ultima è montata sul portatreno (manovella del meccanismo inferiore con velocità angolare  $\dot{\theta}_m$ ).

$$\frac{1}{\tau_{34}} = \frac{\dot{\theta}_{mot1} - \dot{\theta}_m}{\dot{\theta}_{ing} - \dot{\theta}_m} \quad (3.32)$$

da cui si ottiene:

$$\dot{\theta}_{mot1} = \dot{\theta}_{ing} \frac{1}{\tau_{34}} + \dot{\theta}_m \left(1 - \frac{1}{\tau_{34}}\right) \quad (3.33)$$

---

<sup>3</sup>[9].

Integrando nel tempo l'equazione (3.33) si ottiene:

$$\theta_{mot1} - \theta_{mot1_0} = (\theta_{ing} - \theta_{ing_0}) \frac{1}{\tau_{34}} + (\theta_m - \theta_{m_0}) \left(1 - \frac{1}{\tau_{34}}\right) \quad (3.34)$$

Eliminando i termini nulli  $\theta_{mot1_0}$  e  $\theta_{ing_0}$  dalla precedente relazione e fissando il valore di  $\theta_{m_0} = 35^\circ$ <sup>4</sup> si ricava lo spostamento angolare del motore 1 come:

$$\theta_{mot1} = \theta_{ing} \frac{1}{\tau_{34}} + (\theta_m - \theta_{m_0}) \left(1 - \frac{1}{\tau_{34}}\right). \quad (3.35)$$

Come si intuisce dalle formule riportate sopra, per poter determinare il valore di  $\theta_{mot1}$  è necessario conoscere prima lo spostamento angolare  $\theta_{ing}$  della ruota 4. Si consideri quindi il secondo stadio di riduzione, ossia quello che permette di trasferire il moto dalla ruota 5 al settore dentato 6 (Figura 3.2); quest'ultimo è montato sul portatreno (biella del meccanismo inferiore con velocità angolare  $\dot{\beta}$ ).

$$-\tau_{56} = \frac{-\dot{\theta}_{1i} - \dot{\beta}}{\dot{\theta}_{ing} - \dot{\beta}} \quad (3.36)$$

Il segno “-” della variabile  $\dot{\theta}_{1i}$  è legato al fatto che il settore dentato ruota con verso opposto rispetto alle altre ruote e pulegge della trasmissione.

Dalla 3.36 si ottiene la velocità angolare  $\dot{\theta}_{ing}$  e, integrando, la rotazione  $\theta_{ing}$ :

$$\dot{\theta}_{ing} = \dot{\theta}_{1i} \frac{1}{\tau_{56}} + \dot{\beta} \left(1 + \frac{1}{\tau_{56}}\right) \quad (3.37)$$

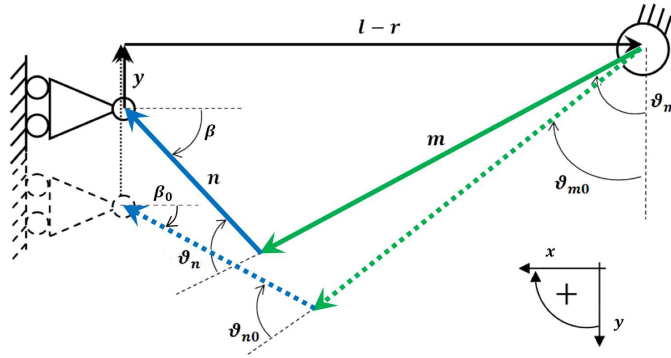
$$\theta_{ing} = (\theta_{1i} - \theta_{1i_0}) \frac{1}{\tau_{56}} + (\beta - \beta_0) \left(1 + \frac{1}{\tau_{56}}\right) \quad (3.38)$$

In ques'ultima relazione compare la variabile  $\beta$  che non è ancora stata determinata. Si consideri quindi lo schema riportato in Figura 3.3 e si scriva l'equazione di chiusura cinematica relativa alla struttura composta dalle due aste portatreno.

---

<sup>4</sup>È stato scelto questo valore perché è pari all'angolo  $\theta_{m_0}$  presente nel modello CAD.





**Figura 3.3:** Schema cinematico della trasmissione.

$$m \sin(\theta_m) + n \cos(\beta) = l - r \quad (3.39)$$

da cui:

$$\beta = \arccos \left[ \frac{1}{n} (l - r - m \sin(\theta_m)) \right] \quad (3.40)$$

Differenziando l'equazione precedente è possibile calcolare la velocità angolare del portatreno delle ruote 5 e 6:

$$m \dot{\theta}_m \cos(\theta_m) - n \dot{\beta} \sin(\beta) = 0 \quad (3.41)$$

$$\dot{\beta} = \frac{m \dot{\theta}_m \cos(\theta_m)}{n \sin(\beta)} \quad (3.42)$$

Essendo ora note anche la posizione e la velocità angolare del secondo portatreno, è possibile ricavare posizioni e velocità non soltanto del motore 1, ma anche degli altri motori, in quanto la variabile  $\beta$  è la medesima per tutte le catene cinematiche del manovellismo inferiore.



# CAPITOLO 4

## ANALISI CINEMATICA INVERSA

In questo capitolo si propone la risoluzione della cinematica inversa dell'interfaccia aptica, ossia la definizione delle posizioni, delle velocità e delle accelerazioni degli attuatori a partire da una legge di moto imposta all'end-effector.

Mentre per la cinematica diretta è stato possibile definire con facilità, attraverso un approccio geometrico, delle relazioni tra attuatori ed end-effector, per la cinematica inversa non è così semplice; infatti, a causa della ridondanza del grado di libertà verticale, risulta necessario definire una metodologia con cui gestire la posizione della base mediana, quindi i moti interni della struttura. Per ogni posizione assunta dall'end-effector esistono  $\infty$  soluzioni della cinematica inversa, ognuna caratterizzata da una differente posizione della base mediana.

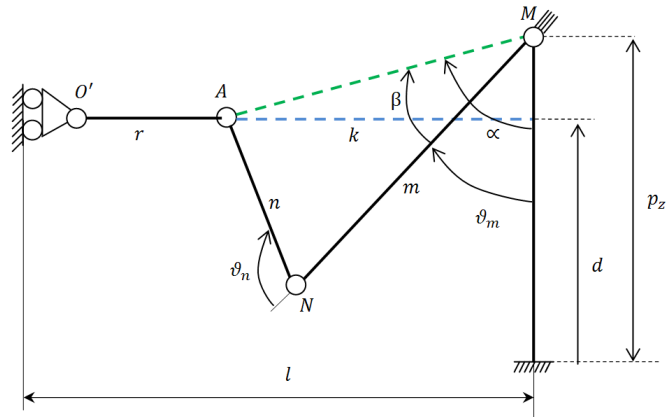
Inizialmente si riporta la risoluzione della cinematica inversa considerando separatamente la risoluzione delle catene cinematiche della struttura *Delta* e del meccanismo inferiore. Successivamente verranno proposti dei metodi per la gestione della ridondanza. In generale, si sfrutterà la ridondanza per evitare che l'interfaccia aptica assuma delle configurazioni singolari all'interno del volume di lavoro e per cercare di minimizzare le coppie richieste agli attuatori.

## 4.1 Cinematica inversa mediante separazione delle catene cinematiche

In questo paragrafo si propone la risoluzione della cinematica inversa dell'interfaccia aptica, presupponendo che oltre alla traiettoria percorsa dall'end-effector, sia nota anche la posizione verticale della base mediana, quindi che sia noto il vettore  $p'$ . In tal caso, sempre attraverso un approccio di tipo geometrico, sarebbe possibile risolvere il problema cinematico considerando separatamente le catene cinematiche del meccanismo inferiore e di quello superiore.

Si consideri inizialmente il manovellismo inferiore; attraverso il teorema di Pitagora si è in grado di calcolare il modulo del segmento che unisce i punti  $A$  ed  $M$  (vedi Figura 4.1)<sup>1</sup>:

$$\|\overline{AM}\| = \sqrt{g^2 + k^2} \quad (4.1)$$



**Figura 4.1:** Schema manovellismo inferiore.

L'angolo  $\alpha$ , compreso tra il segmento  $\overline{AM}$  ed il segmento  $g$ , può essere ricavato applicando il teorema di Carnot al triangolo  $\widehat{AMT}$ :

$$k^2 = \|\overline{AM}\|^2 + g^2 - 2\|\overline{AM}\|g \cos \alpha$$

<sup>1</sup>Si ricorda che  $\mathbf{k} = \mathbf{l} - \mathbf{r}$  e che  $\mathbf{g} = \mathbf{p}' - \mathbf{d}$ , vedi pag.51.

$$\alpha = \arccos \left( -\frac{k^2 - \|\overline{AM}\|^2 - g^2}{2\|\overline{AM}\|g} \right) \quad (4.2)$$

Sfruttando di nuovo il teorema di Carnot, applicato questa volta al triangolo  $\widehat{AMN}$ , si è in grado di calcolare anche il valore dell'angolo  $\beta$ , compreso tra il segmento  $k$  ed il segmento  $m$ :

$$\begin{aligned} n^2 &= \|\overline{AM}\|^2 + m^2 - 2\|\overline{AM}\|m \cos \beta \\ \beta &= \arccos \left( -\frac{n^2 - \|\overline{AM}\|^2 - m^2}{2\|\overline{AM}\|m} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

A questo punto, ipotizzando nota la posizione della base mediana (altrimenti non saremmo in grado di calcolare  $g$ ), l'angolo di giunto  $\theta_m$  sarebbe completamente definito:

$$\theta_m = \pi - \beta - \alpha. \quad (4.4)$$

Un procedimento analogo può essere seguito per il calcolo degli angoli di giunto del robot *Delta*. Considerando la  $i$ -esima catena cinematica della struttura superiore *Delta*, attraverso il teorema di Pitagora si ricava il modulo del segmento  $\overline{A_iC_i}$  (vedi Figura 4.2)<sup>2</sup>:

$$\|\overline{A_iC_i}\| = \sqrt{p_z^2 + e^2} \quad (4.5)$$

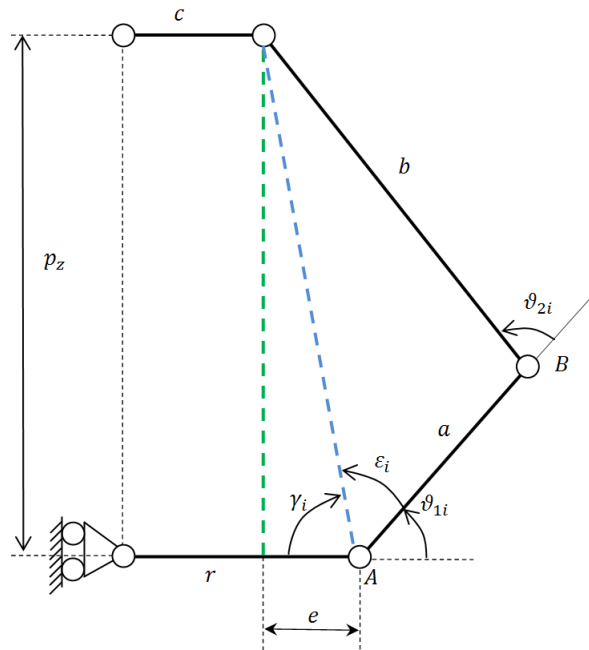
L'angolo  $\gamma_i$ , compreso tra il segmento  $\overline{A_iC_i}$  ed il segmento  $e$ , può essere ricavato, anche in questo caso, applicando il teorema di Carnot:

$$\begin{aligned} p^2 &= \|\overline{A_iC_i}\|^2 + e^2 - 2\|\overline{A_iC_i}\|e \cos \gamma_i \\ \gamma_i &= \arccos \left( -\frac{p_z^2 - \|\overline{A_iC_i}\|^2 - e^2}{2\|\overline{A_iC_i}\|e} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Utilizzando di nuovo il teorema di Carnot, applicato, questa volta, al triangolo  $\widehat{A_iB_iC_i}$  e noto dalla (3.24) il valore di  $\theta_{3i}$ , si ricava l'angolo  $\xi_i$ :

$$(b \sin \theta_{3i})^2 = \|\overline{A_iC_i}\|^2 + a^2 - 2\|\overline{A_iC_i}\|a \cos \xi_i$$

<sup>2</sup>Si ricorda che  $\mathbf{e}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{c}_i$ , vedi pag. 54.



**Figura 4.2:** *Schema Delta.*

$$\xi_i = \arccos \left( -\frac{(b \sin \theta_{3i})^2 - \|\overline{A_i C_i}\|^2 - a^2}{2\|\overline{A_i C_i}\|a} \right). \quad (4.7)$$

Il generico angolo di giunto  $\theta_{1i}$  è quindi definito dalla seguente relazione:

$$\theta_{1i} = \pi - \xi_i - \gamma_i \quad (4.8)$$

Il procedimento appena illustrato è valido solo nel caso in cui sia nota la posizione verticale della base mediana. Il problema cinematico inverso prevede, per ogni posizione assunta dall'end-effector, infinite possibili soluzioni che soddisfano i vincoli cinematici: è necessario definire quindi dei criteri con la quale definire la miglior configurazione dei moti interni in modo da minimizzare o massimizzare alcuni indici prestazionali.

## 4.2 Analisi matrice Jacobiana

La struttura a cinematica parallela a *Delta*, che costituisce il meccanismo superiore dell'interfaccia aptica, introduce all'interno del volume di lavoro dei punti in cui il dispositivo potrebbe assumere delle configurazioni singolari: in queste condizioni il robot modifica la sua rigidità a causa di labilità perse o acquisite. Per evitare ciò, è possibile sfruttare la matrice Jacobiana come indicatore del comportamento cinematico del dispositivo aptico. I metodi per la gestione della ridondanza (descritti nei successivi paragrafi) saranno quindi basati sull'analisi dello jacobiano, in modo da poter sfruttare la posizione della base mediana per mantenere la struttura lontana dai punti di singolarità.

Gosselin e Angeles<sup>3</sup> studiarono il problema dei punti singolari in strutture a cinematiche chiuse, proponendo la separazione della matrice Jacobiana in due matrici: una associata alla cinematica diretta e l'altra associata alla cinematica inversa. Di seguito è proposto il loro approccio secondo la notazione usata da Tsai<sup>4</sup>.

Sia  $\mathbf{q}$  il vettore delle coordinate nello spazio dei giunti attuati ( $\mathbf{q} = [\theta_{11} \ \theta_{12} \ \theta_{13} \ \theta_m]^T$ ) e  $\mathbf{x}$  il vettore delle coordinate nello spazio cartesiano ( $\mathbf{x} = [p_x \ p_y \ (p_z + p'_x)]^T$ ); è possibile scrivere l'equazione di chiusura vettoriale come:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = \mathbf{0} \quad (4.9)$$

dove  $\mathbf{f}$  è una funzione implicita di dimensione pari a quella del vettore  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{0}$  è un vettore nullo della stessa dimensione.

Differenziando rispetto al tempo l'equazione (4.9) si ottiene:

$$\mathbf{J}_x \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}} \quad (4.10)$$

---

<sup>3</sup>[20].

<sup>4</sup>[21].

dove

$$\mathbf{J}_x = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}_q = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}}$$

Il legame tra le velocità nello spazio dei giunti e le velocità nello spazio di lavoro può essere scritto come:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}, \quad (4.11)$$

dove  $\mathbf{J}$  è la matrice Jacobiana complessiva dell'interfaccia aptica così definita:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_x^{-1}\mathbf{J}_q \quad (4.12)$$

La matrice Jacobiana è quindi il prodotto di due matrici contenenti le derivate parziali di  $\mathbf{f}$ :  $\mathbf{J}_x$  rispetto alle coordinate nello spazio di lavoro e  $\mathbf{J}_q$  rispetto alle coordinate nello spazio dei giunti.

Le configurazioni di singolarità si hanno quando il determinante della matrice Jacobiana è nullo, in particolare quando una delle matrici che la costituiscono ha determinante nullo. E' possibile distinguere tra:

- *Singolarità della cinematica diretta:*

$$\det(\mathbf{J}_x) = 0$$

In questo caso il dispositivo può compiere spostamenti infinitesimi lungo alcune direzioni pur avendo gli attuatori bloccati: il sistema acquisisce quindi ulteriori gradi di libertà. Lo spazio nullo di  $\mathbf{J}_x$  non è vuoto, quindi esisterà un vettore  $\dot{\mathbf{x}}$  che genererà delle velocità ai giunti nulle.

- *Singolarità della cinematica inversa:*

$$\det(\mathbf{J}_q) = 0$$

L'end-effector non è in grado di compiere alcun movimento; il dispositivo è però in grado di sopportare elevate forze (o momenti) lungo determinate



direzioni senza che gli attuatori generino una forza di contrasto. Lo spazio nullo di  $\dot{\mathbf{q}}$  non è vuoto, quindi esisterà un vettore  $\dot{\mathbf{q}}$  che genererà delle velocità nulle all'end-effector.

La matrice Jacobiana dell'interfaccia aptica sarà costituita da due matrici: una relativa al manovellismo inferiore ed una relativa al meccanismo superiore *Delta*. Di seguito si analizzeranno separatamente i contributi delle due matrici.

### 4.2.1 Matrice Jacobiana meccanismo *Delta*

L'equazione di chiusura per l'*i*-esima catena cinematica del meccanismo superiore può essere scritta come (vedi pag. 53):

$$\mathbf{p} + \mathbf{c}_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_i. \quad (4.13)$$

Differenziando rispetto al tempo questa equazione si ottiene:

$$\mathbf{v}_p = \omega_{1i} \times \mathbf{a}_i + \omega_{2i} \times \mathbf{b}_i \quad (4.14)$$

dove i contributi di  $\mathbf{c}_i$  e di  $\mathbf{r}_i$  sono nulli in quanto grandezze costanti (la loro derivata è nulla). Quindi dalla (4.14) si ricava che la velocità dell'end-effector  $\mathbf{v}_p$  è funzione soltanto alle velocità angolari dei due link del robot, in questo caso indicate con  $\omega$ .

Per eliminare il contributo dei link passivi, è possibile moltiplicare scalarmente la (4.14) per  $\mathbf{b}_i$ <sup>5</sup>, ottenendo:

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{v}_p = \omega_{1i} \cdot (\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) \quad (4.15)$$

---

<sup>5</sup>Il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è nullo:

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{v}_p = \omega_{1i} \times \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_i + \omega_{2i} \times \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i$$

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{v}_p = \omega_{1i} \cdot (\mathbf{a}_i \times \mathbf{b}_i) + \omega_{2i} \cdot (\mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_i)$$

Esprimendo i termini dell'equazione (4.15) nei tre assi relativi  $x_i, y_i, z_i$  si ottiene (per ricavare il vettore  $\mathbf{v}_p$  si faccia riferimento alla Figura 4.3):

$$\mathbf{a}_i = a \begin{bmatrix} \cos \theta_{1i} \\ 0 \\ \sin \theta_{1i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_i = b \begin{bmatrix} \sin \theta_{3i} \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \\ \cos \theta_{3i} \\ \sin \theta_{3i} \sin(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \end{bmatrix}$$

$$\omega_{1i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_{1i} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_p = \begin{bmatrix} v_{p,x} \cos \phi_i + v_{p,y} \sin \phi_i \\ -v_{p,x} \sin \phi_i + v_{p,y} \cos \phi_i \\ v_{p,z} \end{bmatrix}$$

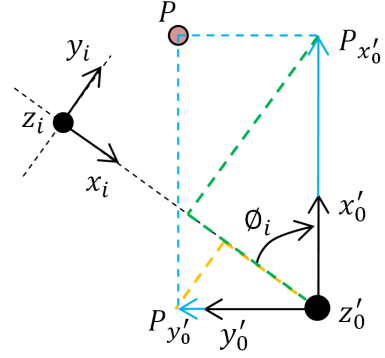


Figura 4.3: Schema per  $\mathbf{v}_p$ .

Sostituendo i termini nella (4.15) si ottiene:

$$j_{ix}v_{p,x} + j_{iy}v_{p,y} + j_{iz}v_{p,z} = a\dot{\theta}_{1i} \sin \theta_{2i} \sin \theta_{3i} \quad (4.16)$$

dove

$$j_{ix} = \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \sin \theta_{3i} \cos \phi_i - \cos \theta_{3i} \sin \phi_i$$

$$j_{iy} = \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \sin \theta_{3i} \sin \phi_i + \cos \theta_{3i} \cos \phi_i$$

$$j_{iz} = \sin(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \sin \theta_{3i}$$

Si noti come  $\mathbf{j}_i = [j_{ix}, j_{iy}, j_{iz}]^T$  rappresenti il versore diretto da  $B_i$  a  $C_i$ , espresso nel sistema di coordinate assoluto. Scrivendo l'espressione (4.16) per  $i = 1, 2, 3$  e assemblando in forma matriciale si ottiene:

$$\mathbf{J}_x \mathbf{v}_p = \mathbf{J}_q \dot{\mathbf{q}}, \quad (4.17)$$

dove

$$\mathbf{J}_x = \begin{bmatrix} j_{1x} & j_{1y} & j_{1z} \\ j_{2x} & j_{2y} & j_{2z} \\ j_{3x} & j_{3y} & j_{3z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_q = a \cdot \begin{bmatrix} \sin \theta_{21} \sin \theta_{31} & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_{22} \sin \theta_{32} & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_{23} \sin \theta_{33} \end{bmatrix}.$$

Lo jacobiano della struttura *Delta* è una matrice quadrata  $3 \times 3$  (dato che fornisce all'end-effector 3 g.d.l.) ed è definita come segue:

$$\mathbf{J}_{delta} = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_q \quad (4.18)$$

In riferimento alle matrici appena ricavate, è evidente quali siano le condizioni per cui il meccanismo superiore *Delta* potrebbe assumere configurazioni singolari:

- *Singularità cinematica inversa* ( $\det(\mathbf{J}_q) = 0$ ):

$$\theta_{2i} = 0 \quad \text{o} \quad \theta_{2i} = \pi \quad \text{oppure} \quad \theta_{3i} = 0 \quad \text{o} \quad \theta_{3i} = \pi \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

- *Singularità cinematica diretta* ( $\det(\mathbf{J}_x) = 0$ ):

questo accade ad esempio quando i parallelogrammi della parte superiore del robot *Delta* giacciono in un piano parallelo al piano  $x - y$  (vedi Figura 4.4); la condizione viene espressa dalla seguente equazione:

$$\sin(\theta_{11} + \theta_{21}) \sin \theta_{31} = \sin(\theta_{12} + \theta_{22}) \sin \theta_{32} = \sin(\theta_{13} + \theta_{23}) \sin \theta_{33} = 0 \quad (4.19)$$



**Figura 4.4:** Configurazione singolare: tutti i parallelogrammi sono complanari.

La condizione espressa dalla (4.19) è verificata, per  $i = 1, 2, 3$ , quando:

$$\theta_{1i} + \theta_{2i} = 0 \quad \text{o} \quad \theta_{1i} + \theta_{2i} = \pi \quad \text{oppure} \quad \theta_{3i} = 0 \quad \text{o} \quad \theta_{3i} = \pi$$

Un'altra serie di posizioni di singolarità si ottiene nel caso in cui i vettori siano collineari ed i tre link della parte superiore del *Delta*, individuati dai

vettori  $\mathbf{b}_i$ , siano paralleli e diretti come l'asse  $z$  del sistema di riferimento assoluto (vedi Figura 4.5):

$$\mathbf{j}_i = \pm \mathbf{j}_k \quad \text{per} \quad i \neq k. \quad (4.20)$$



**Figura 4.5:** Configurazione singolare: tutti i parallelogrammi sono paralleli.

In questo caso il manipolatore non è in grado di resistere a sollecitazioni posizionate, ad esempio, nel piano orizzontale della base superiore.

#### 4.2.2 Matrice Jacobiana del manovellismo inferiore

Attraverso un procedimento del tutto analogo a quello descritto per la struttura superiore a *Delta*, si è in grado di ricavare anche la matrice Jacobiana relativa al manovellismo inferiore.

L'equazione di chiusura della catena cinematica del manovellismo inferiore può essere scritta come (vedi pag. 51):

$$\mathbf{p}' + \mathbf{r} = \mathbf{l} + \mathbf{d} + \mathbf{m} + \mathbf{n} \quad (4.21)$$

differenziandola rispetto al tempo si ricava:

$$\mathbf{v}_{p'} = \omega_m \times \mathbf{m} + \omega_n \times \mathbf{n} \quad (4.22)$$

dove  $\mathbf{v}_{p'}$  è la velocità della base mediana lungo la direzione  $z$  del sistema di riferimento assoluto,  $\omega_m$  e  $\omega_n$  sono rispettivamente le velocità angolari della manovella

e della biella del manovellismo ordinario deviato. Anche in questo caso, volendo eliminare il contributo dei link passivi, si moltiplica scalarmente la (4.22) per  $\mathbf{n}$ , ottenendo:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{p'} = \omega_m \cdot (\mathbf{m} \times \mathbf{n}) \quad (4.23)$$

Esprimendo i termini dell'equazione (?? nei tre assi relativi  $x_i, y_i, z_i$ , si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= m \begin{bmatrix} \sin \theta_m \\ 0 \\ \cos \theta_m \end{bmatrix} & \mathbf{n} &= n \begin{bmatrix} \sin(\theta_m + \theta_n) \\ 0 \\ \cos(\theta_m + \theta_n) \end{bmatrix} \\ \omega_m &= \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_m \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{v}_{p'} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v_{p',z} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

che sostituiti nella (??) permettono di ricavare la seguente relazione:

$$n \cos(\theta_m + \theta_n) v_{p,z} = -mn \dot{\theta}_m \sin \theta_n \quad (4.24)$$

cioè

$$J_x v_{p',z} = J_q \dot{\theta}_m \quad (4.25)$$

dove

$$J_x = n \cos(\theta_m + \theta_n)$$

$$J_q = -mn \sin \theta_n$$

In riferimento alle matrici appena ricavate, è evidente quali siano le condizioni per cui il manovellismo inferiore potrebbe assumere configurazioni singolari:

- *Singularità cinematica inversa* ( $J_q = 0$ ):

$$\theta_n = 0 \quad \text{o} \quad \theta_n = \pi$$

Si verifica quando l'asta  $\mathbf{n}$  è allineata con l'asta  $\mathbf{m}$ ; la base mediana può avere soltanto velocità nulle a fronte, però, di una velocità degli attuatori diversa da 0.

- *Singolarità cinematica diretta* ( $J_x = 0$ ):

$$\theta_m + \theta_n = \pm \frac{\pi}{2}$$

Si verifica quando l'asta  $\mathbf{n}$  è parallela al piano della base mediana; in tal caso la base mediana non è in grado di resistere a forze dirette lungo la direzione verticale.

La matrice Jacobiana del manovellismo inferiore, essendo un meccanismo ad 1 g.d.l., sarà un vettore colonna di dimensioni  $3 \times 1$ , in cui i termini relativi alle direzioni  $x$  e  $y$  saranno nulli, dato che la base mediana può solamente traslare lungo la direzione verticale  $z$ .

$$\mathbf{J}_{base} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_x^{-1} J_q \end{bmatrix}. \quad (4.26)$$

### 4.2.3 Matrice Jacobiana complessiva

La matrice Jacobiana dell'intera interfaccia aptica sarà data dall'unione delle due matrici jacobiane dei due meccanismi che la compongono. In particolare, osservando le matrici ricavate precedentemente, si nota che lo jacobiano complessivo sarà una matrice rettangolare (l'unione di una  $3 \times 3$  con una  $3 \times 1$ , genera una matrice  $3 \times 4$ ), quindi non invertibile.

La matrice Jacobiana complessiva sarà dunque funzione sia delle coordinate libere del meccanismo superiore ( $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{13}$ ) che del meccanismo inferiore ( $\theta_m$ ):

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} v_{p,x} \\ v_{p,y} \\ v_{p,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{delta} & \mathbf{J}_{base} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{11} \\ \dot{\theta}_{12} \\ \dot{\theta}_{13} \\ \dot{\theta}_m \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

### 4.3 Ottimizzazione della cinematica inversa

La risoluzione della cinematica inversa dell'interfaccia aptica non è legata soltanto alla definizione della procedura per poter effettuare l'inversione cinematica nel campo delle velocità (visto che la matrice è rettangolare e quindi non invertibile) ma, ha anche lo scopo di determinare quale sia, tra le infinite posizioni della base mediana, quella che essa deve assumere per avere il miglior comportamento cinematico del dispositivo in un qualsiasi punto del volume di lavoro.

Definito il legame tra i moti interni e la matrice Jacobiana dell'interfaccia aptica, è possibile considerare il problema dell'inversione cinematica come un problema di ottimo vincolato<sup>6</sup>, con l'obiettivo quindi di determinare l'ottimo di funzioni che possono descrivere il comportamento cinematico del dispositivo.

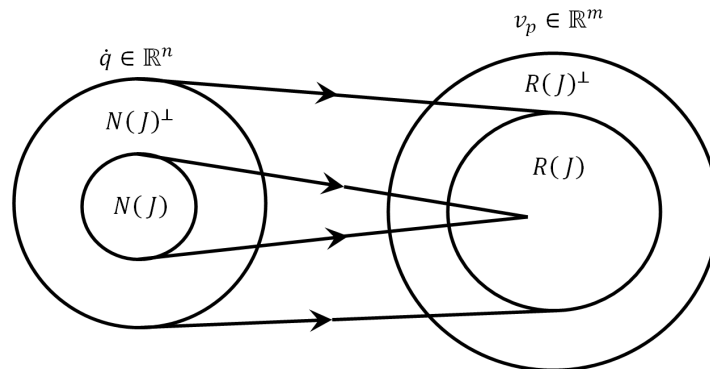
#### 4.3.1 Proiezione nello spazio nullo

Lo Jacobiano caratterizza la trasformazione lineare delle velocità dallo spazio dei giunti allo spazio di lavoro. Esso è funzione della configurazione assunta dal dispositivo ma, nel contesto della cinematica differenziale, deve essere considerato come matrice costante, in quanto rappresenta un legame istantaneo tra le velocità dell'end-effector e quelle dei giunti per una data configurazione. La trasformazione espressa nell'equazione (4.27) può essere illustrata con la teoria degli insiemi, in termini dell'*immagine* e del *nullo* della trasformazione<sup>7</sup>.

---

<sup>6</sup>[7].

<sup>7</sup>[8].



**Figura 4.6:** *Relazione tra spazio delle velocità ai giunti e spazio delle velocità all'end-effector.*

In Figura 4.6 sono presenti i seguenti termini:

- $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  (nel caso in esame  $n = 4$ );
- $\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^m$  (nel caso in esame  $m = 3$ );
- $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ;
- $R(\mathbf{J}) \subset \mathbb{R}^m$  è l'immagine della trasformazione (individua le velocità dell'organo terminale che possono essere generate dalle velocità dei giunti, nella configurazione assegnata);
- $N(\mathbf{J}) \subset \mathbb{R}^n$  è il nullo della trasformazione (individua le velocità di giunto che non producono alcuna velocità all'end-effector, nella configurazione assegnata);
- $R(\mathbf{J})^\perp \subset \mathbb{R}^m$  è il complemento ortogonale all'immagine della trasformazione;
- $N(\mathbf{J})^\perp \subset \mathbb{R}^n$  è il complemento ortogonale al nullo della trasformazione.



Utilizzando la definizione di *pseudoinversa destra* della matrice  $\mathbf{J}$  (scritta nella forma di Moore Penrose)<sup>8</sup>:

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \quad (4.29)$$

è possibile scrivere le seguenti relazioni tra i vari sottospazi:

$$\begin{aligned} R(\mathbf{J}) &= N(\mathbf{J}^\dagger)^\perp = R(\mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger) = N(\mathbf{I} - \mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger) \\ R(\mathbf{J})^\perp &= N(\mathbf{J}^\dagger) = N(\mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger) = R(\mathbf{I} - \mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger) \\ N(\mathbf{J}) &= R(\mathbf{J}^\dagger)^\perp = N(\mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}) = R(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}) \\ N(\mathbf{J})^\perp &= R(\mathbf{J}^\dagger) = R(\mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}) = N(\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}) \end{aligned} \quad (4.30)$$

L'esistenza, per i manipolatori ridondanti, di un sottospazio  $N(\mathbf{J}) \neq \emptyset$ , consente di individuare delle procedure per la gestione della ridondanza in modo da ottimizzare la cinematica del dispositivo: definire la migliore posizione della base mediana che permetta, senza alterare la posizione dell'end-effector, di ottenere una configurazione del dispositivo distante da configurazioni singolari.

Sia  $\mathbf{P}$  un proiettore nello spazio nullo di  $\mathbf{J}$ :

$$R(\mathbf{P}) \equiv N(\mathbf{J}) \quad (4.31)$$

Indicando con  $\dot{\mathbf{q}}^*$  la soluzione della (4.27), si avrà che anche il vettore delle velocità dato da:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (4.32)$$

con  $\dot{\mathbf{q}}_0$  vettore arbitrario di velocità nello spazio dei giunti, sarà soluzione della (4.27). Infatti, moltiplicando tutti i membri per la matrice  $\mathbf{J}$ , si ricava che la velocità dell'end-effector non è assolutamente influenzata dal vettore arbitrario  $\dot{\mathbf{q}}_0$ :

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{J}\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{v}_p \quad (4.33)$$

in quanto  $\mathbf{J}\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$  qualunque sia  $\dot{\mathbf{q}}_0$ .

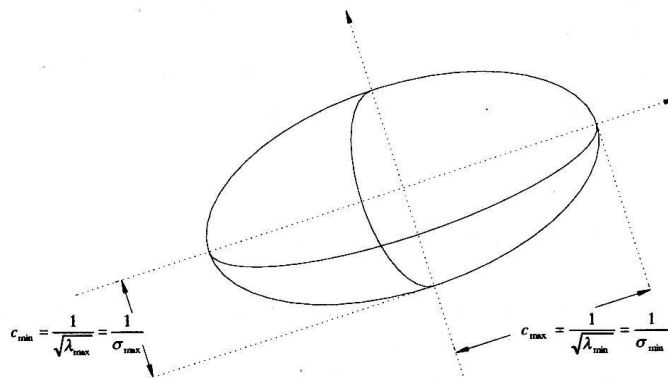
<sup>8</sup>Tutte le proprietà della matrice Jacobiana pseudoinversa sono riportate in Appendice A.4.

Il problema della ridondanza si traduce quindi nella ricerca di un vettore  $\dot{\mathbf{q}}_0$  che permetta di sfruttare nel miglior modo possibile la ridondanza legata alla base mediana.

### 4.3.2 Criterio di ottimizzazione

Come già accennato precedentemente, il comportamento dell'interfaccia aptica può essere ottimizzato sfruttando il grado di libertà ridondante. L'ottimizzazione è condotta in modo da ottenere un dispositivo capace di esercitare una forza continuativa di  $20N$  e di muoversi con destrezza in ogni punto e lungo ogni direzione del volume di lavoro (comportamento isotropo dell'interfaccia aptica).

Il comportamento cinetostatico di un generico manipolatore può essere analizzato attraverso l'ellissoide di manipolabilità e l'ellissoide di forza<sup>9</sup>. L'ellissoide di manipolabilità in velocità è indice del comportamento cinematico del robot in un dato punto del volume di lavoro; l'ellissoide di forza è un indicatore del comportamento statico del robot in termini di forza disponibile all'end-effector.



**Figura 4.7:** *Ellissoide di velocità - forza.*

<sup>9</sup>Si parla di ellissoide in quanto l'end-effector è in grado di muoversi lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$ ; se potesse compiere soltanto movimenti in un piano si parlerebbe di ellisse.

Le caratteristiche di questi due ellipsoidi sono strettamente legate alla matrice Jacobiana, più precisamente alla matrice  $(JJ^T)^{-1}$  (ellissoide di manipolabilità) o  $JJ^T$  (ellissoide di forza): i loro autovettori indicano le direzioni degli assi degli ellipsoidi, mentre la lunghezza degli assi è uguale al reciproco della radice quadrata dei corrispondenti autovalori, pari cioè ai valori singolari della matrice (vedi Figura 4.7).

Per ognuno dei due ellipsoidi è possibile definire un rapporto di trasmissione che può essere calcolato come l'inverso della distanza tra il centro degli assi e la superficie dell'ellissoide lungo una determinata direzione. La forma dell'ellissoide è quindi un indice del comportamento dell'interfaccia aptica in un dato punto del volume di lavoro:

- *ellissoide poco sferico* è sintomo di una eccessiva variazione del rapporto di velocità (o di forza) con la direzione di moto (vicinanza a configurazioni singolari);
- *ellissoide sferico* indica un comportamento isotropo del manipolatore (in qualsiasi direzione, i rapporti di trasmissione di velocità e di forza rimangono invariati);
- *ellissoide grande* significa che una piccola velocità/forza nello spazio di lavoro necessita di un'elevata velocità/forza nello spazio dei giunti.

La sfericità degli ellipsoidi sarà quindi l'obiettivo dell'ottimizzazione dell'interfaccia; in particolare, grazie alla dualità cineto-statica della matrice Jacobiana, i due ellipsoidi hanno la medesima forma, quindi un'ottimizzazione nel campo delle velocità porta ad avere un comportamento isotropo anche da un punto di vista delle forze (vedi Appendice A.3).

La sfericità degli ellipsoidi può essere misurata attraverso il numero di condizionamento  $k$  della matrice  $JJ^T$ , definito come il rapporto tra il massimo ed il

minimo valore singolare della matrice stessa (vedi Appendice A.2):

$$\kappa = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \quad (4.34)$$

Considerando quanto detto in merito agli ellissoidi, è possibile intuire come un numero di condizionamento pari ad 1 sia indice di un ellissoide sferico (comportamento isotropo), mentre un valore di  $k$  elevato rappresenti un comportamento anisotropo nel manipolatore. L'analisi cinematica inversa sarà quindi condotta controllando i valori assunti dal numero di condizionamento, in modo che siano il più possibile prossimi ad 1 in tutto lo spazio di lavoro (alcuni dei metodi di risoluzione proposti di seguito utilizzano funzioni di costo basate su  $k$ ).

Essendo la matrice Jacobiana di forma rettangolare, risulta impossibile definire il problema agli autovalori e quindi effettuare il calcolo; tuttavia è possibile definire il numero di condizionamento come descritto in Appendice A.2. Il calcolo dei valori singolari è approfondito in Appendice A.1, nella quale si propone un metodo di calcolo del numero di condizionamento di una matrice qualsiasi (il metodo è stato poi implementato in una routine di Matlab).

## 4.4 Cinematica inversa nello spazio delle velocità (metodi $C^1$ )

In precedenza si è asserito che se  $\dot{\mathbf{q}}^*$  è una soluzione della (4.27), lo è anche  $\dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0^*$  con  $\dot{\mathbf{q}}_0^*$ , arbitrario e  $\mathbf{P}$  proiettore nel nullo di  $\mathbf{J}$ . Questa forma particolare della soluzione, oltre a risolvere il problema cinematico inverso, permette di introdurre ulteriori vincoli, quali l'isotropia dell'interfaccia in tutto il suo volume di lavoro. Si sceglie quindi un funzionale di costo nella forma:

$$f(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0)^T(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0) \quad (4.35)$$

in modo da minimizzare la norma del vettore  $\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0$ ; si cercano quindi soluzioni che soddisfino il vincolo dato dalla relazione  $\mathbf{v}_p = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$  e che siano le più vicine

possibili a  $\dot{\mathbf{q}}_0$ . Con tale scrittura, l'obiettivo specificato attraverso la scelta di  $\dot{\mathbf{q}}_0$  diventa secondario, rispetto al soddisfacimento del vincolo primario di chiusura delle catene cinematiche imposto dalla relazione (4.27).

Il problema può essere risolto con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange; si introduce il funzionale di costo modificato:

$$f(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0)^T(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0) + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{v}_p - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}) \quad (4.36)$$

dove  $\boldsymbol{\lambda}$  è il vettore incognito dei moltiplicatori che permette di inserire il vincolo dato dall'equazione (4.27) nel funzionale da minimizzare; la soluzione cercata deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta \dot{\mathbf{q}}}\right)^T = \mathbf{0} \quad \left(\frac{\delta f}{\delta \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \mathbf{0}.$$

Dalla prima delle due condizioni si ricava:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} + \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (4.37)$$

che, sostituita nell'equazione di vincolo  $\mathbf{v}_p = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$ , permette di ricavare  $\boldsymbol{\lambda}$  nella forma:

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}(\mathbf{v}_p - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}_0). \quad (4.38)$$

Sostituendo l'equazione (4.38) nella (4.37) si ha:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v}_p + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J})\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (4.39)$$

Come si può notare, la soluzione (4.39) della cinematica inversa è composta da due termini:

- il primo è relativo alla soluzione che minimizza localmente la norma delle velocità dei giunti (è facilmente dimostrabile assumendo come funzionale da minimizzare  $f(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}}$ )<sup>10</sup>;
- il secondo termine (*soluzione omogenea*) cerca invece di soddisfare il vincolo imposto da  $\dot{\mathbf{q}}_0$ .

Osservando il secondo termine della relazione (4.39) si nota che, in questo caso, la proiezione del vettore  $\dot{\mathbf{q}}_0$  nello spazio nullo di  $\mathbf{J}$  avviene attraverso la matrice  $\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger\mathbf{J}$  (vedi relazioni 4.30).

Per ricavare le posizioni delle variabili di giunto è necessario integrare i valori di velocità nel tempo: in questo caso verranno utilizzati dei metodi di integrazione espliciti, in quanto lo scopo di tale lavoro è sviluppare algoritmi di gestione della ridondanza facilmente applicabili ad controllo real-time dell'interfaccia aptica. I metodi di integrazione impliciti hanno un vantaggio dal punto di vista dell'accuratezza, ma richiedono elevate risorse computazionali, sconsigliandone il loro utilizzo. È possibile utilizzare metodi di integrazione espliciti a passo fisso ai quali associare algoritmi di compensazione dell'errore. Per compensare l'errore, si inserisce nell'algoritmo di risoluzione della cinematica inversa un anello di controllo, che agisce sulle velocità di riferimento nello spazio di lavoro, modificandole in funzione dell'errore commesso sulle posizioni. In sintesi, il nuovo valore di velocità su cui si calcola la cinematica inversa è:

$$\dot{\mathbf{s}}_{rif}(t) = \dot{\mathbf{s}}(t) + \dot{\mathbf{s}}_{err}(t) \quad (4.40)$$

dove:

$$\dot{\mathbf{s}}_{err}(t) = K_p(\mathbf{s}(t - \Delta t) - \bar{\mathbf{s}}(t - \Delta t)) \quad (4.41)$$

<sup>10</sup>E' possibile dimostrarlo attraverso un procedimento analogo a quello appena illustrato:

$$f(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{v}_p - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}})$$

$$\left(\frac{\delta f}{\delta \dot{\mathbf{q}}}\right)^T = \mathbf{0} \rightarrow \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T\boldsymbol{\lambda} + \dot{\mathbf{q}}_0$$

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \rightarrow \mathbf{v}_p = \mathbf{J}\mathbf{J}^T\boldsymbol{\lambda} \rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{v}_p(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$$

sostituendo si ottiene  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger\mathbf{v}_p$

con  $\bar{\mathbf{s}}$  posizione assunta dall'end-effector e calcolata attraverso la risoluzione della cinematica inversa.

Di seguito si riportano alcuni metodi, implementabili nello spazio delle velocità, che permettono di ricavare il vettore  $\dot{\mathbf{q}}_0$  conforme alle specifiche di progetto definite nei paragrafi precedenti.

### 1° METODO

Il grado di libertà ridondante dovrà essere gestito in modo da far assumere alla funzione  $w(\mathbf{q})$  il valore massimo (quando è pari ad 1 si ha un ottimo comportamento cinematico del dispositivo):

$$w(\mathbf{q}) = \frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J})} \quad (4.42)$$

Essendo  $w(\mathbf{q})$  funzione del numero di condizionamento della matrice Jacobiana complessiva dell'interfaccia aptica, si intende cercare di rendere il più possibile sferico l'ellissoide di manipolabilità dell'intera struttura, senza quindi distinguere tra il comportamento del meccanismo *Delta* e quello del manovellismo inferiore.

Durante la risoluzione della cinematica inversa il vettore  $\dot{\mathbf{q}}_0$  sarà assegnato in base all'andamento della funzione (4.42). Come prima analisi è possibile associare la velocità  $\dot{\mathbf{q}}_0$  al gradiente di  $w(\mathbf{q})$  mediante la seguente relazione:

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = k_0 \nabla (w(\mathbf{q})) \quad (4.43)$$

dove  $k_0$  è un vettore di costanti opportunamente fissato in sede di implementazione al calcolatore. In questo modo la velocità  $\dot{\mathbf{q}}_0$  è in ogni istante la miglior velocità che consente di ottimizzare il funzionamento dell'interfaccia aptica.

Il calcolo del gradiente della funzione  $w(\mathbf{q})$  avviene per via numerica; per contenere l'errore di calcolo il gradiente viene valutato considerando il rapporto incrementale centrato della funzione):

$$\nabla (w(\bar{\mathbf{q}})) \approx \frac{w(\bar{\mathbf{q}} + \delta\mathbf{q}) - w(\bar{\mathbf{q}} - \delta\mathbf{q})}{2\delta\mathbf{q}} \quad (4.44)$$

dove  $\delta\mathbf{q}$  è un incremento abbastanza piccolo delle coordinate nello spazio dei giunti. Assumendo quindi  $\dot{\mathbf{q}}_0$  come il risultato della (4.43) e risolvendo la (4.39) si ottengono i valori di velocità dei giunti che, integrati, forniscono il valore di posizione.

A causa di un andamento molto irregolare del gradiente, legato alla presenza di molti massimi e minimi locali di questo sistema, la funzione (4.43) è stata sostituita con la seguente:

$$\dot{\mathbf{q}}_0(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} k_0 \nabla (w(\bar{\mathbf{q}})) dt. \quad (4.45)$$

dove l'azione integrale sul gradiente ha lo scopo di mitigare l'effetto delle sue irregolarità (integrazione numerica con Eulero). A fronte di un miglioramento della stabilità dell'algoritmo, si è riscontrato un problema relativo alla saturazione dell'azione integrale: integrando la funzione dall'istante iniziale fino al tempo  $\bar{t}$  in cui si risolve la cinematica, i valori di  $\dot{\mathbf{q}}_0(\bar{t})$  risultano essere anche molto superiori al primo termine della (4.39). Ciò non influisce sugli errori nell'inversione cinematica, in quanto  $\dot{\mathbf{q}}_0$  viene proiettato nello spazio nullo ma, poiché l'interfaccia aptica è attuata da motori elettrici, essi potrebbero arrivare a saturazione.

Il problema è stato risolto introducendo nell'algoritmo una funzione di saturazione in modo da limitare il massimo valore di  $\dot{\mathbf{q}}_0$ . In particolare sono state considerate diverse tipologie di funzioni di saturazione (lineare, sinusoidale e polinomiale di terzo e quinto grado); quella che meglio si adatta all'algoritmo proposto è una funzione di saturazione lineare così definita (il limite di saturazione è stato definito in fase di taratura del metodo):

$$\begin{cases} y_{sat}(x) = -y_{max} & \text{per } x \in (-\infty; -y_{max}] \\ y_{sat}(x) = x & \text{per } x \in [-y_{max}; y_{max}] \\ y_{sat}(x) = y_{max} & \text{per } x \in [y_{max}; \infty) \end{cases} \quad (4.46)$$



## 2° METODO

Il secondo metodo proposto è molto simile al primo, soltanto che si pone l'obiettivo di rendere sferici gli ellissoidi di manipolabilità della sola struttura superiore *Delta*, in modo da garantire maggiore destrezza a questa parte dell'interfaccia aptica:

$$w(\mathbf{q}) = \frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J}_{\text{delta}})}. \quad (4.47)$$

Questo significa che la risoluzione della cinematica inversa del manovellismo inferiore sarà condotta con l'unico scopo di minimizzare la velocità di giunto  $\dot{\theta}_m$ , ovviamente nel rispetto delle esigenze della struttura superiore.

La procedura di calcolo è la stessa di quella del primo metodo con le sole differenze della costante  $k_0$  e del limite massimo della funzione di saturazione.

## 3° METODO

La funzione di ottimizzazione utilizzata in questo metodo fa riferimento agli studi condotti da Kim e Khosla in merito alla misura dell'isotropia dell'ellissoide di manipolabilità. Essi definiscono tale misura come il rapporto tra due medie:

$$w(\mathbf{q}) = \frac{M}{\Psi} = \frac{m \sqrt[m]{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \dots \sigma_m^2}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_m^2} \quad (4.48)$$

dove  $M$  è la media geometrica degli autovalori della matrice  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$  (con  $m = 3$  in questo caso) e  $\Psi$  è la loro media aritmetica; quest'ultima è sempre maggiore di  $M$ , tranne quando gli autovalori sono tra loro uguali (in tal caso le due funzioni si eguagliano). La buona isotropia dell'interfaccia aptica si ha per valori di  $w(\mathbf{q})$  prossimi all'unità.

La differenza sostanziale tra questa funzione ed il numero di condizionamento, risiede nel fatto che quest'ultimo non è in grado di fornire nessuna informazione in merito all'asse intermedio dell'ellissoide di manipolabilità (infatti dipende soltanto dal minimo e massimo autovalore); quando l'asse intermedio è pari alla media aritmetica dei due assi principali, questa formulazione risulta ottima.

La procedura di calcolo è la stessa di quella del primo metodo con le sole differenze della costante  $k_0$  e del limite massimo della funzione di saturazione.

## 4.5 Cinematica inversa nello spazio delle posizioni (metodi $C^0$ )

Il problema cinematico inverso può essere risolto nello spazio delle posizioni delle variabili di giunto. Questo approccio, a differenza del precedente, non necessita di algoritmi di controllo per la compensazione dell'errore introdotto dall'azione integrale sul gradiente della funzione  $w(\mathbf{q})$ .

I principali passaggi dell'algoritmo, implementato per la risoluzione della cinematica nello spazio delle posizioni, sono:

1. Dato il set di coordinate  $\mathbf{s}$  nello spazio di lavoro, occorre calcolare il set di coordinate  $\mathbf{q}$  nello spazio dei giunti; si sceglie quindi un set iniziale di coordinate  $\mathbf{q}_s$  e si pone  $\mathbf{q}_k = \mathbf{q}_s$ .
2. Attraverso la cinematica diretta si valutano le corrispondenti coordinate nello spazio di lavoro  $\mathbf{s}_k = F(\mathbf{q}_k)$ .
3. Si valuta l'errore nello spazio di lavoro tra il set di coordinate da ottenere e quello ottenuto dal punto 2: se  $\|\mathbf{s}_k - \mathbf{s}\| \leq \epsilon$  (con  $\epsilon$  scelto opportunamente piccolo) è possibile assumere  $\mathbf{q}_k$  pari al set  $\mathbf{q}$  cercato, altrimenti si cerca il nuovo set  $\mathbf{q}_k^*$  attraverso i seguenti passaggi.
4. Si calcolano la matrice Jacobiana  $\mathbf{J}(\mathbf{q}_k)$  e la sua pseudo-inversa  $\mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q}_k)$ .
5. Attraverso la relazione che lega le velocità nello spazio di lavoro con le velocità nello spazio dei giunti (equazione 4.27) si può scrivere:  $\mathbf{s} = \mathbf{s}_k + \dot{\mathbf{s}}dt = \mathbf{s}_k + \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}dt = \mathbf{s}_k + \mathbf{J}d\mathbf{q}$ . Si calcola  $d\mathbf{q}$  attraverso la relazione  $d\mathbf{q} = \mathbf{J}_k^\dagger(\mathbf{s} - \mathbf{s}_k)$ .

6. È possibile ora calcolare il nuovo set di coordinate  $\mathbf{q}_k^*$  e ripartire dal punto 2 con questo nuovo set:  $\mathbf{q}_k^* = \mathbf{q}_k + d\mathbf{q}$ .

Tramite questa procedura è ora possibile determinare la prima parte della relazione (4.39). Definito il set di coordinate  $\mathbf{q}$  dalla cinematica inversa, è necessario definire il vettore  $\mathbf{q}_0$  per gestire i moti interni della base mediana: si procede in modo del tutto analogo a quanto fatto con i primi tre metodi ma, invece di operare sulle velocità, si opera direttamente sulle posizioni.

#### 4° METODO

Il set di coordinate  $\mathbf{q}_0$ , in modo del tutto analogo al metodo 1, è definito attraverso la seguente relazione:

$$\mathbf{q}_0(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} k_0 \nabla (w(\bar{\mathbf{q}})) dt \quad (4.49)$$

dove  $k_0$  è una costante scelta opportunamente in fase di taratura dell'algoritmo, mentre  $\nabla (w(\bar{\mathbf{q}}))$  è il gradiente della funzione  $w(\bar{\mathbf{q}})$  ( $w(\mathbf{q}) = 1/\text{cond}(\mathbf{J})$ , vedi 4.42). Anche in questo caso, per i motivi già esposti precedentemente, è presente una funzione di saturazione.

#### 5° METODO

La procedura utilizzata in questo metodo è la medesima presentata per il metodo 2 (soltanto che è risolta nel campo delle posizioni), in cui la funzione  $w(\bar{\mathbf{q}})$  dipende soltanto dal numero di condizionamento della struttura superiore *Delta*.

#### 6° METODO

L'ultimo metodo implementato nel campo delle posizioni, fa riferimento a quanto descritto nel metodo 3, nel quale si considerava la formulazione di Kim e Khosla per la definizione del criterio di valutazione del vettore  $\mathbf{q}_0$ .

## 4.6 Cinematica inversa nello spazio delle accelerazioni (metodi $C^2$ )

I criteri finora esposti risolvono la cinematica inversa nel campo delle velocità e nelle posizioni, assegnando i valori delle variabili in modo tale che, sfruttando lo spazio nullo della matrice Jacobiana, si possa massimizzare un indice di riferimento. Si propone ora la risoluzione della cinematica inversa nel campo delle accelerazioni, in modo da poter poi confrontare tutti i metodi proposti e definire la soluzione migliore per la gestione della ridondanza dell'interfaccia aptica.

Si derivi, rispetto al tempo, la relazione (4.27):

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}. \quad (4.50)$$

In modo analogo ai precedenti metodi illustrati, si scrive il funzionale di costo considerando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange:

$$f(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_0)^T(\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_0) + \boldsymbol{\lambda}^T(\ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}) \quad (4.51)$$

dove  $\boldsymbol{\lambda}$  è il vettore incognito dei moltiplicatori, che permette di inserire il vincolo dato dall'equazione (4.51) nel funzionale da minimizzare ( $f(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_0)^T(\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\mathbf{q}}_0)$ ).

La soluzione cercata deve soddisfare le seguenti condizioni:

$$\left(\frac{\delta f}{\delta \dot{\mathbf{q}}}\right)^T = \mathbf{0} \quad \left(\frac{\delta f}{\delta \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \mathbf{0}.$$

Dalla prima delle due condizioni si ricava:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} + \ddot{\mathbf{q}}_0 \quad (4.52)$$

che sostituita nell'equazione di vincolo (4.50) permette di ricavare  $\boldsymbol{\lambda}$  nella forma:

$$\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}(\ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}_0 - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}) \quad (4.53)$$

Sostituendo l'equazione (4.53) nella (4.52) si ha:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{\dagger} \ddot{\mathbf{s}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^{\dagger} \mathbf{J}) \ddot{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{J}^{\dagger} \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.54)$$

dove il termine  $\mathbf{J}^\dagger$  è la pseudoinversa della matrice Jacobiana (vedi relazione 4.29), mentre il termine  $\dot{\mathbf{J}}$  è la derivata rispetto al tempo di  $\mathbf{J}$ ; quest'ultima può essere vista come la derivata delle sottomatrici Jacobiane della struttura *Delta* e del meccanismo inferiore:

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} [\dot{J}_{delta}] & [\dot{J}_{base}] \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Il calcolo dei vari termini della derivata della matrice Jacobiana è riportato in Appendice B.

Dato che la cinematica inversa è risolta nel campo delle accelerazioni, per risalire alla posizione delle coordinate dei giunti è necessario integrare due volte la (4.54). Anche in questo caso, a causa degli errori introdotti dall'integrazione esplicita, si prevede l'impiego di un anello di controllo sulla cinematica inversa che agisce sulle accelerazioni di riferimento nello spazio di lavoro, modificandole in funzione dell'errore commesso sulle velocità e sulle posizioni nello spazio di lavoro. Il nuovo valore di accelerazione per cui si calcola la cinematica inversa è:

$$\ddot{\mathbf{s}}_{rif}(t) = \ddot{\mathbf{s}}(t) + \ddot{\mathbf{s}}_{err}(t) \quad (4.56)$$

con:

$$\ddot{\mathbf{s}}_{err}(t) = K_p(\mathbf{s}(t - \Delta t) - \bar{\mathbf{s}}(t - \Delta t)) + K_d(\dot{\mathbf{s}}(t - \Delta t) - \dot{\bar{\mathbf{s}}}(t - \Delta t)) \quad (4.57)$$

dove  $\bar{\mathbf{s}}$  è la posizione assunta dall'end-effector e calcolata attraverso la risoluzione della cinematica inversa.

Di seguito sono descritte le metodologie considerate per la definizione del vettore  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  (non più  $\dot{\mathbf{q}}_0$  come nei metodi precedenti); quest'ultimo dev'essere scelto per ottimizzare il comportamento cinematico dell'interfaccia sfruttando i moti interni della struttura.

## 7° METODO

Questo metodo propone qualcosa di simile a quanto visto per metodi 1 e 4 soltanto che, in questo caso, l'accelerazione di riferimento  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  è definita attraverso la (4.59)

e non più attraverso una funzione integrale.

$$w(\mathbf{q}) = \frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J})} \quad (4.58)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = k_0 \nabla(w(\mathbf{q})) \quad (4.59)$$

Operando direttamente nel campo delle accelerazioni non è necessario integrare il gradiente della funzione (4.58) per contenere le sue oscillazioni: operando ad un ordine di derivata superiore rispetto alle velocità, è già garantito un effetto di mitigazione sulle oscillazioni.

Nonostante ciò, anche in questo caso, è stata introdotta nell'algoritmo una funzione di saturazione lineare sul valore massimo dell'accelerazione di riferimento  $\ddot{\mathbf{q}}_0$ ; la funzione lineare è in grado di attenuare i picchi di accelerazione. Inoltre, tale funzione, permette di assegnare valori elevati al guadagno  $k_0$ , riducendo il tempo di assestamento e senza innescare fenomeni oscillatori.

## 8° METODO

L'idea di base di questo metodo è quella di definire il vettore di riferimento  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  non più attraverso delle grandezze cinematiche del dispositivo ma, utilizzando dei parametri che siano legati alla dinamica dell'interfaccia aptica. In particolare si vuole definire l'accelerazione di riferimento cercando di minimizzare le coppie richieste agli attuatori.

Si consideri la seguente funzione per determinare il vettore  $\ddot{\mathbf{q}}_0$ :

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = \alpha \ddot{\mathbf{q}}_{01} + (1 - \alpha) \ddot{\mathbf{q}}_{02} \quad (4.60)$$

dove  $\ddot{\mathbf{q}}_{01}$  è l'accelerazione di riferimento calcolata minimizzando le coppie richieste (si veda l'equazione 4.63), mentre  $\ddot{\mathbf{q}}_{02}$  è una accelerazione di riferimento calcolata considerando una funzione potenziale relativa all'angolo  $\theta_m$ ; infine  $\alpha$  è una costante che assume valori compresi tra 0 e 1 e fissa la percentuale di contributo delle due accelerazioni di riferimento.

Il termine  $\ddot{\mathbf{q}}_{01}$  viene calcolato considerando il modello dinamico presentato nel Capitolo 5. Per legare coppie motrici ed accelerazione nello spazio nullo  $\ddot{\mathbf{q}}_0$ , è necessario conoscere l'andamento delle accelerazioni nello spazio dei giunti.

Si consideri inizialmente la relazione (4.54) in cui il termine  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  è stato considerato nullo:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{pseudo} = \mathbf{J}^+ \ddot{\mathbf{s}} - \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{J}} \dot{\mathbf{q}} \quad (4.61)$$

in questo modo la cinematica inversa viene risolta sfruttando il grado di libertà ridondante per minimizzare l'accelerazione delle variabili di giunto. Il valore dell'accelerazione da proiettare nello spazio nullo, viene calcolato con l'obiettivo di minimizzare le coppie motrici richieste; per questo motivo è necessario definire una nuova funzione che monitori l'andamento delle coppie richieste. La funzione considerata valuta la media aritmetica delle coppie motrici in un determinato istante temporale:

$$w_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (C_{m,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}))^2} \quad (4.62)$$

Tale funzione permette di definire il contributo di ogni coppia ed evidenziare eventuali sbilanciamenti. Volendo minimizzare tali coppie è necessario che la (4.62) sia una funzione decrescente nel tempo.

L'accelerazione  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  sarà quindi definita da una funzione dipendente dall'andamento della funzione  $w_1$ :

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = -k_{01} \nabla w_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \quad (4.63)$$

dove  $k_{01}$  è un parametro di guadagno da fissare in sede di taratura del metodo ed il segno meno deriva dal fatto che si sta cercando di minimizzare la funzione (4.62). Anche in questo caso il gradiente della funzione è calcolato attraverso il rapporto incrementale centrato:

$$\nabla (w(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})) \approx \frac{w(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} + \delta \ddot{\mathbf{q}}) - w(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}} - \delta \ddot{\mathbf{q}})}{2\delta \ddot{\mathbf{q}}} \quad (4.64)$$

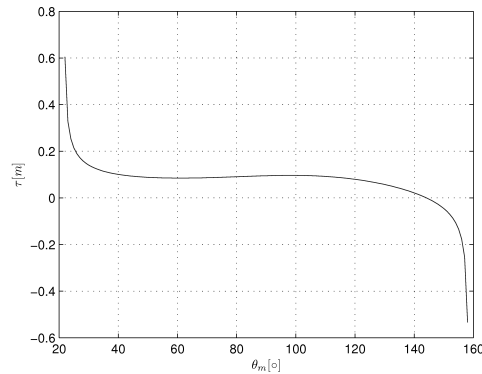
Si intuisce come l'impiego della sola variabile  $\ddot{\mathbf{q}}_{01}$  non possa portare ad una soluzione accettabile, in quanto le accelerazioni di riferimento non sono per nulla funzione della configurazione dell'interfaccia aptica, quindi il dispositivo tenderebbe a degenerare rapidamente in configurazioni singolari. Per questo motivo si è introdotto anche il contributo della variabile  $\ddot{\mathbf{q}}_{02}$ .

Il calcolo del vettore di riferimento  $\ddot{\mathbf{q}}_{02}$  si basa sulla formulazione di una funzione potenziale dipendente dall'angolo  $\theta_m$ : l'annullamento di tale funzione è l'obiettivo della metodologia di gestione della ridondanza; il valore dell'accelerazione  $\ddot{\mathbf{q}}_{02}$  sarà quindi assegnato in base al valore assunto dalla funzione potenziale introdotta.

L'angolo di giunto  $\theta_m$ , come ampiamente illustrato nei capitoli precedenti, definisce la posizione verticale  $p'_z$  della base mediana ; queste due variabili sono tra loro legate per mezzo della matrice Jacobiana del meccanismo inferiore (rapporto di trasmissione generalizzato), i cui termini dipendono dalla configurazione assunta dal manovellismo. In Figura 4.8 è riportato il legame tra  $\theta_m$  e  $\tau$ : si nota che il suo modulo assume valori elevati in corrispondenza dei limiti di giunto oltre i quali non si può chiudere la catena cinematica; nel punto in cui il rapporto di trasmissione assume valore nullo si ha l'allineamento delle aste  $m$  con le aste  $n$  ed il sistema giunge nella condizione di punto morto. Le migliori condizioni di funzionamento si hanno nel range di  $\theta_m$  in cui il rapporto di trasmissione si mantiene praticamente costante.

Il buon funzionamento del manovellismo inferiore è garantito tra i valori di  $\theta_m$  pari a  $\theta_{m,min} = 25^\circ$  e  $\theta_{m,max} = 130^\circ$ ; il valore medio dell'angolo di giunto è pari a  $\bar{\theta}_m = 77.5^\circ$ .



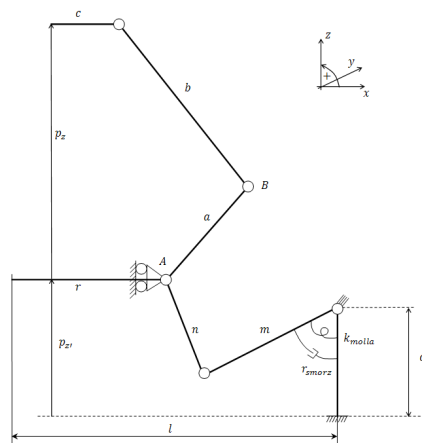


**Figura 4.8:** *Andamento del rapporto di trasmissione, relativo al meccanismo inferiore, al variare dell'angolo  $\theta_m$ .*

La funzione potenziale assume la forma dell'energia elastica di una molla:

$$w_{02}(\theta_m) = \frac{1}{2}k_{molla}(\theta_m - \bar{\theta}_m)^2 \quad (4.65)$$

Accanto a questa funzione si definisce anche una funzione di dissipamento, che ha il solo scopo di mitigare l'effetto oscillatorio legato alla natura puramente elastica della funzione  $w_{02}(\theta_m)$ . Questo fisicamente si traduce nell'introduzione di una molla e di uno smorzatore in parallelo tra il telaio dell'interfaccia e l'asta  $m$ .



**Figura 4.9:** *“Molla” e “smorzatore” introdotti nel metodo 8.*

L'accelerazione di riferimento  $\ddot{\mathbf{q}}_{02}$  è quindi valutata attraverso la seguente relazione:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{02} = -\nabla(w_{02}(\theta_m)) - \frac{\partial w_{03}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \quad (4.66)$$

dove entrambi i termini hanno il segno negativo in quanto si vuole minimizzare l'accelerazione di riferimento.

## 9° METODO

L'implementazione dei due metodi sviluppati nel campo delle accelerazioni, non ha dato buoni risultati, rendendo questi metodi inadeguati per la gestione della ridondanza dell'interfaccia aptica. Infatti si osserva che, il metodo 7 fornisce buoni risultati soltanto se si considerano dei movimenti lenti, altrimenti la coppia motrice richiesta aumenta considerevolmente ed i motori installati non sarebbero più adatti; il metodo 8, invece, non è in grado di fornire buoni risultati in tutto il volume di lavoro, soltanto in quelle zone distanti dalle configurazioni singolari (questo perchè la funzione potenziale è legata soltanto al manovellismo inferiore e non a tutta la struttura dell'interfaccia).

Si è notato che il comportamento dell'interfaccia è funzione del tipo di traiettoria che deve eseguire "l'end-effector"; in particolare i due metodi risultano influenzati dagli spettri dei segnali di riferimento dell'accelerazione dell'end-effector. Per questo motivo si vuole proporre un metodo che ottimizzi il funzionamento del dispositivo in funzione delle caratteristiche della traiettoria da realizzare.

Si è quindi proceduto alla costruzione di un metodo di gestione della ridondanza che fosse in grado di scegliere la strategia di risoluzione migliore in base alla frequenza di funzionamento dell'interfaccia: per basse frequenze si utilizzerà il metodo che assicura la sfericità degli ellissoidi di manipolabilità; ad alte frequenze, per non avere delle richieste di coppia elevate, si adotterà il metodo che minimizza le coppie motrici richieste e che utilizza la funzione potenziale.

Il primo passo è stato quello di implementare un algoritmo che permetta di definire il range di frequenze delle accelerazioni dell'end-effector. I dati della traiettoria sono campionati alla stessa frequenza con cui si esegue l'analisi cinematica: utilizzando il teorema di Shannon è possibile definire la massima frequenza osservabile:

$$f_{max} = \frac{f_c}{2} \quad (4.67)$$

dove  $f_c = \frac{1}{\Delta t}$  è la frequenza di campionamento. Per analizzare lo spettro di un segnale è necessario avere dei dati definiti in un certo lasso di tempo; per questo motivo è necessario costruire un buffer che funga da finestra temporale, in modo da poter raccogliere gli ultimi  $n_p$  punti (nelle coordinate  $x$ ,  $y$  e  $z$ ) della traiettoria richiesta. Fissando il parametro  $n_p$  è nota la risoluzione in frequenza:

$$\Delta f = \frac{1}{T_{acq}} = \frac{1}{n_p \Delta t} \quad (4.68)$$

dove  $T_{acq}$  è il tempo di acquisizione. I dati acquisiti sono analizzati attraverso la trasformata di Fourier, che restituisce lo spettro del segnale<sup>11</sup> analizzato. Il segnale che viene acquisito viene visto come il prodotto del segnale vero e proprio per la finestra di acquisizione. Ne risulta che lo spettro del segnale ottenuto è la convoluzione dello spettro del segnale vero e proprio con lo spettro della finestra di acquisizione, pertanto si commette un errore di leakage nel momento in cui i periodi delle funzioni armoniche che compongono il segnale da acquisire non sono multiple della durata della finestra di acquisizione. Per i tre segnali acquisiti (accelerazioni lungo le tre direzioni) viene calcolato lo spettro e l'autospettro, che dà informazioni riguardo la distribuzione di potenza rispetto alle armoniche del segnale.

Dato che il segnale acquisito non è periodico, lo spettro sarà continuo, pertanto è più indicato calcolare la densità di potenza spettrale (PSD): tale funzione

---

<sup>11</sup>Nella trattazione si farà uso del termine segnale per indicare parte dei dati riguardanti la traiettoria dell'end-effector acquisiti dall'algoritmo per elaborarne lo spettro.

fornisce il valore della potenza associata ad una banda in frequenza pari alla risoluzione spettrale <sup>12</sup>.

$$PSD_{AA}(f) = \frac{S_{AA}(f)}{\Delta f} = \frac{A^*(f)A(f)}{\Delta f} \quad (4.69)$$

dove  $S_{AA}(f)$  è l'autospettro del segnale,  $A(f)$  è lo spettro e l'apice \* indica il complesso coniugato.

Attraverso la potenza spettrale si definisce un indice con il quale selezionare il metodo di gestione della ridondanza più opportuno, in funzione delle caratteristiche della traiettoria:

$$\bar{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_p/2} f_i PSD_i}{\sum_{i=1}^{n_p/2} PSD_i} \quad (4.70)$$

Tale indice è una media pesata delle frequenze che compongono ogni funzione PSD rispetto ai valori assunti da ogni funzione PSD: ciò equivale a trovare il baricentro del grafico di ciascuna delle tre funzioni di densità di potenza spettrale.

Il valore  $\bar{f}_j$  rappresenta una frequenza caratteristica attorno alla quale viene “descritto” il segnale nel dominio delle frequenze rispetto al *j-esimo* asse ( $x$ ,  $y$  e  $z$ ). Un valore dell'indice  $\bar{f}_j$  basso significa che la potenza spettrale della traiettoria, relativa al *j-esimo* asse, si trova per lo più a bassa frequenza: è dunque possibile utilizzare con successo tutti quei metodi che gestiscono il grado di libertà ridondante attraverso indici legati alla forma degli ellissoidi di manipolabilità. Viceversa, un valore dell'indice (4.70) elevato, implica che il segnale in ingresso al sistema lungo il *j-esimo* asse, è costituito da armoniche a frequenza elevata: in questo caso verranno utilizzati quei metodi che minimizzano le coppie richieste in modo che siano effettivamente erogabili dagli attuatori.

Operando nel campo delle accelerazioni, il passaggio da un metodo all'altro potrebbe avvenire attraverso una semplice funzione di switch, ma, per evitare di avere delle variazioni troppo brusche, si è deciso di anteporre una funzione

---

<sup>12</sup>[25].

continua polinomiale di terzo grado, dipendente dal parametro  $\bar{f}_j$ :

$$G_{1j}(\bar{f}_j) = \begin{cases} a\bar{f}_j^3 + b\bar{f}_j^2 & \text{se } \bar{f}_j \leq f_{cambio} \\ 1 & \text{se } \bar{f}_j > f_{cambio} \end{cases} \quad (4.71)$$

dove i coefficienti ( $a = 1 / [(1 - \frac{3}{2}) f_{cambio}^3]$ ,  $b = -\frac{3}{2} a f_{cambio}$  per  $j = 1, 2, 3$ ) sono stati ricavati imponendo le seguenti condizioni: vincolo di passaggio per l'origine, valore unitario in corrispondenza di una frequenza denominata  $f_{cambio}$  e derivata nulla in entrambi i punti. La frequenza  $f_{cambio}$  è un parametro scelto in fase di taratura del metodo ed indica il valore di frequenza per cui la funzione (4.72) assume valore unitario.

In base al valore assunto dalla funzione  $G_{1j}$  cambierà il metodo con cui assegnare il valore di  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  da proiettare nello spazio nullo. Dato che le tre funzioni  $G_{1j}$  possono assumere valori anche molto diversi tra loro, si è deciso di considerare un'unica funzione di switching:

$$G_1 = \max_{j=1,2,3}(G_{1j}) \quad (4.72)$$

In questo modo si evidenzia la presenza di componenti armoniche ad elevata frequenza nelle funzioni di densità spettrale, in modo da privilegiare gli algoritmi di risoluzione basati sulla minimizzazione delle coppie motrici.

L'impiego della sola funzione  $G_1$  non garantisce che la struttura non assuma configurazioni singolari (parzialmente limitate dalla funzione potenziale che considera soltanto il meccanismo inferiore). Tale problema è stato risolto introducendo una seconda funzione  $G_2$ :

$$G_2(w_4) = \begin{cases} 0 & \text{se } w_4 \leq w_{4,min} \\ a_2 w_4^3 + b_2 w_4^2 + c_2 w_4 + d_2 & \text{se } w_{4,min} \leq w_4 \leq w_{4,max} \\ 1 & \text{se } w_4 > w_{4,max} \end{cases} \quad (4.73)$$

le cui costanti  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  e  $d_2$  sono ricavate imponendo che la funzione  $G_2$  assuma valore nullo e derivata nulla in corrispondenza del punto  $w_{4,min}$  ed assuma valore unitario e derivata nulla in corrispondenza di  $w_{4,max}$ <sup>13</sup>.

Questa funzione, essendo dipendente dall'inverso del numero di condizionamento della matrice Jacobiana complessiva ( $\omega_4(\mathbf{q})$ ), garantisce che l'interfaccia aptica non assuma configurazioni singolari durante il suo funzionamento. La funzione  $G_2$  permette di modificare il peso della funzione  $G_1$  sulla funzione di switching complessiva, in modo da portare il sistema lontano da configurazioni singolari qualora fosse necessario.

Definendo la funzione  $G_3$  come:

$$G_3 = G_1 G_2. \quad (4.74)$$

è possibile scrivere l'accelerazione  $\ddot{\mathbf{q}}_0$ , da proiettare nello spazio nullo di  $J$ , nel seguente modo:

$$\ddot{\mathbf{q}}_0 = \begin{bmatrix} \ddot{q}_{0,1} \\ \ddot{q}_{0,2} \\ \ddot{q}_{0,3} \\ \ddot{q}_{0,4} \end{bmatrix} = k_1 G_3(\bar{f}) \ddot{\mathbf{q}}_{01} + k_2 (1 - G_3(\bar{f})) \ddot{\mathbf{q}}_{02}. \quad (4.75)$$

Le quantità  $k_1$  e  $k_2$  sono costanti il cui valore è determinato sperimentalmente in fase di taratura del metodo. I valori delle accelerazioni di riferimento  $\ddot{\mathbf{q}}_{0,i}$  sono scelti in modo tale da conferire al sistema le massime prestazioni in base al tipo di funzionamento richiesto dall'operatore.

L'accelerazione  $\ddot{\mathbf{q}}_{01}$  è l'accelerazione di riferimento quando il sistema si trova ad operare in campo di alta frequenza; in questa fase è necessario che il sistema renda minime le coppie necessarie al suo funzionamento. Si fa riferimento a quanto

<sup>13</sup> Si riportano i valori dei parametri della funzione polinomiale:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{den_{G2}} & b_2 &= -\frac{3(w_{4,min} + w_{4,max})}{den_{G2}} \\ c_2 &= \frac{6w_{4,max}w_{4,min}}{den_{G2}} & d_2 &= \frac{w_{4,min}(w_{4,min} - 3w_{4,max})}{den_{G2}} \\ den_{G2} &= w_{4,min}^3 - 3w_{4,min}^2w_{4,max} + 3w_{4,max}^2w_{4,min} - w_{4,max}^3 \end{aligned}$$

scritto per il metodo 8:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{01} = \alpha \ddot{\mathbf{q}}_{011} + (1 - \alpha) \ddot{\mathbf{q}}_{012} \quad (4.76)$$

dove

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{011} &= -k_{01} \nabla w_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) \\ w_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) &= \sqrt{\sum_{i=1}^4 (C_{m,i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}))^2} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{012} &= -k_{02} \left( \frac{\partial w_2}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial w_3}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \\ w_2(\theta_m) &= \frac{1}{2} k_{molla} (\theta_m - \bar{\theta}_m)^2 \\ w_3(\theta_m) &= \frac{1}{2} r_{smorz} \dot{\theta}_m^2 \end{aligned}$$

L'accelerazione  $\ddot{\mathbf{q}}_{02}$  è l'accelerazione di riferimento quando il sistema si trova ad operare in campo di basse frequenze; in questa fase il sistema tende ad ottimizzare la cinematica del sistema cercando di ottenere degli ellissoidi di manipolabilità sferici. Si fa riferimento a quanto scritto per il metodo 7:

$$\ddot{\mathbf{q}}_{02} = k_{03} \nabla (w_4(\mathbf{q})) \quad (4.77)$$

dove

$$w_4(\mathbf{q}) = \frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J})}$$

L'introduzione della funzione  $G3$  permette di pesare opportunamente le funzioni  $\ddot{\mathbf{q}}_{01}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}_{02}$ , in modo che il sistema sia ben distante da configurazioni singolari e minimizzi le coppie richieste agli attuatori.

## 4.7 Analisi delle prestazioni dei metodi di gestione della ridondanza

In questo paragrafo è presentato un confronto tra tutte le metodologie descritte per la gestione della ridondanza dell'interfaccia aptica. In particolare si valuteranno le capacità dei vari metodi di mantenere il dispositivo lontano da configurazioni di singolarità e di minimizzare la coppia motrice richieste agli attuatori.

Per il confronto dei vari metodi sono state considerate quattro differenti traiettorie imposte all'end-effector, ognuna composta da un tratto iniziale con il quale l'end-effector si porta nel punto di partenza della traiettoria da eseguire. In particolare, questo primo tratto, è definito mediante una legge polinomiale 3-4-5, le cui condizioni, tre all'istante iniziale e tre all'istante finale, sono definite in forma adimensionale nella seguente tabella:

<i>Grandezza</i>	$x = 0$	$x = 1$
<i>Posizione</i>	$G(0) = 0$	$G(1) = 0$
<i>Velocità</i>	$F(0) = 0$	$F(1) = 0$
<i>Accelerazione</i>	$f(0) = 0$	$f(1) = 0$

**Tabella 4.1:** Parametri del tratto di accelerazione iniziale.

Dopo aver eseguito la *traiettoria di posizionamento iniziale*, l'end-effector si trova nel punto iniziale della traiettoria con velocità ed accelerazioni nulle; per tale motivo la prima parte di ogni traiettoria è costituita da una legge polinomiale di terzo grado che permette di portare l'end-effector, tramite un tratto di accelerazione, alla velocità di crociera di percorrenza della traiettoria.

Nel seguito si descrivono brevemente le quattro traiettorie considerate riportando i principali parametri che le caratterizzano.

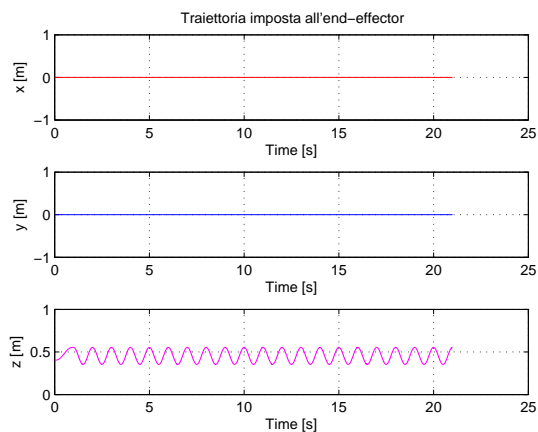


1. *Traiettoria 1*: oscillazione sinusoidale a bassa frequenza lungo l'asse  $z$  (Figura 8.25). I parametri principali della traiettoria sono:

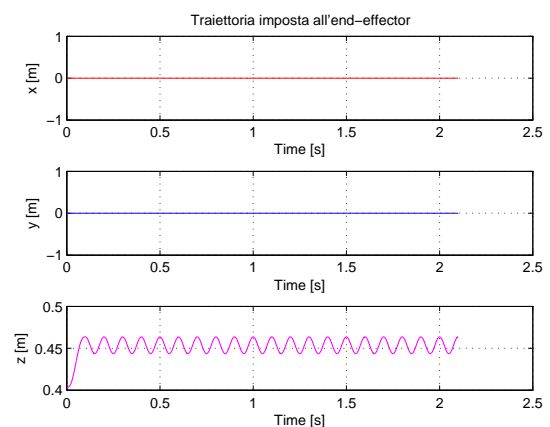
- frequenza:  $1Hz$
- ampiezza:  $0.1m$

2. *Traiettoria 2*: oscillazione sinusoidale ad elevata frequenza lungo l'asse  $z$  (Figura 8.26). I parametri principali della traiettoria sono:

- frequenza:  $10Hz$
- ampiezza:  $0.01m$



**Figura 4.10:** *Traiettoria 1.*



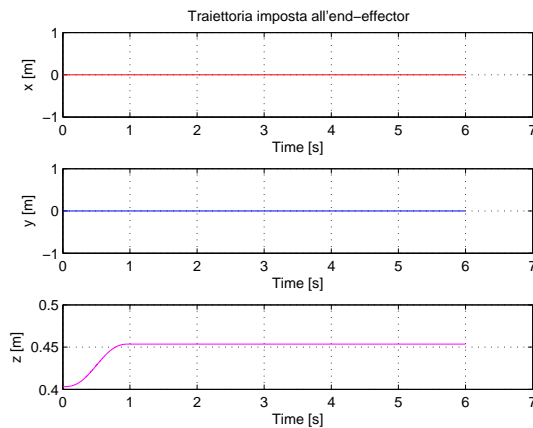
**Figura 4.11:** *Traiettoria 2.*

3. *Traiettoria 3*: mantenimento della posizione dopo la traiettoria di posizionamento iniziale (Figura 8.27).

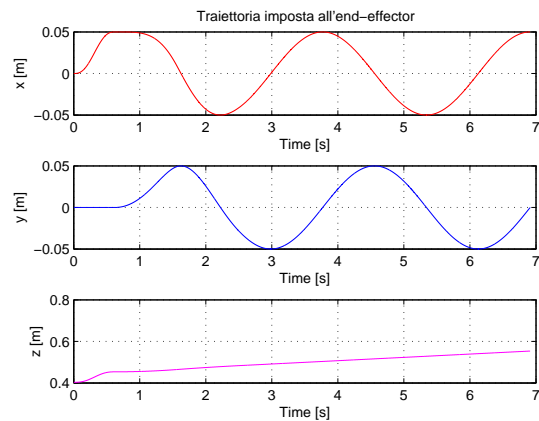
4. *Traiettoria 4*: traiettoria a spirale con asse principale in direzione  $z$  (Figura 8.28). I parametri principali della traiettoria sono:

- rotazione attorno all'asse  $x$ :  $0^\circ$
- rotazione attorno all'asse  $y$ :  $0^\circ$
- rotazione attorno all'asse  $z$ :  $0^\circ$

- velocità di percorrenza:  $0.1m/s$
- raggio della spirale:  $0.05m$
- passo della spirale:  $0.05m$
- numero di periodi: 2



**Figura 4.12:** *Traiettorie 3.*



**Figura 4.13:** *Traiettorie 4.*

### 4.7.1 Analisi dell'inverso del numero di condizionamento totale (ICT)

La prima analisi confronta le varie metodologie proposte in funzione del valore medio dell'inverso del numero di condizionamento della matrice Jacobiana complessiva, per ognuna delle quattro traiettorie. Dato che, all'interno dello spazio di lavoro, il numero di condizionamento è molto variabile, si riporta, per completezza, anche un istogramma relativo alla sua deviazione standard.

Osservando la Figura 4.14 e la Figura 4.15, si nota che tutte le metodologie proposte permettono di avere un buon valore medio dell'inverso del numero di condizionamento totale (tutti prossimi all'unità).

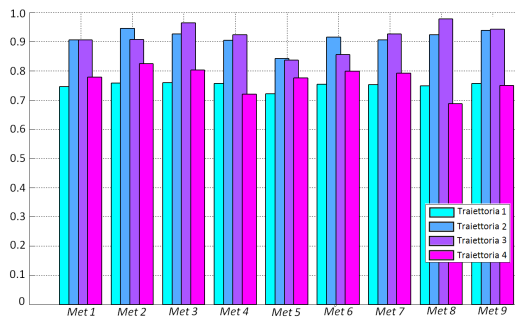


Figura 4.14: ICT: valore medio.

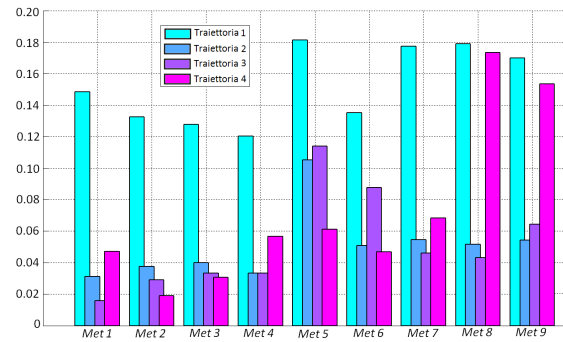


Figura 4.15: ICT: deviazione standard.

Da un'analisi più approfondita si osserva che la *traiettoria 1*, in tutti i 9 metodi, è la traiettoria con deviazione standard dell'ICT maggiore: essendo una sinusoidale a bassa frequenza con elevata ampiezza d'oscillazione, l'end-effector tende a muoversi in zone del volume di lavoro dell'interfaccia caratterizzate da valori di ICT bassi. Confrontando la *traiettoria 1* con la *traiettoria 2*, si osserva che il numero di condizionamento è più alto per la seconda traiettoria e la deviazione standard è nettamente minore: nel secondo caso, infatti, l'entità dell'oscillazione è minore, quindi l'end-effector resta sempre nell'intorno della posizione ottima di funzionamento.

Teoricamente i metodi che dovrebbero fornire i migliori risultati dovrebbero essere il metodo 1, il metodo 4 ed il metodo 7, in quanto risolvono la cinematica inversa proprio cercando di ottimizzare l'ICT.

I primi tre metodi sono quelli caratterizzati da una deviazione standard minore; questi si comportano meglio in quanto, lavorando nel campo delle velocità, possono sfruttare al meglio lo spazio nullo. Si sottolinea che in alcuni metodi è indispensabile una funzione di saturazione, la cui soglia è tarata in funzione della stabilità del metodo; ad esempio i metodi 4, 5 e 6, basandosi sull'errore in posizione (derivata di ordine inferiore rispetto ai primi tre metodi) per raggiungere la convergenza, richiedono delle soglie molto più basse affinché sia garantita la stabilità del metodo.

Per quanto riguarda i metodi nel campo delle accelerazioni, si nota come il metodo 9, essendo un compromesso tra il metodo 7 ed il metodo 8, dia dei risultati compresi tra quelli ottenibili con gli altri due metodi; utilizzando un approccio basato sull'analisi spettrale delle accelerazioni, il sistema si mantiene sempre abbastanza distante dalle configurazioni singolari.

Infine, riguardo il metodo 7, nonostante esso sia caratterizzato da un ICT alto, può portare la struttura ad assumere configurazioni singolari. Questo problema è legato al calcolo del numero di condizionamento di una matrice rettangolare; attraverso la matrice di Grant si calcolano delle grandezze simili agli autovalori, che talvolta possono indurre un comportamento strano della struttura. Questo non è così evidente nei metodi 1 e 3 in quanto il metodo risulta molto più lento da un punto di vista computazionale, accentuando questo fenomeno.

#### **4.7.2 Analisi della coppia quadratica media richiesta ai motori (CRMS)**

In questa analisi si considera come parametro di confronto tra le varie metodologie proposte, la coppia quadratica media (CRMS) richiesta ai motori dell'interfaccia per eseguire le quattro traiettorie campione; la coppia CRMS sarà inoltre confrontata con la coppia nominale del motore disponibile dal catalogo del costruttore (per i motori della struttura *Delta* la coppia nominale vale  $0.311 Nm$ , mentre per il motore dedicato alla base mediana vale  $0.386 Nm$ ), in modo da evidenziare il margine di coppia disponibile.

Osservando le figure riportate di seguito, si nota che tutti i motori risultano adatti all'applicazione, in quanto il vincolo dettato dalla coppia nominale dei motori è sempre rispettato per tutte le traiettorie test. In particolare si nota che il motore 4 è sempre quello più sollecitato (tranne che per la *traiettoria 2*); ciò è principalmente dovuto alle ampie escursioni ed alle basse frequenze di movimento richieste dalle traiettorie, che impongono a questo motore, per rispettare i target

cinematici, di erogare elevate coppie. Inoltre questo attuatore non deve sollevare soltanto il peso della base mediana, ma deve sorreggere anche tutta la struttura superiore *Delta*.

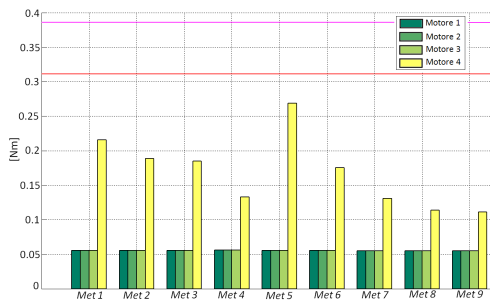


Figura 4.16: CRMS traiettoria 1.

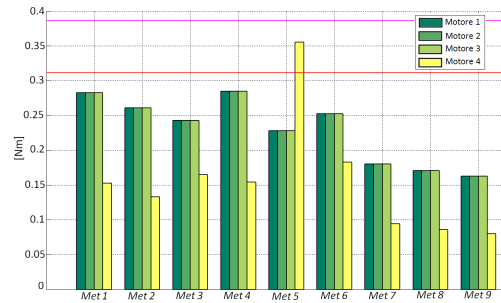


Figura 4.17: CRMS traiettoria 2.

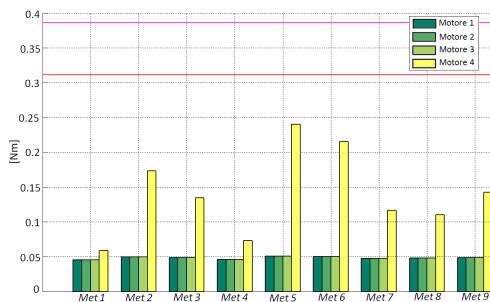


Figura 4.18: CRMS traiettoria 3.

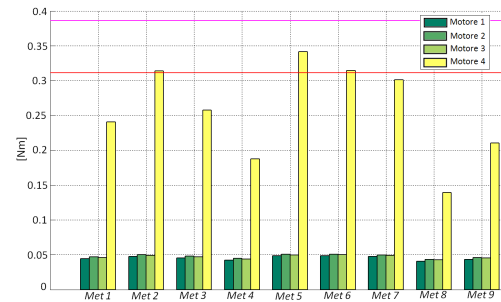


Figura 4.19: CRMS traiettoria 4.

I primi metodi proposti, non ottimizzando la dinamica del sistema, non possono garantire un'adeguato livello di coppia per una traiettoria qualunque; basti osservare i grafici relativi alla *traiettoria 2* dove ai motori è richiesta una coppia CRMS prossima a quella nominale fornita dal costruttore. Questo significa che una piccola variazione della traiettoria campione potrebbe rendere inadeguati gli attuatori installati sull'interfaccia.

Si nota quindi l'enorme differenza con i metodi sviluppati nel campo delle accelerazioni, soprattutto rispetto a quelli sviluppati con l'obiettivo di minimizzare le coppie richieste agli attuatori (metodi 8 e 9). Considerando ancora la *traiettoria*

2 è evidente come il limite di coppia nominale, a differenza dei primi sei metodi, sia ampiamente soddisfatto. Una piccola differenza si nota anche tra il metodo 7 ed il metodo 8, in particolare con il primo si ottiene una CRMS più alta in quanto esegue un'ottimizzazione sul numero di condizionamento totale anziché sulle coppie.

In merito a questa analisi è possibile affermare che i metodi migliori per minimizzare la coppia sono il metodo 8 ed il metodo 9; in particolar modo quest'ultimo risulta più adatto in quanto non considera soltanto un'ottimizzazione dinamica ma, valuta anche il comportamento cinematico dell'interfaccia aptica. Essendo questo metodo basato sull'analisi spettrale dell'accelerazione della traiettoria, risulta più versatile quindi applicabile ad una traiettoria qualsiasi.

### 4.7.3 Analisi della coppia massima richiesta ai motori (CMAX)

Questa analisi è del tutto simile a quella presentata nel precedente paragrafo, soltanto che le varie metodologie saranno confrontate in base alla massima coppia (CMAX) richiesta ai motori per eseguire le quattro traiettorie test; la coppia CMAX sarà inoltre confrontata con la coppia di picco del motore disponibile dal catalogo del costruttore (per i motori della struttura *Delta* la coppia di picco vale  $1.99 Nm$ , mentre per il motore dedicato alla base mediana vale  $2.85 Nm$ ), in modo da evidenziare il margine di coppia disponibile.

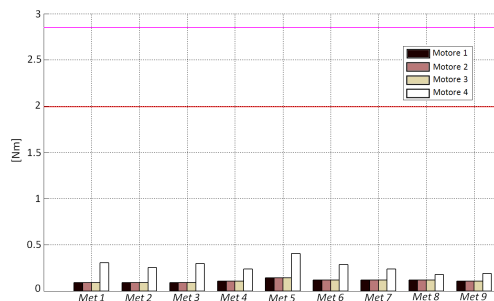


Figura 4.20: CMAX traiettoria 1.

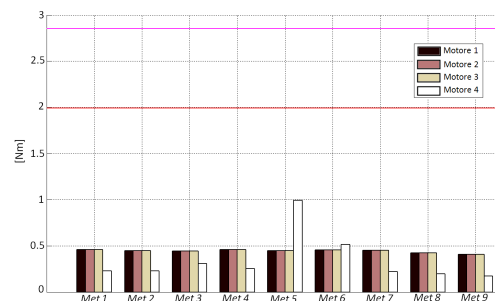
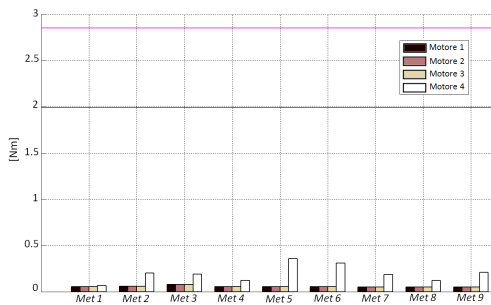
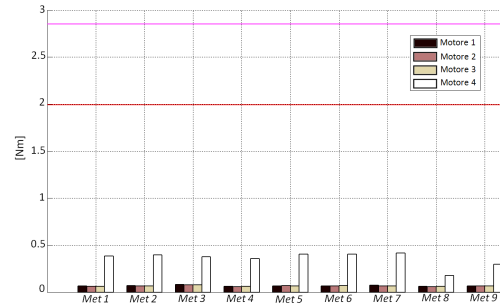


Figura 4.21: CMAX traiettoria 2.



**Figura 4.22:** *CMAX* traiettoria 3.



**Figura 4.23:** *CMAX* traiettoria 4.

Anche in questo caso i vincoli legati ai parametri di targa del motore sono rispettati; in particolare si nota il maggiore contributo di coppia richiesto dalla traiettoria ad alta frequenza (*traiettoria 2*). Anche in questo caso, i migliori risultati sono stati ottenuti con i metodi 8 e 9, mettendo ancor più in luce i pregi delle metodologie che ottimizzano il comportamento dinamico della struttura.

#### 4.7.4 Analisi della massima velocità angolare richiesta ai motori (WMAX)

L'ultima analisi presentata confronta i 9 metodi in funzione della massima velocità angolare (WMAX) richieste agli attuatori per eseguire le quattro traiettorie campione; la velocità WMAX sarà inoltre confrontata con la massima velocità angolare del motore disponibile dal catalogo del costruttore (per i motori della struttura *Delta* la coppia di picco vale  $6230 \text{ giri/min}$ , mentre per il motore dedicato alla base mediana vale  $3570 \text{ giri/min}$ ), in modo da evidenziare il margine di velocità disponibile.

Come si nota dai grafici, i metodi di risoluzione della cinematica inversa, per tutte le traiettorie proposte, consentono di rispettare i vincoli imposti dalle massime velocità di targa dei motori.

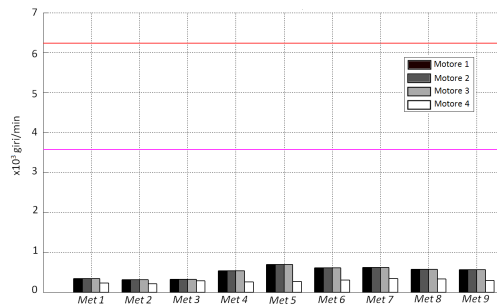


Figura 4.24: WMAX traiettoria 1.

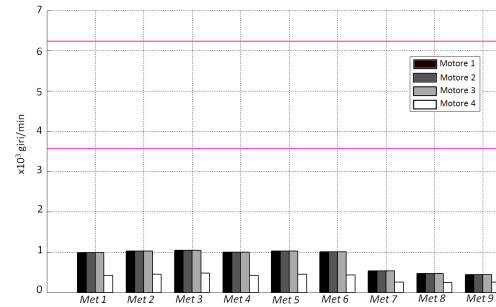


Figura 4.25: WMAX traiettoria 2.

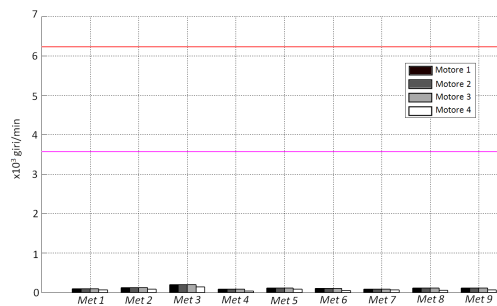


Figura 4.26: WMAX traiettoria 3.

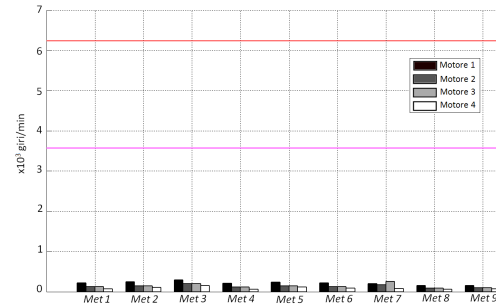


Figura 4.27: WMAX traiettoria 4.

Da questo punto di vista si hanno dei motori sovradimensionati; sembrerebbe che la scelta dei motori non sia stata eseguita correttamente. Infatti, sarebbe possibile ridurre le velocità massime utilizzando rapporti di riduzione superiori aumentando nel contempo il margine di coppia per gli attuatori; tuttavia, la scelta degli attuatori è stata accompagnata dalla difficoltà di vincolare a terra tutti i motori in modo da ridurre le masse della struttura in movimento<sup>14</sup>.

## 4.8 Conclusioni cinematica inversa

Nel paragrafo precedente, sono stati confrontati i vari metodi proposti per la risoluzione della cinematica inversa. Da questa analisi, si è notato che il metodo 9 è quello che permette di ottimizzare il comportamento dell'interfaccia aptica sia

<sup>14</sup>[3].



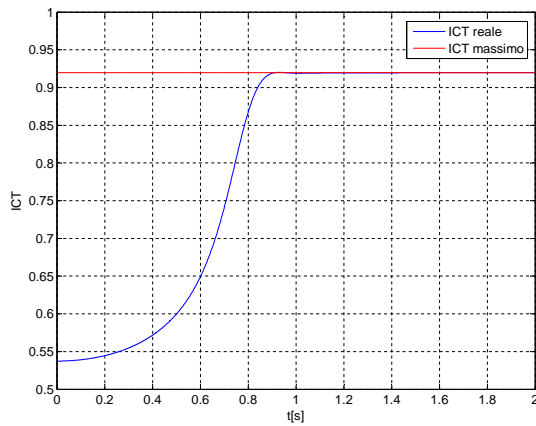
da un punto di vista cinematico, sia in termini di coppie richieste agli attuatori. Per questo motivo, di seguito, si riporta un'analisi più approfondita del metodo 9, in modo da valutare il comportamento dell'interfaccia aptica al variare dei valori assunti dalle funzioni di switching.

### Considerazioni sul metodo 9

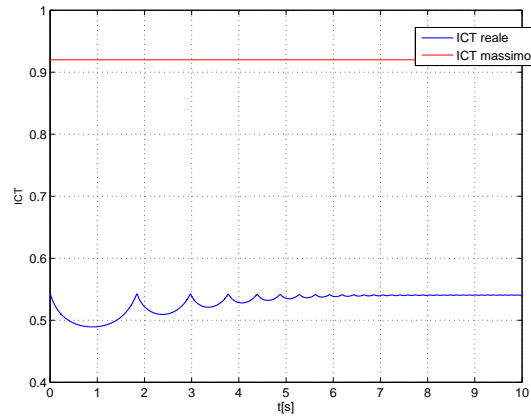
In questa sezione verranno riportate alcune considerazioni in merito all'ultimo metodo di risoluzione proposto. Per testare il funzionamento, indipendentemente dalla legge di moto imposta, sono state studiate separatamente le due strategie di risoluzione della cinematica inversa. In particolare, per eliminare la dipendenza dalla frequenza di funzionamento, si è agito direttamente sulla funzione  $G_1$  (4.72): imponendo  $G_1 = 1$  si privilegia la minimizzazione delle coppie motrici, mentre imponendo  $G_1 = 0$  si massimizza la manipolabilità del dispositivo. Si noti che le accelerazioni di riferimento  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  ottenute dall'equazione (4.75) con  $G_1 = 0$ , saranno composte da un unico contributo,  $\ddot{\mathbf{q}}_{02}$ ; mentre nel caso si ponga  $G_1 = 1$  i contributi resteranno comunque due (per effetto di  $G_2$ ) per evitare l'insorgere di condizioni di singolarità.

A questo punto le prove verranno effettuate ponendo l'interfaccia in una configurazione caratterizzata da un basso indice di manipolabilità, ad esempio  $\mathbf{q} = [1.18 \ 1.18 \ 1.18 \ 0.509]$ ; mantenendo invariata la posizione dell'end-effector  $\mathbf{p} = [0 \ 0 \ 0.511]$ ; l'ottimizzazione della cinematica inversa interverrà solo sui moti interni. Nel caso di massimizzazione della manipolabilità, l'interfaccia ridispone gli angoli di giunto in modo da raggiungere il massimo indice di manipolabilità possibile per tale configurazione ( $ICT_{max}=0.92$ ).

Nella Figura 4.28 e nella Figura 4.29 sono rispettivamente rappresentati l'andamento dell'inverso del numero di condizionamento con  $G_1 = 0$  e  $G_1 = 1$ : si nota che nel primo caso il massimo valore di  $ICT$  viene raggiunto in circa 1s, mentre nel secondo caso si nota che il valore di  $ICT$  tende a stabilizzarsi dopo circa 7s.

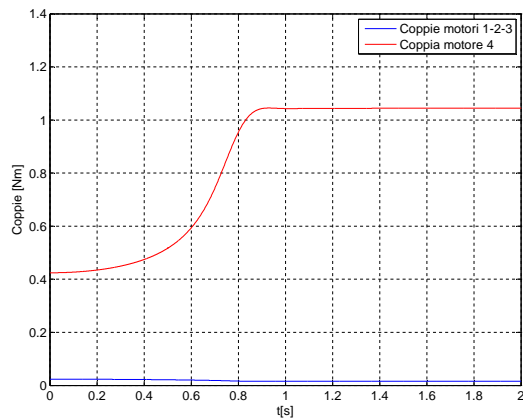


**Figura 4.28:** Andamento dell'indice di manipolabilità con  $G_1 = 0$ .

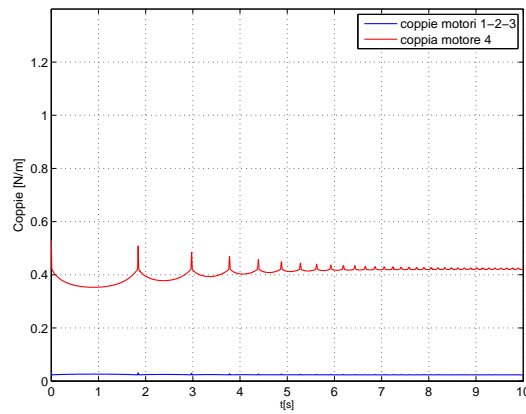


**Figura 4.29:** Andamento dell'indice di manipolabilità  $G_1 = 1$ .

Si considerino ora le coppie richieste ai giunti. Imponendo anche in questo caso prima  $G_1 = 0$  e poi  $G_1 = 1$ , si ricava un profilo un andamento delle coppie richieste del tutto simile a quello evidenziato per l'inverso del numero di condizionamento.



**Figura 4.30:** Andamento delle coppie richieste ai motori con  $G_1 = 0$ .



**Figura 4.31:** Andamento delle coppie richieste ai motori con  $G_1 = 1$ .

L'oscillazione smorzata nel tempo che si nota nelle figure con  $G_1 = 1$  è dovuta alla funzione potenziale imposta sul grado ridondante ed all'azione della funzione  $G_2$ , che interviene nel caso in cui l' $ICT$  assume valori ridotti.

# CAPITOLO 5

## DINAMICA INVERSA

Nel precedente capitolo sono state proposte alcune metodologie relative alla risoluzione della cinematica inversa dell'interfaccia aptica e, tra queste, alcune basate sull'ottimizzazione delle coppie richieste agli attuatori. Si è notato che il metodo migliore per gestire il grado di ridondanza del dispositivo è l'approccio basato sull'analisi in frequenza della traiettoria da eseguire; in particolare questo metodo è in grado di impiegare due differenti criteri di gestione della ridondanza in funzione delle caratteristiche della legge di moto dell'end-effector: a basse frequenze il metodo ottimizza il comportamento cinematico mentre ad alte frequenze minimizza le coppie richieste agli attuatori.

Per risolvere la cinematica inversa è quindi necessario implementare nell'algoritmo di calcolo anche la risoluzione della dinamica inversa dell'interfaccia aptica ossia, la definizione delle coppie motrici richieste agli attuatori in funzione della legge di moto dell'end-effector e delle forze esterne applicate all'intera struttura. Inoltre, la loro implementazione nell'algoritmo di controllo, permette di compensare la forza di gravità e le forze d'inerzia rendendo la struttura più trasparente all'operatore.

In letteratura sono presenti diversi metodi per la scrittura delle equazioni di moto, tuttavia, nel caso di sistemi complessi a più gradi di libertà, è preferibile

utilizzare approcci di tipo energetico poiché, in generale, rispetto ad esempio al metodo degli equilibri dinamici, permettono di utilizzare un numero minore di equazioni. Per lo studio dell'interfaccia aptica si propone un modello dinamico basato sulla formulazione di Lagrange (metodo energetico).

## 5.1 Modello dinamico

La risoluzione della dinamica inversa sfrutta la prima forma delle equazioni di Lagrange, in cui compaiono  $n$  equazioni quante sono le coordinate libere totali del sistema (coordinate nello spazio di lavoro e coordinate nello spazio dei giunti), associate a  $k$  relazioni di vincolo ( $k$  sono anche i moltiplicatori di Lagrange); il numero dei gradi di libertà del sistema è pari ad  $n - k$  (nel caso in questione  $n = 8$  e  $k = 4$ ). Il sistema di equazioni è così definito:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} \quad \text{per } j = 1 \dots n \quad (5.1)$$

dove  $\Gamma_i$  è l' $i$ -esima equazione di vincolo,  $\lambda_i$  è l' $i$ -esimo moltiplicatore di Lagrange e  $L$  è la funzione Lagrangiana definita come la differenza tra l'energia cinetica  $K$  e l'energia potenziale  $U$  dell'interfaccia aptica:

$$L = K - U$$

Il vettore  $q_j$  contiene tutte le coordinate libere del sistema ed è così composto:

$$\left. \begin{array}{l} q_1 = p_x \\ q_2 = p_y \\ q_3 = p_z \\ q_4 = p_{z'} \end{array} \right\} \text{coordinate end-effector } \mathbf{x} \quad \left. \begin{array}{l} q_5 = \theta_{11} \\ q_6 = \theta_{12} \\ q_7 = \theta_{13} \\ q_8 = \theta_m \end{array} \right\} \text{coordinate dei giunti } \mathbf{q}$$

Le equazioni di moto (5.1) possono essere risolte attraverso il metodo proposto da Tsai <sup>1</sup>, che propone la suddivisione di tali equazioni in due sottogruppi:

1. il primo (5.2) considera soltanto le coordinate libere nello spazio di lavoro e contiene come incognite i moltiplicatori di Lagrange  $\lambda_i$ :

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \hat{Q}_j \quad \text{per } j = 1, 2, 3, 4 \quad (5.2)$$

dove  $\hat{Q}_j = [ f_x \quad f_y \quad f_z \quad f_{z'} ]$  è il vettore delle forze esterne applicate all'end-effector ed alla base mediana;

2. il secondo (5.3) considera soltanto le coordinate libere nello spazio dei giunti e contiene come incognite la coppie nello spazio dei giunti:

$$Q_j = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^3 \lambda_i \frac{\partial \Gamma_i}{\partial q_j} \quad \text{per } j = 5, 6, 7, 8 \quad (5.3)$$

dove  $Q_j = [ Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 ]$  è il vettore contenente le coppie applicate ai giunti, ovvero come se fossero applicate nella cerniera  $A$  per le aste  $a_i$  ed alla cerniera  $M$  per le manovelle  $m$  (vedi Figura 5.1).

Risolvendo il primo gruppo di equazioni si ricavano i moltiplicatori di Lagrange che, sostituiti nel secondo gruppo, permettono di risolvere la dinamica inversa del dispositivo.

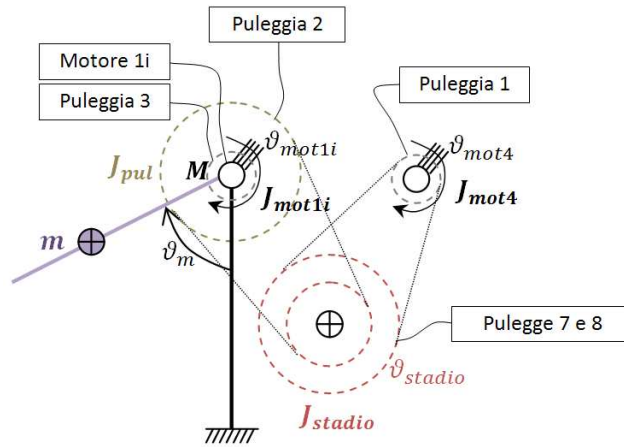
Prima di procedere alla scrittura delle equazioni, è necessario definire uno schema a corpi rigidi relativo all' $i$ -esima catena cinematica dell'interfaccia aptica. Si sono considerate le seguenti semplificazioni:

- le aste  $a$  si suppongono rettilinee;
- i quadrilateri superiori (link passivi della struttura *Delta*) sono rappresentati da un'unica asta  $b$ , la cui massa è distribuita in parti uguali alle estremità dell'asta  $a_i$  e dell'end-effector;

---

<sup>1</sup>[21].





**Figura 5.2:** Schema della trasmissione della base mediana.

dove:

- $m_r$  = massa della base mediana;
- $m_c$  = massa dell'end-effector;
- $m_m$  = massa della manovella  $m$ ;
- $J_{mm}$  = momento d'inerzia della manovella  $m$  rispetto al punto di infulcro fisso  $M$ ;
- $m_n$  = massa della della manovella  $m$ ;
- $m_a$  = massa del link  $a$  della struttura superiore *Delta*;
- $J_{aa}$  = momento d'inerzia baricentrico del link  $a$  della struttura *Delta*;
- $m_b$  = massa della coppia di puntoni della struttura superiore *Delta*;
- $m_{ing}$  = massa delle pulegge 4 e 5, comprensive di albero di collegamento, posizionate nel punto  $N$ ;

- $J_{ing}$  = momento d'inerzia delle pulegge 4 e 5 e del loro albero rispetto all'unico asse di rotazione consentito dai vincoli;
- $m_h$  = massa dell'albero su cui è calettato il settore dentato 6;
- $J_h$  = momento d'inerzia, rispetto al proprio asse di rotazione, dell'albero su cui è calettato il settore dentato 6;
- $m_v$  = massa del settore dentato 6;
- $J_v$  = momento d'inerzia del settore dentato 6 rispetto all'unico asse di rotazione consentito dai vincoli;
- $J_{pul}$  = momento d'inerzia della puleggia 2 (posizionata sulla manovella  $m$ );
- $J_{stadio}$  = momento d'inerzia delle pulegge 7 e 8 e del loro albero, rispetto all'unico asse consentito dai vincoli (stadio di riduzione tra il motore 4 e la puleggia 2);
- $J_{mot}$  = momento d'inerzia dei rotori dei motori e delle pulegge calettate.

### 5.1.1 Equazioni di vincolo $\Gamma_i$

Le quattro equazioni di vincolo  $\Gamma_i$  si ricavano dalle equazioni di chiusura vettoriale utilizzate per la risoluzione della cinematica diretta; in particolare una si ottiene dalle equazioni del manovellismo inferiore (vedi equazioni 3.6)<sup>2</sup>:

$$\Gamma_4 = ((l - r) - m \sin \theta_m)^2 + (p_{z'} - (d - m \cos \theta_m))^2 - n^2 = 0 \quad (5.4)$$

---

<sup>2</sup>L'equazione deve essere riscritta nel seguente modo ed esplicitata rispetto le tre direzioni dello spazio di lavoro:  $[g - (m + k)]^2 - n^2 = 0$ .



e le restanti tre ( $i = 1, 2, 3$ ) dalle relazioni della struttura superiore *Delta* (vedi equazioni 3.17)<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} \Gamma_i = & (p_x + (c - r) \cos \phi_i - a \cos \theta_{1i} \cos \phi_i)^2 + (p_y + (c - r) \sin \phi_i - a \cos \theta_{1i} \sin \phi_i)^2 + \\ & + (p_z - a \sin \theta_{1i})^2 - b^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.5)$$

### 5.1.2 Energia cinetica $K$

Il termine  $K$  della funzione Lagrangiana  $L$  considera l'energia cinetica di tutti i corpi in movimento che costituiscono l'interfaccia aptica; esso è definito dalla somma dei seguenti termini:

- $K_r$  = energia cinetica della base mediana;
- $K_c$  = energia cinetica dell'end-effector;
- $K_{mtot}$  = energia cinetica di tutte le manovelle del meccanismo inferiore;
- $K_{ntot}$  = energia cinetica di tutte le bielle del meccanismo inferiore;
- $K_{tr}$  = energia cinetica dei vari componenti della trasmissione;
- $K_{ai}$  = energia cinetica dell' $i$ -esimo link  $a$  della struttura *Delta*;
- $K_{bi}$  = energia cinetica dell' $i$ -esima coppia di aste  $b$  della struttura *Delta*.

$$K = K_r + K_c + K_{mtot} + K_{ntot} + K_{tr} + \sum_{i=1}^3 (K_{ai} + K_{bi}) \quad (5.6)$$

---

<sup>3</sup>L'equazione deve essere riscritta nel seguente modo ed esplicitata rispetto le tre direzioni dello spazio di lavoro:  $[p - (a_i + e_i)]^2 - b_i^2 = 0$ .

I vari termini che compongono l'energia cinetica  $K$  sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
K_r &= \frac{1}{2} m_r \dot{p}_{z'}^2 \\
K_c &= \frac{1}{2} m_c (\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + \dot{p}_{z_{tot}}^2) = \frac{1}{2} m_c (\dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + (\dot{p}_z + \dot{p}_{z'})^2) \\
K_{mtot} &= 3 \left( \frac{1}{2} J_{mm} \dot{\theta}_m^2 \right) \\
K_{ntot} &= 3 \left( \frac{1}{2} \frac{m_n}{2} m^2 \dot{\theta}_m^2 + \frac{1}{2} \frac{m_n}{2} \dot{p}_{z'}^2 \right) \\
K_{ai} &= \frac{1}{2} J_{aa} \dot{\theta}_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_a v_a^2 = \frac{1}{2} J_{aa} \dot{\theta}_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_a \left( \dot{p}_{z'}^2 + a \dot{p}_{z'} \dot{\theta}_{1i} \cos \theta_{1i} + \frac{a^2}{4} \dot{\theta}_{1i}^2 \right) \\
K_{bi} &= \frac{1}{2} \frac{m_b}{2} v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{m_b}{2} v_b^2 = \frac{1}{4} m_b \left( \dot{p}_x^2 + \dot{p}_y^2 + (\dot{p}_z + \dot{p}_{z'})^2 + a^2 \dot{\theta}_{1i}^2 + \dot{p}_{z'}^2 + 2 \dot{p}_{z'} \dot{\theta}_{1i} a \cos \theta_{1i} \right)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

### Energia cinetica della trasmissione

Particolare attenzione merita il calcolo dell'energia cinetica della trasmissione. Ogni catena cinematica della struttura superiore *Delta* è attuata per mezzo di un settore dentato che riceve il moto da una coppia di ingranaggi: essi realizzano uno stadio di riduzione tra il motore ed il link attuato (nel calcolo dell'energia cinetica bisogna considerare anche il contributo dell'albero sul quale sono calettati gli ingranaggi).

La trasmissione dedicata alla movimentazione della base mediana è composta da un cinematismo a cinghia a due stadi di riduzione; questa parte di trasmissione è posizionata sul telaio quindi, l'unico contributo all'energia cinetica, oltre che dal rotore del motore, è dato dalla rotazione delle pulegge e dell'albero sul quale sono calettate.

Facendo riferimento alla Figura 5.1 ed alla Figura 5.2 è possibile scrivere il termine  $K_{tr}$  come:

$$K_{tr} = 3 \left( \frac{1}{2} m_{ing} v_{ing}^2 + \frac{1}{2} m_h v_h^2 \right) + \frac{1}{2} J_{pul} \omega_{pul}^2 + \frac{1}{2} (J_{stadio}) \omega_{stadio}^2 + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{1}{2} m_v v_v^2 + \frac{1}{2} J_h \omega_{h_i}^2 + \frac{1}{2} J_v \omega_{v_i}^2 + \frac{1}{2} J_{ing} \omega_{ing_i}^2 \right) + \sum_{i=1}^4 \left( \frac{1}{2} J_{mot_i} \omega_{mot_i}^2 \right) \quad (5.8)$$

dove  $\omega$  è la velocità angolare del componente e  $v$  la sua velocità di traslazione.

Per definire il contributo cinetico della trasmissione  $K_{tr}$ , è necessario definire le varie quantità cinematiche, in funzione delle coordinate scelte per la modellizzazione dell'interfaccia.

Si consideri inizialmente il corpo rigido *ing*: esso si muove con la manovella del meccanismo inferiore e ruota rispetto al proprio asse di rotazione. Nota la posizione del punto  $N$  e derivandola rispetto al tempo, si ottiene la sua velocità di traslazione:

$$\begin{cases} P_{ing_i x} = l - m \sin \theta_m \\ P_{ing_i z} = d - m \cos \theta_m \end{cases} \quad \begin{cases} v_{ing_i x} = -m \cos \theta_m \dot{\theta}_m \\ v_{ing_i z} = m \sin \theta_m \dot{\theta}_m \end{cases} \quad v_{ing_i}^2 = m^2 \dot{\theta}_m^2 \quad (5.9)$$

La velocità angolare dell'elemento *ing* si ricava dalla relazione (3.37), presentata nel paragrafo relativo all'analisi cinematica della trasmissione:

$$\omega_{ing_i} = -\dot{\theta}_{ing_i} = - \left[ \dot{\theta}_{1i} \frac{1}{\tau_{56}} + \frac{m \dot{\theta}_m \cos \theta_m}{n \sin \left[ \arccos \left( \frac{1}{n} (l - r - m \sin \theta_m) \right) \right]} \left( 1 + \frac{1}{\tau_{56}} \right) \right] \quad (5.10)$$

Attraverso la formula di Willis (vedi relazione 3.35) si ricava la velocità angolare dei motori relativi al meccanismo *Delta* mentre, attraverso la relazione (3.30), si definisce la velocità del motore 4:

$$\omega_{mot_i} = \dot{\theta}_{ing_i} \frac{1}{\tau_{34}} + \dot{\theta}_m \left( 1 - \frac{1}{\tau_{34}} \right) \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \quad (5.11)$$

$$\omega_{mot_4} = \frac{1}{\tau_{12}} \dot{\theta}_m \quad (5.12)$$

Si esprimono ora le grandezze cinematiche (posizione, velocità del baricentro e velocità angolare) del corpo rigido  $h$ , ossia dell'albero sul quale è calettato il settore dentato 6:

$$\begin{cases} P_{hx} = r \\ P_{hz} = p_{z'} \end{cases} \quad \begin{cases} v_{hx} = 0 \\ v_{hz} = \dot{p}_{z'} \end{cases} \quad v_h^2 = \dot{p}_{z'}^2, \quad (5.13)$$

$$\omega_h = \dot{\theta}_{1i} \quad (5.14)$$

Infine, per definire completamente l'energia cinetica relativa alla trasmissione, si calcolano le grandezze cinematiche del corpo rigido  $v$ :

$$\begin{cases} P_{vix} = r + v \cos(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) \\ P_{viz} = p_{z'} + v \sin(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) \end{cases} \quad \begin{cases} v_{vix} = -v \sin(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) \dot{\theta}_{1i} \\ v_{viz} = \dot{p}_{z'} + v \cos(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) \dot{\theta}_{1i} \end{cases} \quad (5.15)$$

$$v_v^2 = v^2 \dot{\theta}_{1i}^2 + \dot{p}_{z'}^2 + 2\dot{p}_{z'} v \cos(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) \dot{\theta}_{1i} \quad (5.16)$$

$$\omega_{v_i} = \dot{\theta}_{1i} \quad (5.17)$$

### 5.1.3 Energia potenziale $U$

L'energia potenziale relativa all'interfaccia aptica è definita dal contributo dei seguenti termini:

- $U_r$  = energia potenziale della base mediana;
- $U_c$  = energia potenziale dell'end-effector;
- $U_{mtot}$  = energia potenziale di tutte le manovelle del meccanismo inferiore;
- $U_{ntot}$  = energia potenziale di tutte le bielle del meccanismo inferiore;
- $U_{tr}$  = energia potenziale dei vari componenti della trasmissione;
- $U_{ai}$  = energia potenziale del singolo link  $a_i$  della struttura *Delta*;

- $U_{bi}$  = energia potenziale della coppia di aste  $b_i$  della struttura *Delta*.

$$U = U_r + U_c + U_{mtot} + U_{ntot} + U_{tr} + \sum_{i=1}^3 (U_{ai} + U_{bi}) \quad (5.18)$$

I vari termini che compongono l'energia potenziale  $U$  sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} U_r &= m_r g p_{z'} \\ U_c &= m_c g (p_z + p_{z'}) \\ U_{mtot} &= 3m_m g \left( d - \frac{m}{2} \cos \theta_m \right) \\ U_{ntot} &= 3 \frac{m_n}{2} g (d - m \cos \theta_m + p_{z'}) \\ U_{ai} &= m_a g \left( p_{z'} + \frac{a}{2} \sin \theta_{1i} \right) \\ U_{bi} &= \frac{m_b}{2} g (p_{z'} + a \sin \theta_{1i}) + \frac{m_b}{2} g (p_{z'} + p_z) \end{aligned} \quad (5.19)$$

### Energia potenziale della trasmissione

L'unico contributo all'energia potenziale da parte della trasmissione, è dato dalle pulegge ed ingranaggi dedicati all'attuazione della struttura superiore *Delta*, in quanto sono posizionati sulle aste del manovellismo inferiore (vedi par. 3.3); gli organi di trasmissione relativi alla movimentazione della base mediana sono tutti posizionati a terra. L'energia potenziale della trasmissione è quindi definita come:

$$U_{tr} = 3 (m_{ing} g P_{ingz} + m_h g P_{hz}) + \sum_{i=1}^3 (m_v g P_{v_i z}) \quad (5.20)$$

dove le variabili  $P$  definiscono la posizione verticale di ogni componente. Esplicitando le posizioni dei baricentri, attraverso le relazioni definite nel paragrafo 5.1.2 (nella sezione "Energia cinetica della trasmissione"), si ottiene:

$$U_{tr} = 3 [m_{ing} g (d - m \cos \theta_m) + m_h g p_{z'}] + \sum_{i=1}^3 \{ m_v g [p_{z'} + v \sin(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0})] \} \quad (5.21)$$

### 5.1.4 Calcolo delle derivate della funzione Lagrangiana

In questo paragrafo si definiscono tutti i termini relativi alla funzione Lagrangiana, necessari alla risoluzione del gruppo di equazioni (5.1); in particolare, si ricavano le derivate dell'energia cinetica  $K$  e dell'energia potenziale  $U$  rispetto a tutte le coordinate libere  $q_j$  (con  $j = 1, \dots, 8$ ).

#### Derivate per il primo gruppo di equazioni

Le derivate delle componenti della funzione Lagrangiana, rispetto alle quattro coordinate  $[p_x \ p_y \ p_z \ p_{z'}]$ , sono le seguenti:

$$\begin{array}{lll}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial K_r}{\partial \dot{p}_x} = 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_r}{\partial \dot{p}_y} = 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_r}{\partial \dot{p}_z} = 0 \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial K_c}{\partial \dot{p}_x} = m_c \ddot{p}_x & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_c}{\partial \dot{p}_y} = m_c \ddot{p}_y & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_c}{\partial \dot{p}_z} = m_c \ddot{p}_z + m_c \ddot{p}_{z'} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{mtot}}{\partial \dot{p}_x} = 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{mtot}}{\partial \dot{p}_y} = 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{mtot}}{\partial \dot{p}_z} = 0 \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ntot}}{\partial \dot{p}_x} = 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ntot}}{\partial \dot{p}_y} = 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ntot}}{\partial \dot{p}_z} = 0 \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ai}}{\partial \dot{p}_x} = 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ai}}{\partial \dot{p}_y} = 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ai}}{\partial \dot{p}_z} = 0 \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{bi}}{\partial \dot{p}_x} = \frac{m_b}{2} \ddot{p}_x & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{bi}}{\partial \dot{p}_y} = \frac{m_b}{2} \ddot{p}_y & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{bi}}{\partial \dot{p}_z} = \frac{m_b}{2} \ddot{p}_z + \frac{m_b}{2} \ddot{p}_{z'} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{tr}}{\partial \dot{p}_x} = 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{tr}}{\partial \dot{p}_y} = 0 & \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{tr}}{\partial \dot{p}_z} = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial K_r}{\partial \dot{p}_{z'}} = m_r \ddot{p}_{z'} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial K_c}{\partial \dot{p}_{z'}} = m_c \ddot{p}_z + m_c \ddot{p}_{z'} \\
 \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{mtot}}{\partial \dot{p}_{z'}} = 0
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K_{ntot}}{\partial \dot{p}_{z'}} &= \frac{3}{2} m_n \ddot{p}_{z'} \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ai}}{\partial \dot{p}_{z'}} &= m_a \ddot{p}_{z'} + \frac{a}{2} m_a \ddot{\theta}_{1i} \cos \theta_{1i} - \frac{a}{2} m_a \dot{\theta}_{1i}^2 \sin \theta_{1i} \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{bi}}{\partial \dot{p}_{z'}} &= \frac{m_b}{2} \ddot{p}_z + \frac{m_b}{2} \ddot{p}_{z'} + \frac{m_b}{2} \ddot{p}_{z'} + \frac{m_b}{2} \ddot{\theta}_{1i} a \cos \theta_{1i} - \frac{m_b}{2} \dot{\theta}_{1i}^2 a \sin \theta_{1i} \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{tr}}{\partial \dot{p}_{z'}} &= 3m_h \ddot{p}_{z'} + \sum_{i=1}^3 m_v \left( \ddot{p}_{z'} + v \ddot{\theta}_{1i} \cos(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) - v \dot{\theta}_{1i}^2 \sin(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) \right)
\end{aligned}$$

Le derivate dell'energia cinetica, rispetto alle variabili  $q_j$ , sono tutte nulle in quanto  $K$  è solamente funzione della velocità delle coordinate libere.

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = 0 \quad \text{per } j = 1, 2, 3, 4. \quad (5.22)$$

Sapendo che  $\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$  per  $j = 1, 2, 3, 4$ , si esprime solamente la derivata  $\frac{\partial U}{\partial q_j}$ :

$$\begin{array}{cccc}
\frac{\partial U_r}{\partial p_x} = 0 & \frac{\partial U_r}{\partial p_y} = 0 & \frac{\partial U_r}{\partial p_z} = 0 & \frac{\partial U_r}{\partial p_{z'}} = m_r g \\
\frac{\partial U_c}{\partial p_x} = 0 & \frac{\partial U_c}{\partial p_y} = 0 & \frac{\partial U_c}{\partial p_z} = m_c g & \frac{\partial U_c}{\partial p_{z'}} = m_c g \\
\frac{\partial U_r}{\partial p_x} = 0 & \frac{\partial U_r}{\partial p_y} = 0 & \frac{\partial U_r}{\partial p_z} = 0 & \frac{\partial U_r}{\partial p_{z'}} = 0 \\
\frac{\partial U_{mtot}}{\partial p_x} = 0 & \frac{\partial U_{mtot}}{\partial p_y} = 0 & \frac{\partial U_{mtot}}{\partial p_z} = 0 & \frac{\partial U_{mtot}}{\partial p_{z'}} = 0 \\
\frac{\partial U_{ntot}}{\partial p_x} = 0 & \frac{\partial U_{ntot}}{\partial p_y} = 0 & \frac{\partial U_{ntot}}{\partial p_z} = 0 & \frac{\partial U_{ntot}}{\partial p_{z'}} = 3 \frac{m_n}{2} g \\
\frac{\partial U_{ai}}{\partial p_x} = 0 & \frac{\partial U_{ai}}{\partial p_y} = 0 & \frac{\partial U_{ai}}{\partial p_z} = 0 & \frac{\partial U_{ai}}{\partial p_{z'}} = m_a g \\
\frac{\partial U_{bi}}{\partial p_x} = 0 & \frac{\partial U_{bi}}{\partial p_y} = 0 & \frac{\partial U_{bi}}{\partial p_z} = \frac{m_b}{2} g & \frac{\partial U_{bi}}{\partial p_{z'}} = m_b g \\
\frac{\partial U_{tr}}{\partial p_x} = 0 & \frac{\partial U_{tr}}{\partial p_y} = 0 & \frac{\partial U_{tr}}{\partial p_z} = 0 & \frac{\partial U_{tr}}{\partial p_{z'}} = 3(m_h + m_v)g
\end{array}$$

### Calcolo derivate per il secondo gruppo di equazioni

Le derivate delle componenti della funzione Lagrangiana, rispetto alle quattro coordinate  $[\theta_{11} \ \theta_{12} \ \theta_{13} \ \theta_m]$ , sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_r}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= 0 & i = 1, 2, 3 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_c}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= 0 & i = 1, 2, 3 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{mtot}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= 0 & i = 1, 2, 3 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ntot}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= 0 & i = 1, 2, 3 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ai}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= J_{aa} \ddot{\theta}_{1i} + \frac{m_a}{2} a \ddot{p}_{z'} \cos \theta_{1i} - \frac{m_a}{2} a \dot{p}_{z'} \dot{\theta}_{1i} \sin \theta_{1i} + m_a \frac{a^2}{4} \ddot{\theta}_{1i} & i = 1, 2, 3 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{bi}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= m_b \frac{a^2}{2} \ddot{\theta}_{1i} + \frac{m_b}{2} a \ddot{p}_{z'} \cos \theta_{1i} - \frac{m_b}{2} a \dot{p}_{z'} \dot{\theta}_{1i} \sin \theta_{1i} & i = 1, 2, 3 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{tr}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= m_v \left( v^2 \ddot{\theta}_{1i} + v \ddot{p}_{z'} \cos(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) - v \dot{p}_{z'} \dot{\theta}_{1i} \sin(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) \right) + \\
&\quad + J_h \ddot{\theta}_{1i} + J_v \dot{\theta}_{1i} + J_{ing} \ddot{\theta}_{ingi} \frac{\partial \dot{\theta}_{ingi}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} + J_{ing} \dot{\theta}_{ingi} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\theta}_{ingi}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} + \\
&\quad + J_{moti} \ddot{\theta}_{moti} \frac{\partial \dot{\theta}_{moti}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} + J_{moti} \dot{\theta}_{moti} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\theta}_{moti}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} & i = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_r}{\partial \dot{\theta}_m} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_c}{\partial \dot{\theta}_m} &= 0 \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{mtot}}{\partial \dot{\theta}_m} &= 3 J_{mm} \ddot{\theta}_m \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ntot}}{\partial \dot{\theta}_m} &= 3 \frac{m_n}{2} m^2 \ddot{\theta}_m \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial K_{ai}}{\partial \dot{\theta}_m} &= 0
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{bi}}{\partial \dot{\theta}_m} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial K_{tr}}{\partial \dot{\theta}_m} &= 3m_{ing} m^2 \ddot{\theta}_m + J_{pul} \ddot{\theta}_m + \sum_{i=1}^3 \left( J_{ing} \ddot{\theta}_{ing_i} \frac{\partial \dot{\theta}_{ing_i}}{\partial \dot{\theta}_m} + J_{ing} \dot{\theta}_{ing_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\theta}_{ing_i}}{\partial \dot{\theta}_m} \right) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^4 J_{mot_i} \ddot{\theta}_{mot_i} \frac{\partial \dot{\theta}_{mot_i}}{\partial \dot{\theta}_m} + J_{mot_i} \dot{\theta}_{mot_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\theta}_{mot_i}}{\partial \dot{\theta}_m} + J_{stadio} \frac{\dot{\theta}_m^2}{\tau_{12}} \end{aligned}$$

dove<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{ing_i} &= \ddot{\theta}_{1i} \frac{1}{\tau_{56}} + \left\{ \frac{m \ddot{\theta}_m \cos \theta_m - m \dot{\theta}_m^2 \sin \theta_m}{[n \sin [\arccos (\frac{1}{n}(l-r-m \sin \theta_m))]]} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{n \cos [\arccos (\frac{1}{n}(l-r-m \sin \theta_m))] \left( \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{1}{n}(l-r-m \sin \theta_m))^2}} \right)}{[n \sin [\arccos (\frac{1}{n}(l-r-m \sin \theta_m))]]^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( -\frac{m}{n} \cos \theta_m \dot{\theta}_m \right) m \dot{\theta}_m \cos \theta_m \right\} \left( 1 + \frac{1}{\tau_{56}} \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\ddot{\theta}_{mot_i} = \ddot{\theta}_{ing_i} \frac{1}{\tau_{34}} + \ddot{\theta}_m \left( 1 - \frac{1}{\tau_{34}} \right) \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \quad (5.24)$$

$$\ddot{\theta}_{mot_4} = \ddot{\theta}_m \frac{1}{\tau_{12}} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\theta}_{ing_i}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= \frac{1}{\tau_{56}} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\theta}_{ing_i}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= 0 \\ \frac{\partial \dot{\theta}_{mot_i}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= \frac{1}{\tau_{34} \tau_{56}} \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \dot{\theta}_{mot_4}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\theta}_{mot_i}}{\partial \dot{\theta}_{1i}} &= 0 \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Tutti i rapporti di trasmissione sono stati definiti nel par.3.3.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\theta}_{ing_i}}{\partial \dot{\theta}_m} &= \frac{m \cos \theta_m}{n \sin \left[ \arccos \left( \frac{1}{n} (l - r - m \sin \theta_m) \right) \right]} \left( 1 + \frac{1}{\tau_{56}} \right) \\ \frac{\partial \dot{\theta}_{mot_i}}{\partial \dot{\theta}_m} &= \left( 1 - \frac{1}{\tau_{34}} + \frac{1}{\tau_{34}} \frac{\partial \dot{\theta}_{ing_i}}{\partial \dot{\theta}_m} \right) \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \dot{\theta}_{mot_4}}{\partial \dot{\theta}_m} &= \frac{1}{\tau_{12}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\theta}_{ing_i}}{\partial \dot{\theta}_m} &= \left\{ \frac{-m \dot{\theta}_m \sin \theta_m}{\left[ n \sin \left[ \arccos \left( \frac{1}{n} (l - r - m \sin \theta_m) \right) \right] \right]} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{n \cos \left[ \arccos \left( \frac{1}{n} (l - r - m \sin \theta_m) \right) \right] \left( \frac{-1}{\sqrt{1 - \left( \frac{1}{n} (l - r - m \sin \theta_m) \right)^2}} \right)}{\left[ n \sin \left[ \arccos \left( \frac{1}{n} (l - r - m \sin \theta_m) \right) \right] \right]^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( -\frac{m}{n} \cos \theta_m \dot{\theta}_m \right) m \cos \theta_m \right\} \left( 1 + \frac{1}{\tau_{56}} \right) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\theta}_{mot_i}}{\partial \dot{\theta}_m} &= \frac{1}{\tau_{34}} \frac{d}{dt} \frac{\partial \dot{\theta}_{ing_i}}{\partial \dot{\theta}_m}\end{aligned}$$

A differenza delle componenti (5.22), le derivate di  $K$  rispetto alle coordinate dei giunti non sono tutte nulle:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial K_r}{\partial \theta_{1i}} = 0 & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial K_r}{\partial \theta_m} = 0 \\ \frac{\partial K_c}{\partial \theta_{1i}} = 0 & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial K_c}{\partial \theta_m} = 0 \\ \frac{\partial K_{mtot}}{\partial \theta_{1i}} = 0 & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial K_{mtot}}{\partial \theta_m} = 0 \\ \frac{\partial K_{ntot}}{\partial \theta_{1i}} = 0 & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial K_{ntot}}{\partial \theta_m} = 0 \\ \frac{\partial K_{ai}}{\partial \theta_{1i}} = -\frac{m_a}{2} a \dot{p}_{z'} \dot{\theta}_{1i} \sin \theta_{1i} & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial K_{ai}}{\partial \theta_m} = 0 \\ \frac{\partial K_{bi}}{\partial \theta_{1i}} = -\frac{m_b}{2} a \dot{p}_{z'} \dot{\theta}_{1i} \sin \theta_{1i} & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial K_{bi}}{\partial \theta_m} = 0 \end{array}$$

I contributi della trasmissione sono:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_{tr}}{\partial \theta_{1i}} &= -m_v v \sin \dot{p}_z \dot{\theta}_{1i} \sin(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial K_{tr}}{\partial \theta_m} &= \sum_{i=1}^3 J_{ingi} \dot{\theta}_{ingi} \frac{\partial \dot{\theta}_{ingi}}{\partial \theta_m} + \sum_{i=1}^4 J_{moti} \dot{\theta}_{moti} \frac{\partial \dot{\theta}_{moti}}{\partial \theta_m}\end{aligned}$$

dove:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\theta}_{ingi}}{\partial \theta_m} &= \left\{ \frac{-m \dot{\theta}_m \sin \theta_m}{[n \sin [\arccos (\frac{1}{n}(l-r-m \sin \theta_m))]]} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{n \cos [\arccos (\frac{1}{n}(l-r-m \sin \theta_m))] \left( \frac{-1}{\sqrt{1-(\frac{1}{n}(l-r-m \sin \theta_m))^2}} \right)}{[n \sin [\arccos (\frac{1}{n}(l-r-m \sin \theta_m))]]^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( -\frac{m}{n} \cos \theta_m \dot{\theta}_m \right) m \dot{\theta}_m \cos \theta_m \right\} \left( 1 + \frac{1}{\tau_{56}} \right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}_{moti}}{\partial \theta_m} = \frac{1}{\tau_{34}} \frac{\partial \dot{\theta}_{ingi}}{\partial \theta_m} \quad \text{per } i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial \dot{\theta}_{mot4}}{\partial \theta_m} = 0$$

Infine, si riportano le relazioni relative alle derivate dell'energia potenziale rispetto alle coordinate dei giunti  $[\theta_{11} \ \theta_{12} \ \theta_{13} \ \theta_m]$ . Sapendo che  $\frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$  per  $j = 5, 6, 7, 8$ , si esprime solamente la derivata  $\frac{\partial U}{\partial q_j}$ :

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial V_r}{\partial \theta_{1i}} = 0 & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial V_r}{\partial \theta_m} = 0 \\ \frac{\partial V_c}{\partial \theta_{1i}} = 0 & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial V_c}{\partial \theta_m} = 0 \\ \frac{\partial V_{mtot}}{\partial \theta_{1i}} = 0 & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial V_{mtot}}{\partial \theta_m} = 3 m_m g \frac{m}{2} \sin \theta_m \\ \frac{\partial V_{ntot}}{\partial \theta_{1i}} = 0 & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial V_{ntot}}{\partial \theta_m} = 3 \frac{m_n}{2} g m \sin \theta_m \\ \frac{\partial V_{ai}}{\partial \theta_{1i}} = m_a g \frac{a}{2} \cos \theta_{1i} & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial V_{ai}}{\partial \theta_m} = 0 \\ \frac{\partial V_{bi}}{\partial \theta_{1i}} = \frac{m_b}{2} g a \cos \theta_{1i} & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial V_{bi}}{\partial \theta_m} = 0 \\ \frac{\partial V_{tr}}{\partial \theta_{1i}} = m_v g v \cos(\theta_{1i} - \theta_{1i0} - \theta_{v0}) & i = 1, 2, 3 & \frac{\partial V_{tr}}{\partial \theta_m} = 3 m_{ing} g m \sin \theta_m \end{array}$$

### 5.1.5 Derivate delle funzioni di vincolo

In questo paragrafo si ricavano le derivate delle quattro funzioni di vincolo (5.4) e (5.5) rispetto a tutte le coordinate libere  $q_j$  dell'interfaccia aptica.

#### Derivate per il primo gruppo di equazioni

Le derivate delle funzioni di vincolo rispetto alle coordinate  $[p_x \ p_y \ p_z \ p_{z'}]$  sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial p_x} &= 2(p_x + (c - r) \cos \phi_i - a \cos \theta_{1i} \cos \phi_i) & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_x} &= 0 \\ \frac{\partial \Gamma_i}{\partial p_y} &= 2(p_y + (c - r) \sin \phi_i - a \cos \theta_{1i} \sin \phi_i) & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_y} &= 0 \\ \frac{\partial \Gamma_i}{\partial p_z} &= 2(p_z - a \sin \theta_{1i}) & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_z} &= 0 \\ \frac{\partial \Gamma_i}{\partial p_{z'}} &= 0 & i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_{z'}} &= 2(p_{z'} - d + m \cos \theta_m) \end{aligned}$$

#### Derivate per il secondo gruppo di equazioni

Le derivate delle funzioni di vincolo rispetto alle coordinate dei giunti  $[\theta_{11} \ \theta_{12} \ \theta_{13} \ \theta_m]$  sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_i}{\partial \theta_{1i}} &= 2(p_x + (c - r) \cos \phi_i - a \cos \theta_{1i} \cos \phi_i) a \sin \theta_{1i} \cos \phi_i + \\ &\quad + 2(p_y + (c - r) \sin \phi_i - a \cos \theta_{1i} \sin \phi_i) a \sin \theta_{1i} \sin \phi_i - 2(p_z - a \sin \theta_{1i}) a \cos \theta_{1i} \\ &= 2(p_x + (c - r) \cos \phi_i) a \sin \theta_{1i} \cos \phi_i + 2(p_y + (c - r) \sin \phi_i) a \sin \theta_{1i} \sin \phi_i + \\ &\quad - 2 p_z a \cos \theta_{1i} & i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma_i}{\partial \theta_{1j}} &= 0 & i \neq j \ (i = 1, 2, 3) \ (j = 1, 2, 3) \\
\frac{\partial \Gamma_i}{\partial \theta_m} &= 0 & i = 1, 2, 3 \\
\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \theta_{1i}} &= 0 & i = 1, 2, 3 \\
\frac{\partial \Gamma_4}{\partial \theta_m} &= -2((l-r) - m \sin \theta_m) m \cos \theta_m - 2(p_{z'} - (d - m \cos \theta_m)) m \sin \theta_m \\
&= -2(l-r)m \cos \theta_m - 2(p_{z'} - d) m \sin \theta_m
\end{aligned}$$

### 5.1.6 Modello dinamico

Note a questo punto la funzione Lagrangiana, le funzioni di vincolo e le relative derivate rispetto alle coordinate libere del sistema, è possibile procedere con la risoluzione dei sistemi di equazioni (5.2) e (5.3).

Si considera il primo gruppo di equazioni dinamiche in forma Lagrangiana, dal quale si ricavano i moltiplicatori  $\lambda_i$  (con  $i = 1, 2, 3, 4$ ):

$$\begin{cases}
\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial p_x} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_x} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial p_x} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_x} - f_x \\
\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial p_y} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_y} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial p_y} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_y} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_y} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_y} - f_y \\
\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial p_z} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_z} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial p_z} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_z} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_z} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_z} - f_z \\
\lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial p_{z'}} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_{z'}} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial p_{z'}} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_{z'}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_{z'}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_{z'}} - f_{z'}
\end{cases} \quad (5.26)$$

Questo sistema può essere scritto in forma matriciale come:

$$[H][\lambda] = [F] \quad (5.27)$$

dove

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial p_x} & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_x} & \frac{\partial \Gamma_3}{\partial p_x} & \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_x} \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial p_y} & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_y} & \frac{\partial \Gamma_3}{\partial p_y} & \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_y} \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial p_z} & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_z} & \frac{\partial \Gamma_3}{\partial p_z} & \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_z} \\ \frac{\partial \Gamma_1}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial \Gamma_3}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial \Gamma_4}{\partial p_{z'}} \end{bmatrix} \quad [\lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \quad [F] = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_x} - f_x \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_y} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_y} - f_y \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_z} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_z} - f_z \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_{z'}} \right) - \frac{\partial L}{\partial p_{z'}} - f_{z'} \end{bmatrix}$$

Dato che le matrici  $H$  ed  $F$  contengono solamente termini noti, è possibile ricavare i moltiplicatori di Lagrange come:

$$[\lambda] = [H]^{-1}[F] \quad (5.28)$$

Noti a questo punto anche i coefficienti  $\lambda_i$  (con  $i = 1, 2, 3, 4$ ), è possibile sostituirli nel secondo gruppo di equazioni (5.3) per ricavare le coppie ai giunti:

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{11}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{11}} - \left( \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_{11}} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_{11}} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_{11}} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \theta_{11}} \right) \\ Q_2 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{12}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{12}} - \left( \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_{12}} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_{12}} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_{12}} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \theta_{12}} \right) \\ Q_3 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_{13}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_{13}} - \left( \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_{13}} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_{13}} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_{13}} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \theta_{13}} \right) \\ Q_4 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_m} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_m} - \left( \lambda_1 \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \theta_m} + \lambda_2 \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \theta_m} + \lambda_3 \frac{\partial \Gamma_3}{\partial \theta_m} + \lambda_4 \frac{\partial \Gamma_4}{\partial \theta_m} \right) \end{cases} \quad (5.29)$$

Attraverso le equazioni di Lagrange si è ricavato il vettore  $Q_g = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4]^T$  contenente le coppie da applicare ai giunti dell'interfaccia aptica; ovviamente queste, a causa della trasmissione meccanica, sono differenti dalle coppie richieste ai motori  $Q_{mi}$  (con  $i = 1, 2, 3, 4$ ). Quest'ultime possono essere ricavate sfruttando il principio dei lavori virtuali: si ricava la componente Lagrangiana relativa alle coppie  $Q_{mi}$  e la si eguaglia alle coppie ai giunti  $Q_g$  ricavate attraverso il sistema(5.29).

Si procede ora con la scrittura dei lavori virtuali delle coppie  $Q_g$  associate agli spostamenti virtuali  $\delta^* \theta_{1i}$  e  $\delta^* \theta_m$ :

$$\delta^* \mathcal{L} = Q_1 \delta^* \theta_{11} + Q_2 \delta^* \theta_{12} + Q_3 \delta^* \theta_{13} + Q_4 \delta^* \theta_m \quad (5.30)$$

$$Q_g = \frac{\delta^* \mathcal{L}}{\delta^* q_j} \quad \text{per} \quad i = 5, 6, 7, 8.$$

Nello stesso modo, è possibile scrivere i lavori virtuali delle coppie motrici  $Q_{mi}$  associate agli spostamenti virtuali  $\delta^* \theta_{moti}$ :

$$\delta^* \mathcal{L} = Q_{m1} \delta^* \theta_{mot1} + Q_{m2} \delta^* \theta_{mot2} + Q_{m3} \delta^* \theta_{mot3} + Q_{m4} \delta^* \theta_{mot4} \quad (5.31)$$

$$Q_g = \frac{\delta^* \mathcal{L}}{\delta^* q_j} \quad \text{per} \quad i = 5, 6, 7, 8$$

Uguagliando i lavori virtuali si ottiene:

$$Q_g = \begin{bmatrix} Q_{m1} \frac{\delta^* \theta_{mot1}}{\delta^* \theta_{11}} + Q_{m2} \frac{\delta^* \theta_{mot2}}{\delta^* \theta_{11}} + Q_{m3} \frac{\delta^* \theta_{mot3}}{\delta^* \theta_{11}} + Q_{m4} \frac{\delta^* \theta_{mot4}}{\delta^* \theta_{11}} \\ Q_{m1} \frac{\delta^* \theta_{mot1}}{\delta^* \theta_{12}} + Q_{m2} \frac{\delta^* \theta_{mot2}}{\delta^* \theta_{12}} + Q_{m3} \frac{\delta^* \theta_{mot3}}{\delta^* \theta_{12}} + Q_{m4} \frac{\delta^* \theta_{mot4}}{\delta^* \theta_{12}} \\ Q_{m1} \frac{\delta^* \theta_{mot1}}{\delta^* \theta_{13}} + Q_{m2} \frac{\delta^* \theta_{mot2}}{\delta^* \theta_{13}} + Q_{m3} \frac{\delta^* \theta_{mot3}}{\delta^* \theta_{13}} + Q_{m4} \frac{\delta^* \theta_{mot4}}{\delta^* \theta_{13}} \\ Q_{m1} \frac{\delta^* \theta_{mot1}}{\delta^* \theta_m} + Q_{m2} \frac{\delta^* \theta_{mot2}}{\delta^* \theta_m} + Q_{m3} \frac{\delta^* \theta_{mot3}}{\delta^* \theta_m} + Q_{m4} \frac{\delta^* \theta_{mot4}}{\delta^* \theta_m} \end{bmatrix} \quad (5.32)$$

dove i rapporti  $\frac{\delta^* \theta_{moti}}{\delta^* \theta_{1i}}$  si ricavano dalle relazioni delle trasmissioni definite nel paragrafo 3.3:

$$\frac{\delta^* \theta_{moti}}{\delta^* \theta_{1i}} = \frac{1}{\tau_{34} \tau_{56}} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\delta^* \theta_{moti}}{\delta^* \theta_{1j}} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j$$

$$\frac{\delta^* \theta_{mot4}}{\delta^* \theta_{1i}} = 0 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\delta^* \theta_{moti}}{\delta^* \theta_m} = \left(1 - \frac{1}{\tau_{34}}\right) + \frac{1}{\tau_{34}} \left( \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}(l - r - m \sin \theta_m)\right)^2}} \right) \left(1 + \frac{1}{\tau_{56}}\right) \left(-\frac{m}{n} \cos \theta_m\right)$$

$$\frac{\delta^* \theta_{mot4}}{\delta^* \theta_m} = \frac{1}{\tau_{12}}$$

Le coppie richieste ai motori sono quindi definite dalle seguenti relazioni:

$$Q_{m1} = \frac{Q_1}{\frac{\delta^*\theta_{mot1}}{\delta^*\theta_{11}}} \quad (5.33)$$

$$Q_{m2} = \frac{Q_2}{\frac{\delta^*\theta_{mot2}}{\delta^*\theta_{12}}} \quad (5.34)$$

$$Q_{m3} = \frac{Q_3}{\frac{\delta^*\theta_{mot3}}{\delta^*\theta_{13}}} \quad (5.35)$$

$$Q_{m4} = \frac{Q_4 - Q_{m1} \frac{\delta^*\theta_{mot1}}{\delta^*\theta_m} - Q_{m2} \frac{\delta^*\theta_{mot2}}{\delta^*\theta_m} - Q_{m3} \frac{\delta^*\theta_{mot3}}{\delta^*\theta_m}}{\frac{\delta^*\theta_{mot4}}{\delta^*\theta_m}} \quad (5.36)$$

Il legame tra le coppie ai giunti e le coppie ai motori può essere espresso attraverso la matrice di trasformazione  $T$  così definita:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\delta^*\theta_{mot1}}{\delta^*\theta_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta^*\theta_{mot2}}{\delta^*\theta_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta^*\theta_{mot3}}{\delta^*\theta_{13}} & 0 \\ \frac{\delta^*\theta_{mot1}}{\delta^*\theta_m} & \frac{\delta^*\theta_{mot2}}{\delta^*\theta_m} & \frac{\delta^*\theta_{mot3}}{\delta^*\theta_m} & \frac{\delta^*\theta_{mot4}}{\delta^*\theta_m} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

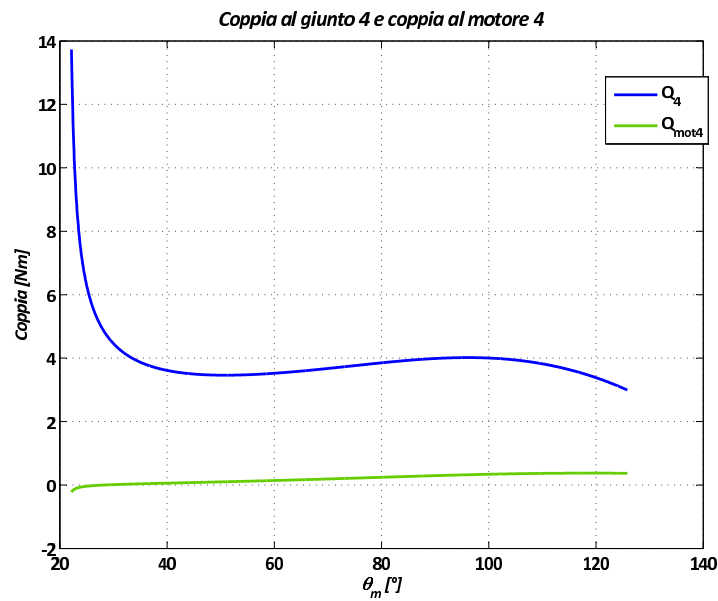
Come si nota dalla relazione (5.33) e sue successive, la coppia richiesta al quarto motore differisce in modo inequivocabile dalla coppia di giunto  $Q_4$  ricavata attraverso le equazioni (5.29). Infatti, a causa della configurazione della trasmissione, che ha permesso di posizionare i motori della struttura *Delta* a terra, il motore 4 non risente soltanto della dinamica della base mediana ma, subisce anche l'influenza dalle coppie esercitate dagli altri giunti.

Le curve riportate in Figura 5.3 sono relative alle coppie statiche richieste al giunto (curva blu) ed al motore (curva rossa) in funzione della posizione del quarto giunto, ossia della base mediana<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>Le due curve sono state ricavate considerando fissa la configurazione della struttura *Delta* ( $\theta_{1i} = 50^\circ$  per  $i = 1, 2, 3$ ) e calcolando le coppie statiche in un intervallo di angolo  $\theta_m$  compreso tra  $\theta_{m,min} = 21.62^\circ$  e  $\theta_{m,max} = 125.8^\circ$  (punto morto inferiore e punto morto superiore della base mediana).





**Figura 5.3:** Confronto tra la coppia al giunto  $Q_4$  e la coppia motrice  $Q_{mot4}$ .

Confrontando i valori della coppia statica richiesta al motore 4 ed il valore della coppia nominale riportata sul catalogo del motore (vedi Tabella 2.2 pag. 41), si nota che esiste un buon margine tra le due coppie; tale margine può essere sfruttato per sopperire alle richieste dinamiche dell'interfaccia aptica.

I valori utilizzati per risolvere l'analisi dinamica dell'interfaccia sono riportati nella Tabella A.1.



# CAPITOLO 6

## DINAMICA DIRETTA

In questo capitolo si propone la risoluzione del problema dinamico diretto dell'interfaccia aptica, ossia si definiscono le relazioni che permettono di ricavare la posizione dell'end-effector note le coppie applicate ai motori (giunti) e le forze esterne applicate alla struttura. Questo modello dinamico verrà utilizzato soltanto in una prima fase di test del sistema di controllo sviluppato; successivamente verrà sostituito da un modello multibody creato in ADAMS (modello più accurato) in modo da realizzare una co-simulazione Simulink-ADAMS.

### 6.1 Metodi di risoluzione della dinamica diretta

In letteratura<sup>1</sup> esistono principalmente due metodi per la risoluzione delle equazioni di moto di un sistema multibody vincolato:

- Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + [C_q]^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Q} \quad (6.1)$$

- Metodo implicito

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right)^T - \left( \frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{q}_i} \right)^T = \mathbf{Q}_i \quad (6.2)$$

---

<sup>1</sup>[24].

Il primo metodo definisce un modello dinamico basato su un set di coordinate ridondanti  $\dot{\mathbf{q}}$ , ossia considera le coordinate nello spazio di lavoro e le coordinate nello spazio dei giunti; inoltre il comportamento dinamico del manipolatore è descritto mediante un sistema di equazioni ibrido, cioè composto da equazioni algebriche (date dalla matrice delle funzioni di vincolo  $[C_q]$ , imponendo  $\boldsymbol{\lambda}^T [C_q] \delta \mathbf{q} = 0$ ) e da equazioni differenziali.

Il secondo metodo, quello implicito, prevede l'integrazione di un sistema di equazioni differenziali che descrivono la dinamica del sistema meccanico soltanto attraverso le coordinate libere indipendenti  $\mathbf{q}_i$ ; non considerando le funzioni di vincolo, questo metodo, utilizza un numero di equazioni minori rispetto al metodo dei moltiplicatori di Lagrange ed, inoltre, non compaiono funzioni algebriche.

Anche se da un punto di vista computazionale è più oneroso, si è scelto di procedere con la scrittura del modello dinamico sfruttando il metodo di risoluzione implicito; in questo modo è possibile contenere le dimensioni dei vettori e delle matrici relativi al sistema, evitando possibili problemi di inefficienza numerica che si potrebbero avere con il primo metodo (essendo il numero di equazioni maggiore anche le matrici e vettori avrebbero delle dimensioni maggiori).

## 6.2 Metodo implicito

La risoluzione del sistema di equazioni (6.13) prevede che siano note le derivate parziali dell'energia cinetica rispetto alle coordinate indipendenti e che siano altrettanto note le componenti lagrangiane delle forze applicate alla struttura. Le relazioni che descrivono l'energia cinetica del dispositivo sono già state definite nei capitoli precedenti quindi, di seguito, si riportano le relazioni che permettono di definire il vettore  $\mathbf{q}_i$  (noto il vettore  $\mathbf{q}$ ) e di determinare le componenti lagrangiane  $\mathbf{Q}_i$  delle forze.

Sfruttando le equazioni di vincolo utilizzate per la risoluzione della cinematica

diretta (vedi equazioni 3.6 e 3.17) si scrivono i vincoli cinematici del sistema multibody in forma matriciale:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

dove  $\mathbf{C}$  è il *vettore* delle  $nc$  funzioni di vincolo espresse in funzione delle  $n$  coordinate generalizzate  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{C} = [C_1(\mathbf{q}, t) \quad C_2(\mathbf{q}, t) \cdots C_{nc}(\mathbf{q}, t)]$$

Considerando uno spostamento virtuale  $\delta\mathbf{q}$  è possibile scrivere:

$$\mathbf{C}_q \delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (6.4)$$

dove  $\mathbf{C}_q$  è la *matrice* di vincolo di dimensioni  $nc \times n$  e costituita dalle derivate parziali delle  $nc$  funzioni di vincolo, rispetto alle  $n$  coordinate generalizzate  $\mathbf{q}$ .

Tra le coordinate generalizzate è possibile individuare un set di coordinate indipendenti (gradi di libertà dell'end-effector) con le quali è possibile definire le coordinate del sistema. Sia  $\mathbf{q}_d$  il set di coordinate dipendenti e  $\mathbf{q}_i$  il set di coordinate indipendenti; il vettore  $\mathbf{q}$  in forma partizionata può essere scritto come:

$$\mathbf{q} = [\mathbf{q}_d^T \quad \mathbf{q}_i^T]^T \quad (6.5)$$

La medesima scomposizione è valida per un generico spostamento virtuale  $\delta\mathbf{q}$ :

$$\delta\mathbf{q} = [\delta\mathbf{q}_d^T \quad \delta\mathbf{q}_i^T]^T \quad (6.6)$$

Sfruttando la (6.6) è possibile riscrivere la relazione (6.4) in forma partizionata, quindi esplicitando i contributi delle coordinate dipendenti e di quelle indipendenti associate rispettivamente alle matrici di vincolo  $\mathbf{C}_{q_d}$  e  $\mathbf{C}_{q_i}$ :

$$\mathbf{C}_{q_d} \delta\mathbf{q}_d + \mathbf{C}_{q_i} \delta\mathbf{q}_i = \mathbf{0} \quad (6.7)$$

Se  $\mathbf{C}_{q_d}$  è non singolare, quindi invertibile, dalla (6.7) si ricava il vettore  $\delta\mathbf{q}_d$  come:

$$\delta\mathbf{q}_d = \mathbf{C}_{di} \delta\mathbf{q}_i \quad (6.8)$$

dove

$$\mathbf{C}_{di} = -\mathbf{C}_{\mathbf{q}_d}^{-1} \mathbf{C}_{\mathbf{q}_i}. \quad (6.9)$$

Attraverso la matrice  $\mathbf{C}_{di}$  si è in grado di definire il legame tra le coordinate dipendenti e quelle indipendenti.<sup>2</sup>

A questo punto il vettore  $\delta \mathbf{q}$ , sfruttando la (6.8), può essere riscritto soltanto in funzione delle coordinate indipendenti:

$$\delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_i \\ \delta \mathbf{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_i \\ \mathbf{C}_{di} \delta \mathbf{q}_i \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{di} \delta \mathbf{q}_i \quad (6.10)$$

dove  $\mathbf{B}_{di}$  è la matrice che permette di passare dalle coordinate generalizzate a quelle indipendenti. Questa è definita come:

$$\mathbf{B}_{di} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_{di} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

con  $\mathbf{I}$  matrice identità di dimensione  $n - nc$ .

Prima di passare alla scrittura delle equazioni di moto, dev'essere definito il termine  $\mathbf{Q}_i$ ; esso è dato dalla somma della componente lagrangiana delle forze esterne  $\mathbf{Q}_{ei}$  e della componente legata alla forza gravitazionale  $\mathbf{Q}_{gi}$ :

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_{ei} + \mathbf{Q}_{gi} \quad (6.12)$$

Noti a questo punto le coordinate indipendenti ed il termine  $\mathbf{Q}_i$  è possibile procedere alla scrittura e risoluzione del sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right)^T - \left( \frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{q}_i} \right)^T = \mathbf{Q}_i. \quad (6.13)$$

---

<sup>2</sup>Si può notare un'analogia tra la relazione (6.8) e la relazione che lega le velocità nello spazio dei giunti  $\dot{\mathbf{q}}$  con le velocità nello spazio di lavoro  $\dot{\mathbf{x}}$ , descritta nei capitoli precedenti. In questo caso la matrice  $\mathbf{C}_{di}$  si comporta come la matrice Jacobiana, tanto che si nota un'analogia anche tra la (6.9) e la (4.12) ( $\mathbf{J} = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{J}_q$ ).

### 6.3 Applicazione all'interfaccia optica

La procedura descritta nel paragrafo precedente verrà ora applicata per la risoluzione della dinamica diretta dell'interfaccia optica.

(Tutte le matrici utilizzate in questo paragrafo sono esplicitate in appendice C).

#### Coordinate indipendenti

Il vettore delle coordinate generalizzate, già definito nei capitoli precedenti, è così composto:

$$\mathbf{q} = [p_x \quad p_y \quad p_z \quad p_{z'} \quad \theta_{11} \quad \theta_{12} \quad \theta_{13} \quad \theta_m]^T \quad (6.14)$$

Partizionando il vettore  $\mathbf{q}$  tra coordinate dipendenti  $\mathbf{q}_d$  e coordinate indipendenti  $\mathbf{q}_i$  si ottiene:

$$\mathbf{q}_i = [p_x \quad p_y \quad p_z \quad p_{z'}]^T \quad \mathbf{q}_d = [\theta_{11} \quad \theta_{12} \quad \theta_{13} \quad \theta_m]^T \quad (6.15)$$

quindi il vettore  $\mathbf{q}_i$  è composto dalle coordinate nello spazio di lavoro ed il vettore  $\mathbf{q}_d$  dalle coordinate nello spazio dei giunti.

Di seguito si riportano le funzioni di vincolo (già presentate nel capitolo precedente, vedi pag. 116) che andranno a comporre il vettore delle funzioni vincolari  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t)$ . Rielaborando le relazioni, si ottengono per la struttura *Delta* le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} C_i &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + a_i^2 + (r - c)^2 + 2(r - c)a \cos \theta_{1i} \\ &\quad - 2p_x[(r - c + a \cos \theta_{1i}) \cos \phi_i] - 2p_y[(r - c + a \cos \theta_{1i}) \sin \phi_i] \\ &\quad - 2p_z a \sin \theta_{1i} - b_i^2 \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (6.16)$$

mentre per il manovellismo inferiore:

$$C_4 = (r - l)(r - l + 2m \sin \theta_m) + (p_{z'} - d)(p_{z'} - d + 2m \cos \theta_m) + m^2 - n^2 \quad (6.17)$$

Differenziando il vettore delle funzioni di vincolo rispetto alle coordinate libere del sistema, identificate dal vettore  $\mathbf{q}$ , si ottiene la matrice di vincolo  $\mathbf{C}_{\mathbf{q}}$ :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial p_x} & \frac{\partial C_1}{\partial p_y} & \frac{\partial C_1}{\partial p_z} & \frac{\partial C_1}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{13}} & \frac{\partial C_1}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial C_2}{\partial p_x} & \frac{\partial C_2}{\partial p_y} & \frac{\partial C_2}{\partial p_z} & \frac{\partial C_2}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{13}} & \frac{\partial C_2}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial C_3}{\partial p_x} & \frac{\partial C_3}{\partial p_y} & \frac{\partial C_3}{\partial p_z} & \frac{\partial C_3}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{13}} & \frac{\partial C_3}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial C_4}{\partial p_x} & \frac{\partial C_4}{\partial p_y} & \frac{\partial C_4}{\partial p_z} & \frac{\partial C_4}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_{13}} & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_m} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

dalla quale è possibile estrapolare la matrice di vincolo rispetto le coordinate indipendenti  $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_i}$  e la matrice di vincolo rispetto le coordinate dipendenti  $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_d}$ :

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} [C_{qi}] & [C_{qd}] \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

Note a questo punto le matrici di vincolo, è possibile determinare la matrice  $\mathbf{B}_{\mathbf{di}}$  che permette di passare dalle coordinate generalizzate alle coordinate indipendenti; la matrice identità avrà dimensione 4 ( $n = 8$  e  $nc = 4$ ), mentre la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{di}}$  è definita attraverso la (6.9):

$$\mathbf{B}_{\mathbf{di}} = \begin{bmatrix} [I]_{4 \times 4} \\ -[C_{qd}]^{-1}[C_{qi}] \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

La matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_d}$  dev'essere invertibile per poter comporre la matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{di}}$ ; scegliendo come variabili indipendenti le coordinate nello spazio di lavoro, si ottiene una matrice  $\mathbf{C}_{\mathbf{q}_d}$  diagonale (quindi invertibile) composta soltanto dalle derivate delle funzioni di vincolo rispetto alle coordinate nello spazio dei giunti:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{q}_d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{q}_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial p_x} & \frac{\partial C_1}{\partial p_y} & \frac{\partial C_1}{\partial p_z} & 0 \\ \frac{\partial C_2}{\partial p_x} & \frac{\partial C_2}{\partial p_y} & \frac{\partial C_2}{\partial p_z} & 0 \\ \frac{\partial C_3}{\partial p_x} & \frac{\partial C_3}{\partial p_y} & \frac{\partial C_3}{\partial p_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C_4}{\partial p_{z'}} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

### Energia cinetica e sue derivate

Per quanto riguarda l'energia cinetica dell'interfaccia aptica, è possibile utilizzare le relazioni ricavate per la risoluzione della dinamica inversa. L'energia cinetica



totale è stata precedentemente definita (vedi pag. 117) come la somma dei contributi del meccanismo superiore *Delta*, del manovellismo inferiore e di tutti i componenti della trasmissione:

$$K = K_r + K_c + K_{mtot} + K_{ntot} + K_{tr} + \sum_{i=1}^3 (K_{ai} + K_{bi}) \quad (6.22)$$

Considerando la definizione generale dell'energia cinetica e sfruttando le relazioni ricavate nei precedenti paragrafi, si ottiene:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T [M] \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T [\Lambda]^T [M] [\Lambda] \dot{\mathbf{q}} = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i^T [B_{di}]^T [\Lambda]^T [M] [\Lambda] [B_{di}] \dot{\mathbf{q}}_i = \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_i^T [B_{di}]^T [\tilde{M}] [B_{di}] \dot{\mathbf{q}}_i \end{aligned} \quad (6.23)$$

dove

- $\dot{\mathbf{x}}$  sono le velocità fisiche del sistema meccanico (velocità di traslazione e velocità angolari dei vari corpi del sistema meccanico);
- $[M]$  è la matrice di massa espressa in relazione al vettore  $\dot{\mathbf{x}}$ ;
- $[\Lambda]$  è la matrice che esegue la trasformazione dalle velocità fisiche  $\dot{\mathbf{x}}$  alle velocità generalizzate  $\dot{\mathbf{q}}$ ;
- $[\tilde{M}]$  è la matrice di massa espressa nelle coordinate generalizzate del sistema ottenuta dalla relazione:  $[\tilde{M}] = [\Lambda]^T [M] [\Lambda]$ .

Sviluppando i termini dell'equazione (6.13) si ottiene:

$$\left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right)^T = [B_{di}]^T [\tilde{M}] [B_{di}] \dot{\mathbf{q}}_i \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right)^T &= [B_{di}]^T [\tilde{M}] [B_{di}] \ddot{\mathbf{q}}_i \\ &+ \left( [\dot{B}_{di}]^T [\tilde{M}] [B_{di}] + [B_{di}]^T [\dot{\tilde{M}}] [B_{di}] + [B_{di}]^T [\tilde{M}] [\dot{B}_{di}] \right) \dot{\mathbf{q}}_i \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\left( \frac{\partial E_c}{\partial \mathbf{q}_i} \right)^T = [W]^T [M] [\Lambda] [B_{di}] \dot{\mathbf{q}}_i \quad (6.26)$$

in cui si notano due nuovi termini:

- la derivata rispetto al tempo della matrice  $[B_{di}]$

$$\dot{\mathbf{B}}_{di} = \begin{bmatrix} [0]_{4 \times 4} \\ -\frac{d}{dt} ([C_{qd}]^{-1} [C_{qi}]) \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

- la matrice  $[W]$

$$[W] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} ([\Lambda][B_{di}]\dot{\mathbf{q}}_i) \quad (6.28)$$

### Componente Lagrangiana $\mathbf{Q}_i$

L'ultimo passo per poter definire in modo completo le equazioni di moto del sistema (6.13), è definire il vettore  $\mathbf{Q}_i$  delle componenti Lagrangiane delle forze esterne rispetto alle coordinate indipendenti  $\mathbf{q}_i$ .

Si procede dunque con la scrittura del lavoro virtuale secondo le coordinate generalizzate  $\mathbf{q}$  del sistema:

$$\begin{aligned} \delta^* \mathcal{L} = & F_x \delta^* p_x + F_y \delta^* p_y + F_z \delta^* p_z + F_{z'} \delta^* p_{z'} + \\ & + Q_{m1} \delta^* \theta_{mot1} + Q_{m2} \delta^* \theta_{mot2} + Q_{m3} \delta^* \theta_{mot3} + Q_{m4} \delta^* \theta_{mot4} \end{aligned} \quad (6.29)$$

dove

- $F_x, F_y, F_z, F_{z'}$  sono le forze esterne agenti sull'end-effector del *Delta*;
- $\delta^* p_x, \delta^* p_y, \delta^* p_z, \delta^* p_{z'}$  sono gli spostamenti virtuali relativi alle posizioni di end-effector e base mediana;
- $Q_{mi}$  (per  $i = 1, 2, 3, 4$ ) sono le coppie agenti sui motori;
- $\delta^* \theta_{moti}$  (per  $i = 1, 2, 3, 4$ ) sono le rotazioni virtuali degli alberi dei motori.

La componente Lagrangiana relativa alle forze esterne applicate all'interfaccia aptica è:

$$\mathbf{Q}_e = \frac{\delta^* \mathcal{L}}{\delta^* \mathbf{q}} \quad (6.30)$$

ossia, tralasciando i termini nulli:

$$\mathbf{Q}_e = \left\{ \begin{array}{l} F_x \\ F_y \\ F_z \\ F_{z'} \\ Q_{m1} \frac{\delta^* \theta_{mot1}}{\delta^* \theta_{11}} \\ Q_{m2} \frac{\delta^* \theta_{mot1}}{\delta^* \theta_{12}} \\ Q_{m3} \frac{\delta^* \theta_{mot1}}{\delta^* \theta_{13}} \\ Q_{m1} \frac{\delta^* \theta_{mot1}}{\delta^* \theta_m} + Q_{m2} \frac{\delta^* \theta_{mot2}}{\delta^* \theta_m} + Q_{m3} \frac{\delta^* \theta_{mot3}}{\delta^* \theta_m} + C_{m4} \frac{\delta^* \theta_{mot4}}{\delta^* \theta_m} \end{array} \right\}. \quad (6.31)$$

I termini relativi alle coppie motrici, che compongono il vettore  $\mathbf{Q}_e$  sono già stati ricavati per la risoluzione della dinamica inversa (vedi relazioni 5.33 e successive).

La componente Lagrangiana associata alla forza peso, si ottiene partendo dall'espressione (5.18) dell'energia potenziale  $U$ :

$$U = U_r + U_c + U_{mtot} + U_{ntot} + U_{tr} + \sum_{i=1}^3 (U_{ai} + U_{bi}) \quad (6.32)$$

La componente Lagrangiana, legata all'accelerazione gravitazionale, definita rispetto alle coordinate generalizzate del sistema, è pari a:

$$\mathbf{Q}_g = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \quad (6.33)$$

Le componenti Lagrangiane  $\mathbf{Q}_e$  e  $\mathbf{Q}_g$  sono definite rispetto alle coordinate generalizzate; per esprimerle in funzione delle coordinate indipendenti si sfrutta la matrice  $\mathbf{B}_{di}$ :

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_{ei} + \mathbf{Q}_{gi} = [B_{di}]^T (\mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_g), \quad (6.34)$$

Sostituendo i termini, ricavati fino ad ora, nella (6.13), si ottiene il sistema di equazioni differenziali che descrive la dinamica del sistema:

$$\overbrace{[B_{di}]^T [\tilde{M}] [B_{di}]}^{[m(\mathbf{q})]} \ddot{\mathbf{q}}_i + \overbrace{\left( [\dot{B}_{di}]^T [\tilde{M}] [B_{di}] + [B_{di}]^T [\dot{\tilde{M}}] [B_{di}] + [B_{di}]^T [\tilde{M}] [\dot{B}_{di}] - [W]^T [M] [\Lambda] [B_{di}] \right)}^{[c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{Q}_i \quad (6.35)$$

che in forma più compatta diviene:

$$[m(\mathbf{q})]\ddot{\mathbf{q}}_i + [c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_i)]\dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{Q}_i \quad (6.36)$$

## 6.4 Risoluzione del sistema di equazioni

Per risolvere il sistema di equazioni differenziali, si procede per integrazione numerica del medesimo sistema scritto in forma di stato. Associando al sistema di equazioni (6.36) l'identità

$$[m(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}_i = [m(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}_i \quad (6.37)$$

in modo da abbassare il grado, si ottiene il seguente sistema scritto in forma di stato:

$$\begin{cases} [m(\mathbf{q})]\ddot{\mathbf{q}}_i = -[c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_i)]\dot{\mathbf{q}}_i + \mathbf{Q}_i \\ [m(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}_i = [m(\mathbf{q})]\dot{\mathbf{q}}_i \end{cases} \quad (6.38)$$

Riscrivendo ora il sistema come:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{q}}_i = -[m(\mathbf{q})]^{-1}[c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_i)]\dot{\mathbf{q}}_i + [m(\mathbf{q})]^{-1}\mathbf{Q}_i \\ \dot{\mathbf{q}}_i = \dot{\mathbf{q}}_i \end{cases} \quad (6.39)$$

è possibile passare alla forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_i \\ \dot{\mathbf{q}}_i \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -[m(\mathbf{q})]^{-1}[c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}_i)] & [0] \\ [I] & [0] \end{bmatrix}}_{[\mathbf{A}]} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_i \\ \mathbf{q}_i \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -[m(\mathbf{q})]^{-1} \\ [0] \end{bmatrix}}_{[\mathbf{B}]} \mathbf{Q}_i \quad (6.40)$$

Definito  $\mathbf{x}$  il vettore di stato:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{p}_{z'} \\ p_x \\ p_y \\ p_z \\ p_{z'} \end{Bmatrix} \quad (6.41)$$

il sistema (6.40) può essere riscritto come un'equazione differenziale del primo ordine:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A}]\mathbf{x} + [\mathbf{B}]\mathbf{Q}_i \quad (6.42)$$

Integrando numericamente si ottiene la soluzione delle equazioni di moto.



# CAPITOLO 7

## STATO DELL'ARTE DEI CONTROLLI IN FORZA

In questo capitolo si riporta una breve descrizione delle principali strategie di controllo in forza presenti in letteratura e che permettono di gestire l'interazione tra end-effector ed ambiente di lavoro; in particolare si analizzeranno: l'active stiffness control, il controllo ibrido posizione-forza, il controllo d'impedenza ed il controllo in ammettenza. Queste tipologie di controllo sono impiegate in tutte quelle situazioni in cui, al manipolatore, non è richiesto di eseguire una data traiettoria o muoversi con una certa velocità ma, quando è l'ambiente con cui esso interagisce ad imporgli determinate condizioni sul percorso da seguire (ad esempio operazioni di contornatura ed assemblaggio). In questi casi, infatti, se fosse implementato un puro controllo di posizione per gestire l'interazione manipolatore-ambiente, sarebbe necessario costruire un modello del robot e dell'ambiente molto dettagliati (definire un modello dettagliato dell'ambiente risulta difficile).

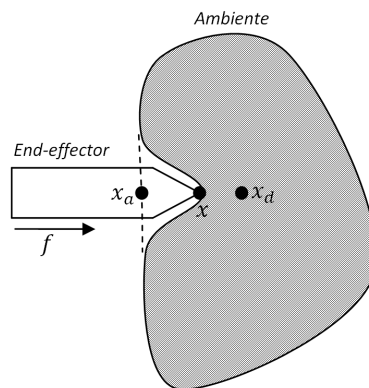
Confrontando tra loro le differenti tecniche di controllo, si vuole individuare la metodologia migliore con cui sviluppare l'algoritmo di controllo dell'interfaccia aptica, oggetto di questo lavoro di tesi.

## 7.1 Active stiffness control

I primi studi riguardo il controllo in forza dell'interazione ambiente-robot furono condotti da Spong<sup>1</sup> e da Salisbury<sup>2</sup>.

Questa strategia di controllo, utilizza un modello d'interazione puramente elastico, in cui la forza scambiata tra manipolatore ed ambiente è funzione della rigidità dell'ambiente, del manipolatore e, ovviamente, della deformazione che il manipolatore impone sull'ambiente.

Si consideri, ad esempio, lo schema riportato in Figura 7.1, dove  $x_a$  rappresenta il primo punto di contatto tra end-effector ed ambiente,  $x$  la posizione assunta dall'end-effector,  $x_d$  è la posizione desiderata,  $k_a$  la rigidità dell'ambiente e  $f$  la forza in ingresso al sistema.



**Figura 7.1:** Schema a 1 g.d.l. dell'interazione ambiente-manipolatore.

La forza  $f_a$  esercitata sull'ambiente è pari a:

$$f_a = k_a(x - x_a) \quad (7.1)$$

dove con  $(x - x_a)$  si tiene conto della deformazione dell'ambiente e del manipolatore.

---

<sup>1</sup>[10].

<sup>2</sup>[11].



La dinamica del sistema è descritta dalla seguente relazione:

$$m\ddot{x} + k_a(x - x_a) = f \quad (7.2)$$

Pensando di applicare al sistema un'azione di controllo  $f$  proporzionale-derivativa con dai guadagni  $K_p$  e  $K_d$ :

$$f = K_p(x_d - x) - K_d\dot{x} \quad (7.3)$$

si ottiene che, a regime, la forza d'interazione con l'ambiente vale:

$$f_a = \frac{K_p k_a}{K_p + k_a} (x_d - x_e)$$

Come si nota dalla relazione della  $f_a$ , il manipolatore e l'ambiente si comportano come due molle in serie. Se  $k_a$  è molto maggiore rispetto a  $K_p$  si ricava:

$$f_a = K_p(x_d - x_e) \quad (7.4)$$

quindi, per il controllo della forza d'interazione, è possibile impiegare un controllo sulla posizione.

Un discorso del tutto analogo può essere fatto per un manipolatore ad  $n$  gradi di libertà.

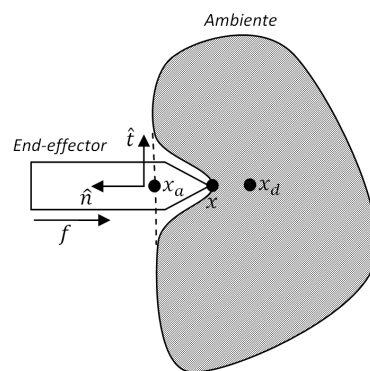
Il grosso limite di questa tipologia di controllo è che i riferimenti di posizione e di forza sono tra loro vincolati, quindi non si è in grado di seguire traiettorie di forza e di posizione tra loro indipendenti. Quando il manipolatore deve inseguire una traiettoria senza particolari vincoli imposti dall'ambiente, il setpoint desiderato è raggiunto senza ricorrere al controllo in forza (relazione 7.6); nel momento in cui vi sono dei limiti imposti dall'ambiente, si retroaziona il sistema con un controllo in forza (relazione 7.5).

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f_i) \approx K_p(x_d - x_e) \quad (7.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_i) \approx x_d \quad (7.6)$$

## 7.2 Controllo ibrido posizione-forza

Questa tipologia di controllo fu sviluppata inizialmente da Raibert<sup>3</sup> e ripresa successivamente da Chae<sup>4</sup>. L'idea di base (vedi Figura 7.2), è quella di controllare contemporaneamente il sistema sia in forza, lungo la direzione normale alla superficie di contatto, sia in posizione, lungo la direzione tangente al profilo (ortogonale alla precedente).



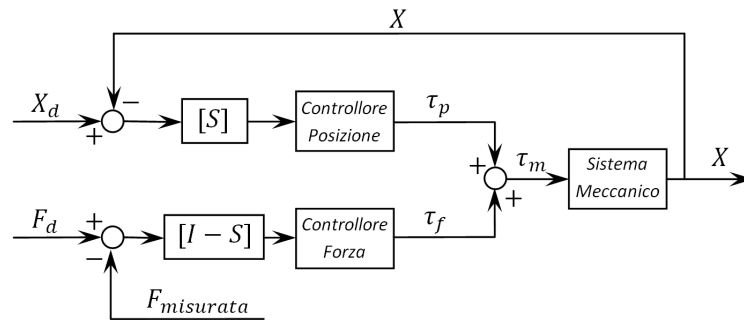
**Figura 7.2:** Schema delle direzioni di contatto manipolatore-ambiente.

Questa metodologia permette di disaccoppiare il controllo in forza da quello di posizione, richiedendo così, la progettazione di due differenti controllori. Inoltre è necessario introdurre un algoritmo che permetta di identificare le direzioni tangenziali e normali del contatto manipolatore-ambiente e selezionare il controllo da attribuire alle due direzioni. Le due azioni di controllo nello spazio di lavoro saranno sempre tra loro indipendenti.

Di seguito è riportato uno schema a blocchi relativo al controllo ibrido posizione-forza:

<sup>3</sup>[12].

<sup>4</sup>[13].



**Figura 7.3:** Schema a blocchi del controllo ibrido posizione-forza.

Come si nota dalla Figura 7.3, attraverso l'operatore  $S$  si selezionano le direzioni normale e tangenziale, quindi il controllore da utilizzare; l'azione di controllo sul sistema meccanico è data dal contributo del controllore in forza e del controllore di posizione.

Questa tipologia di controllo prevede quindi lo sviluppo di due controllori distinti, uno per il controllo della traiettoria ed uno per il controllo in forza lungo la direzione normale di contatto.

### 7.3 Controllo d'impedenza

La teoria alla base di questa strategia di controllo fu inizialmente sviluppata da Hogan<sup>5</sup> e successivamente ripresa da Lu<sup>6</sup>. Sfruttando questa tecnica di controllo è possibile definire un legame dinamico tra la forza d'interazione ambiente-manipolatore e la velocità dell'end-effector nello spazio di lavoro; in particolare, data un'impedenza desiderata, a fronte di un ingresso di velocità, si ottiene in uscita una forza di controllo. Questo approccio risulta particolarmente adatto in tutte quelle applicazioni in cui è necessaria una fedele ricostruzione dell'ambiente reale. L'interazione ambiente-manipolatore non è più modellata come un sistema

<sup>5</sup>[14].

<sup>6</sup>[15].

puramente elastico ma come un sistema massa-molla-smorzatore generalizzato: in questo modo, ad esempio, è possibile simulare in modo sufficientemente accurato le fasi di avvicinamento, di collisione e di allontanamento dell'end-effector rispetto ad un ostacolo virtuale.

L'impedenza meccanica, facendo un'analogia con l'impedenza elettrica (rapporto tra tensione e corrente), è definita come il rapporto tra la forza e la velocità dell'end-effector nello spazio di lavoro. Nel dominio di Laplace è definita come:

$$Z_d(s) = \frac{F(s)}{\dot{X}(s)} \quad \text{ovvero} \quad s Z_d(s) = \frac{F(s)}{X(s)} \quad (7.7)$$

### 7.3.1 Principali tipologie di impedenze

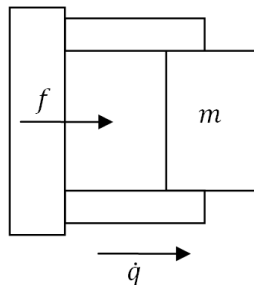
In un sistema lineare, una generica impedenza desiderata può essere espressa come:

$$Z_d(s) = -(M_d s + B_d + \frac{K_d}{s}) \quad (7.8)$$

Sempre in analogia con la teoria dei circuiti elettrici, è possibile identificare tre principali tipologie di impedenze:

- **Impedenza inerziale**

Si consideri un robot che muove un corpo di massa  $m$  con una velocità  $\dot{q}$ :



**Figura 7.4:** Schema impedenza inerziale.

In tal caso la forza d'interazione sarà definita come:

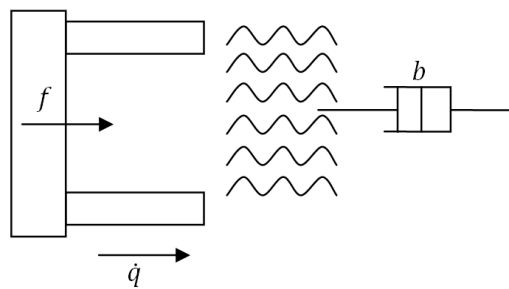
$$f = m\ddot{q} \quad \text{ovvero} \quad F_d(s) = M_d s^2 Q(s) \quad (7.9)$$

L'impedenza è di tipo inerziale se e solo se  $|Z_d(0)| = 0$ ; questo significa che l'impedenza desiderata sarà del tipo (vedi relazione 7.7):

$$Z_d(s) = M_d s$$

- **Impedenza resistiva**

Si consideri un robot che si muove con velocità  $\dot{q}$  all'interno di un fluido viscoso, che esercita un'azione smorzante di coefficiente  $b$  sul robot:



**Figura 7.5:** Schema impedenza resistiva.

In tal caso la forza d'interazione sarà definita come:

$$f = b\dot{q} \quad \text{ovvero} \quad F_d(s) = B_d s Q(s) \quad (7.10)$$

L'impedenza è di tipo resistivo se e solo se  $|Z_d(0)| = k$  con  $0 < k < \infty$ ; questo significa che l'impedenza desiderata sarà del tipo (vedi relazione 7.7):

$$Z_d(s) = B_d$$

- **Impedenza capacitiva**

Si consideri un robot che spinge un corpo di massa  $m$ , vincolato a terra tramite un elemento molla-smorzatore (caratterizzati dai coefficienti  $k$  e  $b$ ), con una velocità  $\dot{q}$ :

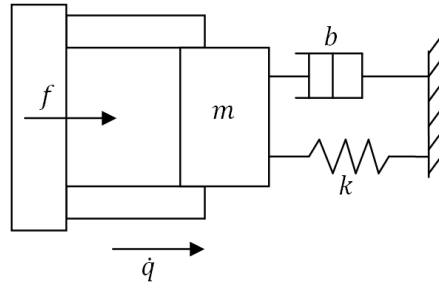


Figura 7.6: Schema impedenza capacitiva.

In tal caso la forza d'interazione sarà definita come:

$$f = m\ddot{q} + b\dot{q} + kq \quad \text{ovvero} \quad F_d(s) = M_d s^2 Q(s) + B_d s Q(s) + K_d \quad (7.11)$$

L'impedenza è di tipo capacitivo se e solo se  $|Z_d(0)| = \infty$ ; questo significa che l'impedenza desiderata sarà del tipo (vedi relazione 7.7):

$$Z_d(s) = M_d s + B_d + \frac{K_d}{s}$$

### 7.3.2 Esempio di controllo in impedenza

Di seguito si riporta l'esempio di un controllo in impedenza con anello chiuso in forza:

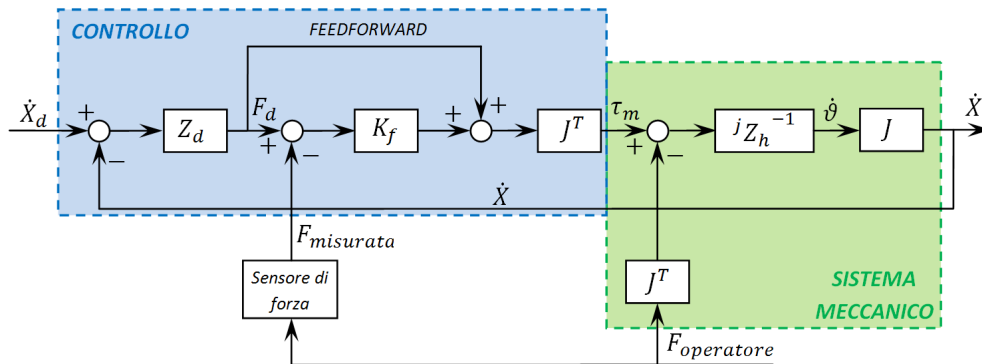


Figura 7.7: Schema a blocchi di un controllo in impedenza.

Lo schema di controllo riportato in Figura 7.7 è composto da un contributo in feedforward sulla forza desiderata e da un contributo in feedback della forza misurata. In particolare si notano due retroazioni: un anello più interno, con il quale si ottiene un feedback della velocità nello spazio di lavoro; un feedback di forza esterno dedicato al controllo in forza. La componente in feedforward sulla forza desiderata è stata introdotta per avere un algoritmo di controllo più reattivo.

Come si nota dallo schema, definita un'impedenza desiderata  $Z_d$ , è possibile ricavare una forza desiderata  $F_d$  in funzione dell'errore di velocità calcolato come la differenza tra la velocità desiderata  $\dot{X}_d$  (input de sistema di controllo) e quella misurata nello spazio di lavoro ( $\dot{X}$ ). Il controllore in forza esercita sul sistema meccanico un'azione di controllo che è funzione dell'errore tra la forza desiderata  $F_d$  e la forza misurata dal sensore di forza.

Il set-point per il controllo in forza è ricavato attraverso l'anello di velocità, che in funzione dell'impedenza desiderata e dell'errore in velocità definisce la forza di riferimento  $F_d$ .

Per ricavare la relazione tra l'errore di impedenza ed il guadagno del controllore in forza, bisogna definire la funzione di trasferimento dello schema a blocchi presentato in Figura 7.7. Innanzitutto si ricavano l'azione di controllo  $\tau_m$  e la forza desiderata  $F_d$ :

$$\tau_m = J^T [F_d + K_f (F_d - F_{misurata})] \quad (7.12)$$

L'uscita dello schema a blocchi  $\dot{X}$  è definita come:

$$\dot{X} = (J^j Z_h^{-1}) (\tau_m - J^T F_{operatore}) \quad (7.13)$$

Sostituendo la relazione di  $\tau_m$  nella (7.13), si ottiene:

$$\dot{X} = (J^j Z_h^{-1} J^T) [F_d + K_f (F_d - F_{misurata}) - F_{operatore}] \quad (7.14)$$

Indicando con  ${}^j Z_h$  l'impedenza del sistema meccanico nello spazio dei giunti, con  $Z_h = J^{-T} {}^j Z_h J^{-1}$  l'impedenza del sistema meccanico nello spazio di lavoro,

si può riscrivere la  $\dot{X}$  come:

$$\dot{X} = Z_h^{-1}[F_d + K_f(F_d - F_{misurata}) - F_{operatore}] \quad (7.15)$$

$$F_d = Z_d(\dot{X}_d - \dot{X}) \quad (7.16)$$

Imponendo  $\dot{X}_d = 0$  e supponendo che la forza misurata sia all'incirca la stessa di quella dell'operatore, è possibile ricavare l'impedenza totale dell'anello chiuso  $Z_{hCL}$ <sup>7</sup>:

$$Z_{hCL} = \frac{-F_{operatore}}{\dot{X}} = \frac{Z_h}{(1 + K_f)} + Z_d \quad (7.17)$$

A questo punto è possibile ricavare la relazione tra l'errore di impedenza ed il guadagno  $K_F$  del controllore in forza:

$$e_z = \frac{Z_d - Z_{hCL}}{Z_d} = \frac{-Z_h}{Z_d(1 + K_f)} \quad (7.18)$$

Come si può notare dalla relazione (7.18), l'errore in impedenza diminuisce all'aumentare del guadagno  $K_f$  del controllore ed all'aumentare dell'impedenza desiderata  $Z_d$ .

Un aumento illimitato del guadagno  $K_f$  porterebbe ad avere una banda passante illimitata; questa tendenza è però vincolata dalla presenza di rumori sulle misure e dagli attuatori.

---

<sup>7</sup>Per ottenere la relazione (7.17) si sostituisce la relazione (7.16) nella (7.15) quindi, svolgendo i vari passaggi, si ottiene  $Z_{hCL}$ :

$$\dot{X} = Z_h^{-1}(-Z_d\dot{X}K_f - K_fF_{operatore} - Z_d\dot{X} - F_{operatore})$$

$$\dot{X} = Z_h^{-1}[-Z_d\dot{X}(1 + K_f) - F_{operatore}(1 + K_f)]$$

$$\dot{X}[1 + Z_h^{-1}Z_d(1 + K_f)] = -Z_h^{-1}F_{operatore}(1 + K_f)$$

$$\frac{-F_{operatore}}{\dot{X}} = \frac{1 + Z_h^{-1}Z_d(1 + K_f)}{Z_h^{-1}(1 + K_f)}$$



## 7.4 Controllo d'ammettenza

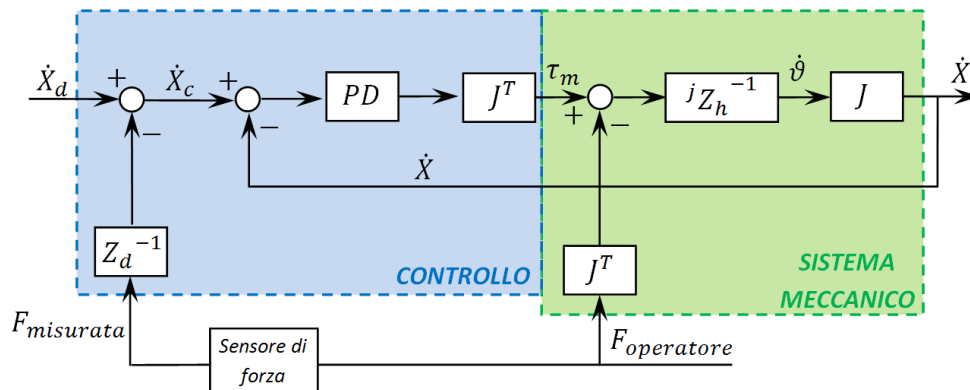
Il controllo in ammettenza è completamente duale al controllo in impedenza; sfruttando anche in questo caso l'analogia elettrica è possibile definire l'ammettenza meccanica come il rapporto tra la velocità  $\dot{X}$  e la forza  $F$  (questo è vero se il sistema è lineare):

$$Z_d^{-1}(s) = \frac{\dot{X}(s)}{F(s)} \quad (7.19)$$

Questo significa che se il paradigma del controllo in impedenza è spostamenti in ingresso e forze in uscita, per il controllo d'ammettenza sarà forze in ingresso e spostamenti in uscita, quindi il controllo in ammettenza fornisce all'operatore una risposta in termini di spostamenti dell'end-effector.

### 7.4.1 Esempio di controllo in ammettenza

Di seguito si riporta uno schema a blocchi relativo ad un controllo in ammettenza ad anello chiuso:



**Figura 7.8:** Schema a blocchi di un controllo d'ammettenza.

Come per il controllo d'impedenza, anche per questa tipologia di controllo, si notano due feedback nello schema a blocchi riportato in Figura 7.8: una retroazione esterna sulla forza misurata con la quale controllare l'ammettenza quindi

la velocità di riferimento; una retroazione più interna per il controllo in velocità. L'anello esterno definisce quindi il setpoint in velocità per l'anello interno, che attraverso un regolatore genera l'azione di controllo  $\tau_m$ .

In modo del tutto analogo a quanto fatto per il controllo in impedenza è possibile ricavare la funzione di trasferimento tra la forza imposta dall'operatore e la velocità dell'end-effector.

Considerando lo schema a blocchi riportato in Figura 7.8 è possibile scrivere la velocità nello spazio di lavoro come:

$$\dot{X} = [PD(\dot{X}_c - \dot{X}) - F_{operatore}]Z_h^{-1} \quad (7.20)$$

Assumendo per semplicità nullo il riferimento in velocità  $\dot{X}_d$ , è possibile scrivere l'errore  $\dot{X}_c$  come:

$$\dot{X}_c = Z_d^{-1} \cdot F_{misurata} \quad (7.21)$$

dove  $Z_d^{-1}$  rappresenta l'ammettenza desiderata. Inoltre ipotizzando che il sistema di misura abbia un guadagno unitario è possibile considerare la forza misurata circa uguale alla forza imposta dall'operatore:

$$F_{misurata} \approx F_{operatore}$$

Attraverso queste considerazioni è possibile riscrivere la relazione 7.20 come:

$$\dot{X} = [PD(Z_d^{-1} \cdot F_{misurata} - \dot{X}) - F_{operatore}]Z_h^{-1}$$

La funzione di trasferimento tra la forza dell'operatore e la velocità sarà:

$$Z_{hCL} = \frac{-F_{operatore}}{\dot{X}} = \frac{Z_h + PD}{Z_d^{-1}PD + I} \quad (7.22)$$

Se i guadagni del controllore sono elevati, vale la seguente approssimazione:

$$Z_{hCL} \approx \frac{PD}{Z_d^{-1}PD} \Rightarrow Z_{hCL} \approx Z_d \quad (7.23)$$

e quindi l'impedenza dell'anello chiuso è uguale all'impedenza desiderata. Condizione necessaria per un buon funzionamento del controllo è avere un guadagno

del controllore maggiore dell'impedenza del sistema meccanico e dell'ammettenza desiderata; tuttavia in un sistema reale non è possibile avere dei guadagni del controllore troppo elevati.

L'errore per questo tipo di controllo è definito dalla seguente relazione:

$$e_Z = \frac{Z_d^{-1} - Z_{hCL}^{-1}}{Z_d^{-1}} \quad (7.24)$$

quindi cresce all'aumentare dell'ammettenza desiderata, mentre diminuisce aumentando i guadagni del controllore, quindi aumentando  $Z_{hCL}^{-1}$ .

## 7.5 Scelta del controllo

Le prime due tipologie di controllo presentate sono tecniche valide nell'ambito della robotica generale, quindi applicabili ad un qualsiasi manipolatore; le ultime due tecniche di controllo descritte sono più adatte ad un'applicazione aptica, in quanto permettono di controllare contemporaneamente sia la forza che la traiettoria dell'end-effector; inoltre è possibile di simulare degli ambienti virtuali più complessi rispetto agli altri due tipi di controlli.

Tra il controllo d'impedenza ed il controllo d'ammettenza la scelta è stata fatta basandosi sulle caratteristiche meccaniche dell'interfaccia aptica e sul tipo di risposta desiderata dall'operatore, si ricorda infatti che il controllo d'impedenza fornisce all'operatore una risposta in forza, mentre il controllo d'ammettenza restituisce una variazione della posizione dell'end-effector.

Come evidenziato anche dalla breve trattazione riportata nei paragrafi precedenti, esiste un principio di dualità tra il controllo d'impedenza ed il controllo d'ammettenza: ciò che è meglio per un controllo è peggio per l'altro e viceversa. Ad esempio, nel controllo d'impedenza si possono avere problemi di instabilità a causa dell'accoppiamento con un ambiente virtuale, mentre per il controllo d'ammettenza le instabilità potrebbero nascere in assenza di interazioni con un

ambiente virtuale oppure a causa di inerzie ridotte del dispositivo. Essendo l'interfaccia aptica un dispositivo con inerzie ridotte, è preferibile approcciarsi ad un controllo d'impedenza.

A parità di altri parametri, infatti, una riduzione della massa corrisponde ad un valore minore di  $Z_h$ . In un controllo d'impedenza questo si traduce in un minore errore (vedi relazione 7.18), mentre nel controllo d'ammettenza, una diminuzione di  $Z_h$  incide negativamente sul controllo a causa di una riduzione dei guadagni del controllore (vedi relazione 7.24).

Alla luce di queste considerazioni, si è scelto di sviluppare un sistema di controllo d'impedenza.

# CAPITOLO 8

## CONTROLLO IN FORZA

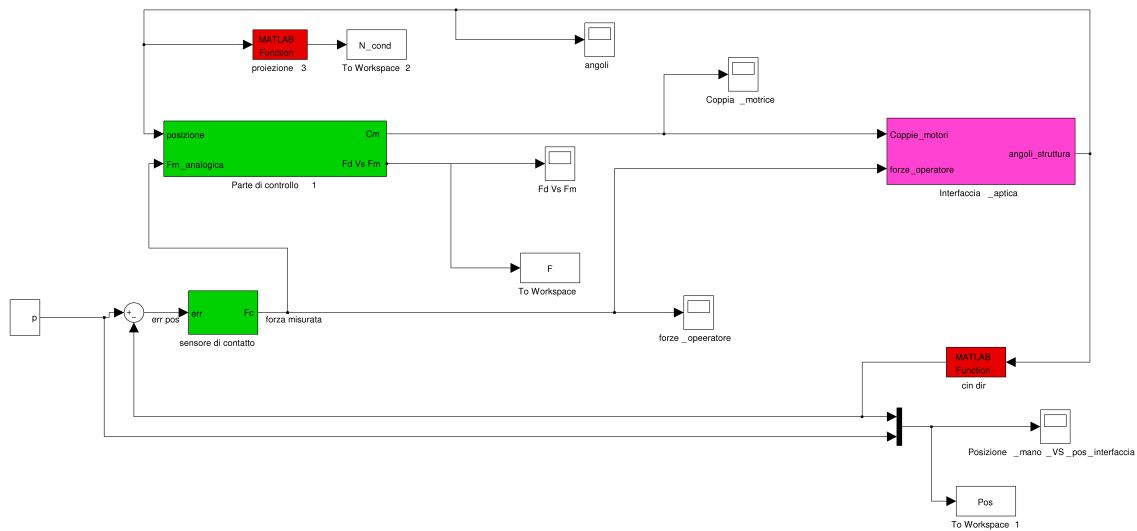
### DELL'INTERFACCIA APTICA

In questo ultimo capitolo si presenta l'algoritmo di controllo in impedenza sviluppato per la gestione dell'interfaccia aptica. Il sistema di controllo è composto da tre gruppi principali: un controllo in impedenza, un controllore dei moti interni della struttura ed un compensatore dei disturbi. Lo schema è stato successivamente ampliato introducendo ulteriori gruppi funzionali dedicati all'elaborazione dei segnali in ingresso ed in uscita al controllo, alla modellazione degli attuatori ed alla simulazione dell'interazione tra operatore ed interfaccia aptica.

Il software di controllo è stato testato attraverso una co-simulazione tra l'ambiente Matlab-Simulink ed il software multibody ADAMS; questo approccio ha portato un duplice beneficio: in primo luogo ha permesso di valutare il reale comportamento dell'interfaccia in funzione dell'azione di controllo imposta al sistema meccanico; il secondo vantaggio è legato alla possibilità di sfruttare il modello dinamico di ADAMS per risolvere il problema dinamico diretto e per introdurre i fenomeni d'attrito tra le varie parti del dispositivo aptico.

## 8.1 Sistema di controllo

Facendo riferimento alle considerazioni riportate alla fine del precedente capitolo, si è deciso di implementare nell'algoritmo di controllo un controllo in impedenza, in quanto permette di simulare degli ambienti virtuali più complessi e di controllare contemporaneamente sia la traiettoria che la forza. Di seguito si riporta lo schema a blocchi principale del controllo sviluppato:



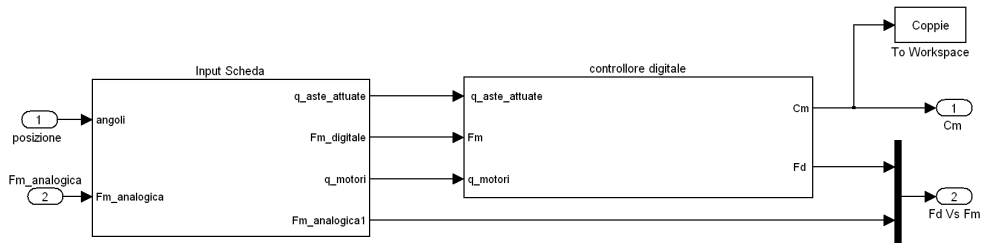
**Figura 8.1:** Schema complessivo del sistema di controllo sviluppato.

Nello schema rappresentato in Figura 8.1, oltre alla parte di controllo, si notano i blocchi funzionali dedicati alla simulazione dell'interazione uomo-interfaccia ed al modello dell'interfaccia aptica per la co-simulazione Simulink-ADAMS.

Il blocco funzionale denominato “*Parte di controllo*” al suo interno contiene un gruppo dedicato all'elaborazione dei segnali ed un gruppo che rappresenta il cuore dell'algoritmo di controllo (vedi Figura 8.2).

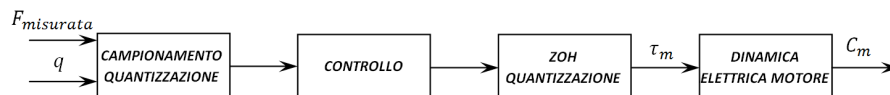
Il gruppo “*Input Scheda*” si occupa della conversione dei segnali trasformando i segnali da analogici a digitali. La discretizzazione dei segnali è stata introdotta

in quanto il controllore è stato sviluppato con logica digitale; in questo modo è stato possibile valutare, fin da subito, i ritardi legati all'elaborazione dei segnali.



**Figura 8.2:** Schema a blocchi della parte di controllo.

L'algoritmo di controllo si trova quindi inserito all'interno di uno schema di controllo più ampio, nel quale si considerano l'elaborazione dei segnali e la dinamica degli attuatori (vedi Figura 8.3).



**Figura 8.3:** Schematizzazione del controllo discreto.

Lo schema a blocchi presentato nel capitolo precedente (vedi Figura 7.7), relativo al controllo in impedenza, considera soltanto la componente di controllo legata all'ambiente virtuale che si vuole simulare. Per ottenere un sistema di controllo completo è necessario ampliare questo schema, introducendo nuovi blocchi funzionali relativi al controllo dei moti interni della struttura, all'osservatore dei disturbi ed alla componente in feedforward della dinamica inversa (vedi Figura 8.4). Si ottiene quindi un'azione di controllo sugli attuatori dell'interfaccia aptica data dalla somma dei quattro contributi in coppia generati dai vari blocchi funzionale che costituiscono lo schema di controllo.

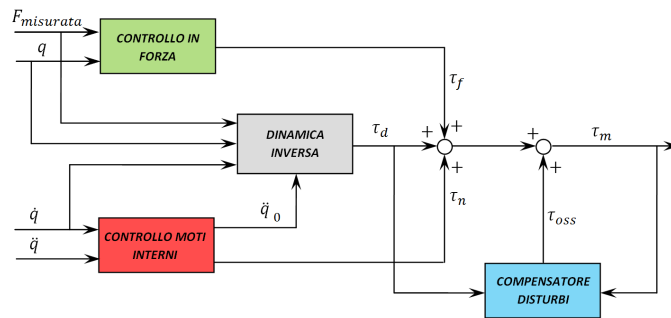


Figura 8.4: Schema semplificato del controllo.

Lo schema a blocchi dell'intero controllore sviluppato in ambiente Simulink è riportato in Figura 8.5, in cui sono stati evidenziati i principali gruppi funzionali definiti nella figura precedente:

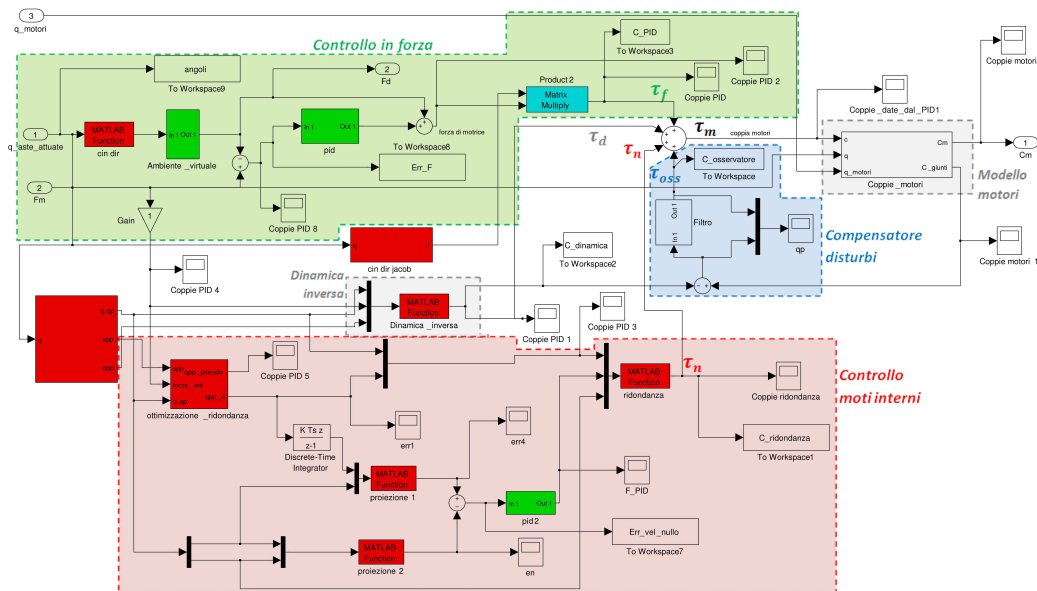


Figura 8.5: Schema Simulink del controllo sviluppato.



Di seguito si analizzeranno più dettagliatamente i principali gruppi funzionali che costituiscono l'intero sistema di controllo.

### 8.1.1 Modello dinamico

Il sistema di controllo sviluppato in ambiente Simulink definisce l'azione di controllo da inviare ai motori (in questo caso al modello multibody) in funzione dell'errore tra la forza imposta dall'operatore e la forza desiderata e dei contributi legati al controllo dei moti interni, ai disturbi ad alla dinamica inversa. In generale, il modello dinamico del sistema può essere descritto dalla seguente relazione:

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{V}(\mathbf{q})\mathbf{q} + \mathbf{d} - \mathbf{J}^T \mathbf{F}_{\text{operatore}} = \mathbf{T}\tau_m \quad (8.1)$$

dove:

- $\mathbf{H}(\mathbf{q})$  matrice di massa del sistema;
- $\mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$  matrice di Coriolis;
- $\mathbf{d}$  dissipazioni, in questo caso principalmente attriti;
- $\mathbf{V}(\mathbf{q})$  matrice potenziale;
- $\mathbf{q}$  variabili di giunto;
- $\mathbf{F}_{\text{operatore}} \approx \mathbf{F}_{\text{misurata}}$  forze all'end-effector;
- $\mathbf{J}$  matrice Jacobiana;
- $\tau_m$  vettore delle coppie ai motori;
- $\mathbf{T}$  matrice di trasformazione tra le coppie ai motori e le coppie ai giunti attuati della struttura, (vedi relazione 5.37, pag. 132).

Come mostrato in Figura 8.4 ed in Figura 8.5, l'output del controllore è la coppia motrice  $\tau_{\mathbf{m}}$ , che si ottiene dalla somma di quattro contributi:

- controllore della forza sull'end-effector  $\tau_{\mathbf{f}}$ ;
- controllore dei moti interni  $\tau_{\mathbf{n}}$ ;
- un feed-forward sulla dinamica  $\tau_{\mathbf{d}}$ ;
- osservatore del disturbo di coppia  $\tau_{\mathbf{oss}}$ .

La legge di controllo finale applicata ai motori può quindi essere espressa come:

$$\tau_{\mathbf{m}} = \tau_{\mathbf{n}} + \tau_{\mathbf{oss}} + \tau_{\mathbf{d}} + \tau_{\mathbf{f}} \quad (8.2)$$

Al controllo in forza, come si nota dalla Figura 8.4, è stato aggiunto anche un contributo in feed-forward attraverso il modello della dinamica inversa (presentato nel Capitolo 5); questa azione permette di migliorare la trasparenza dell'interfaccia, quindi di mascherare meglio all'operatore inerzie ed attriti del dispositivo.

### 8.1.2 Controllo in forza

Come già accennato precedentemente, per l'interfaccia aptica è stato sviluppato un controllo in impedenza, in cui la forza desiderata di riferimento è funzione del modello dell'ambiente virtuale considerato. Lo schema a blocchi del controllo in forza è riportato in Figura 8.6 e Figura 8.7, in cui si nota un regolatore PID: attraverso l'azione integrale è possibile ridurre l'errore a regime tra la forza desiderata e la forza misurata (quest'ultima, nel caso di guadagno unitario del sistema di misura, corrisponde all'azione imposta dall'operatore).

Nello schema di controllo è stata anche introdotta una componente in feed-forward della forza desiderata, in modo da migliorare la prontezza del sistema.

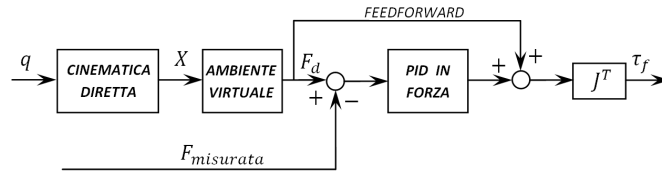


Figura 8.6: Schematizzazione della parte di controllo rin forza.

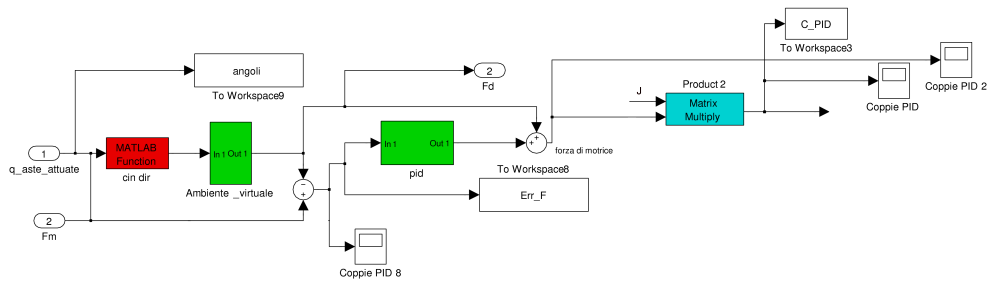


Figura 8.7: Schema Simulink del controllo in forza .

L'azione di controllo imputabile al solo controllo in impedenza è definita dalla seguente relazione:

$$\tau_f = [J]^T \left[ \left( [K_f] + [K_d]s + \frac{[K_i]}{s} \right) (\mathbf{F}_d - \mathbf{F}_{\text{misurata}}) + \mathbf{F}_d \right] \quad (8.3)$$

dove i guadagni  $K_f$ ,  $K_d$  e  $K_i$  del controllore PID, in questo caso, sono delle matrici (moto tridimensionale); se queste sono definite diagonali allora è possibile mantenere disaccoppiato il controllo lungo i tre assi dello spazio di lavoro.

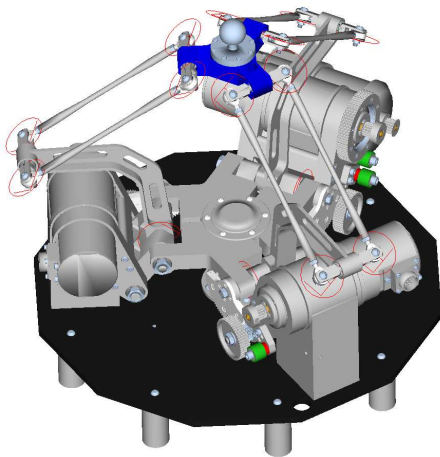
La funzione di trasferimento del controllore risulta avere un numero di zeri maggiore del numero di poli, quindi, per avere un sistema fisicamente realizzabile, verrà filtrata in alta frequenza. I problemi di wind-up<sup>1</sup> del termine integrale, che si manifestano nel caso in cui i motori siano saturi, in questo lavoro di tesi sono stati trascurati.

<sup>1</sup>Si manifesta quando l'uscita al controllore continua a crescere fino a portare in saturazione l'attuazione; di controllo rimarrà costante fino a che non scende sotto la soglia massima definita dall'attuazione.

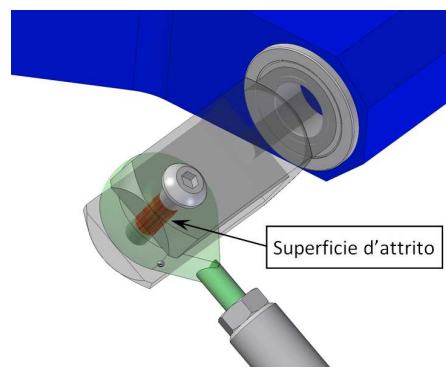
### 8.1.3 Attrito

Al fine di realizzare un modello che rappresenti al meglio le reali condizioni di funzionamento dell'interfaccia aptica, si vuole considerare nel modello dinamico l'effetto dissipativo dovuto agli attriti tra i vari elementi del dispositivo; in Appendice D è riportata una breve descrizione dei principali modelli di attrito disponibili in letteratura e che sono implementati nei vari software di simulazione.

Dovendo realizzare una co-simulazione tra Simulink ed ADAMS, si è pensato di sfruttare il modello dinamico del software multibody per risolvere la dinamica diretta e per introdurre l'effetto degli attriti tra i vari componenti meccanici: in questo modo è stato più semplice impostare le condizioni d'attrito tra le superfici d'interesse. In questa fase del progetto l'attrito è stato considerato soltanto in prossimità dei giunti dei quadrilateri, in particolare tra la superficie cilindrica interna del giunto e la superficie esterna del relativo perno che lo mantiene in posizione (vedi Figura 8.9). In una fase successiva, nel modello multibody, potrebbero essere considerati anche gli attriti tra i vari componenti della trasmissione meccanica.



**Figura 8.8:** *Elementi FRICTION nel modello multibody.*



**Figura 8.9:** *Superfici d'attrito considerate.*

Nel modello multibody sono stati considerate le seguenti impostazioni per tutti gli elementi friction introdotti:

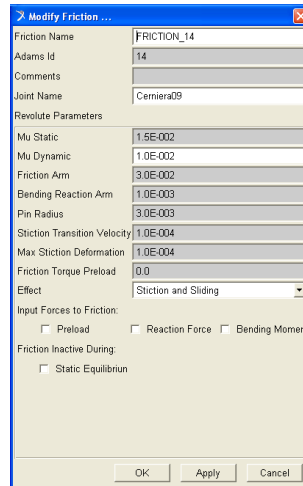


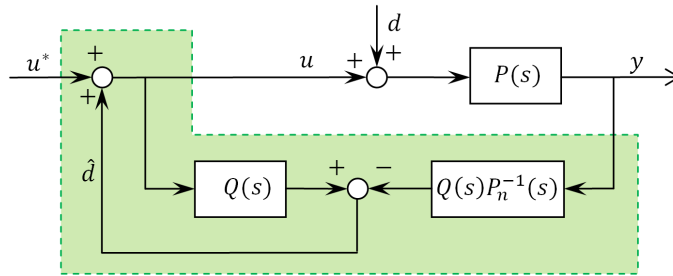
Figura 8.10: Parametri attrito elementi *FRICION*.

### 8.1.4 Compensazione dei disturbi di coppia

Nel sistema di controllo l'attrito è stato considerato come un disturbo sul segnale della coppia di riferimento inviata agli attuatori; è necessario quindi introdurre nello schema di controllo un compensatore di disturbo in grado di fornire una coppia pari a quella dispersa dagli attriti. In questo modo è possibile mascherare all'utente l'attrito dell'interfaccia aptica, migliorandone destrezza e trasparenza.

Il controllo del disturbo di coppia (TDO: Torque Disturbance Observer) è uno schema molto utilizzato nel controllo del moto ed è impiegato tutte quelle volte che è presente un disturbo che può influenzare la coppia prodotta dal motore. Il metodo si basa sulla stima del disturbo in ingresso al sistema, che viene compensato attraverso una retroazione positiva sull'ingresso; la stima del disturbo viene valutata osservando l'ingresso e l'uscita del sistema<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>[27].



**Figura 8.11:** Schema generico dell'osservatore di disturbo.

Nello schema riportato in Figura 8.11,  $P_n(s)$  è un sistema sotto controllo, con funzione di trasferimento  $P(s)$ ,  $Q(s)$  è un filtro passa-basso con guadagno unitario,  $d$  è l'azione di disturbo mentre  $\hat{d}$  è la stima del disturbo; quest'ultima, risolvendo lo schema blocchi, assume la seguente forma:

$$\hat{d}_s = Q(s)(1 - P_n^{-1}(s)P(s)) u(s) - Q(s)P_n^{-1}(s)P(s)d(s) \quad (8.4)$$

che nel caso in cui  $P_n(s) \approx P(s)$  diventa:

$$\hat{d}_s = -Q(s)d(s) \quad (8.5)$$

E' buona norma posizionare la banda passante del filtro ad una frequenza tale da non disturbare la dinamica del sistema ma, allo stesso tempo, che sia capace di filtrare le discontinuità introdotte dall'attrito. Considerando la seguente funzione di trasferimento del filtro:

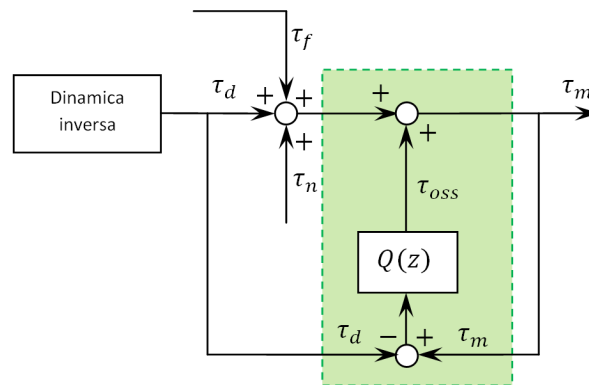
$$Q(S) = \frac{1}{1 + T_f s}$$

un valore di  $T_f$  posto pari a 0.001s permette di ottenere buoni risultati.

La funzione di trasferimento tra ingresso  $u^*$  ed uscita  $y$ , assume la seguente forma:

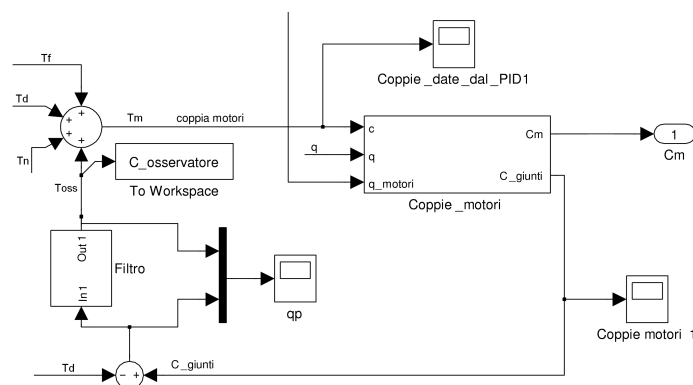
$$\hat{y}_s = P(s)(1 - Q(s)) d(s) + P(s)u^*(s)$$

Applicando questo metodo di compensazione del disturbo al controllo dell'interfaccia aptica, si ottiene lo schema riportato in Figura 8.12:



**Figura 8.12:** Schema dell'osservatore di disturbo utilizzato per l'interfaccia aptica.

In questo caso l'azione di disturbo si ricava attraverso un bilancio tra la coppia ricavata dalla dinamica inversa  $\tau_d$  e la coppia di riferimento degli attuatori  $\tau_m$ ; la dinamica inversa, infatti, genera una coppia legata alla posizione dell'end-effector ricavata attraverso la dinamica diretta risolta in ADAMS, in cui sono presenti gli attriti. L'osservatore del disturbo, in questo caso, sarà una funzione che contiene soltanto le funzioni di trasferimento dei filtri. Il TDO agisce sul sistema di controllo attraverso la variabile  $\tau_{oss}$ , con la quale compensa le dissipazioni legate agli attriti. In Figura 8.12 la funzione di trasferimento del filtro è scritta in funzione del parametro  $z$  e non rispetto alla variabile di Laplace  $s$ , in quanto il controllo è stato sviluppato con logica digitale (vedi paragrafo 8.1.8).



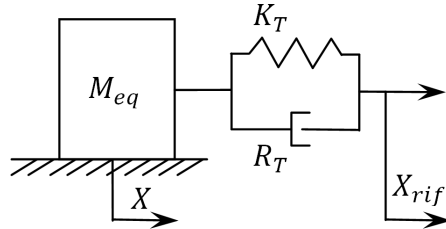
**Figura 8.13:** Schema Simulink dell'osservatore di disturbo.

In Figura 8.13 è riportato lo schema Simulink dell'osservatore di disturbo implementato nel controllore.

### 8.1.5 Modello contatto operatore-interfaccia

Il contatto operatore-interfaccia è stato simulato adottando un modello semplificato in cui si ipotizza che l'operatore abbia una presa forte sul sensore di forza; questo permette di considerare esaurito il transitorio legato alla compressione dei tessuti che avvolgono l'osso. Dal lato interfaccia, invece, si sono considerate la rigidità del sensore di forza e lo smorzamento strutturale.

Il sistema non controllato può essere schematizzato come una massa  $M_{eq}$  (comprende tutte le masse in movimento dell'interfaccia) collegata ad un vincolo mobile attraverso una molla di costante elastica  $K_T$  ed uno smorzatore con coefficiente  $R_T$ :



**Figura 8.14:** Schema a blocchi dell'implementazione del modello uomo-interfaccia.

dove  $K_T$  e  $R_T$  rappresentano rispettivamente la rigidità equivalente e lo smorzamento equivalente del sistema operatore-interfaccia.

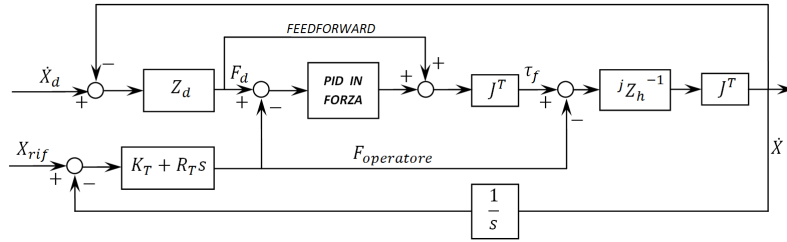
La funzione di trasferimento del sistema non controllato tra la posizione  $X$  dell'end-effector e la posizione di riferimento  $X_{rif}$  imposta dall'operatore, è definita dalla seguente relazione:

$$\frac{X}{X_{rif}} = \frac{R_T s + K_T}{M_{eq} s^2 + R_T s + K_T} \quad (8.6)$$

Noto il legame tra operatore ed interfaccia, quindi nota la forza che l'operatore esercita tramite il sensore, il regolatore genererà un'azione di controllo in



funzione dell'errore tra la forza desiderata (funzione delle caratteristiche dell'ambiente virtuale) e la forza operatore. Lo schema del controllo in impedenza con il modello dell'interazione operatore-interfaccia è riportato in Figura 8.15:



**Figura 8.15:** Schema a blocchi controllo in impedenza.

Riferendosi sempre allo schema di Figura 8.15, è possibile definire due funzioni di trasferimento:

- funzione di trasferimento  $L_F(s)$ , che definisce il legame tra la forza dell'operatore e la forza desiderata;
- funzione di trasferimento  $L_X(s)$ , che considera il modello d'interazione uomo-interfaccia e definisce il legame tra la posizione dell'end-effector e la posizione di riferimento imposta dall'operatore.

Per ricavare le due funzioni di trasferimento si considerano le seguenti ipotesi: la forza misurata è uguale alla forza dell'operatore (il sistema di misura ha un guadagno unitario) e la velocità  $\dot{X}_d$  è nulla.

La funzione di trasferimento  $L_F(s)$  è definita dalla seguente relazione:

$$L_F(s) = \frac{F_{operatore}}{F_d} = 1 + \frac{Z_h}{(PID + 1)Z_d} \quad (8.7)$$

dove  $Z_h$  rappresenta l'impedenza meccanica dell'interfaccia che, considerando il sistema rigido, è definita come:

$$Z_h = M_{eq}s^2 \quad (8.8)$$

Si noti dalla (8.7) che all'aumentare del guadagno proporzionale  $PID$  e dell'impedenza desiderata  $Z_d$  il rapporto  $\frac{F_{operatore}}{F_d}$  tenda a 1, la stessa cosa succede al diminuire di  $Z_h$ .

Infine, dallo schema a blocchi del controllo in impedenza, si possono ricavare le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} (X_{rif} - X)(K_T + R_T s) = F_{operatore} \\ [F_d - F_{operatore} + PID(F_d - F_{operatore})] Z_h^{-1} = X s \\ F_d = Z_d X s \end{cases} \quad (8.9)$$

Risolvendo il sistema di equazioni (8.9) si ottiene la funzione di trasferimento  $L_X(s)$ :

$$\frac{X}{X_{rif}} = \frac{K_T + R_T s}{[R_T + (1 + PID)^{-1} Z_h + Z_d] s + K_T} \quad (8.10)$$

Questa funzione di trasferimento è quella complessiva del sistema meccanico, del modello di contatto operatore-interfaccia, del controllo e dell'ambiente virtuale.

### 8.1.6 Controllo moti interni

Il controllo dei moti interni ha il compito di gestire la posizione della base mediana con l'obiettivo di minimizzare le coppie richieste agli attuatori e garantire una buona destrezza dell'interfaccia aptica all'interno del proprio volume di lavoro (vedi Capitolo 4).

Come si nota dalla Figura 8.16, la parte di controllo dedicata alla gestione dei moti interni della struttura, ossia della posizione verticale della base mediana, ha una duplice funzione: la prima è quella di analizzare il segnale di accelerazione dell'end-effector e definire il vettore delle accelerazioni da proiettare nello spazio nullo di  $\mathbf{J}$ ; la seconda è quella di controllare la velocità dei moti interni e generare un contributo in coppia da sommare alle altre componenti in coppia del sistema di controllo.

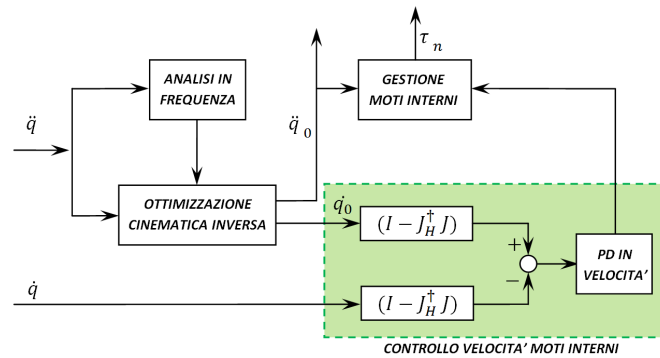


Figura 8.16: Schema della parte di controllo dedicata ai moti interni.

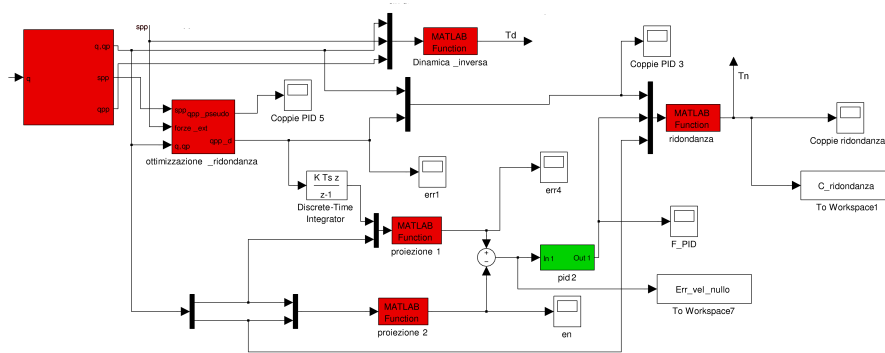


Figura 8.17: Schema Simulink del controllo dei moti interni.

La struttura a blocchi dedicata all'ottimizzazione della cinematica inversa, rispecchia la procedura descritta nel metodo 9 per la risoluzione della cinematica inversa: attraverso un'analisi in frequenza delle accelerazioni imposte all'end-effector, si stabiliscono i valori dei guadagni da attribuire alla funzione dell'accelerazione  $\dot{\mathbf{q}}_0$  che dev'essere proiettata nello spazio nullo della matrice Jacobiana; i due guadagni permettono di bilanciare il contributo dell'accelerazione dedicato alla minimizzazione delle coppie richieste agli attuatori ed il contributo dedicato a rendere sferici gli iperelissoidi di manipolabilità.

Il controllo dei moti interni è costituito da un regolatore proporzionale-derivativo, che genera un'azione di controllo in funzione dell'errore tra la velocità dei giunti

e quella che dev'essere proiettata nello spazio nullo della matrice Jacobiana.

Nota l'accelerazione da proiettare nello spazio nullo e l'azione di controllo necessaria a controllare la velocità dei moti interni, è possibile definire una nuova accelerazione da proiettare nello spazio nullo e che permette di stabilizzare il moto della struttura nello spazio nullo; con questa accelerazione si genera il contributo in coppia  $\tau_n$  che andrà a sommarsi agli altri contributi relativi per definire l'azione di controllo totale da inviare ai motori dell'interfaccia.

Di seguito si riporta la procedura con cui si definisce il valore di accelerazione con cui generare il contributo di coppia  $\tau_n$ .

Nel capitolo 4 sono stati proposti diversi metodi per la risoluzione della cinematica inversa basati sullo spazio nullo della matrice Jacobiana. In particolare la generica soluzione nel campo delle velocità è stata definita come:

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0 \quad (8.11)$$

dove  $\mathbf{P} = (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J})$  è il proiettore del generico vettore delle velocità dei giunti  $\dot{\mathbf{q}}_0$  nello spazio nullo di  $\mathbf{J}$ . Il proiettore  $\mathbf{P}$  è funzione della pseudoinversa della matrice Jacobiana  $\mathbf{J}^\dagger$  finora definita attraverso la forma di Moore Penrose (vedi relazione 4.29); questa forma della pseudoinversa permette di minimizzare la norma della velocità ai giunti<sup>3</sup>:

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} \quad (8.12)$$

Alternativamente alla pseudoinversa di Moore Penrose, per la risoluzione della cinematica inversa, è possibile utilizzare la pseudoinversa della matrice Jacobiana pesata sulla stima della matrice di massa simmetrica  $\mathbf{H}$ <sup>4</sup>:

$$\mathbf{J}_H^\dagger = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \quad (8.13)$$

---

<sup>3</sup>[9].

<sup>4</sup>[26].

quindi, facendo riferimento alla relazione (4.27), la velocità nello spazio dei giunti può essere riscritta come:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_H^\dagger \dot{\mathbf{x}} \quad (8.14)$$

Utilizzando questa nuova forma di scrittura della matrice pseudoinversa, non si minimizza più la norma di  $\dot{\mathbf{q}}$ , ma si minimizza un termine energetico corrispondente all'energia cinetica (vedi Appendice A.5):

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|_H^2 = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}} \quad (8.15)$$

La matrice pseudoinversa pesata permette di disaccoppiare il controllo d'impedenza dal controllo di ridondanza, in quanto non genera accelerazioni nello spazio nullo quando all'end-effector vengono applicate forze o coppie esterne.

Ora, partendo dalla relazione (8.11), derivandola rispetto al tempo ed introducendo la pseudoinversa pesata, si ottiene l'accelerazione ai giunti scritta nel seguente modo:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}^{**} + \ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{J}_H^\dagger (\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}) + \ddot{\mathbf{q}}_n \quad (8.16)$$

dove  $\ddot{\mathbf{q}}_n$  è il vettore delle accelerazioni dei giunti nello spazio nullo. Questo vettore dev'essere scelto in modo tale da stabilizzare il moto nello spazio nullo ed ottimizzare una funzione definita da  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  (vettore delle accelerazioni da proiettare nello spazio nullo e ricavato dalla cinematica inversa).

Il controllo in velocità nello spazio nullo prevede l'annullamento asintotico dell'errore  $\mathbf{e}_n$  nello spazio nullo ( $\mathbf{e}_n$  è l'errore da proiettare nello spazio nullo); definendo con  $\dot{\mathbf{q}}_0$  il vettore delle velocità ricavate dalla cinematica inversa e che dev'essere proiettato nello spazio nullo, l'errore  $\mathbf{e}_n$  può essere scritto come:

$$\mathbf{e}_n = (\mathbf{I} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J})(\dot{\mathbf{q}}_0 - \dot{\mathbf{q}}) \quad (8.17)$$

dove il termine  $(\mathbf{I} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J})$  rappresenta il nuovo proiettore nello spazio nullo. Derivando rispetto al tempo l'errore, si ottiene:

$$\dot{\mathbf{e}}_n = \left( \mathbf{I} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J} \right) (\ddot{\mathbf{q}}_0 - \ddot{\mathbf{q}}) - \left( \dot{\mathbf{J}}_H^\dagger \mathbf{J} + \mathbf{J}_H^\dagger \dot{\mathbf{J}} \right) (\dot{\mathbf{q}}_0 - \dot{\mathbf{q}}) \quad (8.18)$$

Considerando una delle proprietà della matrice pseudoinversa pesata (vedi appendice ?? relazione 15):

$$\left(\mathbf{I} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J}\right) \mathbf{J}_H^\dagger = 0 \quad (8.19)$$

e sostituendo il vettore  $\ddot{\mathbf{q}}$  con la relazione (8.16) è possibile riscrivere la (8.18) nel seguente modo:

$$\dot{\mathbf{e}}_n = \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J}\right) (\ddot{\mathbf{q}}_0 - \ddot{\mathbf{q}}_n) - \left(\dot{\mathbf{J}}_H^\dagger \mathbf{J} + \mathbf{J}_H^\dagger \dot{\mathbf{J}}\right) (\dot{\mathbf{q}}_0 - \dot{\mathbf{q}}) \quad (8.20)$$

Per dimostrare che il vettore  $\ddot{\mathbf{q}}_n$  sia scelto in modo da garantire la stabilità del sistema (errore nullo), si ricorre al secondo metodo di Lyapunov, che permette di dimostrare la stabilità semplice ed asintotica, attraverso la scrittura di funzioni energetiche in termini di forme quadratiche.

Si consideri la funzione di Lyapunov:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}_n^T \mathbf{H} \mathbf{e}_n \quad (8.21)$$

derivandola rispetto al tempo, si ottiene una potenza:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_n^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{e}}_n \quad (8.22)$$

Sostituendo la (8.20) nella (8.22) e considerando che:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_n^T \mathbf{H} \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J}\right) &= \mathbf{e}_n^T \mathbf{H} \\ \mathbf{e}_n^T \mathbf{H} \mathbf{J}_H^\dagger &= \mathbf{0}^T \end{aligned} \quad (8.23)$$

si ottiene:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_n^T \dot{\mathbf{H}} \mathbf{e}_n + \mathbf{e}_n^T \mathbf{H} \left[ \ddot{\mathbf{q}}_0 - \ddot{\mathbf{q}}_n - \dot{\mathbf{J}}_H^\dagger \mathbf{J} (\dot{\mathbf{q}}_0 - \dot{\mathbf{q}}) \right] \quad (8.24)$$

Scegliendo il vettore di controllo nello spazio nullo come:

$$\ddot{\mathbf{q}}_n = \left(\mathbf{I} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J}\right) \left(\ddot{\mathbf{q}}_0 - \dot{\mathbf{J}}_H^\dagger \mathbf{J} (\dot{\mathbf{q}}_0 - \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{K}_n \mathbf{e}_n + \mathbf{C} \dot{\mathbf{e}}_n)\right) \quad (8.25)$$

dove  $\mathbf{K}_n$  è una matrice definita positiva e sostituendo  $\ddot{\mathbf{q}}_n$  nella (8.24) si ottiene:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_n^T \left(\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}\right) \mathbf{e}_n - \mathbf{e}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{e}_n \quad (8.26)$$

La matrice  $\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}$  gode della proprietà di antisimmetria, per cui genericamente si può dire che  $\mathbf{a}^T (\dot{\mathbf{H}} - 2\mathbf{C}) \mathbf{a} = 0$ , pertanto  $\dot{V}$  è sempre definita negativa, ossia l'errore tende a zero asintoticamente. Si nota dalla equazione (8.25) come  $\ddot{\mathbf{q}}_n$  sia il contributo di tre termini:

- $\ddot{\mathbf{q}}_0$  è il vettore precedentemente introdotto;
- $\mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J} (\dot{\mathbf{q}}_0 - \dot{\mathbf{q}})$  è un termine il cui contributo è trascurabile;
- $\mathbf{H}^{-1} (\mathbf{K}_n \mathbf{e}_n + \mathbf{C} \mathbf{e}_n)$  è il termine di controllo sull'errore di velocità nello spazio nullo.

La coppia da aggiungere a quella del controllo in impedenza sarà dunque:

$$\tau_n = \hat{\mathbf{H}} \ddot{\mathbf{q}}_n \quad (8.27)$$

### 8.1.7 Dinamica elettrica degli attuatori

La dinamica elettrica degli attuatori rappresenta la funzione di trasferimento tra la coppia di riferimento, generata dal controllore, e la coppia che viene realmente erogata dai motori ed applicata all'interfaccia. La dinamica del motore permette di simulare il reale comportamento del motore, introducendo quindi anche il ritardo temporale tra il segnale ricevuto in ingresso e la coppia erogata all'albero motore.

Nel caso specifico si considera il motore controllato in corrente, per due principali motivi: il primo perché è possibile avere un anello di controllo con un'elevata banda passante e, grazie all'amplificatore di corrente, un sistema più reattivo; la seconda ragione è che il legame proporzionale tra corrente e coppia motrice si presta bene ad un controllo in forza.

Il modello presentato è valido per tutti i motori dell'interfaccia aptica, compreso quello dedicato alla movimentazione della base mediana.

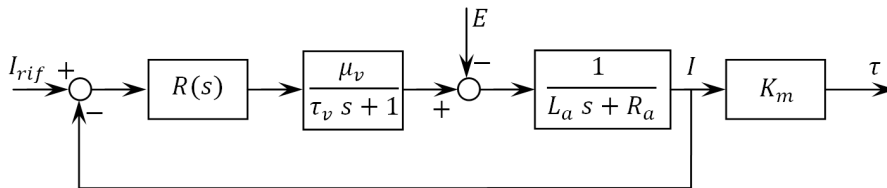
L'equazione di stato di un motore brushless può essere scritta nella seguente forma:

$$V_a = R_a i_a + L_a \frac{di}{dt} + K_e \omega = (R_a + L_a s) I_a + K_e \omega \quad (8.28)$$

dove  $V_a$  è la tensione di alimentazione,  $L_a$  l'induttanza del motore,  $R_a$  la resistenza elettrica del motore e  $K_e$  la costante di retroazione naturale (forza elettromotrice  $E = K_e \omega$ ). Dall'equazione precedente si ricava:

$$\frac{I_a}{V_a - K_e \omega} = \frac{1}{R_a + L_a s} \quad (8.29)$$

Lo schema di controllo relativo al singolo attuatore è riportato nella seguente figura:



**Figura 8.18:** Schema a blocchi dell'anello di corrente.

dove il regolatore, che agisce sull'errore in corrente, è caratterizzato dai coefficienti proporzionale ed integrale opportunamente tarati. A monte è posto un amplificatore di corrente con una funzione di trasferimento caratterizzata dal guadagno  $\mu_v$  (posto pari a 1) e dalla costante di tempo  $\tau_v$  (posta pari a  $250 \mu s$ ). Infine, prima del modello del motore, è stata introdotta, come disturbo, la retroazione naturale del motore  $E$ .

### 8.1.8 Discretizzazione dei segnali

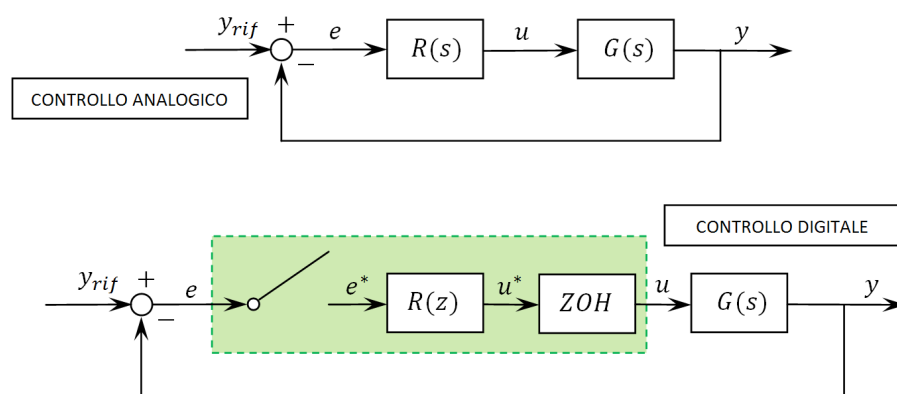
Pensando alla reale applicazione del sistema di controllo, è necessario introdurre nell'anello di controllo un calcolatore, che elabori le informazioni provenienti dai



trasduttori ed invii il relativo comando agli attuatori. Dato che un microprocessore opera ad istanti discreti, il controllo analogico, sviluppato fino ad ora, deve essere convertito in controllo digitale; ne consegue che tutti i segnali che si interfacciano con il calcolatore devono subire una conversione analogico/digitale in ingresso (velocità degli attuatori) e una conversione digitale/analogico in uscita (correnti degli attuatori).

Lo sviluppo di un controllo digitale, prevede lo sviluppo di nuovi blocchi funzionali all'interno del sistema di controllo, dedicati alla conversione dei segnali ed alla risoluzione di alcune problematiche dovute proprio all'elaborazione dei segnali. I principali problemi che si possono riscontrare nel processo di conversione sono:

- quantizzazione del segnale nella conversione analogico/digitale;
- fenomeni di aliasing del segnale nella conversione analogico/digitale;
- ritardo di conversione nella conversione digitale/analogico.



**Figura 8.19:** Schema a blocchi di un controllo a tempo discreto.

In Figura 8.19 è rappresentato lo schema di un controllo digitale ottenuto convertendo un controllo analogico. La prima differenza che si nota è che la funzione di trasferimento del regolatore non è funzione della variabile Laplaciana  $s$ , ma

è definita rispetto alla trasformata  $z$ ; inoltre all'interno dell'anello di controllo compaiono due nuovi blocchi funzionali: il campionatore e lo ZOH (Zero Order Hold, mantentore di ordine zero).

Il campionatore, come dice il nome stesso, ha lo scopo di campionare il segnale in ingresso, in modo che il regolatore veda un segnale discretizzato; la risoluzione del segnale è funzione del periodo di campionamento  $T_c$ , o meglio dalla frequenza di campionamento  $f_c = 1/T_c$ .

Il primo problema, che si riscontra in una conversione analogico/digitale di un segnale, è l'inevitabile quantizzazione del segnale dovuta alla risoluzione del sistema di acquisizione del segnale (numero di bit): i valori che può assumere il segnale digitale sono definiti da un numero di intervalli limitato (funzione della risoluzione della scheda di acquisizione). In questa trattazione non si terrà conto della quantizzazione del segnale<sup>5</sup>.

Un secondo problema legato alla conversione analogico/digitale del segnale è l'aliasing, ossia il manifestarsi di oscillazioni di lungo periodo del segnale acquisito, che non sono per nulla presenti nel segnale originale. Questo problema è strettamente legato alla frequenza di campionamento scelta; il problema dell'aliasing può essere risolto facendo riferimento al “*Teorema di Shannon*”, che permette di definire il corretto periodo di discretizzazione del segnale analogico, quindi la corretta frequenza di campionamento.

Sia  $\Omega_N = \pi/T_c$  la pulsazione di Nyquist (funzione della frequenza di campionamento), se la frequenza del segnale da campionare ha una frequenza minore di  $\Omega_N$  allora non si avrà aliasing<sup>6</sup>; un buon criterio è che le due pulsazioni siano

---

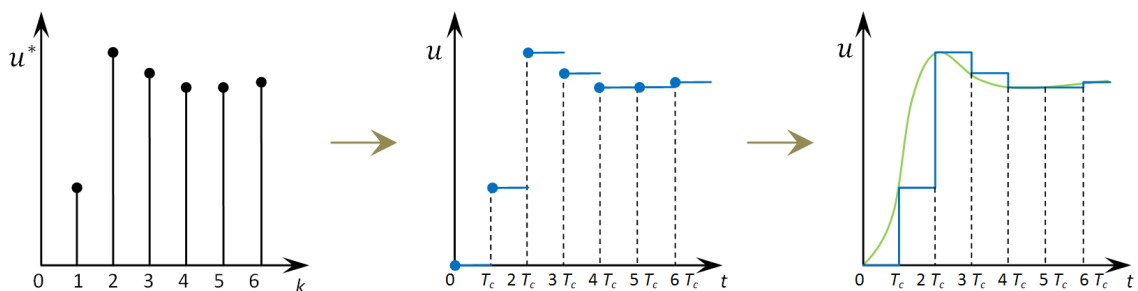
<sup>5</sup>[28].

<sup>6</sup>Sia  $\Omega_v$  l'estremo superiore della banda del segnale soggetto a campionamento (con banda limitata) e sia  $\Omega_N = \pi/T_c$  la pulsazione di Nyquist; se  $\Omega_v < \Omega_N$  allora il segnale discreto, con periodo di campionamento  $T_c$ , consente di ricostruire esattamente il segnale originario; questo significa che il segnale analogico e quello discretizzato sono in grado di fornire le medesime informazioni.

separate da una decade. Per soddisfare il teorema di Shannon è anche possibile prevedere l'impiego di un filtro antialiasing (filtro passa-basso) per tagliare le alte frequenze del segnale in ingresso ed avere quindi una frequenza di campionamento adeguata. Una frequenza di campionamento di  $1\text{ kHz}$ , quindi un periodo di campionamento di  $1\text{ ms}$  è un valore di frequenza comunemente usato nei sistemi real-time ed è per questo motivo che il campionatore è stato impostato con questi parametri.

Il blocco funzionale ZOH (Zero Order Hold - Mantentore di Ordine Zero) permette di riconvertire il segnale digitale in segnale analogico, in modo che possa essere inviato agli attuatori. Questo “dispositivo”, basandosi su un certo numero di campioni, determina il valore che dovrà assumere l'uscita del convertitore fino al prossimo campione; solitamente la soluzione maggiormente adottata mantiene costante l'ultimo campione in tutto l'intervallo di campionamento (vedi Figura 8.20). Queste tecniche di conversione sono anche chiamate estrapolatori.

La conversione digitale/analogica introduce un ritardo  $\tau$ , detto “ritardo intrinseco di conversione”, che è circa pari alla metà del periodo di campionamento<sup>7</sup> ( $\tau = T_c/2$ ).



**Figura 8.20:** *Rappresentazione della logica di funzionamento dello ZOH.*

Particolare attenzione è stata posta ai segnali delle velocità che devono essere ricavati partendo dai segnali delle posizioni. Procedere per derivazione numerica

<sup>7</sup>[28].

non risulta conveniente, in quanto dei piccoli errori di misura potrebbero portare ad avere dei segnali inutilizzabili. Per questo motivo si è adottato un filtro del secondo ordine con una funzione di trasferimento di questo tipo:

$$F(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{k_1 k_2}{s^2 + k_1 s + k_1 k_2} \quad (8.30)$$

quindi caratterizzata dalla pulsazione naturale  $\omega_n$  e dallo smorzamento  $r$ :

$$\omega_n = \sqrt{k_1 k_2} \quad r = 0.5 \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \quad (8.31)$$

Questi due parametri, secondo quanto detto precedentemente, vanno scelti in modo che la banda passante del filtro sia dieci volte maggiore di quella del controllo; alzare troppo la sua banda passante porta una riduzione dell'efficacia del filtro alle alte frequenze. Per quanto riguarda lo smorzamento: un valore troppo alto di  $r$  può introdurre dei ritardi; viceversa uno smorzamento troppo piccolo porta ad avere delle irregolarità non accettabili nei punti di inversione della velocità.

Per scrivere la funzione di trasferimento in forma discretizzata, si ricorre alla trasformata Zeta, con la formulazione di Tustin (o dei trapezi):

$$s = \frac{2}{T_c} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (8.32)$$

In questo modo la funzione di trasferimento può essere riscritta come:

$$F(z) = k_1 k_2 T_c^2 \frac{z^2 + 2z + 1}{\alpha z^2 + \beta z + \gamma} \quad (8.33)$$

dove:

$$\alpha = 4 + 2T_c k_1 + k_1 k_2 T_c^2$$

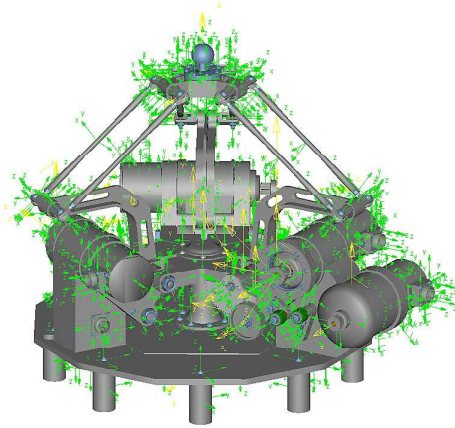
$$\beta = 2k_1 k_2 T_c^2 - 8$$

$$\gamma = 4 - 2k_1 T_c + k_1 k_2 T_c^2$$

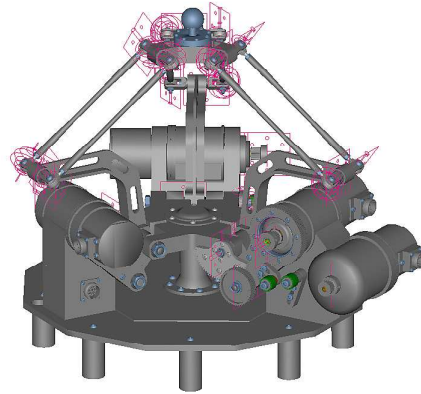
## 8.2 Modello multibody e co-simulazione

Il modello multibody è stato realizzato partendo dal modello tridimensionale in Solid Edge e importandolo nel software ADAMS. Qui sono stati impostati

tutti i vincoli tra le varie parti del modello e sono state attribuite loro tutte le caratteristiche inerziali. Di seguito si riportano due figure in cui è rappresentato il modello ADAMS con vincoli e marker in evidenza.



**Figura 8.21:** *Multibody in ADAMS; markers.*



**Figura 8.22:** *Multibody in ADAMS; joints.*

Per poter interagire con il controllo sono state impostate delle variabili d'ingresso e delle variabili di uscita; in particolare il modello multibody riceve in ingresso le coppie calcolate dal controllo da fornire agli attuatori e restituisce la posizione raggiunta dall'end-effector e le posizioni dei vari motori. Questo strumento è stato quindi impiegato per risolvere la cinematica e la dinamica diretta dell'interfaccia aptica.

Attraverso la co-simulazione il sistema meccanico viene sostituito dal modello multibody in ADAMS, quindi l'impedenza meccanica del modello (che si ritrova in alcuni schemi a blocchi riportati nelle pagine precedenti) non deve essere modellata, in quanto le posizioni e velocità dell'end-effector si ricavano direttamente dal modello dinamico multibody.

L'elevata interazione tra ambiente di sviluppo del controllo e modello multibody, insieme all'animazione 3D, costituisce il punto forte delle co-simulazioni, attraverso le quali è possibile sperimentare tutte le possibili condizioni ed ope-

razioni di lavoro della macchina controllata; si crea quindi un ambiente in cui è possibile sviluppi:

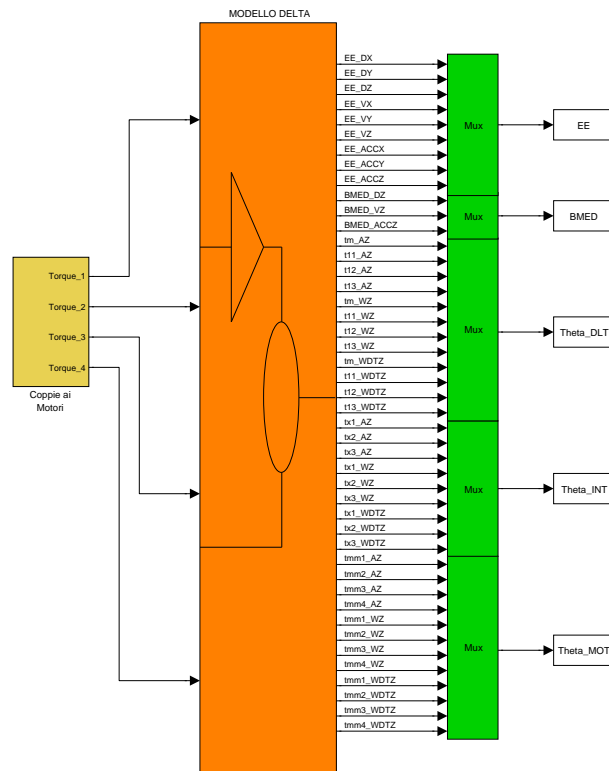


Figura 8.23: *Interfaccia Simulink-ADAMS; dinamica diretta.*

### 8.3 Considerazioni

In quest'ultimo paragrafo si riportano alcune considerazioni in merito ai risultati ottenuti dalle simulazioni fatte considerando differenti ambienti virtuali e diverse traiettorie campione.

#### Ambienti virtuali

Gli ambienti virtuali considerati per le simulazioni sono gli stessi che sono stati descritti nel capitolo precedente (vedi paragrafo 7.3.1):

- *Ambiente puramente elastico*: si simula il comportamento di una molla, esercitando una forza proporzionale alla distanza tra una posizione di riferimento e la posizione dell'end-effector ;

$$Z_d = \frac{K}{s} \quad \text{con } K \text{ rigidezza ambientale desiderata}$$

- *Ambiente puramente dissipativo*: la forza desiderata è proporzionale alla velocità dell'end-effector;

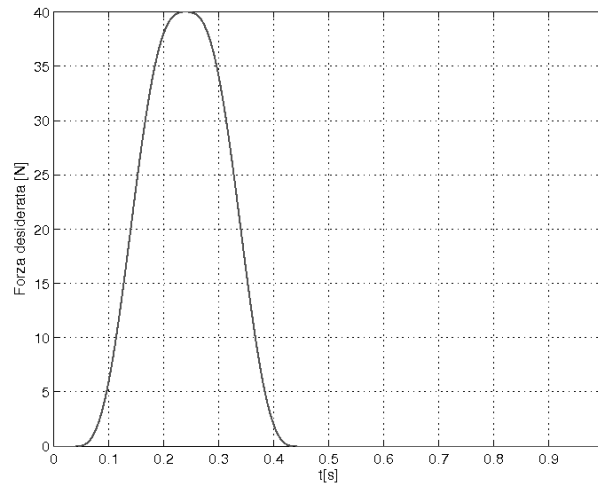
$$Z_d = B \quad \text{con } B \text{ costante che caratterizza l'ambiente}$$

$$F_d = Z_d \dot{x}$$

- *Ambiente ostacolo*: in questo caso si genera una forza variabile in funzione della distanza tra l'end-effector e l'ostacolo; la forza aumenta avvicinandosi all'ostacolo, raggiunge il valore massimo nel punto di contatto ed infine diminuisce allontanandosi. L'ambiente, in questo caso, può essere modellato sfruttando due differenti approcci: il primo in cui la forza desiderata è una funzione della distanza dell'end-effector dall'ostacolo, mentre il secondo descrive l'andamento della forza in funzione del tempo. Sfruttando la prima metodologia è possibile incorrere in situazioni di instabilità in quanto la forza varia tanto più velocemente quanto più elevata è la velocità dell'end-effector.

Utilizzando il secondo metodo è possibile slegare la forza desiderata dallo stato dell'interfaccia, definendo a priori quanto velocemente può variare la forza. Nel caso in esame si è considerata la variazione della forza desiderata dal valore nullo al valore massimo di  $40N$  (specifica di progetto) e viceversa per l'allontanamento, in uno spazio di  $20mm$ . Definendo la rigidezza dell'ostacolo virtuale ( $2N/mm$ , minimo valore per simulare correttamente il contatto con un corpo rigido) ed imponendo la forza massima ed il tempo

in cui raggiungere tale valore, è possibile ottenere una variazione della forza con una pendenza a piacimento e che non introduce instabilità nel sistema.



**Figura 8.24:** *Ambiente Ostacolo.*

### Traiettorie campione

Le traiettorie considerate per testare il sistema di controllo sviluppato, sono simili a quelle adottate per il confronto dei metodi sviluppati per la risoluzione della cinematica inversa. Anche in questo caso si sono considerate delle traiettorie che si sviluppano prevalentemente lungo la direzione  $z$  in modo da massimizzare la coppia richiesta al motore 4. Di seguito si riportano le principali caratteristiche delle traiettorie.

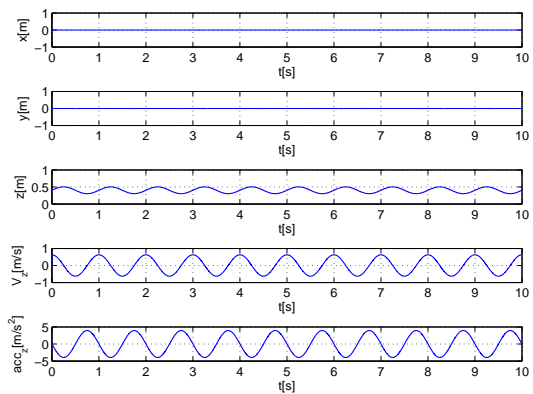
1. *Traiettoria 1*: un'oscillazione sinusoidale a bassa frequenza lungo l'asse  $z$  (Figura 8.25). I parametri principali della traiettoria sono:

- frequenza:  $1Hz$
- ampiezza:  $0.1m$

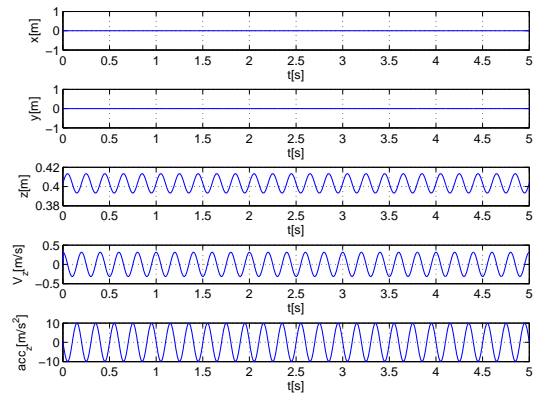


2. *Traiettoria 2*: oscillazione sinusoidale alla massima frequenza che un operatore umano è in grado di realizzare lungo la direzione  $z$  (Figura 8.26). I parametri principali della traiettoria sono:

- frequenza:  $5Hz$
- ampiezza:  $0.01m$



**Figura 8.25:** Traiettoria sinusoidale a bassa frequenza (traiettoria 1).



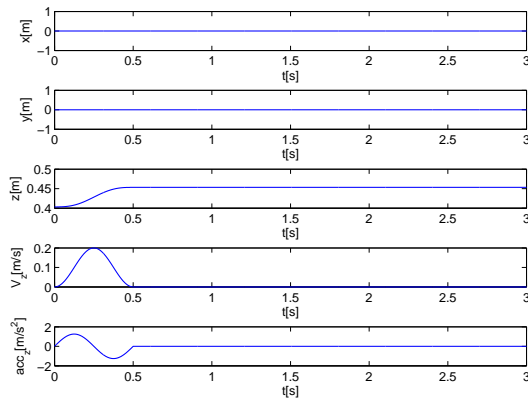
**Figura 8.26:** Traiettoria sinusoidale ad alta frequenza (traiettoria 2).

3. *Traiettoria 3*: dopo una traiettoria cicloidale lungo la direzione  $z$ , si mantiene la posizione (Figura 8.27). I parametri principali della traiettoria sono:

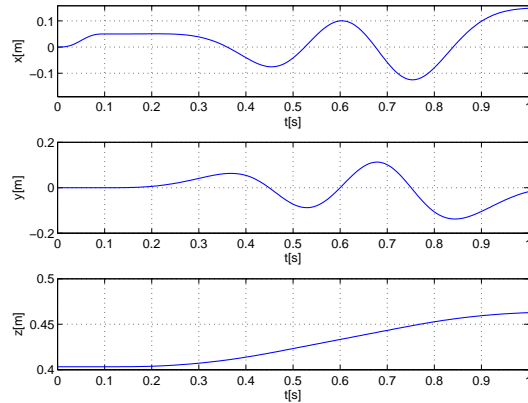
- spostamento:  $0.05m$
- tempo di salita:  $0.5s$

4. *Traiettoria 4*: spirale con asse principale in direzione  $z$  (Figura 8.28) e raggio crescente nel tempo. I parametri principali della traiettoria sono:

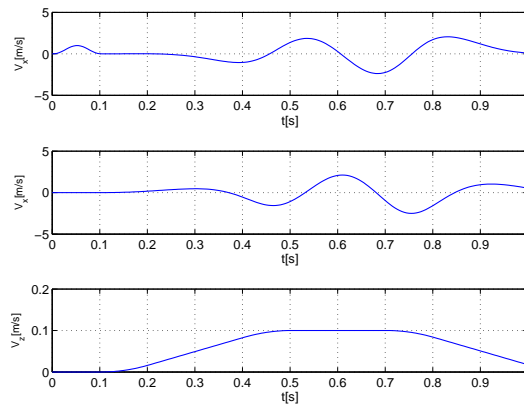
- giri al secondo:  $2$
- raggio della spirale:  $0.05 \frac{\vartheta_{rotazione}}{2\pi} [m]$
- passo della spirale lungo  $z$ :  $0.03[m]$



**Figura 8.27:** Traiettoria cicloidale lungo  $z$  (traiettoria 3).



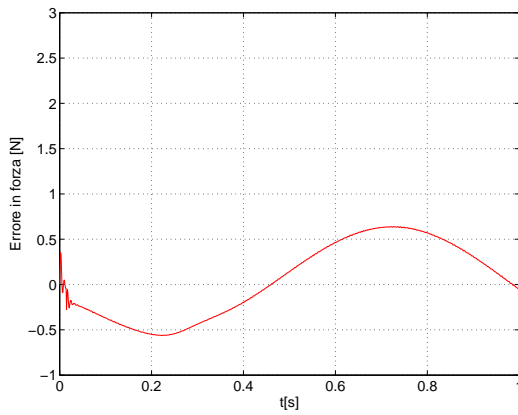
**Figura 8.28:** Traiettoria a spirale con raggio variabile (traiettoria 4).



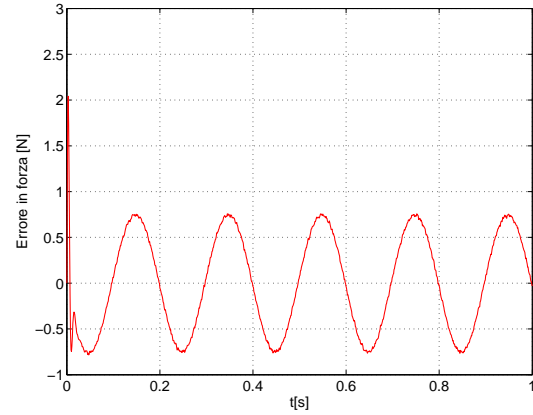
**Figura 8.29:** Velocità della traiettoria 4.

### 8.3.1 Ambiente Molla

Le prestazioni del sistema di controllo in un ambiente puramente elastico, sono state valutate confrontando tra loro gli errori assoluti in forza (differenza tra forza misurata desiderata e forza misurata  $e = F_d - F_{misurata}$ ) ottenuti soltanto con le prime due traiettorie. In queste prove la rigidità della molla virtuale è stata imposta in modo tale da garantire un valore quadratico medio della forza applicata dall'operatore di circa  $20N$ . Gli andamenti degli errori in forza sono riportati nelle figure seguenti:

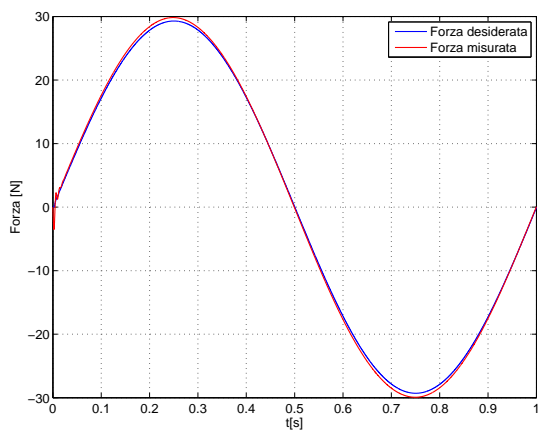


**Figura 8.30:** *Errore in forza* traiettoria 1.

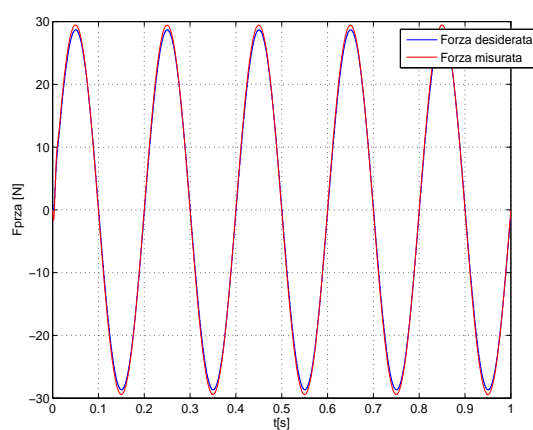


**Figura 8.31:** *Errore in forza* traiettoria 2.

Da questi due grafici si nota che la *traiettoria 2* è caratterizzata da un errore in forza maggiore rispetto all'altra traiettoria; questo potrebbe essere giustificato dalle maggiori forze d'inerzia dovute all'elevata frequenza del movimento. Si nota, inoltre, una maggiore oscillazione iniziale della seconda traiettoria rispetto alla prima; questo legato alla maggiore velocità iniziale della *traiettoria 2* sempre dovuta alla maggiore frequenza che la caratterizza. Di seguito si riportano dei grafici in cui si confrontano la forza desiderata e la forza misurata.



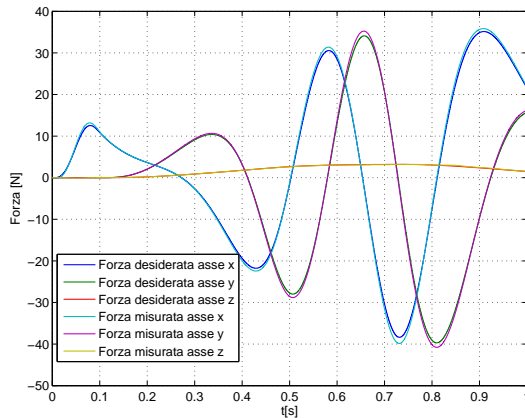
**Figura 8.32:** *Forza desiderata e forza misurata* con la traiettoria 1.



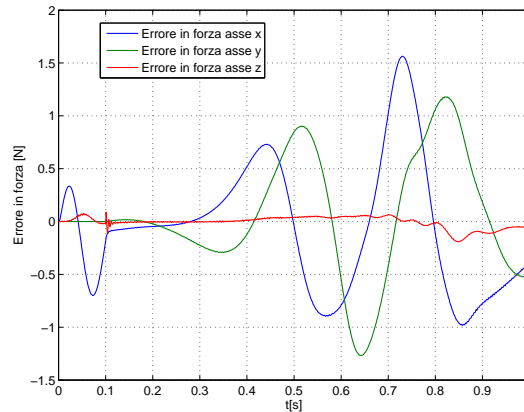
**Figura 8.33:** *Forza desiderata e forza misurata* con la traiettoria 2.

### 8.3.2 Ambiente dissipativo

Analogamente a quanto fatto per l'ambiente molla, può essere fatto considerando un ambiente completamente dissipativo. In questo caso le prestazioni del sistema di controllo sono state valutate considerando soltanto la *traiettoria 4*. L'ambiente virtuale è stato caratterizzato imponendo un coefficiente di smorzamento arbitrario ( $Z_d = 40$ ), tale da ottenere un valore massimo di forza applicata all'end-effector di circa  $40N$ . Di seguito si riportano i grafici relativi all'errore in forza tra la forza desiderata e quella misurata lungo le tre direzioni  $x$ ,  $y$  e  $z$ :



**Figura 8.34:** Forze desiderate e forze misurate con la traiettoria 4.



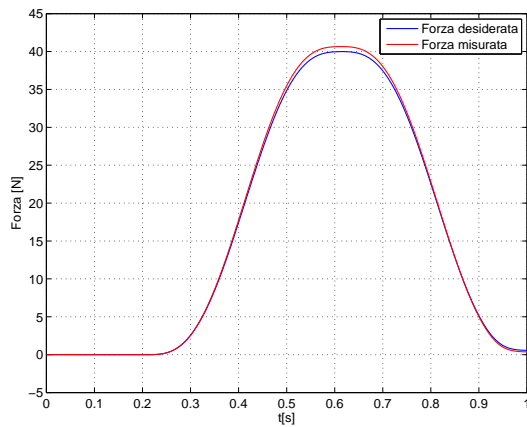
**Figura 8.35:** Errore in forza traiettoria 4.

In questo caso si nota che l'errore risulta abbastanza contenuto, soprattutto lungo la direzione  $z$ ; la tendenza per quanto riguarda le direzioni  $x$  e  $y$  è quella di avere un errore maggiore all'aumentare del tempo, quindi all'aumentare del raggio della spirale.

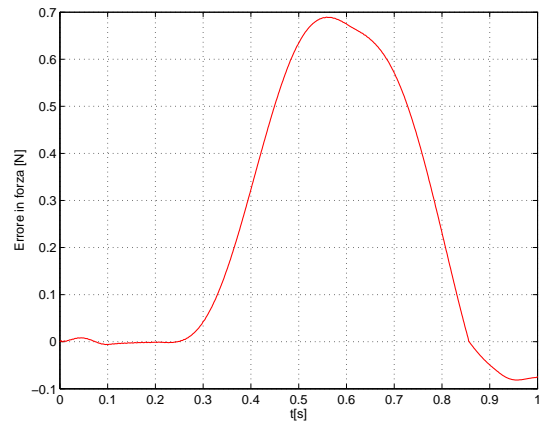
### 8.3.3 Ambiente Ostacolo

Infine, si riportano alcune considerazioni in merito alle prove eseguite con un ambiente ostacolo. Questo ambiente è stato simulato considerando soltanto la *traiettoria 3*; il massimo valore di forza desiderata è stato impostato pari a  $40N$ ,

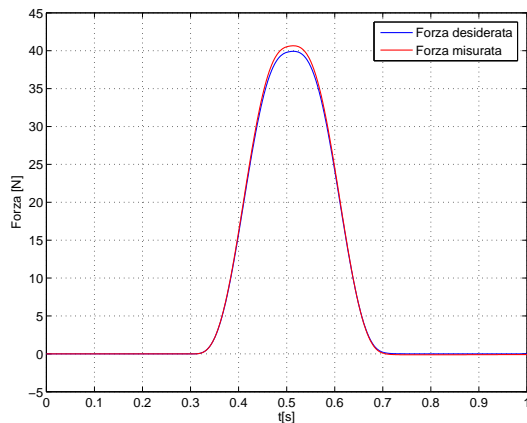
in modo da rispettare le specifiche di progetto. Le prove sono state condotte a differenti velocità di avvicinamento all'ostacolo, in modo da poter testare il sistema di controllo con differenti variazioni di forza nel tempo. Di seguito si riportano i grafici ricavati con velocità dell'interfaccia pari a  $0.05\text{m/s}$  e  $0.1\text{m/s}$ :



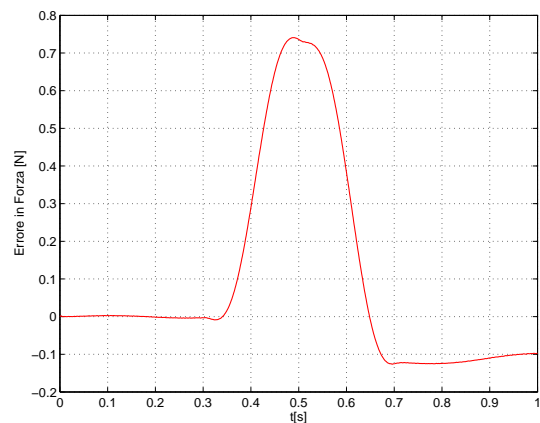
**Figura 8.36:** Forze desiderate e misurate con traiettoria 3, velocità dell'interfaccia  $0.05\frac{m}{s}$ .



**Figura 8.37:** Errore in forza con traiettoria 3, velocità dell'interfaccia  $0.05\frac{m}{s}$ .



**Figura 8.38:** Forze desiderate e misurate con traiettoria 3, velocità dell'interfaccia  $0.1\frac{m}{s}$ .



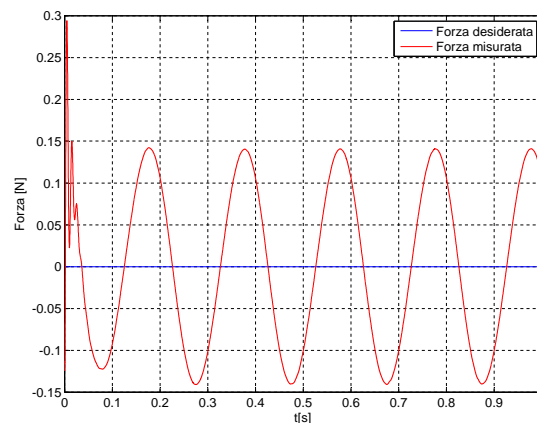
**Figura 8.39:** Errore in forza con la traiettoria 3, velocità dell'interfaccia  $0.1\frac{m}{s}$ .

Da questi grafici si nota che all'aumentare della velocità dell'interfaccia aumenta l'errore tra forza desiderata e forza misurata.

Analizzando nell'insieme le prove riportate negli ultimi tre paragrafi, è possibile sostenere che il sistema di controllo progettato permette di ottenere buoni risultati; infatti il massimo errore in forza in queste simulazioni è circa  $2N$  (ottenuto per la *traiettoria 2*) che corrisponde ad un errore del 5% sul valore di forza massima.

### 8.3.4 Trasparenza interfaccia

Una tra le caratteristiche più importanti richieste ad un'interfaccia aptica riguarda la trasparenza, ossia la capacità di mascherare all'operatore la propria inerzia e gli attriti interni della struttura. Per valutare le prestazioni del dispositivo da questo punto di vista, si pone uguale a zero l'impedenza desiderata ( $Z_d = 0$ ), quindi anche la forza desiderata sarà nulla ( $F_d = 0$ ). L'interfaccia aptica è tanto più trasparente quanto più la forza misurata è prossima allo zero; la forza misurata in condizioni di impedenza desiderata nulla è riportata nel grafico che segue:



**Figura 8.40:** Andamento della forza misurata all'end-effector con  $F_d = 0$ .

## CAPITOLO 9

### CONCLUSIONI

In questo lavoro di tesi sono state affrontate due principali tematiche: l'analisi ed implementazione di possibili procedure per il coordinamento del grado di libertà ridondante di un'interfaccia aptica a cinematica parallela ed il progetto di un controllore in forza, in particolare in impedenza, per il controllo dell'interfaccia aptica.

La risoluzione della cinematica inversa del dispositivo aptico è stata affrontata considerando inizialmente separati i due meccanismi che compongono l'interfaccia aptica; in questo modo è stato possibile ricavare il legame tra le velocità dell'end-effector e le velocità ai giunti, definendo quindi la matrice Jacobiana dell'intera interfaccia aptica e dei singoli meccanismi. Successivamente, per risolvere il problema cinematico inverso, considerando anche la ridondanza del sistema, sono state proposte differenti metodologie, sviluppate nel campo delle posizioni, delle velocità e delle accelerazioni. L'idea che sta alla base di tutti questi approcci, è quella di cercare un vettore di velocità ai giunti da proiettare nello spazio nullo della matrice Jacobiana e da sommare alla generica soluzione della cinematica inversa, ricavata attraverso la matrice Jacobiana pseudoinversa. In questo modo, come noto dalla letteratura, sfruttando lo spazio nullo dello Jacobiano è possibile generare dei moti interni alla struttura senza alterare la posizione

dell'end-effector.

Le varie metodologie presentate nel Capitolo 4, sfruttano lo spazio nullo della matrice Jacobiana per poter raggiungere due obiettivi: ridurre le coppie richieste agli attuatori ed ottimizzare il comportamento cinematico dell'interfaccia aptica, ossia evitare che la struttura assuma delle configurazioni singolari. Tra tutti i metodi proposti, l'unico in grado di soddisfare adeguatamente entrambe le richieste è l'ultimo, ovvero quello basato sull'analisi in frequenza delle accelerazioni dell'end-effector, quindi sull'analisi del moto imposto dall'operatore. In funzione della frequenza del movimento, si genera un vettore di accelerazioni da proiettare nello spazio nullo, che permette di avere il miglior compromesso tra le massime coppie richieste agli attuatori e la massima destrezza dell'interfaccia aptica. Questa metodologia è stata successivamente implementata anche nel sistema di controllo.

Per quanto riguarda il sistema di controllo, lo schema finale è il frutto di continue evoluzioni dell'algoritmo, che hanno portato a migliorare il più possibile la risposta in forza del sistema e ad ottenere un controllo dei moti interni che non interferisca con il controllo d'impedenza; questo è stato possibile utilizzando la matrice Jacobiana pseudoinversa pesata sulla matrice di massa. Tramite lo schema di controllo proposto nell'ultimo capitolo, è stato possibile simulare ambienti virtuali ed imporre all'operatore forze massime pari a  $40 N$ , come richiesto dalle specifiche di progetto.

Il sistema di controllo è composto da tre principali gruppi funzionali: il controllo d'impedenza, il controllo dei moti interni della struttura e l'osservatore del disturbo. A questi gruppi, ne sono stati affiancati altri dedicati a: modellare l'interazione operatore-interfaccia, aumentare la prontezza del sistema, elaborare i segnali ed interfacciare Simulink con ADAMS. Inoltre, il modello dinamico dell'interfaccia aptica è stato sviluppato per compensare i termini gravitazionali, inerziali e di Coriolis, in modo da migliorare ulteriormente la trasparenza del



dispositivo.

Gli sviluppi futuri di questo lavoro riguardano innanzitutto l'implementazione, in modalità real-time, del controllo sviluppato sull'interfaccia aptica presente in laboratorio; sarà quindi necessario, in funzione della piattaforma hardware che verrà scelta, valutare la fattibilità temporale dei calcoli, in modo che le varie informazioni possano essere elaborate senza generare eccessivi ritardi di comunicazione tra l'operatore e l'ambiente simulato.

Una volta implementato il sistema di controllo, verranno eseguite delle prove sperimentali in modo da valutare le reali prestazioni dell'interfaccia aptica in termini di trasparenza, di rigidità e di banda passante; inoltre, attraverso le informazioni raccolte, sarà possibile confrontare anche i risultati ottenuti fino ad ora. La conclusione del progetto prevede l'interfacciamento del dispositivo aptico con il robot S.L.O.T.H. a cinematica parallela, in modo da ottenere un sistema telerobotico con il quale testare nuovi algoritmi di controllo in forza.



# APPENDICE A

## COMPLEMENTI DI ALGEBRA LINEARE

Nello studio della cinematica dell'interfaccia aptica oggetto del presente lavoro si è fatto grande uso di tecniche e definizioni proprie dell'algebra lineare. Attraverso i seguenti paragrafi si intendono fornire i complementi necessari alla comprensione dei criteri proposti per la risoluzione della cinematica inversa.

### A.1 Scomposizione ai valori singolari

Gli autovalori e gli autovettori delle matrici quadratiche giocano un ruolo fondamentale sia nella teoria che nelle applicazioni. Le matrici rettangolari non hanno gli autovalori, è tuttavia possibile calcolare delle quantità che possiedono un significato fisico comparabile a quello degli autovalori: tali quantità prendono il nome di *valori singolari*.

Per definizione, i valori singolari  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  di una matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sono le radici quadrate,  $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ , degli autovalori non nulli della associata matrice di Gram  $\mathbf{K} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . I corrispondenti autovettori di  $\mathbf{K}$  sono detti *vettori singolari* di  $\mathbf{A}$  [?].

La scomposizione ai valori singolari di una matrice è una delle più importanti decomposizioni di matrici, in quanto permette di analizzare le caratteristiche di

una matrice da vari punti di vista. L'enunciato sul quale si fonda tale operazione assicura che ogni matrice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  è scomponibile in tre matrici delle quali due ortogonali ( $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ ) ed una diagonale  $\Sigma$  [8]. Si riporta il teorema adottato per la scomposizione (Kodama, Suda 1978):

Se  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  e  $\text{rango}_A = k$ , allora esistono le seguenti matrici ortogonali

$$\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_m) \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{V} = (\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (\text{A.2})$$

tali che  $\mathbf{A}$  può essere rappresentata in questo modo

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \quad (\text{A.3})$$

$$\Sigma \triangleq \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$p = \min\{m, n\}$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$$

$$\sigma_{k+1} = \dots = \sigma_p = 0$$

Nell'equazione A.3 i valori  $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$  sono detti *valori singolari* di  $\mathbf{A}$ . In particolare,  $\sigma_1$  e  $\sigma_p$  sono rispettivamente riferiti al più grande e più piccolo valore singolare. Si nota che i valori singolari sono univocamente determinati sebbene potrebbero non esserlo  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$ .

L'insieme di valori singolari non nulli di  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  è equivalente all'insieme delle radici quadrate degli autovalori non nulli di  $\mathbf{A}^T \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , o in modo equivalente, a quelli di  $\mathbf{A} \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Per le matrici quadrate ci sono i seguenti due risultati: l'insieme di valori singolari di una matrice simmetrica è equivalente all'insieme dei valori assoluti degli autovalori della matrice stessa; l'insieme dei valori singolari di una matrice simmetrica definita positiva (o non negativa) è equivalente all'insieme degli autovalori della matrice stessa.

La dimostrazione del teorema è la seguente:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i \quad \text{per } i = 1, \dots, r. \quad (\text{A.4})$$

Si cercano quindi i vettori  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  e  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  tali che  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i$ . Si scelgono allora  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$  come autovettori ortonormali della matrice di Gram, relativi agli autovalori non nulli. Per definizione di valori singolari si avrà dunque:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \mathbf{K}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i = \sigma_i^2\mathbf{v}_i \quad \text{per } i = 1, \dots, r. \quad (\text{A.5})$$

I vettori  $\mathbf{w}_i = \mathbf{A}\mathbf{q}_i$  sono di conseguenza ortogonali, infatti:

$$\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \mathbf{w}_i^T \cdot \mathbf{w}_j = \mathbf{v}_i^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{v}_j = \sigma_j^2 \mathbf{v}_i^T \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad (\text{A.6})$$

dove  $\delta_{ij}$  è la funzione delta di Kronecker. I vettori  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r$  si ottengono come:

$$\mathbf{u}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\sigma_i}. \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Numero di condizionamento

Il *numero di condizionamento*  $\kappa$  denota il rapporto tra il più grande e il più piccolo valore singolare. Simbolicamente:

$$\kappa = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} \quad (\kappa \geq 1) \quad (\text{A.8})$$

Una matrice con un piccolo numero di condizionamento è detta *ben condizionata*, d'altra parte una matrice con un grande numero di condizionamento viene detta *mal condizionata*. Vengono usati questi termini perché la risoluzione numerica di equazioni lineari aventi una matrice dei coefficienti mal condizionata implica grandi errori numerici. Ciò si può spiegare in dettaglio mediante l'analisi di sensitività di un sistema di equazioni lineari [18]:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (\text{A.9})$$

dove  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Usando la scomposizione in valori singolari (A.3) e assumendo che  $\mathbf{A}$  sia non singolare, la soluzione è la seguente:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \\ &= (\mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T)^{-1}\mathbf{y} \\ &= \mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{y} \\ \sigma_{k+1} &= \dots = \sigma_p = 0\end{aligned}$$

Definendo  $\mathbf{x}^* \triangleq \mathbf{V}^T\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}^* \triangleq \mathbf{U}^T\mathbf{y}$  la soluzione può essere rappresentata come:

$$\mathbf{x}^* = \sigma^{-1}\mathbf{y}^* \quad (\text{A.10})$$

Il “rapporto di trasmissione”  $\|\mathbf{x}^*\|/\|\mathbf{y}^*\|$  è limitato dalla seguente disuguaglianza:

$$\frac{1}{\sigma_1} \leq \frac{\|\mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{y}^*\|} \leq \frac{1}{\sigma_n} \quad (\text{A.11})$$

Ma poiché  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono matrici ortogonali, si ha

$$\|\mathbf{x}^*\| = \sqrt{(\mathbf{V}^T\mathbf{x})^T\mathbf{V}^T\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\| \quad (\text{A.12})$$

$$\|\mathbf{y}^*\| = \sqrt{(\mathbf{U}^T\mathbf{y})^T\mathbf{U}^T\mathbf{y}} = \|\mathbf{y}\|. \quad (\text{A.13})$$

Sostituendo le A.12 e A.13 nella A.16 si ottiene:

$$\frac{1}{\sigma_1} \leq \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|} \leq \frac{1}{\sigma_n}. \quad (\text{A.14})$$

Se  $\mathbf{y}$  contiene un errore di arrotondamento  $\mathbf{\Delta y}$ , l'errore sulla soluzione  $\mathbf{\Delta x}$  è rappresentato da

$$\mathbf{x} + \mathbf{\Delta x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} + \mathbf{\Delta y} \quad (\text{A.15})$$

sottraendo la soluzione del problema lineare si può scrivere

$$\mathbf{\Delta x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Delta y} \quad (\text{A.16})$$

e l'errore sul “rapporto di ingrandimento” diviene

$$\frac{1}{\sigma_1} \leq \frac{\|\mathbf{\Delta x}\|}{\|\mathbf{\Delta y}\|} \leq \frac{1}{\sigma_n}, \quad (\text{A.17})$$

quindi se il più piccolo dei valori singolari della matrice  $\mathbf{A}$  è troppo piccolo, la soluzione potrebbe includere un grande errore dovuto all'errore di arrotondamento di  $\mathbf{y}$ . Il “rapporto di ingrandimento” dell'errore relativo di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  è limitato dalla seguente disuguaglianza

$$\kappa^{-1} \leq \frac{\|\Delta \mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|}{\|\Delta \mathbf{y}\|/\|\mathbf{y}\|} \leq \kappa. \quad (\text{A.18})$$

L'equazione A.18 implica il “rapporto di ingrandimento” degli errori relativi non è più piccolo dell'inverso del numero di condizionamento e non è più grande del numero di condizionamento. Questo spiega perché con una matrice *ben condizionata* si abbia un'accuratezza della soluzione migliore.

### A.3 Manipolabilità di un manipolatore

La *manipolabilità* di un manipolatore è la capacità di cambiare arbitrariamente posizione (e orientamento) dell'organo terminale. Tale capacità è descritta in maniera efficace dall'*ellissoide di manipolabilità in velocità*. Si consideri l'insieme delle velocità ai giunti a norma costante e unitaria:

$$\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} = 1 \quad (\text{A.19})$$

l'equazione A.19 rappresenta i punti di una ipersfera nello spazio delle velocità ai giunti, a raggio unitario. Sostituendo a  $\dot{\mathbf{q}}$  la soluzione a norma minima della cinematica differenziale  $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v}_p$  si ottiene

$$\mathbf{v}_p^T (\mathbf{J}^{\dagger T} \mathbf{J}^\dagger) \mathbf{v}_p = 1 \quad (\text{A.20})$$

ovvero

$$\mathbf{v}_p^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v}_p = 1. \quad (\text{A.21})$$

che è l'equazione di un iperellissoide nello spazio delle velocità dell'end-effector. Utilizzando la scomposizione ai valori singolari dello Jacobiano e considerando

$\mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$  e definendo  $\dot{\mathbf{q}}^* \triangleq \mathbf{V}^T \dot{\mathbf{q}}$  e  $\mathbf{v}_p^* \triangleq \mathbf{U}^T \mathbf{v}_p$  è possibile giungere allo stesso risultato, infatti

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.22})$$

si può scrivere come

$$\mathbf{v}_p^* = \mathbf{\Sigma}\dot{\mathbf{q}}^*. \quad (\text{A.23})$$

Poiché il set di velocità ai giunti è scelto in base a A.19 si giunge alla seguente uguaglianza

$$\frac{v_{p1}^{*2}}{\sigma_1^2} + \frac{v_{p2}^{*2}}{\sigma_2^2} + \dots + \frac{v_{pk}^{*2}}{\sigma_k^2} = 1. \quad (\text{A.24})$$

che è l'equazione di un iperellissoide definito all'interno di un sottospazio di dimensione  $k$  dello spazio di dimensione  $m$ . Da notare che la trasformazione di coordinate imposta da  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  cambia solo la direzione di  $\dot{\mathbf{q}}$  e  $\mathbf{v}_p$ , come mostrato nelle A.12 e A.13.

Considerando l'ellissoide definito dalla A.21, si può osservare che nella direzione dell'asse maggiore l'end-effector può muoversi a velocità maggiore, mentre lungo la direzione dell'asse minore l'organo terminale si può muovere a velocità minore. Quindi quanto più l'ellissoide di manipolabilità in velocità è prossimo a una sfera tanto meglio l'end-effector può muoversi in maniera isotropa in nello spazio operativo. Ciò fa comprendere come tale ellissoide sia un indice dell'abilità di manipolazione della struttura, in relazione alle velocità. Le direzioni degli assi principali sono determinate dagli autovettori della matrice  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ , e le dimensioni di tali assi sono date dai valori singolari della matrice Jacobiana (come si può dedurre dalla A.24)

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad i = 1 \dots k \quad (\text{A.25})$$

dove  $\lambda_i(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)$  è il generico autovalore di  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ .

Una misura rappresentativa della manipolabilità globale è data dal volume dell'ellissoide. Si può dimostrare [?] che il volume dell'ellissoide è proporzionale



a

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}. \quad (\text{A.26})$$

Nei casi più generali, dove può non risultare semplice ricavare un indice di manipolabilità semplice e significativo si può far riferimento al rapporto tra il minimo ed il massimo valore singolare della matrice Jacobiana, ovvero l'inverso del numero di condizionamento

$$w(\mathbf{q}) = \kappa^{-1} = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}. \quad (\text{A.27})$$

Tale rapporto, oltre a fornire una misura della distanza dalle singolarità (si veda A.2) fornisce anche una misura diretta dell'eccentricità dell'ellissoide, indipendentemente dal volume di quest'ultimo. Lo svantaggio di questo indice è dato dalla sua complessità di calcolo, che porta spesso alla sua risoluzione in forma numerica anziché simbolica.

Analogamente a quanto visto per le velocità, è possibile definire una misura delle forze generabili all'end-effector da un dato insieme di coppie ai giunti, con il manipolatore in una postura assegnata; in questo caso l'ellissoide prende il nome di *ellissoide di manipolabilità in forza*. Nell'ipotesi di assenza di attriti nei giunti e della forza peso, indicando con:

$$\mathbf{F} = [F_1, \dots, F_m] \quad (\text{A.28})$$

il vettore delle forze e coppie agenti nello spazio di lavoro  $\mathbb{R}^m$ ;

$$\boldsymbol{\tau} = [\tau_1, \dots, \tau_n] \quad (\text{A.29})$$

il vettore delle forze e coppie agenti nello spazio dei giunti  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_m] \quad (\text{A.30})$$

$$\delta\mathbf{q} = [\delta q_1, \dots, \delta q_n] \quad (\text{A.31})$$

i vettori degli spostamenti virtuali dell'end-effector e degli attuatori. Applicando il principio dei lavori virtuali

$$\boldsymbol{\tau}^T \delta\mathbf{q} - \mathbf{F}^T \delta\mathbf{x} = 0 \quad (\text{A.32})$$

e considerando che  $\delta \mathbf{x} = \mathbf{J} \delta \mathbf{q}$  si ricava:

$$(\tau^T - \mathbf{F}^T \mathbf{J}) \delta \mathbf{q} = 0 \quad (\text{A.33})$$

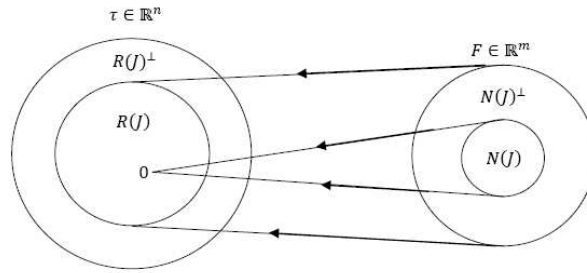
relazione che deve essere verificata per ogni spostamento virtuale. Si ottiene quindi:

$$\tau = \mathbf{J}^T \mathbf{F}. \quad (\text{A.34})$$

La matrice  $\mathbf{J}^T$  svolge una funzione analoga al caso della velocità, per quanto riguarda la trasmissione delle forze. Considerando l'insieme delle coppie ai giunti a norma costante e unitaria definito da  $\tau^T \tau = 1$  ed eseguendo i medesimi passaggi visti per l'ellissoide di manipolabilità in velocità si ottiene:

$$\mathbf{F}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T) \mathbf{F} = 1. \quad (\text{A.35})$$

che è l'equazione di un iperellissoide nello spazio delle forze dell'end-effector. Si nota dalla A.35 che il nucleo della forma quadratica è costituito dall'inversa della matrice nucleo dell'ellissoide di manipolabilità in velocità A.21. Questa caratteristica conduce al risultato che le direzioni degli assi principali dell'ellissoide di manipolabilità in velocità coincidono con quelli dell'ellissoide di manipolabilità in forza, mentre le dimensioni di tali assi sono in proporzione inversa. Si deduce quindi che la direzione di massima trasmissione di velocità possiede anche il minimo rapporto di trasmissione di forza. Inoltre dato che  $\kappa(\mathbf{J}^{-1}) = \kappa(\mathbf{J})$  si deduce che la forma dei due ellissoidi è la stessa ma che essi risultano ruotati reciprocamente. Ne risulta che una direzione ottimale per attuare una velocità risulta ottimale anche per controllare una forza, analogamente una direzione ottimale per attuare una forza risulta ottimale anche per controllare una velocità. Ciò mette in luce il concetto di *dualità cineto-statica*, che può essere compreso meglio adottando una rappresentazione propria della teoria degli insiemi.



**Figura A.1:** *Relazione tra spazio delle forze all'end-effector e spazio delle forze ai giunti*

- $\tau \in \mathbb{R}^n$  (nel caso in esame  $n = 4$ );
- $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^m$  (nel caso in esame  $m = 3$ );
- $\mathbf{J}^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ;
- $R(\mathbf{J}^T) \subset \mathbb{R}^m$  è l'immagine della trasformazione, individua le coppie ai giunti che possono bilanciare le forze all'end-effector, nella configurazione assegnata del manipolatore;
- $N(\mathbf{J}^T) \subset \mathbb{R}^m$ , è il nullo della trasformazione a cui appartengono le forze all'end-effector che non richiedono nessuna coppia di bilanciamento ai giunti, nella configurazione assegnata del manipolatore;
- $R(\mathbf{J}^T)^\perp \subset \mathbb{R}^m$  è il complemento ortogonale all'immagine della trasformazione;
- $N(\mathbf{J}^T)^\perp \subset \mathbb{R}^m$ , è il complemento ortogonale al nullo della trasformazione.

I sottospazi evidenziati sono regolati dalle seguenti relazioni:

$$N(\mathbf{J}^T) = R(\mathbf{J}^T)^\perp \quad (\text{A.36})$$

$$R(\mathbf{J}^T) = N(\mathbf{J}^T)^\perp \quad (\text{A.37})$$

(per le altre relazioni si faccia riferimento alle 4.30 - 4.30).

## A.4 Proprietà matrice pseudoinversa

- $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$
- $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}$
- $\mathbf{J}_{m \times n}$  con  $n > m$
- $\mathbf{x}_{m \times 1}$
- $\mathbf{q}_{n \times 1}$
- Pseudoinversa Moore-Penrose che minimizza la norma delle velocità dei giunti:

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \quad [\mathbf{J}^\dagger]_{n \times m} \quad (\text{A.38})$$

- Pseudoinversa pesata con matrice di massa  $\mathbf{H}$ : minimizza l'energia cinetica del sistema e non produce accelerazioni nello spazio del nullo per forze esterne applicate:

$$\mathbf{J}_H^\dagger = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}^T(\mathbf{J}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{J}^T)^{-1} \quad \left[ \mathbf{J}_H^\dagger \right]_{n \times m} \quad (\text{A.39})$$

In tal modo la soluzione della cinematica inversa sarà, per esempio a livello delle velocità, del tipo:

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{J}^\dagger \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (\text{A.40})$$

Una espressione simile a livello delle accelerazioni è invece, del tipo:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger (\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}) + \ddot{\mathbf{q}}_n = \mathbf{J}^\dagger (\ddot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \ddot{\mathbf{q}}_0 \quad (\text{A.41})$$

1.  $\mathbf{J}\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^{\dagger T}\mathbf{J}^T = \mathbf{I}_{m \times m}$
2.  $\mathbf{J}\mathbf{J}_H^\dagger = \mathbf{J}_H^{\dagger T}\mathbf{J}^T = \mathbf{I}_{m \times m}$

3.  $\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J} = \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{\dagger T} = \mathbf{W}_{n \times n}$
4.  $(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}^{\dagger T})$
5.  $(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J}) \neq (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}_H^{\dagger T})$
6.  $(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \mathbf{J}^\dagger = \mathbf{0}_{n \times m}$
7.  $(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) \mathbf{J}^T = \mathbf{0}_{n \times m}$
8.  $\mathbf{J} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) = \mathbf{0}_{m \times n}$
9.  $\mathbf{J}^{\dagger T} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) = \mathbf{0}_{m \times n}$
10.  $(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J})$
11.  $(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J}) (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J}) = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J})$
12.  $\mathbf{J} \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}_H^{\dagger T}) = \mathbf{0}_{m \times n}$
13.  $\mathbf{J}_H^{\dagger T} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}_H^{\dagger T}) = \mathbf{0}_{m \times n}$
14.  $\mathbf{J}_H^{\dagger T} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J}) = \mathbf{0}_{m \times n}$
15.  $(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J}) \mathbf{J}_H^\dagger = \mathbf{0}_{n \times m}$
16.  $(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}_H^{\dagger T}) \mathbf{H} \mathbf{J}_H^\dagger = \mathbf{0}_{n \times m}$
17.  $(\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}_H^{\dagger T}) \mathbf{H} = (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}^T \mathbf{J}_H^{\dagger T}) \mathbf{H} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J}) =$   
 $\mathbf{H} (\mathbf{I}_{n \times n} - \mathbf{J}_H^\dagger \mathbf{J})$

## A.5 Differenze tra le matrici pseudoinverse pesata e non pesata

Si è detto che la matrice pseudoinversa pesata è quella che non produce accelerazioni nello spazio nullo per una generica forza  $\mathbf{F}$  applicata all'end-effector. Dal

modello dinamico del sistema espresso nell'equazione A.42:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{d} + \mathbf{V}\mathbf{q} - \mathbf{J}^T\mathbf{F} = \mathbf{T}\tau_{\mathbf{m}} \quad (\text{A.42})$$

L'accelerazione per una determinata condizione di forze applicate vale:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{T}\tau_{\mathbf{m}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{d} - \mathbf{g} - \mathbf{J}^T\mathbf{F}) \quad (\text{A.43})$$

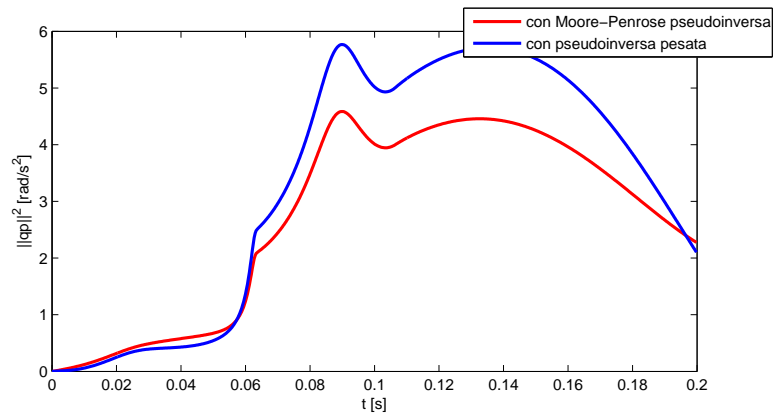
Mentre l'accelerazione nello spazio del nullo, considerando una generica pseudoinversa  $\mathbf{J}_{\text{gen}}^\dagger$  e derivando l'espressione della velocità nello spazio nullo A.44, vale:

$$\dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{n}} = (\mathbf{I} - \mathbf{J}_{\text{gen}}^\dagger \mathbf{J}) \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.44})$$

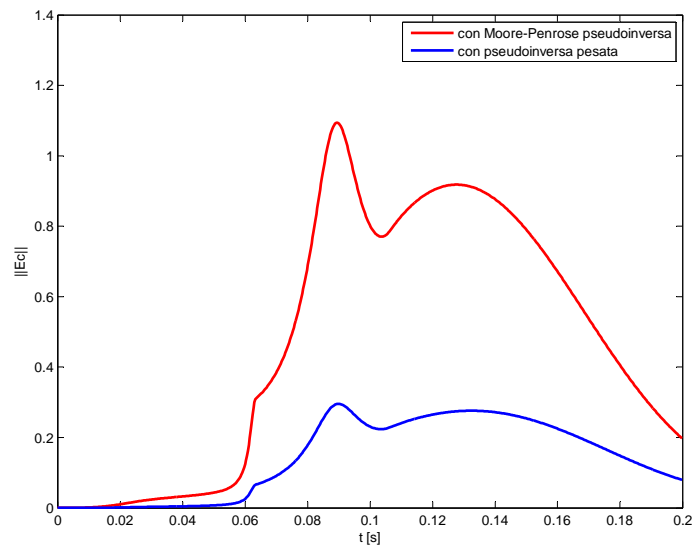
$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{n}} &= (\mathbf{I} - \mathbf{J}_{\text{gen}}^\dagger \mathbf{J}) \ddot{\mathbf{q}} - \left( \dot{\mathbf{J}}_{\text{gen}}^\dagger \mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{gen}}^\dagger \dot{\mathbf{J}} \right) \dot{\mathbf{q}} = \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{J}_{\text{gen}}^\dagger \mathbf{J}) \mathbf{H}^{-1} (\mathbf{T}\tau_{\mathbf{m}} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{d} - \mathbf{g} - \mathbf{J}^T\mathbf{F}) - \\ &\quad \left( \dot{\mathbf{J}}_{\text{gen}}^\dagger \mathbf{J} + \mathbf{J}_{\text{gen}}^\dagger \dot{\mathbf{J}} \right) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Per non avere accelerazioni nello spazio nullo per effetto delle forze esterne  $\mathbf{F}$  applicate, deve valere  $(\mathbf{I} - \mathbf{J}_{\text{gen}}^\dagger \mathbf{J}) \mathbf{H}^{-1} \mathbf{J}^T = \mathbf{0}$  vera se si usa come matrice pseudoinversa quella pesata  $\mathbf{J}_{\mathbf{H}}^\dagger$  (non è vero per la pseudoinversa di Moore-Penrose, si veda a tale proposito le proprietà esposte in appendice A). Imponendo una forza desiderata  $F_d$  costante pari a 20 N e una traslazione lungo  $z$  all'end-effector di 0.05 m, sono stati ottenuti i seguenti grafici (figure A.2, A.3), dai quali si nota come le due pseudoinverse influenzino diversamente il sistema.

La pseudoinversa di Moore-Penrose minimizza la velocità istantanea ai giunti mentre la pseudoinversa pesata minimizza l'energia cinetica della struttura.



**Figura A.2:** La pseudoinversa di Moore-Penrose minimizza la norma delle velocità ai giunti.



**Figura A.3:** La pseudoinversa pesata con la massa  $\mathbf{J}_H^\dagger$  minimizza l'energia cinetica.

## A.6 Grandezze interfaccia optica

Nella tabella che segue (Tabella A.1) sono riportate le principali caratteristiche fisiche dei vari componenti dell'interfaccia optica considerate per le simulazioni.

Grandezza	Valore	Unità di misura
$a$	0.185	[ $m$ ]
$b$	0.225	[ $m$ ]
$m$	0.095	[ $m$ ]
$n$	0.050	[ $m$ ]
$c$	0.050	[ $m$ ]
$r$	0.085	[ $m$ ]
$d$	0.193	[ $m$ ]
$v$	0.016	[ $m$ ]
$l$	0.170	[ $m$ ]
$m_a$	0.191	[ $kg$ ]
$m_b$	0.072	[ $kg$ ]
$m_m$	0.593	[ $kg$ ]
$m_n$	0.149	[ $kg$ ]
$m_c$	0.297	[ $kg$ ]
$m_r$	0.725	[ $kg$ ]
$m_{ing}$	0.157	[ $kg$ ]
$m_v$	0.154	[ $kg$ ]
$m_h$	0.067	[ $kg$ ]
$J_{mot,i} \quad i = 1, 2, 3$	$9.55 \times 10^{-5}$	[ $kgm^2$ ]
$J_{mot,i} \quad i = 4$	$8.12 \times 10^{-5}$	[ $kgm^2$ ]
$J_h$	$7.31 \times 10^{-7}$	[ $kgm^2$ ]
$J_v$	$1.16 \times 10^{-4}$	[ $kgm^2$ ]
$J_{ing}$	$1.51 \times 10^{-5}$	[ $kgm^2$ ]
$J_{pul}$	$1.11 \times 10^{-4}$	[ $kgm^2$ ]
$J_{aa}$	$5.46 \times 10^{-4}$	[ $kgm^2$ ]
$J_{mm}$	$1.80 \times 10^{-3}$	[ $kgm^2$ ]

**Tabella A.1:** Grandezze interfaccia aptica.



# APPENDICE B

## CALCOLO DERIVATA MATRICE

### JACOBIANA

In questa appendice si ricavano i vari termini che costituiscono la derivata della matrice jacobiana, presentata nel paragrafo 4.6.

$$\dot{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} [\dot{J}_{delta}] & [\dot{J}_{base}] \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

La matrice  $\dot{\mathbf{J}}_{delta}$  si può esprimere come:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{J}}_{delta} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{x,delta}^{-1} \mathbf{J}_{q,delta}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\det(\mathbf{J}_{x,delta})} \right) \mathbf{J}_{cx,delta} \mathbf{J}_{q,delta} + \\ &+ \frac{1}{\det(\mathbf{J}_{x,delta})} \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{cx,delta}) \mathbf{J}_{q,delta} + \\ &+ \frac{1}{\det(\mathbf{J}_{x,delta})} \mathbf{J}_{cx,delta} \frac{d}{dt} (\mathbf{J}_{q,delta}) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

dove le matrici  $\mathbf{J}_{x,delta}$  e  $\mathbf{J}_{q,delta}$  sono state definite nel paragrafo 4.2.1, mentre la matrice  $\mathbf{J}_{cx,delta}$  è la matrice dei complementi algebrici. Si riportano le derivate dei singoli fattori:

$$\det(\mathbf{J}_{x,delta}) = j_{1z}(j_{2x}j_{3y} - j_{2y}j_{3x}) - j_{2z}(j_{1x}j_{3y} - j_{1y}j_{3x}) + j_{3z}(j_{1x}j_{2y} - j_{1y}j_{2x}) \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\det(\mathbf{J}_{x,delta})} \right) = \frac{-\det(\mathbf{J}_{x,delta})}{\det(\mathbf{J}_{x,delta})^2} \frac{d}{dt} (\det(\mathbf{J}_{x,delta})) \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det(\mathbf{J}_{x,delta})) &= \dot{j}_{1z}(j_{2x}j_{3y} - j_{2y}j_{3x}) + j_{1z}(\dot{j}_{2x}j_{3y} + j_{2x}\dot{j}_{3y} - \dot{j}_{2y}j_{3x} - j_{2y}\dot{j}_{3x}) + \\ &\quad - \dot{j}_{2z}(j_{1x}j_{3y} - j_{1y}j_{3x}) + j_{2z}(\dot{j}_{1x}j_{3y} + j_{1x}\dot{j}_{3y} - \dot{j}_{1y}j_{3x} - j_{1y}\dot{j}_{3x}) + \\ &\quad - \dot{j}_{3z}(j_{1x}j_{2y} - j_{2y}j_{1x}) + j_{3z}(\dot{j}_{1x}j_{2y} + j_{1x}\dot{j}_{2y} - \dot{j}_{1y}j_{2x} - j_{1y}\dot{j}_{2x}) \end{aligned}$$

dove i termini  $j_{ix}$ ,  $j_{iy}$ ,  $j_{iz}$  sono stati definiti nel paragrafo 4.2.1, mentre gli altri termini sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \dot{j}_{ix} &= -\sin(\theta_{1i} + \theta_{2i})(\dot{\theta}_{1i} + \dot{\theta}_{2i}) \sin \theta_{3i} \cos \phi_i + \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \cos \theta_{3i} \dot{\theta}_{3i} \cos \phi_i + \\ &\quad + \sin \theta_{3i} \dot{\theta}_{3i} \sin \phi_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{j}_{iy} &= -\sin(\theta_{1i} + \theta_{2i})(\dot{\theta}_{1i} + \dot{\theta}_{2i}) \sin \theta_{3i} \sin \phi_i + \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \cos \theta_{3i} \dot{\theta}_{3i} \sin \phi_i + \\ &\quad - \sin \theta_{3i} \dot{\theta}_{3i} \cos \phi_i \end{aligned}$$

$$\dot{j}_{iz} = \cos(\theta_{1i} + \theta_{2i})(\dot{\theta}_{1i} + \dot{\theta}_{2i}) \sin \theta_{3i} + \sin(\theta_{1i} + \theta_{2i}) \cos \theta_{3i} \dot{\theta}_{3i}$$

$$\dot{\theta}_{3i} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{-p_x \sin \phi_i + p_y \cos \phi_i}{b}\right)^2}} \frac{1}{b} (-\dot{p}_x \sin \phi_i + \dot{p}_y \cos \phi_i)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{2i} &= -\dot{\theta}_{1i} + \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{p_x \cos \phi_i + p_y \sin \phi_i - a \cos \theta_{1i} + c - r}{b \sin \theta_{3i}}\right)^2}} \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\dot{p}_x \cos \phi_i + \dot{p}_y \sin \phi_i + a \sin \theta_{1i} \dot{\theta}_{1i}}{b \sin \theta_{3i}} + \\ &\quad - \frac{(p_x \cos \phi_i + p_y \sin \phi_i - a \cos \theta_{1i} + c - r)(b \cos \theta_{3i} \dot{\theta}_{3i})}{(b \sin \theta_{3i})^2} \end{aligned}$$

per  $i = 1, 2, 3$ . Le matrici  $\mathbf{J}_{cx,delta}$  e  $\frac{d}{dt}(\mathbf{J}_{cx,delta})$  sono le seguenti:

$$\mathbf{J}_{xc,delta} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}^T, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{J}_{xc,delta}) = \begin{bmatrix} \dot{M}_{11} & -\dot{M}_{12} & \dot{M}_{13} \\ -\dot{M}_{21} & \dot{M}_{22} & -\dot{M}_{23} \\ \dot{M}_{31} & -\dot{M}_{32} & \dot{M}_{33} \end{bmatrix}^T \quad (\text{B.6})$$

dove

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \dot{j}_{2y}\dot{j}_{3z} - \dot{j}_{2z}\dot{j}_{3y} \\
M_{21} &= \dot{j}_{1y}\dot{j}_{3z} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{3y} \\
M_{31} &= \dot{j}_{1y}\dot{j}_{2z} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{2y} \\
M_{12} &= \dot{j}_{2x}\dot{j}_{3z} - \dot{j}_{2z}\dot{j}_{3x} \\
M_{22} &= \dot{j}_{1x}\dot{j}_{3z} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{3x} \\
M_{32} &= \dot{j}_{1x}\dot{j}_{2z} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{2x} \\
M_{13} &= \dot{j}_{2x}\dot{j}_{3y} - \dot{j}_{2y}\dot{j}_{3x} \\
M_{23} &= \dot{j}_{1x}\dot{j}_{3y} - \dot{j}_{1y}\dot{j}_{3x} \\
M_{33} &= \dot{j}_{1x}\dot{j}_{2y} - \dot{j}_{1y}\dot{j}_{2x} \\
\dot{M}_{11} &= \dot{j}_{2y}\dot{j}_{3z} + \dot{j}_{2y}\dot{j}_{3z} - \dot{j}_{2z}\dot{j}_{3y} - \dot{j}_{2z}\dot{j}_{3y} \\
\dot{M}_{21} &= \dot{j}_{1y}\dot{j}_{3z} + \dot{j}_{1y}\dot{j}_{3z} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{3y} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{3y} \\
\dot{M}_{31} &= \dot{j}_{1y}\dot{j}_{2z} + \dot{j}_{1y}\dot{j}_{2z} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{2y} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{2y} \\
\dot{M}_{12} &= \dot{j}_{2x}\dot{j}_{3z} + \dot{j}_{2x}\dot{j}_{3z} - \dot{j}_{2z}\dot{j}_{3x} - \dot{j}_{2z}\dot{j}_{3x} \\
\dot{M}_{22} &= \dot{j}_{1x}\dot{j}_{3z} + \dot{j}_{1x}\dot{j}_{3z} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{3x} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{3x} \\
\dot{M}_{32} &= \dot{j}_{1x}\dot{j}_{2z} + \dot{j}_{1x}\dot{j}_{2z} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{2x} - \dot{j}_{1z}\dot{j}_{2x} \\
\dot{M}_{13} &= \dot{j}_{2x}\dot{j}_{3y} + \dot{j}_{2x}\dot{j}_{3y} - \dot{j}_{2y}\dot{j}_{3x} - \dot{j}_{2y}\dot{j}_{3x} \\
\dot{M}_{23} &= \dot{j}_{1x}\dot{j}_{3y} + \dot{j}_{1x}\dot{j}_{3y} - \dot{j}_{1y}\dot{j}_{3x} - \dot{j}_{1y}\dot{j}_{3x} \\
\dot{M}_{33} &= \dot{j}_{1x}\dot{j}_{2y} + \dot{j}_{1x}\dot{j}_{2y} - \dot{j}_{1y}\dot{j}_{2x} - \dot{j}_{1y}\dot{j}_{2x}.
\end{aligned}$$

La derivata rispetto al tempo della matrice  $\mathbf{J}_{q,delta}$  è una matrice diagonale, i cui termini sono i seguenti:

$$\dot{j}_{qii} = \cos \theta_{2i} \sin \theta_{3i} \dot{\theta}_{2i} + \sin \theta_{2i} \cos \theta_{3i} \dot{\theta}_{3i} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{B.7})$$

La derivata rispetto al tempo dello jacobiano relativo alla base mediana è:

$$\dot{\mathbf{J}}_{base} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{d}{dt} (J_x^{-1} J_q) \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

dove

$$\frac{d}{dt} (J_x^{-1} J_q) = -\frac{mn^2 \cos \theta_n \cos(\theta_n + \theta_m) \dot{\theta}_n + mn^2 \sin(\theta_m + \theta_n) (\dot{\theta}_m + \dot{\theta}_n) \sin \theta_n}{n^2 \cos^2(\theta_m + \theta_n)} \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{\theta}_n = -\dot{\theta}_m + \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\frac{d-p_{z'}-m \cos \theta_m}{n}\right)^2}} \frac{1}{n} (-\dot{p}_{z'} + m \sin \theta_m \dot{\theta}_m). \quad (\text{B.10})$$

# APPENDICE C

## MATRICI E VETTORI

Si riportano per completezza, tutte le matrici e i vettori mostrati nel capitolo 6.

### C.1 Matrici della dinamica diretta

Partendo dalla matrice delle relazioni di vincolo:

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial p_x} & \frac{\partial C_1}{\partial p_y} & \frac{\partial C_1}{\partial p_z} & \frac{\partial C_1}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{13}} & \frac{\partial C_1}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial C_2}{\partial p_x} & \frac{\partial C_2}{\partial p_y} & \frac{\partial C_2}{\partial p_z} & \frac{\partial C_2}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{13}} & \frac{\partial C_2}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial C_3}{\partial p_x} & \frac{\partial C_3}{\partial p_y} & \frac{\partial C_3}{\partial p_z} & \frac{\partial C_3}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{13}} & \frac{\partial C_3}{\partial \theta_m} \\ \frac{\partial C_4}{\partial p_x} & \frac{\partial C_4}{\partial p_y} & \frac{\partial C_4}{\partial p_z} & \frac{\partial C_4}{\partial p_{z'}} & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_{12}} & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_{13}} & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_m} \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

partizionando e trascurando i termini nulli si ottiene:

$$\mathbf{C}_{qi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial p_x} & \frac{\partial C_1}{\partial p_y} & \frac{\partial C_1}{\partial p_z} & 0 \\ \frac{\partial C_2}{\partial p_x} & \frac{\partial C_2}{\partial p_y} & \frac{\partial C_2}{\partial p_z} & 0 \\ \frac{\partial C_3}{\partial p_x} & \frac{\partial C_3}{\partial p_y} & \frac{\partial C_3}{\partial p_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C_4}{\partial p_{z'}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{C}_{qd} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C_4}{\partial \theta_m} \end{bmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Il legame tra il vettore delle coordinate generalizzate e quello delle coordinate indipendenti è:

$$\delta \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_i \\ \delta \mathbf{q}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{q}_i \\ \mathbf{C}_{di} \delta \mathbf{q}_i \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{di} \delta \mathbf{q}_i \quad (\text{C.4})$$

La matrice  $\mathbf{C}_{di}$  si ottiene come:

$$\mathbf{C}_{di} = -\mathbf{C}_{qd}^{-1} \mathbf{C}_{qi} \quad (\text{C.5})$$

quindi, essendo la matrice  $\mathbf{C}_{qd}$  diagonale, si ha:

$$\mathbf{C}_{di} = - \begin{bmatrix} 1/\frac{\partial C_1}{\partial \theta_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\frac{\partial C_2}{\partial \theta_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\frac{\partial C_3}{\partial \theta_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/\frac{\partial C_4}{\partial \theta_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial C_1}{\partial p_x} & \frac{\partial C_1}{\partial p_y} & \frac{\partial C_1}{\partial p_z} & 0 \\ \frac{\partial C_2}{\partial p_x} & \frac{\partial C_2}{\partial p_y} & \frac{\partial C_2}{\partial p_z} & 0 \\ \frac{\partial C_3}{\partial p_x} & \frac{\partial C_3}{\partial p_y} & \frac{\partial C_3}{\partial p_z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial C_4}{\partial p_{z'}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

dove:

$$\frac{\partial C_i}{\partial p_x} = 2p_x - 2[r - c + a \cos(\theta_{1i})] \cos(\phi_i)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial p_y} = 2p_y - 2[r - c + a \cos(\theta_{1i})] \sin(\phi_i)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial p_z} = 2p_z - 2a \sin(\theta_{1i})$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial p_{z'}} = 2(p_{z'} - d) + 2m \cos(\theta_m)$$

$$\frac{\partial C_i}{\partial \theta_{1i}} = -2(r - c)a \sin(\theta_{1i}) + 2p_x a \cos(\phi_i) \sin(\theta_{1i}) + 2p_y a \sin(\phi_i) \sin(\theta_{1i}) - 2p_z a \cos(\theta_{1i})$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial \theta_m} = 2(r - l)m \cos(\theta_m) - 2(p_{z'} - d)m \sin(\theta_m) \quad \text{per } i = 1, 2, 3$$

Quindi la matrice  $[B_{di}]$  è data da:

$$\begin{aligned}
 [B_{di}] = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\partial C_1}{\partial p_x} / \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{11}} & -\frac{\partial C_1}{\partial p_y} / \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{11}} & -\frac{\partial C_1}{\partial p_z} / \frac{\partial C_1}{\partial \theta_{11}} & 0 \\ -\frac{\partial C_2}{\partial p_x} / \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{12}} & -\frac{\partial C_2}{\partial p_y} / \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{12}} & -\frac{\partial C_2}{\partial p_z} / \frac{\partial C_2}{\partial \theta_{12}} & 0 \\ -\frac{\partial C_3}{\partial p_x} / \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{13}} & -\frac{\partial C_3}{\partial p_y} / \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{13}} & -\frac{\partial C_3}{\partial p_z} / \frac{\partial C_3}{\partial \theta_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial C_4}{\partial p_{z'}} / \frac{\partial C_4}{\partial \theta_m} \end{bmatrix} = \\
 = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{C_{1x}}{C_{1\theta_{11}}} & -\frac{C_{1y}}{C_{1\theta_{11}}} & -\frac{C_{1z}}{C_{1\theta_{11}}} & 0 \\ -\frac{C_{2x}}{C_{2\theta_{12}}} & -\frac{C_{2y}}{C_{2\theta_{12}}} & -\frac{C_{2z}}{C_{2\theta_{12}}} & 0 \\ -\frac{C_{3x}}{C_{3\theta_{13}}} & -\frac{C_{3y}}{C_{3\theta_{13}}} & -\frac{C_{3z}}{C_{3\theta_{13}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{C_{4z'}}{C_{4\theta_m}} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Con la seguente simbologia  $\frac{\partial C_1}{\partial p_x} = C_{1x}$ , si è assunta una forma di scrittura più compatta per indicare le derivate.

Differenziando termine a termine rispetto al tempo, si ottiene la matrice  $[\dot{B}_{di}]$ :

$$[\dot{B}_{di}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\dot{C}_{1x}C_{1\theta 11} - \dot{C}_{1\theta 11}C_{1x}}{C_{1\theta 11}^2} & -\frac{\dot{C}_{1y}C_{1\theta 11} - \dot{C}_{1\theta 11}C_{1y}}{C_{1\theta 11}^2} & -\frac{\dot{C}_{1z}C_{1\theta 11} - \dot{C}_{1\theta 11}C_{1z}}{C_{1\theta 11}^2} & 0 \\ -\frac{\dot{C}_{2x}C_{2\theta 12} - \dot{C}_{2\theta 12}C_{2x}}{C_{2\theta 12}^2} & -\frac{\dot{C}_{2y}C_{2\theta 12} - \dot{C}_{2\theta 12}C_{2y}}{C_{2\theta 12}^2} & -\frac{\dot{C}_{2z}C_{2\theta 12} - \dot{C}_{2\theta 12}C_{2z}}{C_{2\theta 12}^2} & 0 \\ -\frac{\dot{C}_{3x}C_{3\theta 13} - \dot{C}_{3\theta 13}C_{3x}}{C_{3\theta 13}^2} & -\frac{\dot{C}_{3y}C_{3\theta 13} - \dot{C}_{3\theta 13}C_{3y}}{C_{3\theta 13}^2} & -\frac{\dot{C}_{3z}C_{3\theta 13} - \dot{C}_{3\theta 13}C_{3z}}{C_{3\theta 13}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\dot{C}_{4z'}C_{4\theta m} - \dot{C}_{4\theta m}C_{4z'}}{C_{4\theta m}^2} \end{bmatrix}$$

avendo definito per comodità le nuove variabili  $C_{ix}$ ,  $C_{iy}$ ,  $C_{iz}$ ,  $C_{i\theta 1i}$ ,  $C_{4\theta m}$ ; differenziando queste rispetto al tempo si ha:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{ix} &= 2\dot{p}_x + 2a \cos(\phi_i) \sin(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i} \\ \dot{C}_{iy} &= 2\dot{p}_y + 2a \sin(\phi_i) \sin(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i} \\ \dot{C}_{iz} &= 2\dot{p}_z - 2a \cos(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i} \\ \dot{C}_{4z'} &= 2\dot{p}_{z'} - 2m \sin(\theta_m) \dot{\theta}_m \\ \dot{C}_{i\theta 1i} &= -2(r-c)a \cos(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i} + 2\dot{p}_x a \cos(\phi_i) \sin(\theta_{1i}) + 2p_x a \cos(\phi_i) \cos(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i} + \\ &\quad + 2\dot{p}_y a \sin(\phi_i) \sin(\theta_{1i}) + 2p_y a \sin(\phi_i) \cos(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i} - 2\dot{p}_z a \cos(\theta_{1i}) + 2p_z a \sin(\theta_{1i}) \dot{\theta}_{1i} \\ \dot{C}_{4\theta m} &= -2(r-l)m \sin(\theta_m) \dot{\theta}_m - 2\dot{p}_{z'} m \sin(\theta_m) - 2(p_{z'} - d)m \cos(\theta_m) \dot{\theta}_m \quad \text{per } i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$



Definendo come vettore delle velocità fisiche:

$$\dot{\mathbf{x}} = \left\{ \begin{array}{c} v_{rz} \\ v_{cx} \\ v_{cy} \\ v_{cz} \\ \omega_m \\ \omega_{a1} \\ v_{a1x} \\ v_{a1y} \\ v_{a1z} \\ \omega_{a2} \\ v_{a2x} \\ v_{a2y} \\ v_{a2z} \\ \omega_{a3} \\ v_{a3x} \\ v_{a3y} \\ v_{a3z} \\ v_{b1x} \\ v_{b1y} \\ v_{b1z} \\ v_{b2x} \\ v_{b2y} \\ v_{b2z} \\ v_{b3x} \\ v_{b3y} \\ v_{b3z} \\ v_{ingx} \\ v_{ingz} \\ \omega_{ing1} \\ \omega_{ing2} \\ \omega_{ing3} \\ \omega_{mot1} \\ \omega_{mot2} \\ \omega_{mot3} \\ \omega_{mot4} \\ v_{v1x} \\ v_{v1z} \\ v_{v2x} \\ v_{v2z} \\ v_{v3x} \\ v_{v3z} \end{array} \right\} \quad (C.7)$$

La matrice di massa  $[M]$  è pari a:

$$[M] = \text{diag} \left[ \begin{array}{c} m_r + \frac{3}{2}(m_n + m_v) + 3m_h \\ m_c + \frac{3}{2}m_b \\ m_c + \frac{3}{2}m_b \\ m_c + \frac{3}{2}m_b \\ 3J_{mm} + J_{pul} \\ J_{aa} + J_h + J_v \\ m_a \\ m_a \\ m_a \\ J_{aa} + J_h + J_v \\ m_a \\ m_a \\ m_a \\ J_{aa} + J_h + J_v \\ m_a \\ m_a \\ m_a \\ \frac{m_b}{2} \\ \frac{m_b}{2} \\ \frac{m_b}{2} \\ \frac{m_b}{2} \\ \frac{m_b}{2} \\ \frac{m_b}{2} \\ \frac{m_b}{2} \\ \frac{m_b}{2} \\ \frac{m_b}{2} \\ \frac{3}{2}(m_n + m_{ing}) \\ \frac{3}{2}(m_n + m_{ing}) \\ J_{ing} \\ J_{ing} \\ J_{ing} \\ J_{mot1} \\ J_{mot2} \\ J_{mot3} \\ J_{mot4} \\ m_v \\ m_v \\ m_v \\ m_v \\ m_v \\ m_v \end{array} \right] \quad (C.8)$$

La matrice  $[\Lambda]$ , che lega le coordinate fisiche a quelle generalizzate, è:

$$[\Lambda] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} \sin(\theta_{11}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{a}{2} \cos(\theta_{11}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} \sin(\theta_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{a}{2} \cos(\theta_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a}{2} \sin(\theta_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{a}{2} \cos(\theta_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a \sin(\theta_{11}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \cos(\theta_{11}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \sin(\theta_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a \cos(\theta_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a \sin(\theta_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a \cos(\theta_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m \cos(\theta_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \sin(\theta_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{56}} & 0 & 0 & \Psi^{(1)}(\theta_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{56}} & 0 & \Psi^{(1)}(\theta_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\tau_{56}} & \Psi^{(1)}(\theta_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{34}\tau_{56}} & 0 & 0 & \Psi^{(2)}(\theta_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{34}\tau_{56}} & 0 & \Psi^{(2)}(\theta_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{34}\tau_{56}} & \Psi^{(2)}(\theta_m) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\tau_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -v \sin(\varphi_{11}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & v \cos(\varphi_{11}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v \sin(\varphi_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & v \cos(\varphi_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -v \sin(\varphi_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & v \cos(\varphi_{13}) & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

dove:

$$\varphi_{1i} = \theta_{1i} - \theta_{1i_0} - \theta_{v_0} \quad \text{per} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\Psi^{(1)}(\theta_m) = -\frac{m \cos(\theta_m)}{n \sin \left\{ \arccos \left[ \frac{1}{n}(l - r - m \sin(\theta_m)) \right] \right\}} \left( 1 + \frac{1}{\tau_{56}} \right)$$

$$\Psi^{(2)}(\theta_m) = \frac{m \cos(\theta_m)}{n \sin \left\{ \arccos \left[ \frac{1}{n}(l - r - m \sin(\theta_m)) \right] \right\}} \left( 1 + \frac{1}{\tau_{56}} \right) \frac{1}{\tau_{34}} + \left( 1 - \frac{1}{\tau_{34}} \right)$$



dove:

$$\dot{\Psi}^{(1)}(\dot{\theta}_m, \theta_m) = -\frac{m \sin(\theta_m) \dot{\theta}_m \psi - \dot{\psi} m \cos(\theta_m)}{\psi^2} \left(1 + \frac{1}{\tau_{56}}\right)$$

$$\dot{\Psi}^{(2)}(\dot{\theta}_m, \theta_m) = -\dot{\Psi}^{(1)}(\dot{\theta}_m, \theta_m) \frac{1}{\tau_{34}}$$

con:

$$\psi = n \sin \left\{ \arccos \left[ \frac{1}{n} (l - r - m \sin(\theta_m)) \right] \right\}$$

$$\dot{\psi} = n \cos \left\{ \arccos \left[ \frac{1}{n} (l - r - m \sin(\theta_m)) \right] \right\} \frac{\frac{m}{n} \cos(\theta_m) \dot{\theta}_m}{\sqrt{1 - \left[ \frac{1}{n} (l - r - m \sin(\theta_m)) \right]^2}}$$

L'ultima matrice necessaria per la definizione delle equazioni di moto è la matrice  $[W]$ , data da:

$$[W] = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i} ([\Lambda][B_{di}]\dot{\mathbf{q}}_i)$$

Si definisca per comodità di calcolo il vettore  $[D]$  ed il vettore  $[E]$  ottenute come:

$$[D] = [B_{di}]\dot{\mathbf{q}}_i$$

$$[E] = [\Lambda][D]$$

dove esplicitando i termini e tralasciando quelli nulli si ha:

$$[D] = \begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \\ \dot{p}_z \\ \dot{p}_{z'} \\ -\frac{C_{1x}}{C_{1\theta 11}} \dot{p}_x - \frac{C_{1y}}{C_{1\theta 11}} \dot{p}_y - \frac{C_{1z}}{C_{1\theta 11}} \dot{p}_z \\ -\frac{C_{2x}}{C_{2\theta 12}} \dot{p}_x - \frac{C_{2y}}{C_{2\theta 12}} \dot{p}_y - \frac{C_{2z}}{C_{2\theta 12}} \dot{p}_z \\ -\frac{C_{3x}}{C_{3\theta 13}} \dot{p}_x - \frac{C_{3y}}{C_{3\theta 13}} \dot{p}_y - \frac{C_{3z}}{C_{3\theta 13}} \dot{p}_z \\ -\frac{C_{4z'}}{C_{4\theta m}} \dot{p}_{z'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{pmatrix}$$

La matrice  $[W]$  si ottiene differenziando, rispetto alle coordinate indipendenti, la matrice  $[E]$ ; tralasciando i termini nulli si ottiene pertanto:







Si riporta infine la componente Lagrangiana dovuta al campo gravitazione:

$$Q_g = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ [m_c + \frac{3}{2}m_b] g \\ [m_r + m_c + \frac{3}{2}m_n + 3(m_a + m_b + m_h + m_v)] g \\ [\frac{a}{2} \cos(\theta_{11})(m_a + m_b) + m_v v \cos(\theta_{11} - \theta_{11_0} - \theta_{v_0})] g \\ [\frac{a}{2} \cos(\theta_{12})(m_a + m_b) + m_v v \cos(\theta_{12} - \theta_{12_0} - \theta_{v_0})] g \\ [\frac{a}{2} \cos(\theta_{13})(m_a + m_b) + m_v v \cos(\theta_{13} - \theta_{13_0} - \theta_{v_0})] g \\ [3\frac{m}{2} \sin(\theta_m)(m_m + m_h) + 3m_{ing}m \sin(\theta_m)] g \end{array} \right\}$$

Per la componente Lagrangiana delle forze esterne si veda il par. ?? della dinamica inversa.



# APPENDICE D

## MODELLI D'ATTRITO

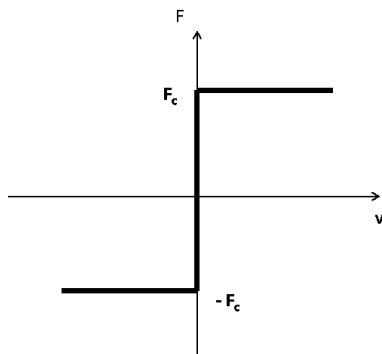
Al fine di realizzare un modello che rappresenti al meglio le reali condizioni di funzionamento di un sistema meccanico, è necessario considerare nel modello dinamico anche l'effetto dissipativo dovuto agli attriti. Di seguito si riporta una breve descrizione dei principali modelli di attrito disponibili in letteratura:

- modello classico;
- modello di Karnopp, ampiamente usato nella modellazione;
- modello di Hayward con approccio sulle posizioni.

L'azione dissipativa da parte degli attriti verrà monitorata e compensata attraverso un osservatore del disturbo, descritto nei paragrafi successivi.

### **Modello classico**

Il modello di attrito classico prevede la rappresentazione della forza d'attrito radente attraverso la forza d'attrito Coulombiana ( $\mu_r$  coefficiente d'attrito radente), cambiata opportunamente di segno in funzione del verso della velocità:

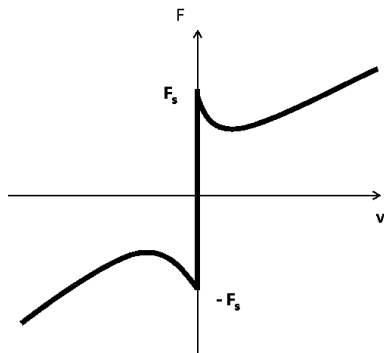


$$F = F_c \operatorname{sign}(v) \quad (\text{D.1})$$

$$F_c = \mu_r F_n \quad (\text{D.2})$$

**Figura D.1:** Attrito di Coulomb.

Un modello più evoluto è quello proposto da Stribeck che considera i casi di velocità nulla o di velocità variabile introducendo rispettivamente le condizioni di attrito statico e attrito viscoso; le relazioni che descrivono questo modello sono le seguenti: dove  $F_e$  è la forza esterna applicata e  $F_s = \mu_s F_n$  (con  $\mu_s$  è il



$$F = \begin{cases} F_e & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| < F_s \\ F_s \operatorname{sign}(F_e) & \text{se } v = 0 \text{ e } |F_e| = F_s \\ F(v) & \text{se } v \neq 0 \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

**Figura D.2:** Attrito di Stribeck.

coefficiente d'attrito statico) è la forza limite di attrito statico (maggiore della forza di Coulomb) in stato di immobilità dei corpi. Dalle relazioni D.3 si nota che a velocità nulla, la forza  $F$  vale rispettivamente  $F_s$  o  $F_e$  in funzione che le forze esterne applicate siano uguali o minore della forza limite  $F_s$ . Se il corpo possiede una velocità diversa da 0, allora il legame tra la forza  $F$  e la velocità  $v$



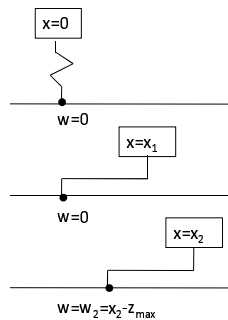
### Modello di Hayward

Questo modello d'attrito definisce la forza d'attrito solo in funzione dello spostamento  $e$ , come il modello di Karnopp, permette di modellare il comportamento stick-slip. Da un punto di vista computazionale si dimostra molto efficiente in quanto è definito a tempo discreto.

Concettualmente, il modello di Hayward, considera una massa in movimento collegata ad un piano fisso mediante una molla; la forza d'attrito è quindi modellata nel seguente modo:

$$F = -K z \quad (\text{D.6})$$

dove  $K$  è il coefficiente di rigidità e  $z$  è l'allungamento della molla. Si faccia ri-



**Figura D.4:** *Transizione di stato nel modello di Hayward.*

ferimento alla Figura D.4: ad ogni istante di tempo  $k$  viene calcolata la distanza  $z_k = x_k - w_k$ ; se si verifica che  $|z_k| \geq z_{\max}$ , la molla virtuale raggiunge la sua massima estensione indicata da  $z_{\max}$  (fase di scivolamento) e il punto  $w$  è aggiornato in modo che  $|z| = z_{\max}$ . Pertanto quando si è in fase di tensione massima si verifica che:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dw}{dt} \quad e \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

Una descrizione formale del modello è la seguente:

$$w_k = \left\{ \begin{array}{ll} w_{k-1} + y_k \alpha(z) (x_k - w_{k-1}) & \alpha(z) |x_k - w_{k-1}| < 1 \\ x_k - \frac{x_k - w_{k-1}}{|x_k - w_{k-1}|} z_{\max} & \text{se } \textit{altrimenti} \end{array} \right\} \quad (\text{D.7})$$

dove:

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \alpha(x_k - w_{k-1}) \\ y_k &= (x_k - x_{k-1}) \\ \alpha(x_k - w_{k-1}) &= \left\{ \begin{array}{ll} 0 & |z| < z_{stick} \\ \frac{1}{z_{\max}} & \textit{altrimenti} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Il parametro  $z_{stick}$  permette al modello di avere oscillazioni rilassate quando la quantità  $(x_k - w_{k-1})$  assume un valore prossimo a  $z_{stick}$ . In tal modo queste oscillazioni rilassate descrivono il fenomeno di bumpy che si verifica quando c'è una transizione dallo stato di bloccaggio a quella di scivolamento.





# Bibliografia

- [1] D. Checcacci, A. Frisoli, M. Bergamasco “L’Interfaccia Aptica Master del sistema metafore”, XXX Convegno Nazionale AIAS - Alghero (SS), 12-15 settembre 2001.
- [2] M. Bergamasco “Le musee del formes pures”, IEEE International Workshop on Robot and Human Interaction, Volume: 8th Issue: RO-MAN 99, pag. 27-29, 1999.
- [3] R. Comelli “Progetto di un’interfaccia aptica ridondante”, Tesi di laurea, pag. 79 - 80; pag. 135 - 139, 2003.
- [4] D. Rimoldi “Sviluppo di un’interfaccia aptica ridondante: attuazione mediante motori frameless e realizzazione di un sensore di forza dedicato”, Tesi di laurea, pag. 77 - 145, 2003.
- [5] S. Chatterton “Progetto e verifica sperimentale delle prestazioni di un robot a cinematica parallela”, Tesi di laurea, 2002.
- [6] D. B. Martin, J. Baillieul, “Resolution of kinematic redundancy using optimization techniques”, IEEE Transactions on robotics and automation, Vol. 5, No. 4 IEEE, 1989.
- [7] B. Siciliano, L. Sciavicco “Robotica industriale”, McGraw Hill, pag. 100-101, 2000.

- 
- [8] Y. Nakamura, "Advanced robotics", Addison Wesley, pag. 30-40, 1991.
- [9] G. Legnani "Robotica industriale", Casa Editrice Ambrosiana, pag. 310; pag. 503-507, 2007.
- [10] M. Spong, M. Vidyasagar "Robot dynamics and control", John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [11] j. Salisbury, J. Craig "Active stiffness control of manipulator in cartesian coordinates", IEEE Conference on Decision and Control, 1980.
- [12] M.H. Raibert, J.J. Craig "Hybrid position/force control of manipulators", ASME J. Dynamic Meas. Control, pag. 126-133, 1981.
- [13] A. Chae, C. Atkeson e Hollerbach "Model-based control of a robot manipulator", MIT Press, Cambridge, 1988.
- [14] N. Hogan "Stable execution of contact tasks using impedance control", IEEE Conference on Robotics and Automation, Raleigh, pag. 595-601, 1987.
- [15] Z. Lu e A.A. Goldenberg "Robust impedance control and force regulation: theory and experiment", Int. J. of Robotics Research, 1995.
- [16] J.P. Merlet "Les robots paralleles", Hermes, 1990.
- [17] R. Clavel, "Delta, a fast robot with parallel geometry", Proceedings of the 1988 IEEE International Symposium on Industrial Robot, pp. 91-100, Aprile 1988.
- [18] A. Quarteroni, F. Saleri "Introduzione al calcolo scientifico", Springer, pag. 106-110, 2001.
- [19] G. Vianello "Meccanica delle macchine 3", Sansoni, pag.209-218, 2000.

- 
- [20] C. Gosselin, J. Angeles “Singularity analysis of closed-loop kinematic chains”, IEEE Transaction on Robotics and Automation, vol. 6, n. 3, pp. 281–290, Giugno 1990.
- [21] L-W. Tsai “Robot analysis: the mechanics of serial and parallel manipulators”, John Wiley & Sons Inc., 1999.
- [22] Tsai L. W., “Systematic enumeration of parallel manipulators”, Technical Research Report ISR; TR 1998-33, 1998.
- [23] L. W. Tsai, G. C. Walsh, R. E. Stamper “Kinematics of a three dof platform with three extensible limbs”, Mechanical Engineering Departement and Institute for System Research, University of Maryland, College Park, MD 20742, U.S.A., ISR Technical Report, 1996.
- [24] A. Shabana “Dynamics of multibody system”, Cambridge University press, pag. 57-164, 1998.
- [25] A. Neve “Digital signal processing”, Schöenfeld & Ziegler, pag. 31-119, 2002.
- [26] J. Nemeč “Pseudoinverse and Null Space Velocity Controller”, Josef Stefan Institute.
- [27] P.Rocco “Controllo automatici per la mecatronica - Controlli avanzati”, Dispense del corso di Controlli automatici per la mecatronica.
- [28] P.Rocco “Controllo automatici per la mecatronica - Controllo digitale”, Dispense del corso di Controlli automatici per la mecatronica.
- [29] Sito Web “Robotic oncology”, [www.roboticoncology.com](http://www.roboticoncology.com) .
- [30] Datasheet “Moog simodont dental trainer. haptic technology and high fidelity”, Sito Web: [www.moog.com/markets/medical-dental-simulation/haptic-technology-in-the-moog-simodont-dental-trainer](http://www.moog.com/markets/medical-dental-simulation/haptic-technology-in-the-moog-simodont-dental-trainer) .