Università degli Studi di Bergamo
Dottorato di Ricerca in Scienze Pedagogiche
Dipartimento di Scienze della Persona
Ciclo XXIII

LA GEOMETRIA TRA INTUIZIONE E RIGORE:

OCCASIONE PER L'EDUCAZIONE DELLA PERSONA

Supervisore
Chiar.mo Prof. Mario Marchi

Tesi *Dottorato di Ricerca*
Francesca Baresi
Matricola n. 1004394

Anno Accademico 2010/2011

A Noi due

SOMMARIO

PREMESSA:

MOTIVAZIONI PER UNA RICERCA

Sono da sei anni docente di matematica. Inizialmente ho insegnato per due anni in un istituto professionale, per poi passare, ad un liceo scientifico, incarico, quest'ultimo, abbinato ad una docenza di quattro ore settimanali in una Scuola Secondaria di primo grado (classe terza). Tre anni fa ho svolto l'attività di Esercitatrice nel corso di *Algebra e geometria* presso una Facoltà di Ingegneria.
La mia esperienza all'interno della scuola è stata quindi molto diversificata, sia per l'età degli studenti incontrati, sia per la varietà di indirizzi di studio nei quali ho insegnato. In aggiunta alla molteplicità di realtà scolastiche vissute, di grande rilievo è il fatto che l'intervallo di tempo nel quale mi sono trovata a doverle gestire, talvolta anche in contemporanea, è risultato molto ristretto. Questo ha comportato che mi sia spesso trovata a dover cambiare da un'ora all'altra registro comunicativo, dinamiche relazionali, impostazione didattica, e ciò non sempre con la consapevolezza di quello a cui stavo dando risposta.
Mi ritengo molto fortunata per aver avuto, fin dal primo incarico nella scuola, la possibilità di affiancare dei ragazzi per l'intero anno scolastico, anzi, nella maggior parte delle esperienze elencate, anche per più anni consecutivi. Questa esperienza mi ha fatto concentrare non tanto sull'aspetto tecnicamente didattico, ma piuttosto sull'orizzonte di senso che dovevo trasmettere ai ragazzi, per motivarli a 'seguirmi' alla scoperta della matematica per ben nove mesi o più.

La mia formazione scolastica, fino a cinque anni fa è stata prettamente scientifica: cinque anni di liceo scientifico e cinque anni di corso di laurea in matematica.
Cinque anni fa ho frequentato la Scuola di Specializzazione all'Insegnamento Secondario (SSIS) per le classi di Matematica e Fisica. Questo percorso era strutturato secondo quattro aree di studio:

- *Area trasversale* costituita da corsi di attinenza pedagogico/psicologica/didattica

- *Tirocinio* nella scuola (ho svolto il tirocinio in una Scuola Secondaria di primo grado, in un liceo scientifico e in un istituto tecnico)
- *Area di didattica della matematica*
- *Area laboratoriale* nella quale si realizzavano percorsi spendibili in classe.

Non nego che inizialmente l'affrontare temi pedagogico/didattici sia stato difficile. La mia formazione prevalentemente scientifica faceva fatica ad entrare in una dimensione 'altra' rispetto al disciplinare. Nutrivo inoltre il grande desiderio tipico di 'fine-università': poter finalmente insegnare quello per cui avevo studiato e di cui ero veramente appassionata, senza dover fare i conti con formazione di altro genere.

Il mio essere da anni educatrice in attività di volontariato nell'ambito cattolico mi rendeva poi abbastanza sicura, anche nella gestione di gruppi di ragazzi con i quali comunicare, dialogare e trasmettere valori.

Ben presto quelli appena descritti si sono rivelati pensieri banali e superficiali all'interno del complesso[1] mondo scolastico.

Come persona mi sono sempre sentita interpellata a dare risposte adeguate, specifiche e mirate rispetto alle realtà che incontravo.

Nel contesto scuola mi sono trovata a dover rispondere a delle 'urgenze educative', a dover interpretare situazioni e a dovermi porre domande sul significato dell''insegnare' e del mio 'insegnare matematica' in particolare. Non mi ero mai data, prima di intraprendere il percorso del Dottorato, del tempo e degli strumenti, che fossero adeguati per riflettere a riguardo, cercando di darmi risposte.

Trovarle all'interno della sola matematica non era possibile. Riflettendo sul mio percorso formativo intravedevo, rispetto a questi nuovi e pressanti interrogativi, che mi si presentavano, una direzione perseguibile, suggeritami da alcuni stimoli e suggestioni forniti dalla SSIS. Era l''area trasversale' che aveva qualcosa da dirmi. Avevo scoperto che *non è possibile risolvere i misteri del pensiero matematico se non si riflette sul pensiero umano in generale*[2]*;* questa affermazione ritengo si possa riferire non solo all'ambito del pensiero, ma anche alla didattica e all'educazione. Proprio perché la matematica si ritiene essere una delle discipline da proporre in ciascun ordine e grado del sistema scolastico italiano e non, ad essa è riconosciuto uno status di disciplina fondamentale per la formazione e l'educazione della persona in generale. Indagare quindi

[1] Con il termine complesso non si intende necessariamente qualcosa di complicato
[2] Sfrad A., 2009, p.20

il pensiero umano in generale per poi dispiegare i misteri del pensiero matematico sembra più che lecito e sensato.

È nato così dentro di me il desiderio di provare a esplorare i suggerimenti che potevano venire dalla scienza pedagogica, attraverso la partecipazione a questo Dottorato in Scienze Pedagogiche, per scoprire la vera essenza della disciplina e il suo ruolo, e per trovare in essa degli spunti in modo da farvi confluire le domande che mi ponevo, inserendole in un unico quadro di lettura della realtà, che mi rendesse capace di risposte più sicure e chiare, prima ancora che per gli altri, per me stessa.

Ritengo importante, a proposito, citare una riflessione di Dewey che descrive quello che ha rappresentato la pedagogia da me scoperta in questo percorso di dottorato:

> *una visione intellettuale non è mai un quadro reale, ma può renderci capaci di costruire quadri reali che senza di essa non esisterebbero*[3].

È importante rendersi conto che le scelte legate alla contingenza e il comportamento da tenere in una specifica classe non sono risultati ottenuti in modo deterministico dalla teoria pedagogica scelta, ma rimangono legati alla sfera della libertà e della persona che sono io. Ricordiamo infatti che:

> *Adoperare le leggi di tutte le scienze dell'educazione per educare un soggetto concreto, […] se è indispensabile per comprendere più a fondo la situazione in cui ci si trova, non ci può guidare all'azione opportuna, cioè alla saggezza, nella situazione reale. Questa è e resta responsabilità umana, prima ancora che professionale, di ciascuno, e a maggior ragione nel caso dell'educatore*[4].

[3] Dewey J., 1938, cit. in Bertagna G., 2009, p.21
[4] Bertagna G., 2009, p.21

INTRODUZIONE

Il percorso di Dottorato in Scienze Pedagogiche intrapreso ha portato la scrivente ad affrontare una Ricerca che tenesse in considerazione riflessioni di carattere pedagogico, esperienze d'insegnamento della matematica (proprie ed altrui) e risultati di lavori e studi di Didattica della matematica.

La presente Ricerca è stata motivata dalla convinzione dell'elevato e irrinunciabile valore educativo proprio della geometria. D'altra parte l'amara analisi delle difficoltà incontrate dagli studenti di Scuola Secondaria di Secondo grado nell'affrontare la trattazione sintetica della geometria, analisi confermata anche da diverse considerazioni svolte da insegnanti che nella loro attività professionale tentano di dare una soluzione ai problemi che tali difficoltà rivelano, rende necessario e urgente trovarne adeguate risposte.

Per svolgere una riflessione in merito all'analisi e alle possibilità di superare le difficoltà di cui si è parlato, si è impostato un lavoro che portasse a riscoprire e ad approfondire il valore educativo della disciplina geometrica, valore che, in particolare, per noi è riconducibile al significato, all'importanza e all'utilizzo delle procedure mentali di *intuizione* e *rigore.* Per poter effettivamente *fare geometria* è necessario coinvolgere e stimolare lo studente perché attivi tali procedure.

Per valutare il valore educativo che deve essere riconosciuto alla geometria, si sono individuati nei processi mentali che la riguardano due livelli fra loro complementari e inscindibili l'uno dall'altro:

- il *livello intellettuale,* che riguarda la specificità disciplinare a cui ci si sta riferendo;
- il *livello etico* che caratterizza gli attori coinvolti nel processo di insegnamento-apprendimento della geometria e quindi l'insegnante e lo studente (ovvero la classe di studenti nella quale il processo viene realizzato).

Il *livello intellettuale* coinvolto nello studio della disciplina e stimolato dalla riflessione sugli argomenti legati alla geometria è ben sottolineato dalle parole di G.Padoa:

> *la matematica è universalmente utile; oltre, e forse più che per la verità che essa fa conoscere, per i modi di ricerca che essa adopera, ed adoperando insegna. Nessun altro studio richiede meditazione più pacata; nessun altro induce ad essere cauti nell'affermare, semplici ed ordinati nell'argomentare, precisi e chiari nel dire; e queste semplicissime qualità sono sì rare che possono bastare*

> *da sole ad elevare, chi ne è dotato, molto al di sopra della maggioranza degli uomini.*
>
> *Perciò io esorto a studiare matematica pur chi si accinge a diventare avvocato o economista, filosofo o letterato: poiché io spero e credo non gli sarà inutile saper ben ragionare e facilmente esporre.*[5]

Il metodo geometrico si presenta con un aspetto così forte razionalmente e così affascinante nella sua struttura, che suscita interesse e ammirazione negli intellettuali che lo avvicinano. Non dimentichiamo che Cartesio propone l'approccio razionale offerto dalla geometria come modello del ragionamento impeccabile e incontrovertibile.

Dalle parole di G. Padoa emerge inoltre un'idea di metodo matematico (e geometrico in particolare) utile, anzi necessario a ciascun uomo e non relegabile alla stretta cerchia degli addetti agli studi matematici. Se appreso e compreso esso si presta quindi ad essere parte della *forma mentis* e strumento prezioso per ciascun uomo. Di questo aspetto si parlerà diffusamente nel Capitolo 2.

Il *livello etico* riguarda in particolare gli aspetti della persona, che si sostiene vengano stimolati, coinvolti e valorizzati dall'insegnamento ed anche dall'apprendimento della geometria. Essi, seguendo un'analisi offerta da una Scuola pedagogica apprezzata dalla scrivente[6], si possono individuare nei termini di *intenzionalità, razionalità, libertà e responsabilità,* i cui significati verranno approfonditi nel Capitolo 1.

Ovviamente questo orizzonte di significato attribuibile alla geometria non è l'unico possibile: esistono infatti per esempio correnti di pensiero che ritengono la geometria, e la matematica più in generale, essenzialmente occasione di formazione contro il dogmatismo e l'autoritarismo, oppure strumento che educa al relativismo e ad ogni forma di empirismo. Rinunceremo ad approfondire le riflessioni che riguardano questo particolare orizzonte di significato, perché da noi non condiviso.

Il lavoro che segue presenta un primo capitolo che chiarisce il significato dei *termini tecnici* utilizzati, per dare al lettore la possibilità di calarsi effettivamente nella stessa prospettiva della scrivente e per non creare fraintendimenti nella lettura dello scritto.

Si descrivono quindi in chiave pedagogica i valori della persona indicati con i termini *intenzionalità, razionalità, libertà e responsabilità* sopra richiamati.

---

[5] Padoa G., cit. in Manara C.F., 1994

[6] Cfr. G.Bertagna, 2009

Nello stesso capitolo si dettagliano anche i significati qui attribuiti ad alcune parole chiave, come *educazione, formazione, istruzione, insegnamento, didattica* e per finire anche al termine *geometria,* che viene spesso accompagnato da attributi non sempre chiaramente e univocamente interpretati nei manuali scolastici o nella letteratura.

Nel secondo capitolo si analizza il significato specifico del termine *valore educativo* della geometria e come essa può accrescere e contribuire allo sviluppo di *intenzionalità*, *razionalità*, *libertà* e *responsabilità*.

Nel terzo capitolo viene affrontata da diversi punti di vista l'analisi delle componenti di *intuizione* e *rigore,* presenti nelle procedure mentali di chi si accinge ad affrontare lo studio della geometria. Precisamente:

- inquadramento storico che riguarda la presenza delle due componenti sia all'interno della storia del pensiero, come anche all'interno delle scelte attuate dai diversi Ministri o Ministeri dell'Istruzione che si sono succeduti nella storia della Scuola Secondaria italiana;
- rilevanza della presenza delle due componenti all'interno del processo di concettualizzazione che viene operato da ciascuna persona;
- rilevanza e significato che intuizione e rigore rivestono nell'analisi proposta da chi si è occupato, in altre sedi di ricerca scientifica, di didattica della matematica in particolare, e nei percorsi attuali di insegnamento-apprendimento della geometria.

Nel quarto capitolo viene affrontata l'analisi riguardante la realtà scolastica, esaminata attraverso la lettura e l'interpretazione dei dati relativi agli esiti di due questionari: uno somministrato a docenti di matematica e uno somministrato a studenti delle classi prime, terze e quinte di alcune Scuole secondarie di secondo grado delle province di Brescia e Mantova. Il questionario docenti aveva come obiettivo l'analisi e la valutazione della valenza formativa attribuita e riconosciuta alla geometria, mentre il questionario studenti cercava di riconoscere come gli studenti utilizzano intuizione e rigore geometrico in situazioni problematiche, sempre riferite all'ambito geometrico. Pur essendo pochi i dati raccolti, su di essi è stato tuttavia possibile effettuare alcune osservazioni rilevanti.
La mancanza di collaborazione è emersa chiaramente per quanto riguarda la risposta alle domande aperte da parte degli insegnanti. I pochi casi oggetto d'indagine, restituiscono un'immagine della realtà scolastica che non si interroga sui problemi formativi della

disciplina geometrica, ma è tutta dedicata all'esecuzione di procedimenti di routine. Ciò che sembra di dover sottolineare è la mancanza di una particolare attenzione alle strategie di interiorizzazione del pensiero matematico, attraverso procedure di scoperta e riscoperta personalizzata di cui si parla nel Capitolo 2.

Per quanto riguarda il *questionario studenti* emerge che la geometria non genera emozioni, non muove sentimenti e non suscita considerazioni estetiche. Sembra che gli studenti compiano un percorso (dalla prima alla quinta) nel quale non sia presente la componente di *libertà e creatività*. È fredda e insignificante, quindi, la geometria!? Le osservazioni ora proposte sono riferite solo all'aspetto emotivo, ma guardando anche a quello formativo non sembra che le cose migliorino. Risulta infatti possibile affermare che sarebbe utile non relegare al solo biennio dei vari indirizzi lo studio dell'approccio sintetico alla geometria e il relativo processo di insegnamento-apprendimento, come invece avviene nella maggior parte delle scuole secondarie italiane. È necessario riproporre le dinamiche presenti nella trattazione sintetica della geometria anche nel secondo biennio e nell'ultimo anno di studi, dove si presenti l'occasione, perché gli studenti di una età superiore sembra riescano a cogliere meglio la finezza e la profondità di tale approccio. Pochi studenti, soprattutto nei primi anni della Scuola Secondaria di secondo grado, apprezzano la chiarezza e l'ordine presenti nel modello teorico-dimostrativo geometrico, riuscendo a coglierne tutta la ricchezza e bellezza.

Sulla scorta delle osservazioni scaturite dalla lettura e interpretazione dei dati dei due questionari (che vengono presentati nel quarto capitolo) e a seguito dell'analisi svolta sul valore educativo da noi attribuito alla geometria (descritto nel primo, secondo e terzo capitolo), si presentano nel quinto capitolo alcune proposte d'itinerari didattici volti a stimolare le componenti di intuizione e rigore nell'insegnamento-apprendimento della geometria nella Scuola Secondaria di secondo grado. Si tratta di proposte che non hanno la pretesa di risolvere le difficoltà oggi esistenti nella scuola; la loro peculiarità risiede tuttavia nell'essere il frutto del percorso di riflessione e ricerca ora descritto. Solo la loro sperimentazione in aula le potrà falsificare, verificare o eventualmente modificare in parte, al fine di raggiungere gli obiettivi prefissati, tenuto anche conto del variare del docente, del gruppo classe e della situazione contingente vissuta.

La Ricerca qui proposta, riguardante il valore educativo della trattazione sintetica della geometria, culmina con la conclusione che tale valore non è ascrivibile a questa sola area

disciplinare, ma che è sale corroborante per la formazione di ciascuna persona. Affrontiamo infatti nell'intera ricerca l'utilità e il ruolo giocato da intuizione e rigore, sollecitati e implementati dalla disciplina geometrica, per la crescita e lo sviluppo dei valori dell'intenzionalità, razionalità, responsabilità e libertà della persona.
Sarebbe auspicabile che in ciascun ambito disciplinare e rispetto a ciascun argomento proposto agli studenti all'interno del nostro sistema scolastico, si ricercasse il loro valore formativo per la crescita della persona, troppo spesso nascosto da tecnicismo disciplinare o da mancata consapevolezza di chi si occupa di formazione e istruzione.
Tutte le aree per le quali tale lavoro di ricerca non portasse a delle risposte significative, potrebbero forse essere eliminate dalla formazione che la nostra scuola propone. Ovviamente il problema si sposta però alla considerazione di quali risposte possono essere ritenute significative e quali no all'interno di un panorama di valori che non sempre risulta da tutti condiviso.
La conclusione sarà quindi legata ad una scelta di priorità all'interno dello sfondo pedagogico che si è assunto come riferimento.

La facoltà che mette in moto l'invenzione matematica
non è il ragionamento
ma l'immaginazione.
(A. De Morgan)

CAPITOLO 1

PER UN LESSICO CONDIVISO

A.Sfard, nel suo lavoro[7] del 2008 prima di entrare nel vivo della tematica che vuole trattare, dichiara che si sente in dovere di chiarire per 'responsabilità concettuale' i termini che andrà ad utilizzare al fine di rendere efficace la comunicazione con il lettore. Più in generale ogni buon matematico ambisce a rendere chiara la natura e il più univoca possibile l'interpretazione degli oggetti che sta utilizzando, affinché non si creino ambiguità.

Anche noi in questo primo capitolo cercheremo di delineare i significati che attribuiamo ad alcune parole coinvolte ed utilizzate nel proseguo del discorso, consapevoli tuttavia che certe sfumature potranno sfuggire a causa della vastità di significati attribuibili a tali termini.

Le parole rispetto alle quali si è cercato di fare chiarezza non sono state *definite* in termini matematici, ma si sono cercate delle descrizioni, dei significati e dei rimandi tali da illustrarne meglio l'ottica nella quale leggerle.

Tale operazione si è resa necessaria, oltre che per il motivo suddetto, anche per altre due ragioni di carattere metodologico emerse durante il percorso di ricerca, come necessità irrinunciabili da soddisfare:

- chiarire anzitutto alla stessa scrivente quale, fra tutte le possibili accezioni dei diversi termini in uso, si riteneva condivisibile ai fini della ricerca intrapresa e sulla scorta della propria sensibilità personale;
- uniformare il linguaggio dei due ambiti coinvolti, cioè *pedagogia* e *didattica della matematica*, per non creare fratture o incongruenze fra due possibili modi di leggere la stessa locuzione.

Si inizierà col tracciare i contorni delle parole *intenzionalità, razionalità, libertà e responsabilità,* attingendo i loro significati dalla *corrente pedagogica personalista*

[7] Sfard A., 2008

seguita dal pedagogista G. Bertagna ed esplicitata nel testo *Dall'educazione alla pedagogia. Avvio al lessico pedagogico e alla teoria dell'educazione*[8].

Dalla stessa matrice pedagogica si dedurranno i valori dei termini *educare, istruire, formare, didattica e insegnamento,* che riguardano il profilo dell'azione didattica che stiamo costruendo.

In un ultimo paragrafo si discuteranno i significati della parola *geometria* e delle varie accezioni utilizzate quando si deve discorrere del suo insegnamento.

1.1 VALORI DELLA PERSONA

Intenzionalità, razionalità, libertà e *responsabilità* sono i quattro fattori che rendono possibile l'*educazione*, la *formazione* e l'*istruzione* all'interno dell'esperienza umana. Essi le rendono possibili in quanto sono i caratteri che distinguono e differenziano la persona da qualsiasi altro essere vivente e che quindi permettono alla nostra specie di superare i *tradizionali comportamenti umani della 'cura', dello 'sviluppo', dell' 'addestramento', dell' 'in-segnamento' ecc. fino a renderli a pieno titolo educazione, formazione e istruzione.*[9] Questa è la tesi che G.Bertagna sostiene nel suo testo *Dall'educazione alla pedagogia. Avvio al lessico pedagogico e alla teoria dell'educazione*.

Nella genealogia dell'esperienza umana, prima che si sviluppassero i quattro fattori citati, l'unico processo assimilabile ad una prima ed embrionale forma di istruzione-addestramento poteva essere ritrovato nei processi imitativi che vengono descritti nel seguente modo:

> *l'imitazione così importante nei processi evolutivi [...] e in sé, così attiva e dinamica, evoca, invece, per noi, significati di passività e di immobilismo cognitivo, personale e sociale. [...] l'imitare umano non è una ripetizione meccanica: è una 'ri-assunzione' in proprio, quindi in qualche modo creativa e personale, di cose altrui [...], del già fatto, del già visto, del consolidato, dell'esistente.*[10]

8 Bertagna G., 2010

9 Ibi, p.244

10 Ibi, p.77

L'avvento dell'homo Sapiens Sapiens, caratterizzato dal *possedere un'elaborazione simbolica, una capacità di astrazione e un linguaggio elaborato di proporzioni tali che cambiano di qualità il proprio equipaggiamento e la propria presenza nel mondo* [11] rende possibile l'avvio e lo sviluppo di quei fattori che renderanno più dinamica e attiva l'esperienza umana, rendendola veramente unica e differente rispetto a quella vissuta dagli altri esseri viventi. All'interno di quest'ultima affermazione sarebbero da indagare diversi significati che qui, e nella posizione pedagogica condivisa non vengono mai dati: cos'è *un'elaborazione simbolica*? E cosa s'intende per *capacità di astrazione*? Possiamo accettare il senso comune di tali termini, anche se così facendo potrebbero sfuggirci alcune sottigliezze degne di nota.

Intenzionalità

Il complesso di fattori coinvolto nell'esperienza dell'homo Sapiens Sapiens del possedere un'elaborazione simbolica, una capacità di astrazione e un linguaggio elaborato e che quindi riguarda anche noi, trova nell*'intenzionalità* il primo fra essi. L'*intenzionalità* in particolare costituisce uno sviluppo e una evoluzione delle forme imitative primordiali di cui si è detto. Con il termine *intenzionalità* si indica quella struttura fondante dell'uomo e del suo pensiero, che racchiude al proprio interno una molteplicità di almeno tre significati da noi condivisi:

- nel primo senso si descrive la capacità dell'uomo di

  rappresentarsi mentalmente scopi da realizzare e, sempre mentalmente, modi coerenti per realizzarli, perfino piegando quanto è operazione meccanica e reazione inconsapevole a scopi e realizzazioni di tali scopi che sono, invece, liberi(nel senso di scelta fra alternative) e consapevolmente voluti. [12]

- nel secondo senso si intende la capacità dell'uomo di analizzare e giudicare i concetti concepiti attraverso il processo che descrive il secondo ambito di significato dell'intenzionalità. In tale accezione sono racchiuse delle sfumature interessanti: l'intenzionalità ci permette di uscire dal flusso del divenire dell'esperienza,

[11] Ibi, p.85
[12] Ibi, p.102

arrestandoci per guardarlo da un osservatorio che non si muove e che non gli appartiene, quello astratto concettuale della nostra mente.[13]

- Inoltre nell'intenzionalità l'Autore inserisce anche quest'altro aspetto, che a nostro parere sembra maggiormente rispecchiare caratteristiche tipiche della razionalità più che dell'intenzionalità:

  > *la scoperta che il pensabile, nelle sue varie dimensioni , non è meno reale del sensibile […] e che in questa realtà non solo non annulla il sensibile, ma lo modella, gli si può imporre quasi dall'esterno. […]Sensibile e soprasensibile […]si rincorrono, si rafforzano e si perfezionano senza sosta a vicenda, fino a scoprirsi non solo l'uno nell'altro, ma quasi regola dell'uno all'altro. Questo incrocio si verifica sul piano dell'intenzionalità intellettuale. A questo livello si vorrebbe raggiungere la pura forma. Pensare qualcosa che non abbia più in sé i residui dell'empirico e del sentimentale[…]è un obbligo […] che motiva un continuo sforzo di purificazione del pensiero dalle filtrazioni dell'esperienza e del sentimento. Ma anche un obbligo mai concluso perché chi vive nell'esperienza e nel sentimento come gli uomini non può immaginare di poter giungere al puro spirito*[14].

L'Autore stesso riporta, poche pagine più avanti e con altre parole, lo stesso concetto proprio nella descrizione degli aspetti della razionalità[15].

- l'ultimo significato può essere visto come origine e sintesi degli altri due. L'intenzionalità come coscienza e autocoscienza, cioè una coscienza che guardando a se stessa si analizza, si valuta e si giudica. Essa non può che *cogliere interamente se stessa, perché non può fare altro che operare sempre una selezione di alcuni e specifici oggetti e livelli all'interno di una varietà potenzialmente infinita di sé (intenzionalità come direzione).*[16]

---

[13] Ibi, p.105
[14] Ibi p.108
[15] Cfr. '*attività intellettuale inventivo-creativa che pensa addirittura cose che prima non c'erano al mondo e che, dopo, con un'apposita potenza, introduce* nel *mondo*' in Bertagna G., 2010, p.131
[16] Ibi, p.111

Razionalità

La razionalità è vista come sintesi di *nous* (intuizione soggettiva) e *logos* (pensiero intersoggettivo).

Con il primo termine si intende

> *rimandare al radicamento […] della razionalità nella sensibilità, al suo affiorare da una storia evolutiva che parte dall'elaborazione nervosa degli istinti, delle pulsioni e delle emozioni, strutturatasi nella notte dei tempi. Al 'non so che' che si sente esserci con indubitabile certezza, senza per questo essere in grado di identificarlo e di esprimerlo con ragionamenti articolati*[17]*. Non a caso infatti 'quando intervengono le parole e i concetti, quando comincia l'argomentazione, allora comincia la distruzione di questa immediatezza noetica.*[18]

Nella intuizione soggettiva rientra anche la conoscenza "fatta in modo intuitivo", per analogia, oppure attraverso il confronto con il pregresso. Infatti, dopo aver espresso il giudizio intuitivo, il soggetto comincia anche a pensare a delle strategie per realizzarlo.

È su tali conoscenze istintive e intuitive che la ragione deve appoggiarsi e su di esse fondare il suo contributo, articolato poi in modo più razionale e mediato.

> *Il nous non basta per autorizzare il discorso pubblico intersoggettivo critico e, soprattutto per portarlo innanzi, per incrementarlo come serve, in una cerchia sempre più vasta di uomini che vivono in tempi, situazioni e luoghi diversi, fino a raggiungere l'estensione dell'universalità. […] Occorre infatti anche lavorare logicamente*[19] *su questi principi e su queste ipotesi intuitive, per rassodarli, ampliarli e giustificarli, analizzandoli con una ragione discorsiva che sia sì con essi coerente, ma anche e soprattutto che ne espliciti dinanzi a chiunque le possibili implicazioni e conseguenze, in maniera tale che nessuno, pur volendolo, possa negarle.*[20]

Si evoca in questo passo la necessità dell'intervento di un livello superiore di ragione che renda attivo, produttivo e fruttuoso il lavoro svolto dal *nous* e che ponga la persona nella

[17] Cosa siano i *ragionamenti articolati* lo affiliamo dal senso comune.
[18] Ibi, p.127
[19] *Lavorare logicamente* viene dato dall'Autore come concetto chiaro per tutti.
[20] Ibi, p.129

possibilità di poter comunicare con gli altri e di essere compresa. Questo compito spetta al *logos*.

Logos come unità organica di pensiero e linguaggio che si esibisce nel discorso pubblico, ovvero nel confronto con gli altri, a proposito di tutte le regioni dell'intenzionalità.[21]

Essendo il discorso pubblico il luogo in cui si esplica il *logos*, è necessario che ci sia una comunità di ricezione o condivisione; il *logos* ha quindi bisogno di un riconoscimento tra diversi uomini.

In particolare il ruolo svolto dal *logos* è descritto dalle tre attività seguenti:

- *attività sintetica che riunisce e lega insieme in una relazione organica parti tra loro separate*
- *attività analitica che divide e separa in frammenti, seguendo un ordine, ciò che è un tutto unitario*
- *attività intellettuale inventivo-creativa che pensa addirittura cose che prima non c'erano al mondo e che, dopo, con un'apposita potenza, introduce nel mondo.*[22]

Libertà e responsabilità

> *La terza condizione che ha consentito di far fermentare i tradizionali comportamenti umani della 'cura', dello 'sviluppo', dell' 'addestramento', dell' 'in-segnamento' ecc. fino a renderli a pieno titolo educazione, formazione e istruzione è l'affermarsi dell'azione libera e responsabile come tratto caratteristico e più alto dell'esperienza umana.*

La posizione appena citata è frutto di convinzioni personali e professionali che potrebbero essere non condivisi dal lettore; infatti si potrebbe non ritenere necessaria la presenza della libertà e della responsabilità all'interno di una proposta educativa. La scrivente ritiene invece che tali componenti siano indispensabili per garantire ad una azione di essere considerata educativa.

L'uomo è l'unico essere capace di veri *actus umani* cioè di azioni umane libere e responsabili, *atto di cui l'uomo è padrone*[23]. Le caratteristiche distintive per individuare tali atti sono:

[21] Ibi, p.122
[22] Ibi, p.131
[23] Tommaso d'Aquino, *De veritate*, q.1, a.4, cit. in Bertagna G., 2010, p.261

- azioni risiedenti nel pensiero prima di essere eseguite, essendo state messe in relazione anche con possibili altre alternative;
- azioni analizzate per considerare se gli scopi e i mezzi per realizzare tale azione siano buoni, veri, giusti, belli oppure no;
- azioni scelte in coscienza e autocoscienza come le migliori possibili nelle condizioni date;
- azioni che una volta compiute siano state risottoposte all'analisi valutativa dell'intenzionalità e del *logos,* sia rispetto agli esiti che in relazione alle conseguenze derivate da essa.

Ogni uomo quindi, per realizzarsi pienamente, tende sempre più ad essere ciò che è, cercando di scegliere azioni umane, quindi libere e responsabili. *Soltanto così è felice e si sente compiuto.*[24]

La libertà riteniamo inoltre dover sottolineare, risiedere non tanto nelle condizioni esterne che la possono limitare o favorire, ma in un atto di percezione e convinzione interna tale da favorire un pensiero altrettanto libero.

Quelli ora descritti li abbiamo chiamati *fattori* perché li abbiamo riferiti e ritenuti cause che rendono possibile l'educazione, la formazione e l'istruzione. Nel seguito del lavoro chiameremo *intenzionalità, razionalità, libertà e responsabilità* anche *valori della persona* perché differenziano l'uomo da qualsiasi altro essere animato e quindi danno all'uomo il suo valore specifico.

1.2 EDUCARE, ISTRUIRE, FORMARE

Tra tutte le azioni umane ve ne sono tre in particolare che caratterizzano l'ambito educativo: l'*educare*, il *formare* e l'*istruire*. Essendo queste azioni umane, hanno come finalità specifica quella di creare le possibilità affinché gli altri uomini diventino a loro volta soggetti in grado di compiere azioni umane e quindi intenzionali, razionali, libere e responsabili.

Ci porremo quindi in una chiave di lettura dei tre termini educazione, formazione e istruzione, visti in particolare all'interno del contesto scolastico, anche se esso non è l'unico in cui possono dispiegarsi.

---

[24] Bertagna G., 2010, p.272

Partendo dall'affermazione che: *La scuola è l'istituzione sociale specifica che ha lo scopo di educare e aiutare il formar-si delle persone attraverso l'istruzione*[25] risulta quanto mai necessario passare in rassegna il significato di questi termini; *educare, formar-si, istruire*.

Con il termine **educare** si intendono in pedagogia una molteplicità di sfaccettature. Non volendo in tale scritto proporre una trattazione esaustiva, si presentano solo le due specificità del termine *educare* ritenute significative in relazione alla ricerca svolta e delle quali verrà approfondita la natura nel Capitolo 2:

- educazione come trasmissione alle nuove generazioni dei valori culturali presenti nei propri ambienti di vita (funzione di socializzazione);
- educazione come convocazione dell'intenzionalità dell'educando, del suo logos, della sua libertà e della sua responsabilità per intraprendere un cammino[26]. Il soggetto in educazione è un '*reale protagonista di se stesso e di se stesso nel mondo, e non un fantasma alla mercé degli altri attori, educatore compreso*'; il soggetto in educazione ha *una sua forza intrinseca, una natura originaria personale da dispiegare, che desidera affermare e che è necessario rispettare, senza la scorciatoia di indebite forzature esterne, perché soltanto dall'incontro armonico tra le azioni dell'educatore e quelle dell'educando può scaturire l'educazione.* [27] (funzione di personalizzazione)

Il protagonista indiscusso dell'apprendimento è dunque lo studente, il quale può trovare nella scuola uno strumento per promuovere se stesso al meglio delle sue possibilità e potenzialità. *Il soggetto ha esigenze, capacità, possibilità, logos, libertà e responsabilità che non riceve né dai dispositivi(messi in atto dall'educatore), né dagli educatori, ma che i dispositivi e gli educatori gli permettono al contrario di affermare e promuovere in maniera sempre maggiore.*[28] *Nulla è veramente "cultura" per l'uomo, se non è il frutto e l'esercizio della sua intenzionalità e del suo logos e se, attraverso essi, non diventa la condizione e il risultato di proprie azioni umane.*[29]

Il problema dell'educazione è trovare il "segreto per rendere vivo e fecondo ciò che altrimenti resterebbe eternamente sterile e vano".[30] È proprio in quest'ultima sfida che la

---

[25] Ibi, p.393
[26] Con il termine *cammino* non si intende una strada univoca e costrittiva, ma un percorso nel quale docente e discente camminano fianco a fianco confrontandosi e rispettando quanto segue nel testo.
[27] Ibi, p.359
[28] Ibi, p.362
[29] Ibi, p 366
[30] Von Humboldt, cit. in Bertagna G., 2010, p.365

ricerca svolta si vuole collocare; vorrebbe tentare di dare qualche indizio per indagare e dispiegare il segreto dell'educazione matematica, in particolare quella legata all'ambito geometrico. Il ruolo dell'educatore è quindi quello di mediare, sia nel processo di acculturazione sia in quello di personalizzazione, sollecitando procedure di appropriazione che acquistano valore proprio alla luce di queste riflessioni. Tale idea di educazione permea numerosi studi e suggerisce spunti per impostare strategie didattiche che verranno discusse nel Capitolo 5.

Per **istruzione** si intende il

> *processo che [...]aiuta e sollecita ogni persona ad impadronirsi delle conoscenze, a moltiplicarle e a renderle, rispetto ai vari ambiti personali, sociali e del mondo a cui si riferiscono, sempre più sistematiche, rigorose e formalizzate*[31].

In particolare il processo non consta di un passaggio di informazioni culturali (che ridurrebbe l'istruzione al mero trasferire contenuti e che quindi implica il riferirsi ad un soggetto passivo), ma è centrato su di una gradualità nella relazione studente-sapere che parte dall'acquisizione delle conoscenze, passando poi alla loro espansione e confronto-critica con la propria realtà di vita, per giungere infine alla loro stabilizzazione e formalizzazione. Importante sarà il ruolo giocato da chi sollecita e aiuta la persona a fare in modo che il processo si realizzi.
Ritroviamo qui l'idea riguardante la didattica della matematica che è stata suggerita da insigni studiosi, tra cui H.Freaudenthal e che verrà approfondita nel Capitolo 2.

I significati attribuiti al termine **formare** lungo il corso della storia sono stati molteplici: da quello attinente al settore lavorativo (in tale caso il termine si riferiva al soggetto attivo, che dava forma ad un oggetto da manipolare, forgiare, formare), a particolari attributi ideologici, fino a giungere alla fine degli anni sessanta (ad opera di pedagogisti tedeschi) ad assumere un significato legato al formar-si, cioè:

> *scegliere criticamente, come e in quanto uomini, in tutti i campi della vita e dell'esperienza umana,[...] la propria peculiare <<forma>> nella quale realizzarsi, in intenzionalità, logos, libertà, responsabilità. Formar-si come*

[31] Bertagna G., 2010, p.385

trasformar-si in maniera protagonistica nel mondo, in altre parole, per decisione e maturazione personali.[32]

Il termine *educazione* risulta, a seguito di questa breve analisi, abbracciare sia il termine *istruzione* che *formazione.* In essa infatti rientrano tanto la componente conoscitiva formalizzata e atta alla trasposizione ai diversi ambiti di vita (*istruzione*), tanto il desiderio e la spinta all'assumere una propria forma nella quale realizzarsi in quanto persone (*formazione*) .

Il termine *educazione* nel seguito del presente scritto sarà proprio la sintesi dei due aspetti, istruzione e formazione, ora illustrati. Nella maggior parte dei casi parleremo quindi semplicemente di *educazione*.

1.3 DIDATTICA E INSEGNAMENTO

Dedichiamo ora un paragrafo specifico ai termini *didattica* e *insegnamento*.

Insegnamento

Nella maggior parte della letteratura attuale dell'ambito pedagogico, il termine *insegnamento* assume una accezione negativa: l'insegnante è colui che possiede le conoscenze da trasferire allo studente, il quale le riceve passivamente. In particolare gli studi si riferiscono alla origine etimologica '*in-signare*' che conferirebbe al termine *insegnamento* il significato di 'mostrare, indicare, ammaestrare'. Secondo tale accezione, infatti, l'insegnamento sarebbe un comportamento da noi non annoverabile fra gli atti specificatamente umani; potrebbe appartenere agli atti attribuibili al regno animale o che comunque non convocano l'intervento necessario di razionalità, libertà e responsabilità.

Con il termine *insegnamento*, presente nel seguente lavoro, non si vuole fare riferimento a questa accezione del termine. Si intende invece utilizzare il termine *insegnamento* nella accezione correntemente scelta all'interno del mondo dei didatti della matematica, ambito in cui, esso perde la sua connotazione negativa, per riassumere accezioni che nella letteratura pedagogica tradizionale sono riservate al termine "educazione" e ai suoi casi particolari. Spesso, nel nostro lavoro e nelle ricerche in didattica della matematica, si usa la parola *insegnamento* affiancata al termine *apprendimento*, risultando così il binomio 'insegnamento-apprendimento' come riassuntivo ed esplicativo dell'azione didattica nella sua interezza.

[32] Bertagna G., 2010, p.381

C.F. Manara ha coniato la locuzione “insegnamento-apprendimento” per indicare l’operazione concettuale e culturale che consiste nel comunicare a chi non sa, o non ha ancora sistemato a livello concettuale, un pezzo di conoscenza. Tale operazione di comunicazione non può fermarsi a questo stadio, ma deve essere accompagnata dall’aver cura che il discente recepisca, interiorizzi e si appropri in modo vivo di ciò che il docente vuole trasmettere e comunicare.

Didattica

Il termine *didattica* richiama due diversi significati:

- tutto ciò che può essere coinvolto nel processo di insegnamento-apprendimento; è il risvolto visibile in aula come conseguenza della teoria pedagogica scelta;
- una attività di ricerca e di riflessione sugli atti che caratterizzano l’agire didattico precedentemente precisato.

Nel nostro lavoro di ricerca, quando parleremo di didattica, intrecceremo i due significati suddetti. Infatti, partendo dalla cornice pedagogica scelta e descritta nel precedente paragrafo, si svolgeranno delle riflessioni sugli atti che possono essere proposti in aula per favorire e accrescere intenzionalità, razionalità, responsabilità e libertà attraverso l’insegnamento della geometria.

Siamo consapevoli che:

> *“[…]l’idea che ognuno si forma dell’educazione e della funzione dell’educazione dipende evidentemente dall’idea che si ha dell’uomo e del suo destino”*[33].

Nel caso di questa ricerca è già stata dichiarata la teoria pedagogica scelta. Nella premessa inoltre si è sottolineato come l’interesse per il presente lavoro sia intimamente legato al modo in cui chi scrive considera il proprio impegno di docente nella scuola.

1.4 NATURA DELLA DISCIPLINA GEOMETRICA

Come anticipato, si scandaglieranno ora le varie accezioni con cui si può intendere il termine geometria.

La Geometria è una disciplina complessa, affascinante e difficile, che con la sua presenza attraversa tutta la storia del pensiero matematico, anzi, possiamo dire, tutta la storia della scienza.

[33] Labertonnière L., 1993, p. 207

‘La geometria è quella dove si dimostra’ rispondeva una volta un ragazzo, interrogato su cosa fosse, per lui, la geometria. Ma è anche ‘quella in cui si misura’, potremmo dire noi per rifare eco alle parole di quel ragazzo. Si alternano in questo modo nella fantasia due archetipi del ‘fare matematica’, il cui ricordo affonda nel tempo: da una parte gli indimenticabili *Elementi* di Euclide, dall’altra le radici empiriche stesse della geometria, da cui deriva anche il significato letterale del suo nome, dalla storia dell’antico Egitto, alle incredibili ‘tavolette babilonesi’ che l’archeologia ci ha fatto scoprire.

Ancora oggi i due primordiali archetipi di studio della geometria rimangono, ma ad essi si aggiungono tante altre sfaccettature nate dai successivi sviluppi e dalle crisi storiche vissute da questa disciplina, oltre che favorite dalle geniali intuizioni di molti uomini che ne hanno descritto il futuro e che ne stanno dettando il presente.

Tanti e diversi sono gli aggettivi e gli attributi riferiti al termine ‘geometria’ nei corsi universitari, sui libri di testo, oppure quando ci si trova in contesti di divulgazione scientifica. In alcune occasioni gli attributi riguardano un particolare tipo di approccio alla disciplina, in altre si riferiscono invece alla specificazione del contenuto di cui si sta trattando.

Si ritiene dunque opportuno fare chiarezza sui termini che si utilizzeranno nel presente lavoro; il significato attribuito è sì parzialmente espressione ed esplicitazione di quanto è in uso comune nel panorama matematico, ma allo stesso tempo rispecchia il parere personale di chi scrive. Si potrà quindi essere d’accordo, come invece, per alcuni aspetti, dissentire.

1.4.1 DIFFERENZA DI CONTENUTO

Iniziamo con il chiarire alcuni aggettivi che spesso accompagnano il sostantivo ‘geometria’: ci riferiamo in particolare ai termini ‘euclidea’ ed ‘elementare’.

L’attributo **euclidea** riferito alla geometria può contenere al suo interno due diverse accezioni, che possiamo specificare nel seguente modo:

- con ‘*geometria di Euclide*’ indichiamo quel *corpus* di postulati, nozioni comuni, proposizioni,… che Euclide ha creato[34] e ci ha trasmesso, legandolo anche al

[34] *‘Euclide, questo sconosciuto! […] di Euclide come persona sappiamo poco o nulla, sicchè è assolutamente impossibile fornire al lettore una sorta di bibliografia.’* Queste sono le parole di A.Frajese contenute nell’“Introduzione”, *Gli Elementi di Euclide,* Unione Tipografico-Editrice torinese, 1970, p.9. Qualche pagina dopo (p.13) viene riportata la testimonianza di Proclo che mettendo in relazione alcune informazioni da lui possedute, colloca la scrittura degli *Elementi* di Euclide ai tempi del re Tolomeo primo, circa nel 300 a.C.

metodo di trattazione ed elaborazione che egli stesso ha seguito nella sua monumentale e fondamentale opera “Elementi”;

- con il termine ‘*geometria euclidea*’ invece non diamo alcun rilievo al metodo di trattazione adottato, ma ci riferiamo esclusivamente ai contenuti di quella parte di geometria assoluta (nel senso di Hilbert) in cui interviene il cosiddetto ‘V postulato’ di Euclide.

Invece con il termine impreciso ma suggestivo di “**geometria elementare”** si intende recuperare il significato di geometria, sia legato agli argomenti di base trattati (che non richiedono particolari prerequisiti e nozioni pregresse), sia alla esiguità di strumentazione concettuale necessaria per trattarla.

1.4.2 DIFFERENZA NEL METODO

Metodo sintetico e metodo analitico

Prima del XVII secolo il metodo per affrontare la geometria era essenzialmente solo quello proposto dagli Elementi di Euclide con la loro assiomatica. In essi il centro era occupato dagli enti geometrici che venivano legati fra loro da relazioni e da postulati che rispettassero e rispecchiassero il più possibile la realtà che circondava l’uomo e che quindi li aveva ispirati. Facevano poi seguito proposizioni e teoremi che, dalle assunzioni premesse, venivano dedotti attraverso opportuni processi di deduzione razionale, senza ricorrere a particolari strumenti di formalizzazione.

Una nuova possibile impostazione del metodo di indagine per la geometria si fa strada solo dopo più di due millenni da Euclide, nel corso del XVII secolo, con l’introduzione del “metodo delle coordinate”, per opera di Descartes e Fermat, metodo nel quale

> *si realizza una perfetta equivalenza fra grandezze numeriche e grandezze geometriche. Questo risultato, che è la conseguenza della fertilità dei metodi algebrici, pur non intaccando l’unicità della scienza geometrica, la presenta tuttavia come una scienza [che all’epoca che stiamo considerando era sostanzialmente] passibile di due diverse trattazioni metodologiche: quella sintetico-euclidea, organizzata su basi intuitive, e quella analitico-cartesiana, fondata sugli algoritmi dell’algebra.*[35]

[35] Cfr. una nota all’articolo di Bernardo A., 1998-1999, p. 77 (Bernardo Antonio è un matematico e ricercatore all’università del Salento. Ha fondato il sito *matematicamente.it* e insieme a Luca Lussardi tiene una rivista online di divulgazione matematica sullo stesso sito).

Viene così indicata, in modo abbastanza sommario ma netto, la differenza fra le due diverse trattazioni metodologiche. Infatti con **metodo sintetico**[36] non solo si può intendere una trattazione della geometria organizzata su basi intuitive, ma anche un metodo in cui è presente una forte componente di rigore legata alla sistemazione assiomatica e alla deduzione di teoremi, che parte effettivamente da intuizioni, ma che giunge poi ad una sistemazione chiara e coerente. Si deve aggiungere anche che in tale trattazione non viene fatto alcun uso di strumenti derivanti da altri ambiti matematici.

Nelle Istruzioni riguardanti l'insegnamento della geometria che il Governo Italiano prescriveva nelle scuole secondarie classiche nel 1867, il metodo sintetico veniva descritto come metodo nel quale si privilegiava la trattazione assiomatica o grafica della geometria *nell'osservanza dello stretto rigore scientifico e nell'esclusione di ogni sussidio aritmetico o algebrico nella dimostrazione delle proprietà.*[37]

La geometria affrontata con il metodo sintetico è fondata non sulla sua rappresentazione formalizzata con strumenti analitici o algebrici, ma le sue proposizioni sono razionalmente dedotte dagli assiomi. In particolare nell'affrontare la geometria con il metodo sintetico non viene coinvolta la nozione di misura espressa attraverso il numero. L'avere escluso i numeri dalla geometria 'greca' può essere motivato storicamente dal problema che i pensatori greci avevano identificato nelle grandezze incommensurabili e rispetto al quale stavano cercando delle soluzioni. Creare e utilizzare una geometria che 'può fare a meno dei numeri' conferisce a questa branca della matematica una meritata autonomia oltre che la consapevolezza che 'si può fare matematica anche senza numeri'. Il gestire delle situazioni avendo a disposizione la misura e quindi i numeri, spesso, in geometria, nasconde e rende poco esplicite alcune relazioni fra gli enti geometrici che balzano invece all'occhio in una trattazione sintetica della stessa.

Riguardo a tale metodo riportiamo ancora le due seguenti osservazioni di cui la prima sottolinea il modo sintetico di procedere nella ricerca di una soluzione ad un problema o ad una questione geometrica assegnata, mentre la seconda connota il metodo sintetico anche in ordine ai contenuti che esso affronta:

> *Se la soluzione del problema che si intende affrontare viene cercata con metodi puramente geometrici, cioè senza una trasposizione in linguaggio algebrico o analitico, si parla allora di «soluzione sintetica» e ad essa si perviene facendo riferimento diretto al sistema di assiomi sul quale si*

[36] Alcuni autori sintetizzano tale approccio con la locuzione 'geometria sintetica', tra essi V.Villani, 1997.
[37] Spotorno B., 1983, p.74

intende appoggiata la costruzione concettuale della geometria considerata[38].

[Tra i] metodi sintetici, [un posto di particolare importanza è occupato da] quei procedimenti nei quali si fa ricorso a costruzioni geometriche elementari (cioè eseguibili con la riga e il compasso) senza usare l'algebra. [In essi]è dunque preminente l'intuizione geometrica, che dovrà essere coltivata con pazienza e impegno per guidare gli allievi a «saper vedere» le figure e rilevarne le caratteristiche su cui lavorare. Non è cosa semplice, ma le gratificazioni che insegnanti ed alunni ne trarranno saranno davvero significative.[39]

In questo secondo intervento viene sottolineata anche la fatica didattica che è necessario impiegare per educare gli studenti all'uso della componente dell'intuizione intesa come 'saper vedere' le figure, per rilevarne le caratteristiche su cui lavorare, tipico del metodo sintetico.

Ma il 'metodo sintetico' non è comporta solo il ricorso all'aspetto intuitivo delle immagini.

Il termine 'metodo sintetico' si riferisce anche in particolare al metodo di studio seguito da una importante scuola di geometria tedesca nell'800, di cui il più insigne rappresentante può essere forse considerato J.Steiner. Egli aveva frequentato a Iferten la scuola di Pestalozzi, conoscendo la quale era rimasto stupito per la molta importanza attribuita *all'abitudine degli allievi al 'fare da soli' sotto la guida e lo stimolo dei docenti*[40]. In tale scuola veniva assegnata all'intuizione un ruolo di grande rilievo. Come conseguenza di tale frequentazione giovanile ed estremizzando l'insegnamento di Pestalozzi, Steiner eliminò nel suo insegnamento il ricorso alle figure, affermando che *gli enti e le proprietà geometriche si dovevano 'vedere' e dominare con il pensiero.*[41]

Sostenitore di questo stesso metodo, detto sintetico, fu Christian von Staudt, il quale pubblicò nel 1860 una trattazione della geometria proiettiva caratterizzata da un'insuperabile purezza stilistica e da un impeccabile rigore geometrico.

---

[38] Marchi M., 1998-1999, p. 62
[39] Campedelli M.G., 2008 , pag. 59
[40] Bottazzini U., 2005, p.199
[41] Ibi, p.200

Contrapposta al metodo sintetico nasce però una trattazione della geometria che fa ricorso all'uso di strumenti analitici, di cui i fautori più insigni furono i tedeschi F.Möbius e J.Plücker. Il secondo descrive nel seguente modo il ruolo di geometria e analisi:

> *Sono del parere che l'analisi, indipendentemente da ogni applicazione, sia una scienza autonoma e in sé compiuta, e che la geometria come d'altra parte la meccanica appaia semplicemente come un'interpretazione grafica di certe relazioni.*[42]

Secondo tale interpretazione non sarebbe però spiegabile come a livello storico sia stata possibile l'esistenza della geometria e la sua sistemazione assiomatica precedente alla nascita dell'analisi. Se si osserva questo particolare, anche la geometria si può ritenere una scienza autonoma e in sé compiuta, smentendo l'opinione di Plücker secondo cui è solo l'analisi a possedere tali caratteristiche.

Le origini del **metodo analitico** per la trattazione della geometria vengono fatte coincidere con i contenuti di una delle tre parti dell'opera *Discours de la mèthode(1637)* del filosofo francese Renè Descartes (Cartesio 1596-1650). Nel testo Cartesio affronta la ricerca e la sperimentazione di un suo metodo per stabilire nuove verità. Kline[43] racconta, con le parole che seguono, come la risposta al problema del metodo viene rivelata a Cartesio da un sogno:

> *le lunghe catene di ragionamenti semplici e facili per mezzo dei quali i geometri sono abituati a raggiungere le conclusioni delle loro dimostrazioni più difficili lo condussero a credere che tutte le cose alla portata della conoscenza dell'uomo sono reciprocamente connesse allo stesso modo.*[44]

Cartesio riteneva quindi di poter trasporre il metodo assiomatico della matematica, o meglio ancora della geometria, alla scienza filosofica e a qualsiasi altro tipo di ricerca affrontabile dall'uomo. Cartesio formulò quindi le regole che l'avrebbero guidato alla ricerca della verità:

- scegliere idee chiare e distinte tanto da far escludere ogni dubbio sulla loro falsità; tali idee avrebbero costituito gli 'assiomi' della sua filosofia;
- scomporre grandi problemi in problemi più semplici;
- procedere dal semplice al complesso nella risoluzione delle questioni che si poneva;

[42] Plücker J, 1828-1831, p.ix
[43] Kline M., 1976, p.154
[44] Ibi, p.154

- enumerare e verificare in modo completo le fasi del ragionamento deduttivo senza dar nulla per scontato.

Importante è stato per Cartesio l'utilizzo di tale metodo nello sviluppo della sua filosofia, ma in questa sede è rilevante considerare il percorso che egli ha svolto: esportazione del metodo preso a prestito dalla geometria classica di Euclide, sua generalizzazione a metodo euristico per qualsiasi ambito, riapplicazione del metodo nuovamente alla matematica, generando così un nuovo approccio alla disciplina geometrica, noto oggi appunto col nome di *metodo analitico*.

D'altra parte il problema più urgente da affrontare nel Seicento era riuscire a dare risposta alle molteplici esigenze pratiche e scientifiche che stavano generando una innumerevole quantità di problemi matematici difficilmente risolvibili con la sola geometria di Euclide. Essa infatti si limitava allo studio di linee rette e cerchi, ma nel secolo in questione i progressi di scienza e tecnica richiedevano strumenti matematici nuovi per affrontare in modo veloce e corretto problemi riguardanti altre curve: per esempio le coniche. Tali problemi, se affrontati con metodo sintetico, richiedevano per ciascuna dimostrazione una particolare costruzione ingegnosa e macchinosa, di difficile utilizzazione e applicazione.

Cartesio, matematico del tempo, era insoddisfatto dei metodi limitati offerti dalla geometria di Euclide, *[...] accusandola di essere troppo astratta e di essere tanto legata a figure "da poter esercitare l'intelletto solo a prezzo di grande fatica dell'immaginazione".*[45]

Cartesio tuttavia riteneva l'algebra

> *così totalmente soggetta a regole e a formule "da risultare un'arte piena di confusione e di oscurità, adatta per mettere in imbarazzo, invece che una scienza idonea a coltivare la mente"*[46]

D'altra parte però Cartesio, come anche Fermat (altro matematico del tempo che contribuirà alla nascita della geometria analitica), riconosceva alla geometria il fatto di fornire informazioni e verità sul mondo reale e all'algebra il pregio di poter essere usata per ragionare su quantità incognite, nonché la peculiarità di riuscire a meccanizzare e a minimizzare lo sforzo richiesto per risolvere problemi.

---

[45] Ibi, p.157
[46] Ibi, p.157

I due pensatori, ciascuno in modo autonomo rispetto all’altro, nel proporre un nuovo metodo, cercarono di attingere da ciascuno dei due ambiti matematici il meglio e di correggere con l’uno i limiti dell’altro.
Cartesio, seguendo le linee del suo metodo, si proponeva di partire dal semplice per poi giungere al complesso, e decise pertanto di partire dalla retta geometrica e dai segmenti. Introdusse poi un sistema di coordinate per aiutare la descrizione del moto di un punto su di una curva, facendo riferimento alla sua distanza in orizzontale e in verticale rispetto al punto d’intersezione degli assi coordinati.
Glissando sui passaggi intermedi proposti da Cartesio, descriviamo la conclusione alla quale pervenne:

> *l’equazione di qualsiasi curva è un’uguaglianza algebrica la quale è soddisfatta dalle coordinate di tutti i punti giacenti sulla curva ma non dalle coordinate di qualsiasi altro punto.*[47]

Tale metodo di rappresentazione permise di risolvere in modo semplice molti problemi fino a quel tempo non risolti, o risolti a fatica, e costituì un forte strumento innovativo per i matematici che seguirono. Con tale metodo fu possibile anche, per analogia, l’applicazione della matematica a molte altre scienze.
Anche Fermat utilizzò l’accostamento di geometria ed equazioni algebriche, trovandone una stretta relazione. In particolare i suoi studi sono contenuti nell'opera *Ad locos planos et solidos isagoge* (Introduzione ai luoghi piani e solidi) nella quale egli introduce esplicitamente le convenzioni e i metodi della geometria analitica e con tali metodi risolve alcuni problemi classici. Fermat (1601-1665) non pubblicò quasi nulla durante la sua vita. Cartesio invece pubblicò la sua opera principale nel 1637. Il confronto fra la datazione degli scritti sembra conferire a Cartesio il titolo di vero inventore della *geometria analitica*, anche se lo stesso Fermat elaborò in modo autonomo e contemporaneo il nuovo metodo.

Si può sintetizzare il ruolo dei due metodi sopra esposti, quello **sintetico** e quello **analitico**, dicendo che il primo consiste nell’attività sintetica che riunisce e lega insieme in una relazione organica parti tra loro separate, mentre il secondo svolge l’attività analitica che divide e separa in frammenti ciò che è un tutto unitario, seguendo un ordine logico prestabilito.

[47] Ibi, p.162

Metodo razionale e metodo intuitivo

La locuzione **geometria razionale,** che compare su molti libri di testo della Scuola Secondaria di secondo grado, *si riferisce a tutti [gli] aspetti dell'organizzazione logica e teorica della geometria*[48]. Spesso essa viene fatta coincidere con il metodo sintetico della geometria eventualmente sviluppato negli *Elementi* di Euclide. Questo attributo, riferito alla geometria, compare già nei programmi scolastici del 1867 introdotti dalla Legge Coppino, che relegavano tale insegnamento al quinto anno del Ginnasio e ai tre anni di Liceo che seguivano, senza essere questi preceduti da alcuno studio della geometria negli anni di ginnasio inferiori. L'insegnamento della geometria doveva essere condotto avendo come libro di testo gli stessi *Elementi* di Euclide. Successivamente, nel 1881, con l'introduzione della *geometria intuitiva* (di cui si parlerà nel paragrafo successivo) in tutte le classi del ginnasio ad opera del Ministro Baccelli, cominciò a farsi strada l'incertezza su come far interagire le due metodologie, (cioè la geometria razionale e la geometria intuitiva) nella convinzione che:

> *da una parte si cerca di non costringere lo studente ad affrontare prematuramente lo studio razionale, dall'altra non si vuole posticipare l'inizio di tale studio che ha effetti positivi sullo sviluppo mentale dei giovani*[49].

La storia della scuola italiana alla fine del XIX secolo mostra la presenza negli Istituti Magistrali dell'epoca (attualmente non più previsti in ordinamento) dell'aritmetica e della geometria, dichiarate 'razionali'. Con questi termini si voleva indicare che nei programmi svolti da tali insegnamenti doveva essere dato largo spazio alle motivazioni, ai significati e alle spiegazioni del perché gli algoritmi aritmetici e le costruzioni geometriche funzionavano. Si doveva inoltre illustrare come era possibile che un procedimento costituito da sole operazioni formali potesse sostituire un ragionamento, anche complesso e sofisticato, facendo ottenere un risultato corretto.

Il termine **geometria intuitiva,** come già detto in precedenza, compare per la prima volta all'interno del panorama scolastico italiano nel 1881. Con tale termine si designava una rappresentazione della geometria avente gli stessi contenuti di quella razionale, ma

[48] Menghini M., 2010, p.400.
[49] Ibi, p.406

presentati in modo più semplice e con riferimento a prove o verifiche sperimentali, pratiche, senza l'enunciazione dei principi generali soggiacenti alle varie costruzioni grafiche.

In particolare si può intravedere il significato attribuito a tale termine leggendo le parole del 1901 di due autori, G.Veronese e di G.Frattini, scritte rispettivamente da ciascuno di essi nell'Introduzione al volume da loro preparato per il ginnasio inferiore. Il primo scrive:

> *mi servo principalmente delle immagini delle figure per dare i loro nomi e per rilevare le proprietà più ovvie*[50]

riconoscendo così indubbio valore all'osservazione senza far ricorso al processo di astrazione.

Facendo scorrere il testo non viene però operativamente chiesto allo studente alcuno sforzo intuitivo in modo esplicito, contrariamente a quanto dichiarato dall'autore nell'introduzione.

Frattini invece ritiene che la verità geometrica emerga:

> *dall'osservazione immediata delle cose, perché in ciò è l'essenza del metodo intuitivo.*[51]

Frattini propone allo studente di 'immaginare' operazioni realizzabili fisicamente con del materiale concreto, pur non prevedendo che l'insegnante le mostri in classe concretamente.

Due testi che arricchirono il significato di geometria intuitiva furono poi, in epoca successiva, quello di Ugo Amaldi del 1941 e quello di Emma Castelnuovo del 1948.

Nel testo di Amaldi molti sono i riferimenti alla realtà, vi sono diverse verifiche sperimentali della correttezza di costruzioni geometriche, sono presenti descrizioni di operazioni concrete da svolgere (ritagli, piegature, sovrapposizioni,…). L'Autore propone una geometria che va scoperta o della cui importanza si deve prendere atto con procedure pratiche.

E.Castelnuovo si mosse nell'ambito dei Programmi proposti dalla Commissione nominata dai Governi Alleati del 1945, all'interno dei quali il programma di geometria della Scuola Media torna ad avere un aspetto pratico e sperimentale. Nella prefazione al suo libro essa dice:

---

[50]Veronese G., 1901, pp.VI-VII

[51] Frattini G., 1901, p.6

Scopo principale della geometria intuitiva sia quello di suscitare, attraverso l'osservazione di mille fatti della tecnica, dell'arte, della natura, l'interesse del ragazzo per le proprietà fondamentali delle figure geometriche, e quindi il gusto e l'entusiasmo della ricerca. E questo non può nascere se non facendo partecipe l'allievo stesso al lavoro creativo.[52]

La particolarità di questa posizione risiede nel considerare l'allievo attivo, interessato e motivato alla conoscenza della geometria.

Oltre a questi significati strettamente legati alle scelte dei Ministri in carica e quindi alla realtà scolastica italiana, l'attributo di *intuitiva,* affiancato al termine *geometria,* ha subito diverse interpretazioni nel corso del secolo scorso, anche a livello di ricerca scientifica.

In ambito di ricerca matematica si è parlato (prima degli anni '50 del '900) del rapporto fra intuizione e rigore a livello introspettivo e cioè si sono studiati i processi mentali che intervengono nell'acquisizione di concetti, di dimostrazioni e di soluzione di problemi. In questo periodo si è sottolineato lo stretto legame e il continuo richiamarsi fra geometria intuitiva e geometria razionale. Tale convinzione la ritroviamo nelle parole di Enriques:

questo carattere risiede nel sentimento di necessità che accompagna l'evidenza geometrica e dà quasi l'illusione di una necessità logica […] si può affermare un fatto geometrico elementare, ossia enunciare un postulato senza eseguire un'esperienza effettiva. Basta rivolgere l'intuizione interna sopra certi concetti che troviamo già formati nella nostra mente.[53]

La successiva ricerca in ambito didattico e pedagogico italiano suggerisce, invece, di considerare la geometria intuitiva come propedeutica a quella razionale, facendo tesoro di alcune sperimentazioni e ricerche già condotte in altri stati europei. In questo periodo la geometria intuitiva viene dunque ad avere dei contenuti propri rispetto a quella razionale ed è vista come la capacità di saper vedere nello spazio. Ad essa spetta il compito sia di fornire elementi per poter interpretare il mondo reale, sia di sviluppare capacità logiche.

Possiamo forse ritrovare alcuni aspetti della *geometria intuitiva,* ora descritta, nella didattica impostata da alcuni docenti, con l'utilizzo di software grafici (geometria dinamica). I tratti comuni sono il continuo riferimento a figure e alla loro osservazione per desumerne congetture e proprietà. In particolare gli aspetti, che possono essere sviluppati con un percorso didattico che utilizzi i software di geometria dinamica, sono

---

[52] Castelnuovo E., 1948

[53]Enriques F. cit. in Menghini M., 2010, p.401

descritti in un report di progetto di ricerca sperimentato in diverse classi di Scuola Secondaria di secondo grado attorno all'anno 2000[54]:

- *passare in modo flessibile dal figurale al concettuale*
- *individuare relazioni geometriche fra gli elementi in oggetto*
- *esplicitare ed utilizzare le reciproche dipendenze logiche tra gli oggetti geometrici, all'interno delle relazioni che li legano nella situazione studiata*
- *usare procedure euristiche*
- *formulare e testare congetture*
- *refutare congetture tramite controesempi [...]*
- *validare congetture geometriche.*

Concludendo si può notare, dalle definizioni ora esposte, che una certa parte di geometria può dichiararsi contemporaneamente "elementare" e "di Euclide", oppure "euclidea trattata dal punto di vista sintetico" oppure "analitico" o quant'altro … . Non necessariamente la geometria svolta da un particolare punto di vista deve essere connotata da un solo aggettivo.
Non si ritiene invece necessario in questo scritto analizzare e precisare locuzioni come 'geometria differenziale', 'geometria algebrica', 'geometria …', tutte legittime e di uso comune, ma non pertinenti al tema qui trattato.

1.4.3 GEOMETRIA

Nel lavoro di ricerca qui presentato si parlerà prevalentemente e semplicemente di *geometria*, senza specificare ulteriormente il termine con particolari attributi, denotando con esso la disciplina insegnata oggi nella Scuola Secondaria di secondo grado con la metodologia ritenuta più opportuna. Nella nostra ricerca riserveremo però un posto privilegiato alla geometria trattata in modo sintetico e questa scelta verrà esplicitamente messa in evidenza, quando sarà eventualmente necessario, con la specificazione "geometria sintetica" ove occorra. È infatti all'interno di questo modo di affrontare la geometria che l'oggetto geometrico in quanto tale si presenta come il vero e indiscusso protagonista. Solo all'interno di uno studio della geometria che non utilizza e sfrutta altre discipline o linguaggi, risultano ben esplicite le componenti di intuizione e rigore che intendiamo analizzare; è all'interno della geometria 'pura' che tali componenti acquistano

[54] Paola D., Robutti O., 2001, pp.134-135

tutta la loro rilevanza. È nella geometria, in quanto geometria e basta, che si riescono a mettere a tema e a studiare le dinamiche relative ai ‘concetti figurali’ introdotti da E. Fischbein, all’interno delle quali risultano inscindibili i due aspetti di intuizione e di rigore, in particolare per il ruolo da questi coperto nelle procedure di comprensione della geometria da parte degli studenti. Di tali concetti figurali si parlerà diffusamente nel Capitolo 2.

È opinione di chi scrive che il metodo sintetico è e rimane essenziale e irrinunciabile sia per l’acquisizione di una metodologia di ricerca matematica (in quanto affina la mente alla sensibilità investigativa), sia in vista di una padronanza del linguaggio geometrico.

Esso è stimolo a quella immaginazione euristica che spesso fonda le scoperte, prima che il ragionamento rigoroso e la critica razionale le confermino. Poincarè descrive con le seguenti parole la forza del metodo sintetico a discapito di quello analitico:

> *[esso] resta una preziosa guida là dove la sola analisi sarebbe insufficiente ad evitare che il ricercatore si smarrisca in un labirinto di nozioni magari definite in modo rigorosissimo ma troppo poco intuitive.*[55]

Il linguaggio geometrico, forte delle sue potenzialità espressive, costituisce un mezzo di sintesi potente oltre che un ricco e costante appello alle esperienze immediate.

D’altra parte il metodo sintetico risulta, oggi, quello che desta maggiori difficoltà nel processo di insegnamento-apprendimento dispiegato nella Scuola Secondaria di secondo grado.

Diverso invece è il caso in cui la geometria si presenti e studi i fatti geometrici con un linguaggio preso a prestito da un altro capitolo della matematica come per esempio l’algebra o l’analisi. In questi casi è allora necessario specificare, ed è importante per intendersi, l’attributo più utile per descrivere quale strumento si è voluto utilizzare. Si parlerà quindi di geometria algebrica, analitica,…o altro. In questi casi l’accento è posto più sullo strumento che funge da linguaggio, piuttosto che sui contenuti geometrici, e la trattazione che si imposta acquisisce un valore euristico di conferma dei risultati geometrici sperati e immaginati attraverso l’intuizione, o già ottenuti con il metodo sintetico.

[55] Cfr. C.F. Manara, G. Giorello, 1984, p. 255

CAPITOLO 2

VALORE EDUCATIVO DELLA GEOMETRIA

Avendo deciso di assumere come prospettiva pedagogica quella personalista descritta nel Capitolo 1, approfondiamo, in questo secondo capitolo, il modo in cui l'educazione geometrica dispiegata, nella Scuola Secondaria di secondo grado, può svolgere il ruolo che tale quadro propone.

Inizieremo col descrivere cosa intendiamo per educazione geometrica, declinandola in due aspetti fondamentali e motiveremo poi, in un secondo paragrafo, come tale significato si inserisca all'interno del fine generale della Scuola Secondaria di secondo grado, vista questa come il luogo e l'occasione in cui

> *la cultura non solo è […]giudizio, ma essa [si fa] riflessione critica su se stessa[…] giustificazione del giudizio*.[56]

Coscienti del fatto che l'educazione matematica, e quella geometrica in particolare, non possa, in autonomia e isolata da tutte le altre discipline, rispondere da sola al fine educativo che si propone la scuola, ne dettagliamo però la specificità e ne sottolineiamo il ruolo particolare che ad essa compete per il raggiungimento di questo alto e nobile fine.

2.1 EDUCAZIONE GEOMETRICA E SUE CARATTERISTICHE

Abbiamo già illustrato nel Capitolo 1 il significato del termine *educazione*. Intendiamo qui costruire una caratterizzazione ed una descrizione della nozione di educazione riferita all'ambito geometrico, partendo da quello che noi consideriamo il *problema didattico* fondamentale presente all'interno della disciplina.

Una delle prime difficoltà incontrate da chi si accinge, come docente, ad introdurre gli studenti allo studio della geometria, risiede nel constatare l'inevitabile conflitto esistente fra la necessità dell'appropriazione personale da parte dell'allievo dei contenuti della disciplina e il fatto che i contenuti fecondi e costruttivi della scienza da studiare esistono già. L'appropriazione personale si ritiene possa e debba realizzarsi attraverso una libera e

[56] Bertagna G., 2010, p.400. Le idee di G.Bertagna qui enunciate fanno anche da sfondo alla legge delega 53/2003 caratterizzante la prima riforma scolastica promossa dal Ministro dell'Istruzione L.Moratti

autonoma costruzione o re-invenzione e la funzione alla quale l'educazione deve rispondere in questo caso viene indicata con il termine 'funzione di personalizzazione'[57], mentre il fine da raggiungere, con il percorso che parte dalla cultura matematica e giunge allo studente, viene indicato con il termine 'funzione di socializzazione'[58].

Scegliere come dosare ed amalgamare i due tipi di percorso, non è facile. Autorevoli studiosi si sono interessati a questo problema e qui proviamo a proporre alcune delle loro osservazioni.

Una conoscenza della geometria unicamente trasmessa dall'insegnante e che non sia anche il risultato di una scoperta fatta dallo studente potrebbe avere forse un senso e un rigore interni alla disciplina, ma non diventerebbe mai patrimonio degli studenti, o lo diventerebbe solo di pochissimi eletti. Vygotskij nel 1962 affermava che

> *[...] anche l'esperienza dimostra che l'insegnamento diretto dei concetti è impossibile e sterile. Un insegnante che tenta di fare questo, normalmente non raggiungerà nulla, se non un vuoto verbalismo.*[59]

Se per *insegnamento diretto* dei concetti si intende una trasmissione esclusiva dell'insegnante che non motiva e non sollecita lo studente, è sostenibile il discorso di Vygotskij; se invece nella locuzione *insegnamento diretto* si includono alcune definizioni e assunzioni interne ad una teoria che vengono motivate e ben introdotte dal docente, si può dissentire da Vygotskij. Infatti nel percorso di insegnamento-apprendimento della matematica, spesso, si rende necessaria una tale azione didattica che fa progredire ed evolvere il percorso nel quale gli studenti sono guidati.

D'altro canto una geometria generata soltanto dall'iniziativa degli studenti potrebbe forse portare alla risoluzione di qualche problema specifico ma non diventerebbe probabilmente rigorosa e non avrebbe futuro se non conoscesse le tappe storiche già vissute, criticate e superate, per la formazione dell'attuale metodo e 'corpus' della geometria. È allora necessario che uno studente, accompagnato dall'insegnante, possa riscoprire la voce della 'cultura matematica[60]' e quindi in particolare anche quella degli aspetti sintetici della geometria. Lo studente, conoscendo i passaggi ora descritti, potrà generare a sua volta, successivamente, in autonomia, un *sistema* di affermazioni e deduzioni che egli stesso può riconoscere come una *nuova geometria*. È necessario allora che il discente conosca e faccia sua almeno una struttura teorica, fosse anche per poterla

[57] Cfr. paragrafo 1.2
[58] Cfr. paragrafo 1.2
[59] Vygotskij L., 1990
[60] Bartolini Bussi M.G. e Boni M., 1995

sconfessare un domani, dicendo che tale assetto o qualcosa al suo interno non funziona più.

Complesso risulta quindi il percorso di educazione alla geometria, teso fra una struttura e un modo di pensare da acquisire, e la possibilità d'altra parte di crearne uno *ex novo*, seguendo come modello ispiratore quello acquisito. L'appropriazione di tale modello diviene viva, e quindi a sua volta generatrice di nuovi contenuti, solo nel momento in cui il docente introduce lo studente all'approccio sintetico geometrico, facendogliene cogliere la peculiarità e facendogli sperimentare le difficoltà e la bellezza che in esso risiedono. La difficoltà di questo percorso è ben descritta dalla seguente analisi:

> *I due poli dell'insegnamento e dell'apprendimento (con i loro carichi di responsabilità per insegnante ed allievo) sembrano in conflitto dato che, da un lato:*
>
> *(1) il significato deve essere costruito dall'allievo e non può essere insegnato direttamente (non coincide con la memorizzazione di una definizione);*
>
> *e dall'altro*
>
> *(2) il significato non è negoziabile, poiché i concetti scientifici non sono costruiti per la prima volta dall'allievo, ma sono oggetto di una appropriazione di prodotti già esistenti (in quanto socialmente costruiti nelle generazioni precedenti).*
>
> *Nel corso di discussioni di questo tipo l'insegnante orienta i [significati] personali costruiti dagli allievi (a partire da esperienze già condivise) verso il significato socialmente costituito al di fuori della classe. In questo modo, l'insegnante rappresenta la voce della cultura matematica esistente.*[61]

Rispetto al punto *(2)* non si è completamente concordi nel ritenere il significato *non negoziabile*, infatti uno studente può mettere in dubbio e anche dissentire di fronte alla 'voce della cultura matematica', una volta sentite le motivazioni storico-evolutive che l'avevano motivata e sostenuta. Egli dovrà tenendo comunque conto dei criteri della *coerenza* e del *saper rendere ragione*. Solo accettando la negoziabilità dei significati si lascia lo studente veramente libero e responsabile delle sue affermazioni e della possibilità di avere un futuro per la matematica.

---

[61] Bartolini Bussi M.G. e Boni M., 1995, p.246

H. Freudenthal tenta di dare una risposta al conflitto che è stato messo ora in evidenza, attraverso la proposta della 'reinvenzione guidata', che viene così descritta:

> *[…] ma perché non vogliamo dare alla gente la possibilità di aspirare ad arrampicarsi sulle alture e ad immergersi in profondità, fino a dove sono capaci di arrivare? […]Il discente deve essere libero di trovare il proprio livello, e di esplorare i cammini che vi conducono, con il minimo di guida richiesta per ogni caso particolare.[…]Gli educatori hanno la responsabilità di aiutarli, non con prescrizioni, ma permettendo loro di reinventare la matematica che dovrebbero imparare. […] Guidare la 'reinvenzione guidata' significa trovare un delicato equilibrio tra la libertà dell'inventare e la forza del guidare[…]Il discente deve inventare qualcosa che per lui è nuovo, ma che è ben conosciuto da chi guida.*[62]

Una possibile interpretazione del problema in chiave pedagogica, potrebbe risiedere nel ritenere l'educazione geometrica come implicante sempre una relazione interpersonale, in cui conta la *simmetria ontologica*[63] tra discente e docente.

Nel percorso di insegnamento-apprendimento della geometria sorge spontaneo il confronto fra le scelte che lo studente può fare in modo originale e autonomo, relativamente alle definizioni di enti geometrici o nella indicazione degli assiomi su cui fondare la geometria, e le scelte che sono state convalidate dall'autorità del pensiero matematico formatosi nello sviluppo della storia. Compito del docente è accogliere le proposte degli studenti per affrontare una riflessione corale sulle conseguenze a cui porta la scelta di una particolare definizione o di un assioma, piuttosto che un altro. Il docente, quindi, a fronte di un intervento dello studente, deve porsi in atteggiamento di ricerca assieme a lui e di sostegno fiducioso delle sue congetture, atteggiamento che spinga quello studente e la classe intera ad interrogarsi sulle conseguenze di certe assunzioni effettuate.

Questa stessa strategia è descritta anche, in testi della letteratura didattica, nel seguente modo.

> *Durante l'apprendimento della matematica, gli studenti vengono introdotti ad un nuovo mondo, concettuale e simbolico[…]. Questo*

[62] Freudenthal H., 1994, pp.74-75

[63] '*Ambedue i soggetti in relazione esercitano sempre, al loro livello, in atto o in potenza, il fine dell'intenzionalità o del logos, della libertà e della responsabilità. Educazione è crescere verso o in queste dimensioni*', in Bertagna G., 2010, p.357

mondo non è il frutto di una costruzione solitaria, ma il frutto di una vera e complessa interazione con i membri di una microsocietà di cui il soggetto apprendente è parte: i propri compagni e gli insegnanti(e la noosfera, a volte sfumata, a volte pressante)(Chevallard, 1992). È grazie ad un continuo dibattito sociale che il soggetto apprendente prende coscienza del conflitto fra 'concetti spontanei'e 'concetti scientifici'.[64]

Si torna, anche in questo caso, ad intrecciare il problema didattico espresso con le possibili soluzioni.

La necessità di una 'simmetria ontologica' che deve esistere fra i due soggetti che costituiscono la relazione educativa, è ben messa in evidenza dalla seguente testimonianza di Federigo Enriques che, oltre ad essere stato uno dei grandi studiosi italiani di geometria dei primi del secolo XX, si è ampiamente interessato ed ha scritto di didattica della matematica, promuovendo la riflessione su tale insegnamento.

Ho avuto la fortuna di assistere a qualche lezione di aritmetica o di geometria pratica, in cui il [docente][65] *si metteva a conversare coi ragazzi facendosi – anche lui - un poco ignorante, ricercando insieme con loro, suggerendo, a tentoni, la via che essi stessi dovevano percorrere per guadagnare la verità. E [...] mi chiedevo perché lo stesso metodo non si dovesse adoperare anche con alunni di età più matura...perché no?, anche coi giovinotti che vengono a studiare alle nostre università. [...] Il più gran vantaggio di questo metodo è, a mio avviso, la sincerità, perché il postulato dell'ignoranza è infinitamente più vicino al vero che la presupposizione di conoscenze già sicure nell'allievo, da cui muove la lezione cattedratica. [...] Ma per ciò occorre che anche noi maestri - nell'atto di insegnare - ripetiamo, non già il resultato freddo degli studi fatti, bensì il travaglio interiore per cui riuscimmo a conquistare la verità [...]Vorrei spiegarmi bene su questo punto: la fatica di cui parlo è reale, non finzione ad uso didattico; infatti non è possibile che ripensiamo una difficoltà che una volta abbiamo vinto, senza scoprire nello stesso problema qualche altra difficoltà che si risolve in una comprensione nuova e più alta; perché è falso che le cose elementari su cui torniamo per*

[64] D'Amore B., 2001, p.160
[65] Nel testo originale c'è la parola '*discente*'

insegnarle sieno facili al confronto della scienza superiore il cui possesso ci rende oggi orgogliosi davanti ai nostri scolari; perché infine codesto possesso medesimo è dubbio e vano, ridicolo l'orgoglio, se di fronte al discepolo ci presentiamo soltanto come discepoli, a ripetere un po' più meccanicamente la vecchia lezione appresa sugli stessi banchi, anziché come maestri, a cercare una veduta nostra, più chiara e più larga.[66]

Il problema dell'educazione geometrica non può però ridursi alla soluzione del problema didattico ora esposto riguardante la trasmissione della disciplina, ma per il fine che noi riteniamo risiedere nella Scuola Secondaria di secondo grado, è necessario riflettere sul come le conoscenze, più o meno interiorizzate, possano aiutare la persona a *formarsi*[67].

Alla luce del problema didattico ora esposto, descriveremo nei due paragrafi che seguono le caratteristiche e le sfumature proprie dell'educazione geometrica, cercando di sottolineare come essa contribuisca allo sviluppo di *intenzionalità, razionalità, libertà e responsabilità,* componenti che noi riteniamo necessarie per la formazione della persona[68]. Tali caratteristiche le individueremo in due assunzioni particolari:

- l'educazione geometrica è parte integrante di ciascuna persona, sia per necessità di relazionarsi con il mondo circostante, sia come conseguenza naturale ed obbligata di un percorso di formazione e costruzione della persona;
- l'educazione geometrica coinvolge tutte le dimensioni della persona.

2.1.1 L'EDUCAZIONE GEOMETRICA È PARTE INTEGRANTE DI CIASCUNA PERSONA

La questione fondamentale di *carattere conoscitivo-epistemologica* legato all'educazione geometrica è direttamente collegabile al nostro naturale desiderio di capire cosa possiamo o dobbiamo intendere per *spazio*. L'idea di spazio è leggibile da molti punti di vista, alcuni legati all'esperienza fisica, altri filosofici, altri ancora di carattere psicologico. Il problema del ruolo e del riconoscimento della natura del luogo in cui viviamo (spazio) è un problema ampliamente affrontato e dibattuto nella letteratura della didattica della matematica. Siamo coscienti che per impostare un discorso geometrico di carattere strettamente tecnico non sia indispensabile possedere una nozione di spazio né come termine primitivo, né come definizione. Peano ci fa infatti notare che:

---
[66] Enriques F., 1921
[67] Con questo termine facciamo riferimento a quanto esposto nel Capitolo 1
[68] Cfr. Capitolo 1

Ritenendo […] il concetto di spazio come fondamentale per la geometria, ne viene che non si potrebbe scrivere un trattato di questa scienza in una lingua che per avventura manchi di tale parola. Quindi non si potrebbe scrivere di Geometria nella lingua d'Euclide ed Archimede, ove appunto manca la parola corrispondente al termine 'spazio', nel senso in cui lo si usa negli odierni trattati.[…] Questa osservazione sulla inutilità del termine spazio, in Geometria, riuscirà strana agli autori che incominciano il loro libro col parlare dello spazio.

La parola spazio, e il parlarne, è il risultato del processo di razionalizzazione operato sui dati sensoriali, a conclusione dell'approccio che ci ha condotto alla costruzione della geometria, secondo il modo con cui gestiamo la realtà. Sottolineiamo inoltre che non vi è perfetta corrispondenza fra il mondo del linguaggio e il mondo del pensiero; il linguaggio è solo un modo, finito, di poter comunicare il pensiero. Quest'ultimo, infatti, è ben più complesso e non riconducibile interamente a ciò che si riesce a rendere con il linguaggio.

Riteniamo opportuno fare qui e nel seguito una scelta di tipo epistemologico, considerando lo *spazio come una forma della nostra sensibilità* e come uno dei modi con i quali organizziamo l'esperienza, mutuando così una delle lezioni fondamentali di I.Kant:

Lo spazio non è affatto un concetto empirico, che sia tratto da esperienze esterne. In effetti, perché certe sensazioni siano riferite a qualcosa fuori di me (cioè a qualcosa in un luogo dello spazio, che sia diverso da quello in cui io mi trovo), e similmente, perché io possa rappresentare tali sensazioni come l'una fuori dell'altra e l'una accanto all'altra, quindi non soltanto differenti, ma situate in luoghi differenti, per tutto questo, ci si deve fondare sulla rappresentazione di spazio. Per conseguenza, la rappresentazione dello spazio non può essere nata, per esperienza, dai rapporti dei fenomeni esterni; questa esperienza esterna, piuttosto, è essa stessa possibile solo mediante la suddetta rappresentazione. Lo spazio è una necessaria rappresentazione a priori, che sta alla base di tutte le intuizioni esterne. [69]

L'idea di spazio appartiene perciò, secondo questo punto di vista, a ciascuna persona e costituisce il mezzo con cui essa può mettersi in comunicazione con il mondo e può organizzarne la sua gestione. Riuscire a comprendere e a dominare lo spazio fisico

[69] Kant I., nella traduzione italiana Colli G.,1957, p.77

esterno[70] all’osservatore, prende l’avvio dall’isolare delle porzioni dello stesso per trovare in esse leggi parziali, che, si spera, possano valere per lo spazio in generale. Ogni persona ha infatti bisogno di gestire e ‘governare’ lo spazio che la circonda, di astrarre dallo spazio particolare e dall’esperienza locale che ha di spazio determinate leggi generali, che le consentano di vivere domani con le stesse convinzioni di oggi. Pensiamo infatti come potrebbe vivere un uomo se un giorno la sua idea di spazio non venisse più confermata dalla realtà. A tal proposito risulta suggestivo ed esplicativo un passo del libro *Flatlandia*[71], nel quale un Quadrato, appartenente ad un mondo bidimensionale, viene accompagnato da una Sfera in un mondo tridimensionale.
Questo è il racconto che di tale esperienza fa il Quadrato:

> *Un orrore indicibile s’impossessò di me. Dapprima l’oscurità; poi una visione annebbiata, stomachevole, che non era vedere; vedevo una Linea che non era una Linea; uno Spazio che non era uno Spazio: io ero io, e non ero io. Quando ritrovai la voce, mandai un alto grido d’angoscia: <<Questa è la follia o l’inferno!>>. <<Nessuno dei due>> rispose calma la voce della Sfera. <<Questo è il Sapere; sono le tre dimensioni: riapri l’occhio e cerca di guardare per un po’>>.*
> *Guardai e, oh, meraviglia! Un nuovo mondo!*[72]

Quale orrore, quale sconcerto e quale stupore genera nel Quadrato la scoperta di uno spazio così diverso dal suo! Lo stesso stupore l’Autore (E.Abbott) lo genera nel lettore che viene coinvolto in una avventura che si svolge in un mondo bidimensionale o monodimensionale così diverso dal nostro e quindi destabilizzante! Bello però da immaginare; sarebbe forse un po’ più complicato doverci vivere dentro.
Questa questione di carattere *conoscitivo-epistemologico,* oltre alla nozione di spazio, è collegabile anche all’aspetto strutturale della disciplina, intesa come scienza-conoscenza. Per la geometria tale aspetto strutturale sembra risiedere nella risorsa del metodo assiomatico. Con il termine *metodo assiomatico,* nel contesto della Scuola Secondaria di secondo grado, intendiamo descrivere il complesso di premesse iniziali (espresse in modo

[70] *‘[…]se lo spazio grande reale resta escluso dall’esperienza del lavoro scolastico, manca qualsiasi possibilità di riflessione e di rielaborazione su questo terreno: la geometria che si sperimenta nella realtà può essere trasferita sul foglio in seguito alla formazione di adeguate immagini mentali legate all’esperienza diretta.’* in Lanciano N. e al., 1998
[71] Abbott E.A., 2007
[72] Ibi, p. 124

esplicito e univoco) dalle quali prendiamo le mosse nella costruzione della nostra disciplina, seguito poi dalle conseguenti deduzioni.

L'esigenza di tale metodo e la successiva invenzione/creazione di strutture matematiche che lo utilizzano, nasce dalla natura stessa intesa come *disciplina in continua evoluzione, da scienza di contenuti a scienza strutturata e organizzata*. Nelle righe che seguono viene descritto questo passaggio.

I *contenuti* sono concreti, evidenti, intuibili, si conoscono, ma sono difficilmente caratterizzabili, possiedono contorni sfumati, imprecisi (un piano, una retta, un numero, un cerchio,…).

Ci si rende conto che su di essi si può costruire una conoscenza, ma si tratterà di una *geometria empirica* (i terreni del Nilo, le tavolette babilonesi, …) anche se spesso ingegnosa e a volte più difficile (la misura dell'altezza di una torre, le previsioni sui moti di astri e pianeti, …). Questa potrebbe essere la *geometria intuitiva* di cui parla Vailati[73]. È una geometria ragionevole ma che si basa su fatti empirici. Questa non è ancora una vera scienza: nessuna certezza di valore interpersonale al di fuori del contesto in cui è nata. Nasce però con Talete una nuova idea di scienza: una conoscenza che aspira ad assumere un valore universale e interpersonale che raccoglie, giustifica e sintetizza alcune delle esperienze positive conosciute, riconducibili ad un unico ambito concettuale. Accettate alcune nozioni (gli assiomi[74]), ne acquisisce di nuove attraverso la deduzione.

Questo punto di vista è espresso mirabilmente da Platone che per descrivere il modo di operare degli studiosi di geometria, nella sua opera *Repubblica* scrive*:*

> *I geometri si servono di figure visibili[i disegni] e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui esse sono immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé, e non su quelle che disegnano.*[75]

È necessario quindi per un geometra definire con precisione gli oggetti della sua scienza: la geometria. Sorge però il problema di come definire tutti gli oggetti coinvolti senza cadere in un circolo vizioso. Attualmente l'unico strumento a nostra disposizione per sistemare razionalmente le conoscenze matematiche (al di là di qualche antinomia o paradosso[76] che pure lo mette in crisi e che ne ha rivelato i limiti) è proprio il metodo assiomatico. Il concreto rimane essenziale, ma non più come oggetto di studio, bensì

[73] Cfr. Vailati G., 1907

[74] Gli assiomi sono 'verità ovvie' per il mondo classico greco, mentre con la nascita delle geometrie non-euclidee essi risultano come scelte opportune ed utili per descrivere il mondo circostante o la teoria alla quale si vuole approdare.

[75] Platone, *La Repubblica*, (510 d,e) , 395-368 a.C.

[76] Il Paradosso di Skolem ne è un esempio. Cfr. E.Casari, 1972, pp.119-122

come fonte di ispirazione. Il vero oggetto della geometria diviene il concetto astratto. Il concreto ispira gli assiomi che ne sono l'astratto. Ci chiediamo a questo punto se il metodo assiomatico è solo una tappa dell'evoluzione storica della matematica, e quindi può essere superato, oppure va perfezionato dall'interno! L.Geymonat in una riflessione relativa alle tentazioni dalle quali deve guardarsi un filosofo che rifletta sulla scienza, affermava:

> *Da una tentazione però, dovrà comunque guardarsi:[...] trasformare i caratteri che egli ritiene tipici della conoscenza scientifica in dogmi assoluti e immutabili avulsi dalla realtà storica in continua trasformazione*[77].

C'è poi un altra questione fondamentale, che contribuisce alla costruzione e formazione della persona, che è legata all'educazione geometrica ed è quella dell'*educazione mentale*. Con questo termine indichiamo la capacità della nostra mente ad operare rispettando due criteri: la *coerenza* e il *sapere rendere ragione* delle proprie affermazioni. Questi due criteri non appartengono 'per natura' agli uomini, sebbene tutti cerchino di tendervi con fatica. Essi vanno quindi educati ed esercitati. Basterebbe a tal proposito analizzare alcuni discorsi di uomini politici, personaggi pubblici o anche di persone comuni (noi stessi inclusi) per rendere evidente la frequente mancanza dell'una o dell'altra componente. La comprensione del funzionamento del metodo assiomatico matematico e l'abitudine ad operare secondo i suoi canoni contribuisce alla crescita di una esigenza di coerenza e del saper rendere ragione nello svolgimento di ogni procedimento mentale. In particolare il metodo assiomatico che è più facilmente presentabile (e con il maggior grado di relativa completezza) nella Scuola Secondaria di secondo grado è quello applicato alla geometria. Altri[78] sistemi assiomatici possono essere presentati, ma solo parzialmente, senza permettere allo studente di calarsi troppo nei dettagli. Questa difficoltà ad affrontare assiomatiche complete di altre branche della matematica potrebbe essere una conseguenza, da un lato dalla novità per gli studenti dei loro contenuti (ad esempio: nella probabilità come potrebbe uno studente definire lo 'spazio degli eventi aleatori' non avendo mai incontrato tale concetto prima, nemmeno a livello intuitivo?), e dall'altro della difficoltà di gestione e di organizzazione concettuale interna presente in altre assiomatiche, che risultano molto più recenti nella loro

[77] Geymonat L., 1960, p.16
[78] Ci si riferisce all'assiomatica della statistica o a quella algebrica, scarsamente e raramente presentate come tali nelle scuole e comunque difficilmente acquisibili dagli alunni come una metodologia di concettualizzazione unitaria

sistemazione storica e quindi meno sperimentate[79] didatticamente. Questi due ostacoli non sono invece presenti nella presentazione dell'assiomatica geometrica, la quale può vantare di appoggiarsi su concetti già posseduti dagli alunni (magari anche solo a livello intuitivo, ma comunque trattati nella loro carriera scolastica precedente) e allo stesso tempo di avere una sistemazione storica molto più antica e consolidata.

L'autonomia relativa alla scelta degli assiomi e all'esercizio dell'attività dimostrativa e definitoria, tipiche dell'impianto assiomatico, possono venire 'concesse' agli studenti quasi esclusivamente in ambito geometrico, ed è nell'esercizio di queste tre attività che si possono affinare la *coerenza* e la capacità di *rendere ragione.*

Lasciare la libertà agli allievi di scegliere, per studiare uno stesso oggetto geometrico, una definizione piuttosto che un'altra, un assioma a discapito di un altro, una strategia dimostrativa rispetto ad un'altra, permette di ottenere numerose conseguenze importanti per la loro educazione:

- lo studente diviene consapevole delle scelte fatte e capisce come una scelta possa influire sui passi successivi che dovrà compiere;
- egli si sente libero di scegliere, ovviamente in un contesto di confronto intersoggettivo, avendo poi l'obbligo di doversi confrontare e dover giustificare le proprie assunzioni;
- egli si sente responsabile delle scelte fatte.

In questo modo, a livello emotivo, lo studente si sente coinvolto e protagonista delle sue 'scelte matematiche'. La matematica assume caratteri umani personali, altrimenti non apprezzabili in alcun modo.

Come e quando realizzare tale impostazione didattica sarà argomento del Capitolo 5.

Se la risorsa del metodo assiomatico si presenta come sublimazione dei due criteri del rendere ragione e della ricerca della coerenza, essa non è necessariamente da considerarsi l'unica risposta all'esigenza di sviluppo dell'educazione mentale della persona. La risposta intrinseca è invece la ricerca e il rispetto del rigore. Rigore che è interpretabile anche come il sentire la necessità di rendere ragione, prima ancora di avere degli strumenti formali e la struttura teorica necessaria per poter impostare una dimostrazione. Quindi il rigore è perseguibile a tutte le età con possibilità di risposte diverse. Proprio in virtù di quest'ultimo aspetto, l'educazione geometrica si inserisce a pieno titolo tra le

[79] Potrebbe essere interessante iniziare a sperimentare almeno la presentazione dell'esistenza di tali assiomatiche agli studenti, ovviamente nel modo giusto e al momento giusto del loro percorso d'apprendimento.

strategie di sviluppo dell'intenzionalità della persona. Desiderare e considerare importanti procedure argomentative rigorose, anche se non legate alla sola costruzione del pensiero geometrico, ma più in generale riguardanti anche tutto il pensiero umano in ogni campo, coinvolge il pensiero (poi traducibile in linguaggio e scelte concrete) ad osservare e valutare le diverse direzioni da prendere e a selezionarle con tutta la libertà risiedente nella mente. Tali procedure, nel momento della loro selezione ed esplicitazione, dovranno poter reggere alle critiche, si spera razionali, dell'interlocutore. Entrerà in gioco allora il fattore della responsabilità personale che dovrà saper motivare e ridescrivere il percorso fatto interiormente, che dovrà essere confrontabile con criteri intersoggettivi, quale è la razionalità.

2.1.2 L'EDUCAZIONE GEOMETRICA COINVOLGE TUTTE LE DIMENSIONI DELLA PERSONA.

Ogni uomo è interessato ad aderire al mondo in cui vive. Si possono fare supposizioni già per quanto riguarda la Preistoria[80] sul fatto che l'uomo avesse interesse per le sue relazioni spaziali e ciò è testimoniato dai graffiti e dai disegni giunti sino a noi. Addirittura l'uomo primitivo tentava di ritrovare, mediante le osservazioni del cielo e degli astri, alcune relazioni geometrico-spaziali che riteneva influissero, e che in alcuni casi influivano realmente, sugli avvenimenti terrestri. L'uomo antico cercava di coinvolgere e sfruttare tutto ciò che era visibile ai suoi occhi per acquisire conoscenze e trovare regolarità, utili per meglio condurre le sue attività quotidiane. La geometria, lungo il suo percorso evolutivo nella storia, ha necessariamente sempre dovuto riferirsi al mondo reale dal quale ha tratto suggerimenti e spunti. La percezione del movimento, la vista e il tatto sono state le componenti sensoriali maggiormente coinvolte in questa prima esplorazione dello spazio fisico circostante e ciò sia a livello storico che a livello di percorso personale, che ciascuno di noi, crescendo, ha vissuto dalla nascita. Ritroviamo qui alcuni tratti caratteristici del *nous*, la *ragione soggettiva* di cui si è parlato nel Capitolo 1. La geometria interpella e coinvolge la razionalità fin dalle sue prime fasi costitutive.

Quando si parla però di educazione geometrica non si tratta solo di esplorare come stanno le cose relativamente ad un momento o ad una situazione specifica, ma si cerca di creare un modo di leggere, interpretare, astrarre per prevedere ciò che accadrà nello spazio, supponendo che esso continui a 'comportarsi come si è sempre comportato' e come si

[80] Nel neolitico, vedere Boyer C., 1990, p.7

comporta nel ristretto ambito delle nostre esperienze sensoriali. Oltre ai sensi e alla percezione del movimento l’uomo mette quindi in campo i desideri e le speranze di regolarità che sono frutto della sintesi di tutte le conoscenze e le convinzioni che egli possiede. L’educazione geometrica si deve quindi intendere come coinvolgente tutte le dimensioni della persona. Se si impostano percorsi didattici che coinvolgono solo alcuni degli aspetti ora descritti, oltre che non sviluppare negli studenti una corretta idea di geometria, ancor più grave risulta la perdita di una preziosa occasione formativa, individuata dal didatta, F. Speranza in questi termini:

> *La geometria, a tutti i livelli, deve dare agli allievi una sensibilità spaziale, deve rafforzare la componente "visualizzazione" del nostro modo di concepire il mondo, deve gettare un ponte fra sensibilità e razionalità[...].*[81]

Oltre che al *nous*, l’altro valore a cui devono condurre lo studio e la conoscenza della geometria è quello della *razionalità*, anche nella sua componente di *logos*, la *ragione intersoggettiva*. Essa è lo strumento che permette di entrare in un vero e proprio dialogo e confronto con una comunità, sia essa la classe scolastica di appartenenza, sia il gruppo dei matematici, sia qualsiasi gruppo che condivida quel tipo di ragione.

Nelle parole di F.Speranza scopriamo l’indicazione di una possibile finalità, che dovrebbe essere riconosciuta alla geometria, cioè al suo insegnamento. Se in queste righe si vuole leggere per intuizione *la sensibilità spaziale* e per rigore la *razionalità*, incontriamo qui il binomio intuizione-rigore di cui si è già accennato e che verrà ripreso, analizzandone tutto il significato e la portata nell’ambito educativo nel successivo Capitolo 3. Nel Paragrafo 2.2 concluderemo anche che la vera portata educativa del binomio intuizione-rigore non sta nell’esercizio separato delle due componenti, ma nel loro accostamento equilibrato e nella loro integrazione.

Interessante è anche la riflessione svolta da C.F.Manara nel 1994, in un articolo dal titolo *Geometria: intuizione e ragione,* dove l’intuizione è considerata maggiormente legata alla spinta creatrice e di sviluppo della conoscenza, piuttosto che all’appropriazione degli oggetti geometrici.

> *Più precisamente io sono convinto che proprio la geometria sia una palestra insostituibile anche per la formazione della creatività ed alla progettualità.*
> *Infatti nelle procedure classiche [...] di analisi e di sintesi, per la dimostrazione dei teoremi e per la soluzione di problemi geometrici, si*

[81] Speranza F., 1995, pp.31-32

richiede di immaginare il problema risolto. E qui l'immaginazione ha quindi un ruolo importantissimo; ma, si noti, non l'immaginazione sfrenata, che fabbrica chimere impossibili, ma l'immaginazione che parte dall'esperienza e si prepara al confronto finale con le leggi della realtà.[…] Non si tratta quindi dell'immaginazione cervellotica, poetica, che fabbrica castelli in aria; ma di quella immaginazione creativa, che inventa nuove strade per la ragione, e che fa guardare con occhi nuovi magari anche le cose di tutti i giorni, che al volgo non dicono nulla di nuovo. Ma la geometria non si limita soltanto a stimolare questa immaginazione, ma allena anche alla progettualità; cioè alla intuizione del cammino razionale che si deve seguire per giungere alla soluzione di un problema oppure alla dimostrazione di una verità.

Rincresce di dover constatare che una dottrina così bella, così ricca di stimoli sia emarginata in molti itinerari didattici[…].

Credo tuttavia che, per ottenere quello scopo di formazione che mi pare tipico della matematica, a tutti gli stadi di evoluzione e di maturazione mentale, occorra farsi un'idea abbastanza esatta di questa scienza, intesa come dottrina e come sistema di pensiero. E mi sento di poter affermare che questa giusta immagine della matematica non si consegue di certo facendo di questa scienza un magazzino, un farraginoso supermercato di regole e di formule, e del suo insegnamento un vuoto addestramento formale.

La parte creatrice e quella rivolta alla progettualità, che dovrebbe appartenere all'educazione geometrica, a nostro avviso è ritrovabile nel metodo sintetico della geometria, nel quale essa appare concettualizzata mediante i *concetti figurali*[82] introdotti e considerati da E. Fischbein.

2.2 Geometria e finalità della Scuola Secondaria di II grado

Per parlare di insegnamento della geometria è necessario chiarire il valore che può assumere l'educazione geometrica all'interno del processo di formazione proposto nella Scuola Secondaria di secondo grado e ciò è quanto abbiamo sviluppato nel Paragrafo 2.1.

[82] Cfr. Capitolo 3

Solo avendo reso meno opaco tale aspetto, si potranno fare poi considerazioni di carattere didattico più precise e orientate.

Il ruolo attribuibile all'Istruzione Secondaria di secondo grado presentato nella Legge Delega n.53/2003, che aveva peraltro come sfondo pedagogico le tesi personaliste di G.Bertagna, aiuta a nostro parere a realizzare un possibile inquadramento delle discipline presenti nella Scuola, dotandole di un senso non solo interno a loro stesse, ma soprattutto considerandole come parti essenziali atte a contribuire alla crescita integrale della persona. Si leggeva nel testo della citata legge delega:

> *il secondo ciclo, finalizzato alla* ***crescita educativa, culturale e professionale*** *dei giovani attraverso il sapere, il fare [...] l'agire, e* ***la riflessione critica*** *su di essi, è finalizzato a* ***sviluppare l'autonoma capacità di giudizio*** *e* ***l'esercizio della responsabilità personale e sociale****.*[83]

Questo atteggiamento critico e riflessivo avrebbe dovuto essere la peculiarità della Scuola Secondaria di secondo grado, come afferma G.Bertagna secondo quanto riportato nell'introduzione di questo capitolo.

Non si tratta quindi di utilizzare la cultura solo come uno strumento per criticare o interpretare la realtà, ma diventa essa stessa oggetto di critica, destinataria di riflessioni e giudizi. Sarà la cultura ad essere continuamente messa in crisi nella sua identità.

Tutti gli argomenti insegnati nella Scuola Secondaria di secondo grado diventano cultura

> *nel momento in cui si è capaci di giustificare criticamente fatti con ipotesi che li trascendono, o meglio ancora, con teorie globali che li spiegano e che conferiscono loro il senso che hanno o possono almeno avere.*[84]

Ciò che intendiamo sostenere è che la geometria contribuisce in modo significativo alla crescita del *logos*, e in particolare stimola la riflessione critica e lo sviluppo dell'autonoma capacità di giudizio, richiesta dalle finalità accettate per la Scuola Secondaria di secondo grado[85].

Infatti, la struttura assiomatica della geometria costituisce proprio una teoria globale, nella quale i concetti introdotti acquistano un significato e un senso compiuto. Giustificare la scelta di un assioma, di una definizione, di una dimostrazione all'interno di tale costruzione è un obiettivo alto, ma raggiungibile anche nella Scuola Secondaria di secondo grado.

---

[83] Legge n.53, 28 marzo 2003
[84] Bertagna G., 2010, p.400
[85] Cfr. pagina precedente

In particolare la complessità, ma anche la ricchezza dell'insegnamento della geometria sintetica, è da ricercare nel fatto che non si può fare geometria sintetica senza attivare nella classe e in ciascuno studente una meta-riflessione[86]. Sarebbe auspicabile favorire la meta riflessione in ogni ambito dell'insegnamento matematico, ma, mentre questa si può tralasciare trattando determinati aspetti dell'attività matematica, come quando per esempio si ha a che fare con procedure algoritmiche (tipiche dell'algebra, dell'analisi e della geometria analitica), tale fase di educazione al pensiero critico e all'analisi della ricchezza di significati non può mai essere abbandonata nello studio e nella trattazione della geometria sintetica.

Il dare, ad esempio, una definizione di 'rette parallele', piuttosto che un'altra, deve innescare nello studente una serie di domande, alle quali egli deve tentare di dare una risposta alla luce del quadro teorico che si sta dipingendo. *Perché proprio quella definizione? Io ne avrei un'altra che mi sembra corretta; perché non accettare questa? Quali conseguenze comporta una scelta piuttosto che l'altra? Come definirò quindi due rette coincidenti? E due rette incidenti? E nello spazio, esistono altre possibilità oltre a quelle già vagliate? Quali definizioni dovremo dare senza cadere in contraddizione con quelle già date?*

Se si scorporano i contenuti geometrici dal significato e dalla riflessione sulla costruzione della disciplina, si cade nella banalità o nella sterile noia dell'imparare a memoria.

I problemi e le debolezze dell'insegnamento della matematica nella Scuola Secondaria di oggi, a causa della rilevanza che viene data all'oggetto del sapere a discapito della riflessione su come tale sapere è stato organizzato, sono già contenuti nelle parole di Enriques del 1921:

> *Vi è una logica in piccolo e una logica in grande: intendo l'analisi raffinata del processo del pensiero esatto(quasi la veduta microscopica degli elementi che formano il tessuto della scienza)e- per contro-lo studio delle connessioni organiche del sistema, cioè la veduta macroscopica della scienza. Ora io temo che, nelle preoccupazioni dei nostri educatori matematici, la logica in piccolo tenga troppo posto in confronto alla logica in grande.[...] Ciò che si deve richiedere all'insegnamento matematico, concepito come formativo delle facoltà logiche, è prima di tutto di svolgere lo spirito di coordinazione in*

[86] Si intende con il termine *meta-riflessione* sia l'azione di riflessione sulle scelte e i percorsi interni alla disciplina, sia l'azione di riflessione su come si sta apprendendo un determinato concetto e sui motivi che hanno spinto alla scelta di apprenderlo in quel modo.

> *quella forma che ho chiamato macroscopica[…]Non giova sviluppare con impeccabile deduzione la serie dei teoremi della geometria euclidea se non si ritorni a contemplare l'edifizio costruito, invitando i discepoli a distinguere le proprietà geometriche veramente significative da quelle che hanno valore soltanto come anelli della catena.* [87]

Anche la seguente riflessione di B.Spotorno (insegnante di Scuola Secondaria di secondo grado) costituisce una sollecitazione allo sviluppo del pensiero critico negli studenti:

> *Nell'insegnamento della geometria sarà la sovrapposizione delle assiomatiche che riceverà un senso didattico. Questo porsi dinanzi ai problemi, questa libertà nella scelta dello strumento più idoneo alla loro soluzione nel rispetto delle condizioni(tutte!) dell'allievo, offre all'insegnante la possibilità di riconoscere e stimolare orientamenti ed abilità; non si tratta tuttavia di facilitare la crescita di 'polli da allevamento' ma di rispettare tempi e persone*[88]

Con questo intervento si ritorna al problema didattico iniziale introdotto all'inizio di questo capitolo. La re-invenzione, l'appropriazione concettuale, la razionalità intersoggettiva sono dunque aspetti diversi di un unico problema che è il problema dell'educazione matematica (geometrica in particolare). Le procedure di intuizione e rigore sono le modalità con cui la nostra mente affronta tale problema e di cui si discorrerà ampliamente nel Capitolo 3.

L'interpretazione che risulta naturale a quanto sopra affermato è che la proposta dell'affiancamento delle diverse assiomatiche[89] di cui parla Spotorno, è una sfida interessante che può stimolare la riflessione dello studente. Il percorso di presentazione delle assiomatiche dovrà comunque tenere in considerazione e rispettare i tempi di maturazione dello studente.

---

[87] Enriques F., 1921, p.9

[88] Spotorno B., 1983, p.81

[89] Diverse assiomatiche sono il risultato di diverse razionalizzazioni della stessa realtà; esse sono suggerite dai diversi punti di vista che si intendono evidenziare. Un esempio di assiomatizzazione diversa rispetto a quella proposta da Euclide per la geometria euclidea è quella di Peano, il quale assume come concetti primitivi il *punto* e il *segmento*. Il primo assioma è allora: *'si può segnare un punto'*(Cfr. Peano G., 1894, p. 55). Un altro esempio è offerto da D.Hilbert che invece afferma '*Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo punti gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con A,B,C,[…]'*. Peano e Hilbert per dire la stessa cosa si esprimono secondo due mentalità radicalmente diverse: l'uno enfatizza la costruibilità e tracciabilità dei punti, l'altro li inserisce come elementi di un insieme. Gli studenti posti di fronte alla possibilità di effettuare un confronto fra diversi punti di partenza si rendono conto che la scelta assiomatica non è altro che *il mio sguardo sulla realtà* e non un gioco formale per gli 'addetti ai lavori'. L'intuizione interviene in questa scelta degli assiomi che è la base ineludibile sulla quale fondare la deduzione alla quale partecipa poi il rigore.

Oltre alla possibilità di costruire diversi punti di partenza per lo stesso contenuto vi sono, per quanto riguarda la didattica della geometria, altri suggerimenti di autorevoli personalità. Riportiamo per esempio una nota sulle modalità con cui la scuola dovrebbe operare: è il commento del ministro alla Pubblica Istruzione G.Gentile, filosofo di inizio novecento attento alla realtà scolastica, in riferimento al libro di testo di geometria che F. Severi aveva scritto nel 1925 per la Scuola Superiore. Siamo di fronte, nonostante alcuni termini siano ormai in disuso, ad una osservazione metodologica moderna che in molti contesti non è ancora stata realizzata.

> *La nuova scuola italiana deve essere una scuola attiva che metta in moto tutti in tutti i gradi e in tutte le forme dell'insegnamento, le forze spirituali dell'alunno dandogli la fatica e la gioia di capire da sé, di scoprire egli stesso e di conquistare la sua verità: quella verità che sola ha il sapore, e si fa succo e sangue. E questi libri*[90] *mi pare corrispondano a meraviglia al nostro desiderio, che anche queste materie le quali corrono sempre il rischio di finire in uno degli estremi opposti, o irrigidirsi in astrattezze astruse, o cadere in banalità intollerabili, vengono presentate nella forma più adatta a chi comincia: la forma euristica del concetto raggiunto attraverso intuizioni concrete, evidenti, attraenti.*[91]

Diversi aspetti del pensiero di G.Vailati, matematico (e non solo) vissuto fra la fine del XIX secolo e l'inizio del secolo scorso, rendono vivo e attuale il dibattito che all'inizio del secolo scorso aveva investito l'insegnamento della geometria. Esso riguardava il confronto fra due impostazioni presentate come antitetiche: quella di assoluto rigore formale e quella che invece cercava di dare maggior spazio all'intuizione.

Vailati si inserisce all'interno di questo dibattito definendo meglio i contorni dell'impostazione della geometria operata nella Scuola Secondaria inferiore:

> *'Piuttosto che di geometria <<intuitiva>>, mi sembrerebbe il caso di parlare di geometria <<sperimentale>> o <<operativa>>'.*[92]

Egli ritiene che quanto viene proposto all'inizio nella Scuola Secondaria inferiore non sia intuitivamente evidente, ma afferma che attraverso lo strumento del disegno e l'utilizzo di proprietà intuitive delle figure, si possano ottenere conclusioni e generalizzazioni che tali strumenti giustificano. A suo parere:

---

[90] I libri del Severi a cui appunto ci riferiamo
[91] Spotorno B., 1983, p.75
[92] Vailati G., 1907

> *‘Guidare e spingere l’alunno a procurarsi, per via di esperimento e, in particolare, col ricorso agli strumenti da disegno, il più gran numero possibile di cognizioni di fatto sul modo di costruire le figure e sulle loro proprietà, […], è […]il miglior mezzo di far nascere [nello studente] il desiderio e il bisogno di rendersi ragione del <<come>> e del <<perché>> tali proprietà sussistano e di predisporlo a riguardare come interessante l’apprendimento, o la ricerca, di connessioni deduttive tra esse, e di ragionamenti che conducano a riconoscerle come conseguenze la una delle altre.’*[93]

Il motore da azionare è il coinvolgimento dello studente; si cercano le condizioni per favorire il suo ‘attivarsi’, perché sia lo studente stesso a richiedere, quasi desiderandolo, un passaggio ulteriore.

Il percorso che deve necessariamente giungere al rigore è caratterizzato dalla ricerca di enunciazione delle definizione dei termini geometrici utilizzati; Vailati sostiene a riguardo che sia questa una delle fasi più complicate da percorrere, poiché frutto di un cammino le cui tappe sono il riconoscimento di ciò di cui si sta parlando, una progressiva generalizzazione e una appropriazione delle proprietà che è necessario siano soddisfate per rientrare nella definizione data.

L’indicazione metodologica che viene quindi fornita è la seguente:

> *‘Solo quando l’alunno abbia mostrato di saper fare, lo si inviti a dire, chiaramente ed esattamente, ciò che ha fatto.’*[94]

Riteniamo di poter concludere affermando che intuizione e rigore non sono attributi casuali della geometria, ma è la loro sintesi e integrazione ad essere l’elemento caratterizzante di questa disciplina.

La contemporanea presenza delle procedure mentali di intuizione e rigore contrapposte, ma anche fra loro integrate, è la risorsa che la geometria offre per rispondere alle questioni educative descritte nel primo paragrafo di questo capitolo.

Tali componenti le scopriamo e le apprezziamo nel corso dello sviluppo dei valori[95] della persona, ma le ritroviamo anche come elementi caratteristici del pensiero geometrico con

[93] Ibidem
[94] Ibidem
[95] Cfr. Capitolo 1

i quali operiamo sulla struttura concettuale originale della geometria che si rivela emblematica per tutta la matematica.

CAPITOLO 3

INTUIZIONE E RIGORE

Nel precedente Capitolo 2, analizzando il valore educativo della geometria, abbiamo accennato alla presenza di un binomio concettuale di procedure mentali che abbiamo indicato con i termini di *intuizione* e *rigore*. La presenza di tale binomio caratterizza in un certo senso l'intera disciplina geometrica e, come abbiamo visto, si può anzi affermare che il valore educativo della geometria risieda principalmente nell'esercizio e nello sviluppo delle componenti che del binomio stesso sono costitutive.
È opportuno ora dettagliare la specificità di queste componenti del binomio, mostrando come esse permeino l'intero pensiero geometrico. Prima di entrare nel vivo della questione sono necessarie però due precisazioni sui luoghi comuni con cui possono venire intesi quei due termini.

Intuizione e rigore indicano due procedure mentali, che ad una analisi superficiale possono essere considerate e ritenute opposte, e il contemplare la possibilità di affiancarle sembra risultare quindi non fattibile. Riteniamo invece che tali procedure siano integrabili fra loro e che esse costituiscano una risorsa ineludibile per la comprensione e lo sviluppo della vera educazione geometrica. Il problema che nasce è come realizzare una loro integrazione armonica, che le valorizzi e che quindi aumenti le potenzialità dei nostri processi conoscitivi ed educativi.

Negli anni '60 si sono diffusi nell'allora nascente ambito della 'didattica della matematica' diversi slogan d'effetto per designare alcuni processi perseguibili nell'insegnamento della matematica. Ci interessa in questo lavoro soffermarci a riflettere per un istante sull'espressione *Dal concreto all'astratto,* che vuole indicare un progetto d'itinerario didattico il quale prende le mosse da situazioni reali ed osservazioni sulla quotidianità per giungere, attraverso la formalizzazione e la modellizzazione[96], all'astrazione[97] di cui la matematica è emblema.

[96] Per superare l'incapacità dell'uomo di controllare e gestire la complicazione (enorme quantità non organizzata) delle esperienze dirette, certe e personali, relazioni incluse, egli cerca di organizzare quanto è

Spesso da molti Autori questa enunciazione è stata considerata sinonimo e metafora del binomio *intuizione-rigore,* confondendo così quattro termini afferenti invece a significati profondamente diversi. Noteremo tale confusione anche in alcuni interventi che riporteremo nel seguito del capitolo.

Quando si parla infatti di *concreto* e di *astratto* ci si riferisce a due mondi separati e ben distinguibili, dai quali è possibile attingere i contenuti e gli oggetti, in questo caso, matematici. Se parliamo invece di *intuizione* e di *rigore* stiamo trattando di procedure mentali, di modalità di pensiero che si integrano e si oppongono a vicenda, ma che formano un unico pensiero. I due mondi *concreto* e *astratto* sono i luoghi su cui insistono le due modalità *intuizione* e *rigore,* ma non necessariamente separandoli: ovvio è l'utilizzo dell'intuizione sul concreto e del rigore sull'astratto, ma si può anche operare in modo intuitivo sull'astratto e fare considerazioni rigorose sul concreto (ad esempio: una figura può servire da guida in una dimostrazione).

Tracceremo in questo terzo capitolo inizialmente un inquadramento di carattere storico, dal quale emergerà il ruolo rilevante assunto da *intuizione* e *rigore* alle origini del pensiero matematico e nella storia del pensiero più in generale. Seguirà una panoramica sulle scelte istituzionali compiute dalla Scuola italiana a partire dall'Unità d'Italia ad oggi, in merito all'impostazione dell'insegnamento della geometria nella Scuola Secondaria, alle adozioni dei libri di testo effettuate nel panorama nazionale, all'inserimento o meno della geometria nei diversi indirizzi di studio e al valore formativo ufficialmente attribuito a tale disciplina, descrivendo come il dibattito si sia sempre stretto attorno alle due componenti fondamentali per il nostro discorso.

In un secondo paragrafo si procederà poi ad una analisi delle procedure mentali che costituiscono il cuore della disciplina geometrica, considerando in particolare i cosiddetti *concetti figurali* che E.Fischbein ha indicato come elementi costituenti la

---

venuto a percepire costruendone un quadro, un modello, controllabile e gestibile, il più aderente possibile alla sua esperienza. Però il quadro che si forma non è detto sia la realtà, ma è una approssimazione della realtà in un modello, certo il più fedele possibile, ma anche il più gestibile possibile, fino al punto di costruirsi modelli con aspetti diversi da quanto è stato sperimentato, se ciò porta a una gestibilità migliore con una approssimazione ancora accettabile.

[97] Il processo di astrazione è quello che consente, a partire da un oggetto concreto, di considerarne solo alcuni suoi aspetti, scartandone e non considerandone altri. Infatti l'uomo non conosce le cose a lui esterne in se stesse, ma attraverso gli aspetti (percepibili e percepiti dai sensi dell'individuo) con cui si presentano. Ciò gli permette di assimilare le esperienze in vari gruppi in base al fatto che condividono certi aspetti, e questa è la base di quello che chiamiamo processo di astrazione.

concettualizzazione geometrica, fondandone le basi teoriche e di cui noi diamo ora una interpretazione contestualizzata al nostro discorso.

Nell'ultimo paragrafo si passeranno in rassegna i vari significati attribuiti ai termini *intuizione* e *rigore* nell'attuale Ricerca in Didattica della matematica, per poi assegnare ad essi una definizione che tenga in considerazione sia le istanze analizzate a livello storico-bibliografico, sia gli aspetti che caratterizzano le due procedure atte al miglioramento dell'educazione geometrica negli studenti della Scuola Secondaria di secondo grado.

3.1 STORIA DEL BINOMIO INTUIZIONE E RIGORE

Molti e diversi sono i motivi che hanno stimolato e sostenuto la riflessione e la ricerca relativamente al binomio intuizione – rigore nel processo di insegnamento – apprendimento della matematica.

Descriveremo alcuni di tali motivi a partire da motivazioni storiche, passando poi ad esaminare sinteticamente il modo di procedere e di svilupparsi della matematica come scienza.

3.1.1 PRIMA CONTRAPPOSIZIONE FRA INTUIZIONE E RIGORE E NASCITA DEL PROBLEMA NELLA STORIA

La matematica pre-ellenica è difficilmente descrivibile in modo definitivo e ciò certamente a causa della incompletezza delle fonti a noi giunte. Presso le civiltà mesopotamiche la matematica era utilizzata essenzialmente per la risoluzione di problemi pratici. La matematica come 'scienza' nascerà molto dopo, con Talete, e quindi l'esigenza del 'rigore' sarà una caratteristica successiva. Nonostante ciò, la raccolta su tavolette di risoluzioni di problemi fra loro simili (scritti in caratteri cuneiformi)[98] fanno supporre la presenza di regole o metodi conosciuti e applicati per la risoluzione di tali problemi, anche se documenti diretti su siffatti principi unificatori non sono a noi pervenuti. Per quanto riguarda la geometria, essa non si era ancora consolidata e svincolata dalla grezza matrice di una esperienza spaziale, che comprendeva ogni sorta di cose che potevano essere misurate[99]. Successivamente, per esigenze concrete di trasmissione interpersonale di informazione (ad esempio per la costruzione di edifici), divenne necessario un criterio

[98] Boyer C.B, 1990, pp.6-8
[99] Cfr. Boyer C.B, 1990, pp.49-51

di rigore inteso come precisione sia nei calcoli, sia a livello di costruzioni geometriche[100]. Il primo matematico sul conto del quale si possa azzardare qualche ipotesi relativamente all'aver abbozzato l'impostazione deduttiva della geometria, è Talete. La fonte da cui attingiamo la sottostante descrizione riguardante questo matematico, è di terza mano:

> *'…andò dapprima in Egitto e da qui introdusse lo studio della geometria in Grecia. Non solo fece egli stesso parecchie scoperte, ma insegnò ai suoi successori i principi che stavano alla base di molte altre, seguendo in alcuni casi un metodo più generale, in altri uno più empirico[101].'*

Con la civiltà greca si opera un taglio netto rispetto alla tradizione precedente, conferendo alla matematica un aspetto originale: '*all'epoca in cui i Greci si affacciano appena alla civiltà, la scienza orientale sembra caduta in un periodo di decadenza, in cui si conservano i risultati acquisiti soltanto come ricette pratiche: regole di calcolo o di misura, adoperate ormai senza ricercarne le ragioni. Invece, le prime conoscenze geometriche ed aritmetiche che i Greci apprendono dai loro vicini diventano subito per essi argomento di riflessione e di speculazione razionale*.'[102]

La creazione di una matematica più astratta attuatasi con la Scuola Pitagorica è stato un passaggio importante per il processo che ha portato la matematica ad essere una scienza rigorosa.

Euclide (323 a.C.–285 a.C), o chi per lui, ha scritto gli *Elementi*[103] ed è figura importante per la specificità del discorso riguardante intuizione e rigore che vogliamo affrontare. Egli riprende da Talete l'abilità nel risolvere i problemi e l'esigenza di costruire una dottrina che possa funzionare in tutti i casi, ma forte è l'elemento innovativo che introduce: una nuova idea di rigore. Rigore inteso sia come coerenza interna del sistema di proposizioni che elencava, sia come esplicitazione di qualsiasi premessa necessaria per affrontare la costruzione dell'impianto disciplinare proposto, rendendo il lettore pienamente consapevole e coinvolto nel discorso.

Si suppone che il testo *Elementi* avesse finalità didattiche[104], in quanto si ritiene che Euclide, come docente del Museo di Alessandria, avesse costituito tale manuale per i propri studenti. Il libro si apre con un elenco di *termini* (questo è propriamente il

[100] Cfr. Di Stefano C., 1994
[101] Questo passo è citato da T.L.Heath , 1921, p.128
[102] Enriques F., 1938, p.8
[103] Della sua vita si sa solo che insegnò e fondò una scuola ad Alessandria al tempo di Tolomeo I, che regnò tra il 306 e iI 283 a.C.
[104] Cfr. Boyer, 1990, p.119

vocabolo che usa Euclide) descritti intuitivamente: *punto è ciò che non ha parti*', *una linea è una lunghezza senza larghezza*. Sembra in queste affermazioni che egli voglia coinvolgere il pubblico dei lettori, quasi a volerli convincere che le cose di cui sta parlando sono già conosciute da loro. Taluni storici ritengono che queste siano ventitré definizioni, accusando poi il matematico ellenico di circolarità logica; ma come poteva, Euclide, essere così sprovvisto come insegnante da ritenerle definizioni, se poi, poco dopo sembra dare di alcuni oggetti un'altra caratterizzazione? Ad esempio, più avanti egli dice: *Punti sono dove termina un segmento.*

La *specificazione dei termini* è dunque concepita da Euclide in modo descrittivo: essa descrive un oggetto geometrico mediante altri oggetti, spesso non precedentemente definiti, e a volte ha il solo scopo di spiegare la natura (ideale) dell'oggetto. Nel testo di Euclide non vi sono enti geometrici *primitivi*; così anche per il punto, che è il primo oggetto geometrico che viene introdotto, viene data una descrizione, "*punto è ciò che non ha parti*" che non ha alcun valore come affermazione sulla quale poi basare il resto della geometria, ma viene usata da Euclide da un lato per far comprendere la differenza tra punto fisico/materiale e punto geometrico/ideale[105] e dall'altro per condurre il lettore al superamento di una concezione "ingenua" degli enti geometrici, secondo un processo mentale che ogni individuo deve singolarmente compiere.

Infatti le proprietà con le quali si 'caratterizzano' tali enti non vengono mai riprese per dimostrare alcun teorema della teoria; l'autore degli *Elementi* quindi era ben cosciente di quanto fosse inopportuno il ricorso all'intuizione per dimostrare, ma si rendeva anche conto dell'irrinunciabile ruolo di tale abilità per poter rendere significativo il suo insegnamento e per condividere con il lettore le sue immagini mentali. Si potrebbe forse dire che per Euclide l'intuizione[106] ha un ruolo fondamentale nel momento fondazionale di scelta e descrizione degli oggetti geometrici e dei postulati; tale componente intuitiva passa poi in secondo piano nel momento della deduzione delle dimostrazioni, dove invece interviene il rigore deduttivo.

Due esempi possono aiutarci a comprendere il ruolo dell'intuizione in Euclide:

- egli non sente l'esigenza di elencare alcun assioma sull'ordinamento, tale nozione viene quindi data come assunzione scontata;

[105] Il punto ideale si ottiene tramite modellizzazione del punto materiale.
[106] In questo frangente per intuizione intendiamo ciò che ci appare e che va poi controllato attraverso il rigore.

- Euclide si riferisce, quando occorre, ad un disegno per spiegare alcuni passaggi logici, senza però darne una motivazione rigorosa.

Al contrario, nel volume *Elementi* sono però presenti anche forti preoccupazioni volte ad avvalorare la tesi che Euclide abbia cercato di strutturare un'assiomatica rigorosa: iniziare con l'elenco dei termini che verranno utilizzati è una dichiarazione mai apparsa su altri testi precedenti. Egli si preoccupa inoltre di mettere in elenco postulati che ad una lettura frettolosa possono sembrare scontati (postulato degli angoli retti: *Tutti gli angoli retti sono uguali*[107]), e offre inoltre una dimostrazione, intesa proprio come deduzione, per la maggior parte dei teoremi enunciati.

Già nell'opera di Euclide, dunque, possiamo riconoscere la presenza e l'integrarsi armonico delle due componenti del binomio *intuizione e rigore*. Nell'*intuizione* si fondano le radici del pensiero euclideo, la descrizione degli oggetti sui quali la disciplina dovrà operare; dalla intuizione viene la conferma, quasi empirica, della plausibilità e affidabilità degli enunciati dei postulati: dunque la loro *verità*. È esemplare ed emblematica, a questo proposito, l'avventura dell'enunciato del V postulato (Il postulato delle parallele): affermato ma quasi tentennando e forse senza una completa convinzione.

Se riguardiamo la dottrina pedagogica illustrata nel Capitolo 1 ci troviamo qui, forse, di fronte a quella *razionalità soggettiva*, il *nous*, che è considerata come componente essenziale del valore della razionalità, fondante una delle caratteristiche dell'educazione geometrica.

Ma, come abbiamo analizzato, il valore storico e innovativo del testo *Elementi* risiede nella (quasi ineccepibile) razionalità, incarnata nella deduzione argomentata con cui sono condotte le dimostrazioni. È questo il *logos*, la *razionalità intersoggettiva* individuato dai pedagogisti.

Possiamo integrare lo sguardo storico appena esaminato riferendoci alle parole di un altro grande studioso dell'antichità: Platone (428/427-348/347 a.C.). Egli nell'opera *La Repubblica* scrive:

> *I geometri si servono di figure visibili[i disegni] e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui esse sono immagini, ragionando sul quadrato in sé, sulla diagonale in sé, e non su quelle che disegnano. Lo stesso si dica per tutte le figure che essi modellano o disegnano, di sui si servono come immagini (a guisa di ombre o di immagini riflesse sulle acque)*

[107] Noi oggi preferiamo utilizzare il termine 'congruenti' in sostituzione ad 'uguali'

cercando di vedere certe verità che non si possono vedere se non col pensiero.

In tale passo il filosofo evidenzia in modo chiaro il modo di procedere dello studioso di geometria, che usa sia la vista che il pensiero. Ci si basa su figure materiali, ma si inseguono verità all'interno della nostra mente. Questo processo mentale mette in azione due abilità fra loro intimamente collegate e difficilmente separabili, che sono proprio l'intuizione e il rigore: l'una si serve dell'altra, talvolta senza un ordine sequenziale di utilizzo, ma il procedere della conoscenza e della disciplina geometrica sta proprio nell'impasto ben calibrato delle due componenti. Nelle ultime righe delle parole di Platone emerge poi anche l'importante affermazione che l'intuizione si può riferire sia al mondo concreto che a quello astratto.

3.1.2 INTUIZIONE E RIGORE COME BINOMIO PRESENTE AD OGNI PASSO DI SVILUPPO DELLA MATEMATICA

La matematica, come scienza in continua evoluzione, deve il suo sviluppo a sollecitazioni dettate da diverse esigenze. Vogliamo ora soffermarci sul ruolo che in questa dinamica giocano intuizione e rigore.

L'*intuizione* sollecitata dall'esperienza, da disegni o da una teoria già esistente, dà il via a nuove piste da battere. Possiamo ricordare ad esempio, tra gli altri, Lobacevskij, che a favore del ruolo dell'intuizione affermava:

> *[...] tutti i principi matematici, che si pensi di derivare dalla sola ragione, indipendentemente dagli oggetti del mondo, rimangono inutili per la matematica e spesso anzi non sono da essa confermati*[108]

mentre Peano, relativamente alla scelta dei postulati geometrici, dichiara in un suo celebre lavoro:

> *[...] affinché un lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati che si scelgano esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche*[109].

Si individua in questo caso come ambito di riferimento dell'*intuizione* quello legato alla concretezza delle esperienze sensoriali. L'intuizione poi sostiene le categorie logiche della *verosimiglianza* e della *plausibilità* all'interno della procedura di

[108] In Betti R., 2005
[109] Peano G., 1959, p.141

concettualizzazione della geometria. Di queste categorie parleremo più diffusamente nel paragrafo 3.3.

Una volta che il contenuto geometrico o matematico è stato intuito, necessita però, per assumere un ruolo operativo all'interno del pensiero matematico, di essere inserito nella struttura stessa della disciplina; tale passaggio è attuabile solo attraverso l'esame del vaglio del rigore.

Corrado Segre nel 1891 affermava:

> '*il matematico non potrà essere veramente contento quando a un nuovo risultato sia giunto con procedimenti poco rigorosi: egli non si considererà come sicuro di quello finché non l'avrà rigorosamente dimostrato.'*[110]

La deduzione razionale è l'unico strumento che riflette la categoria che potremmo chiamare della *verità*; si potrebbe cioè affermare che il *rigore* è il fondamento della sicurezza con cui si è in grado di giudicare la verità delle proprie affermazioni[111], e in questo senso è il risultato di astrazioni e generalizzazioni che culminano nella concettualizzazione e nella formalizzazione. Una realizzazione, forse un po' estremista, di questo principio è quella realizzata dal gruppo Bourbaki, il quale ha impostato lo studio di tutta la disciplina matematica facendo riferimento alle sue sole strutture astratte.

Questo processo di evoluzione del pensiero matematico lo associamo al passaggio (già citato nel Capitolo 2 e ora descritto) da scienza di contenuti a scienza strutturata, che continua ad alternarsi e a riproporsi nella dinamica di sviluppo della matematica stessa. Esso risponde al bisogno di rendere rigorosa l'intuizione e di rendere ragionevole, plausibile e intuitivo il risultato raggiunto con una metodo rigoroso.

Interessante a tal proposito la descrizione offerta da G.Gentile nel 1959:

> *L'intuizione e il ragionamento, in realtà coincidono. [...] In matematica un assioma è una verità intuitiva, e un teorema una verità che si dimostra con il ragionamento: ma il progresso dello stesso teorema a uno che ne consegue, non è possibile se non a patto che quello che era teorema rispetto all'assioma diventi assioma rispetto al nuovo teorema[...]Non c'è un'intuizione assolutamente prima; e ogni intuizione per elementare che sia, è raziocinio; come ogni raziocinio, per arduo che sia, dev'essere intuizione.*[112]

---

[110] Segre C., 1891
[111] Cfr. Marchi M., 1988
[112] Gentile G., 1959, vol.II, pp.99-100

Risulta forse un po’ azzardata la prima affermazione di Gentile. Le proposizioni che seguono sembra però che ben spieghino questo continuo rimandarsi (e non esatta coincidenza) delle due componenti di intuizione e rigore e come sia necessario il divenire di una intuizione una nozione rigorosa e come ogni nozione rigorosa debba essere necessariamente intuitiva perché possa essere davvero significativa.
Nello sviluppo della matematica, oltre a questi movimenti interni alla disciplina che ne hanno segnato la sua evoluzione, spesso sono risultate spinte fondamentali le necessità o le intuizioni sollecitate da altre discipline. Un’intuizione nell’ambito fisico o una necessità concreta ingegneristica possono essere state infatti motivo di evoluzione e di ricerca all’interno della matematica. La ricerca ha stimolato la creazione di una nuova teoria matematica (con risvolti applicativi), oppure la sistemazione del nuovo sapere all’interno di una teoria già esistente, ma che non forniva strumenti formali in grado di gestire, interpretare e risolvere alcune questioni. Ovviamente per rientrare in una teoria matematica preesistente o per divenire a pieno titolo nuova teoria è necessario che la nuova ‘conquista’, suggerita dall’intuizione iniziale, trovi poi delle validazioni e una rigorosa sistemazione razionale.

3.2 STORIA DELL’INSEGNAMENTO DELLA GEOMETRIA NELLA SCUOLA ITALIANA

La legge Casati del 1859, precedente all’unificazione dell’Italia, aveva definito l’organizzazione della Scuola Secondaria in tre indirizzi:

- l’Istruzione Classica in cui era stato introdotto il Ginnasio-Liceo. Il Ginnasio durava cinque anni ed era diviso in Ginnasio inferiore (tre anni) e Ginnasio superiore (due anni); seguivano ad esso 3 anni di Liceo;
- tre anni di Scuola Tecnica seguiti da quattro anni di Istituto Tecnico coprivano invece l’Istruzione Tecnica;
- l’Istituto Magistrale che era costituito dalla Scuola Normale (tre anni) preceduta, a partire dal 1880, da una Scuola Complementare triennale divenuta obbligatoria nel 1896.

Solo nel 1940, con la riforma Bottai, si avrà l’unificazione di Ginnasio inferiore, Scuola Tecnica e Scuola Complementare nella Scuola Media.
La storia dell’insegnamento della geometria nella scuola italiana avrà quindi nella parte iniziale continui riferimenti a quella che attualmente viene denominata Scuola Secondaria

di primo grado (già Scuola Media) poiché il Ginnasio, scuola della quale ci occuperemo maggiormente, era una realtà unica che abbracciava quelli che oggi sono divenuti due ordini scolastici distinti: Scuola Secondaria di primo grado e Scuola Secondaria di secondo grado.

Dopo l'unificazione dell'Italia[113], avvenuta nel 1861, per alcuni anni ciascuna area geografica in cui era suddivisa la nuova Nazione mantenne nel suo sistema d'istruzione le tradizioni esistenti nel periodo pre-unità. Relativamente allo studio della geometria, non erano presenti sul territorio nazionale libri di testo scritti da Autori italiani, fatto per cui venivano utilizzati testi di origine straniera. Tra essi il più adottato era la traduzione del testo di Legendre, *Elémentes de géométrie*, che risaliva al 1784, testo che faceva ampio uso di procedimenti algebrici, senza utilizzare un metodo rigorosamente scientifico. Vi erano poi altri testi più recenti, come quello del 1856 di Bertrand e quello del 1858 di Amiot, che introducevano la geometria proiettiva nella Scuola Secondaria.
Nel 1867 il sistema d'istruzione nel Regno d'Italia venne riorganizzato attraverso la cosiddetta Riforma Coppino (che prende il nome dall'allora ministro dell'Istruzione, Michele Coppino), con la quale venne inserito al quinto anno del Ginnasio e poi al Liceo lo studio diretto degli *Elementi* di Euclide; la scelta venne motivata affermando che in tale testo era sottolineato il valore della matematica come '*mezzo di cultura intellettuale, come una ginnastica del pensiero, diretta a svolgere la facoltà del raziocinio e ad aiutare quel giusto e sano criterio che serve di lume per distinguere il vero da ciò che ne ha soltanto l'apparenza*[114]'. Gli stessi Programmi consigliavano poi al docente di seguire il metodo euclideo, per abituare i giovani al '*rigore inflessibile del raziocinio*'.
Due membri del Consiglio Superiore d'Istruzione, i matematici Francesco Brioschi ed Enrico Betti, prepararono nel 1868 una nuova edizione dei primi sei libri degli *Elementi* di Euclide, tutta italiana, con importanti note nella prefazione. In essa gli Autori, descrivendo l'opera originale di cui stavano producendo la traduzione, affermavano che

> '*la suprema accuratezza di Euclide non è più apprezzata nelle nostre scuole, e vi si preferiscono dimostrazioni inesatte di proprietà, le quali non ponno essere rivelate che dai sensi, a quegli assiomi e postulati che il Galileo giudicava «domande così oneste e concedibili che se la fabbrica della*

[113] Dove per Italia si intende il sistema di stati poi unificati alla data del 1861.
[114] Nelle *Premesse ai programmi del 1867*

geometria veniva inalzata sopra tali fondamenti, non poteva essere che fortissima e stabilissima»[115]'.

Essi si dichiaravano inoltre

'*Profondamente convinti che soltanto dalle eminenti qualità di precisione e di chiarezza che distinguono la Geometria Euclidiana, si ponno sperare per lo sviluppo intellettuale dei nostri giovani, in vista dei quali presso tutte le nazioni civili l'insegnamento della geometria tiene posto tanto importante nella educazione della gioventù, ci siamo accinti a questa pubblicazione […]*'[116].

Tuttavia alcune critiche agli Elementi di Euclide sfociarono in una Circolare Ministeriale del 1870, nella quale si confermava l'obbligo degli Elementi nei soli libri di geometria piana, mentre per la geometria solida si lasciava libero l'insegnante di scegliere. Quest'obbligo si attenuerà ulteriormente qualche anno dopo, prescrivendo il metodo euclideo senza necessariamente adottare il testo degli Elementi.

Il ministro Baccelli nel 1881 riformò i Programmi esistenti, con l'inserimento della cosiddetta *geometria intuitiva* e del *disegno geometrico* nelle prime tre classi del Ginnasio; provvedimento questo che cercava di arginare lo scollamento esistente fra la geometria insegnata nella scuola elementare e quella che veniva ripresa dopo tre anni nell'ultimo biennio del Ginnasio (geometria razionale). Lo studio della geometria intuitiva venne quindi visto come propedeutico allo studio della geometria razionale; in tali nuovi Programmi lo scopo della geometria era di "*procurare ai giovinetti, con metodi facili e per quanto sia possibile con prove di fatto, le prime e più importanti nozioni della geometria, nozioni che riescono acconcie al regolare sviluppo del loro giovane intelletto, utili ad altre scienze positive che dovranno apprendere nel corso ginnasiale, e opportune non solo ad aprire l'adito, ma far desiderare lo studio razionale della stessa geometria, che è riserbato al liceo*".

Tre anni dopo il Ministro Coppino, tornato al governo, soppresse la geometria intuitiva, anticipando alla classe quarta ginnasiale lo studio della geometria razionale. Si riteneva che fossero poco chiari gli scopi e i limiti della geometria intuitiva; la mancanza inoltre di tradizione scolastica a riguardo rendeva insicuro tale insegnamento, soprattutto "*agli occhi degli insegnanti superficiali*".

---

[115] Citato da Maracchia, 1998, p.9
[116] Ibidem

Nell'ultimo ventennio del XIX secolo sembrò farsi largo una novità, nell'insegnamento della geometria, che cercava di unificare, dove possibile, geometria piana e solida con una tendenza detta 'fusionismo'. Ci si allontanava con questa impostazione dalla successione delle proposizioni presente negli Elementi. A tal riguardo fu il trattato di De Paolis del 1884 ad essere lume, anche se poi tale indirizzo non ebbe futuro nella scuola italiana.
Nel 1900 il ministro Gallo reintrodusse lo studio della geometria intuitiva nelle prime classi del Ginnasio, prevedendo però solo pochi argomenti che fossero di collegamento fra la scuola elementare e le classi superiori del Ginnasio. Non fu ben chiarito però come tale approccio potesse favorire poi l'avvicinamento alla geometria razionale. All'interno di queste indicazioni sembra infatti che si venisse a creare una *netta distinzione fra la geometria intuitiva e quella razionale.*[117] In questi Programmi si intravede, invece, per l'insegnamento della geometria razionale, la possibilità di un esercizio della libertà da parte del docente che non trova più alcuna costrizione, né per il libro di testo da adottare, nè per la scelta della successione degli argomenti da impostare nel percorso didattico.
Un passo indietro nella valorizzazione della matematica nell'insegnamento secondario si ebbe, come continuazione del percorso già iniziato con il decreto Bonghi del 1875, nel 1904 con il ministro Orlando; quest'ultimo attraverso *La legge Orlando* lascerà liberi gli studenti nella seconda e terza liceo di scegliere fra il greco e la matematica; questa opzione doveva essere fatta in vista della scelta scolastica successiva degli studenti.
Nei venti anni successivi furono tentate alcune riforme senza però che queste venissero realizzate. Fra esse annoveriamo il Progetto Boselli (al quale prese parte anche G.Vailati) conclusosi nel 1909, nel quale la geometria dei primi anni del Ginnasio avrebbe dovuto rivestire il ruolo di preludio alla ricerca e sistemazione razionale da operarsi negli studi superiori. Tale scopo sarebbe stato perseguibile attraverso l'esercitazione grafica e la costruzione di figure.
Solo nel 1913 sono presenti, nei Programmi per il Ginnasio-Liceo moderno del ministro Credaro, alcune delle indicazioni metodologiche suggerite da Vailati nel Progetto Boselli. Viene avvertito l'insegnante di :

> *guardarsi da due opposti pericoli che renderebbero inefficace la sua opera: il pericolo di cadere in un grossolano empirismo e quello [...] di subire le lusinghe di un esagerato criticismo. Il metodo empirico, nascondendo i legami che passano fra i fatti suggeriti dall'esperienza e tacendo delle teorie*

[117] Vita V., 1986.

che ad essi si riferiscono, toglierebbe alla matematica il valore formativo della mente e oscurerebbe il fascino che essa deve esercitare su quegli allievi nei quali le facoltà logiche prevalgono. D'altra parte un insegnamento dove penetrassero le sottigliezze della critica moderna riuscirebbe accessibile a pochi ed a questi stessi darebbe un'idea unilaterale, e quindi falsa, di ciò che è scienza.

Il ministro Gentile, nel 1923, all'interno della Riforma omonima, ridusse l'orario settimanale dedicato alla matematica e alla fisica. I Programmi di tali discipline vennero poi battezzati con la locuzione *Programmi d'esame* ritenendoli finalizzati al solo superamento di tale ostacolo: alla matematica non veniva dunque più attribuito alcun valore formativo ma veniva assegnato un quasi esclusivo valore utilitaristico. Nonostante questa scelta a livello burocratico che porta il suo nome, il pensiero pedagogico di G.Gentile è però più raffinato e da dettagliare meglio. Egli contrasta la posizione di chi ritiene la scienza come una cosa fatta o da farsi una volta tanto, analoga ad una realtà in sé, esterna allo spirito. Secondo questa visione, infatti, l'insegnamento della scienza nella scuola potrebbe provocare desolazione. Rigore e astrattezza sarebbero i suoi tratti distintivi; con le parole dello stesso Gentile: *quella scienza che pare s'aggravi sullo spirito come un incubo, e lo costringa e l'abbatta nelle strette del suo spietato congegno.*[118] Uno scienziato quindi secondo questa corrente di pensiero non è colui che cerca, ma colui che possiede la sua scienza. Nel pensiero filosofico gentiliano, però, la matematica e la scienza viste come *atteggiamento sempre nuovo dello spirito di fronte alla realtà*[119], vengono apprezzate e sostenute perché conformi all'idea di *scuola che insegni davvero e formi anime vive e feconde*[120]. Nella visione moderna della matematica, sostenuta da Gentile qualche decennio dopo la riforma, si nota un'evoluzione del suo pensiero:

E poiché il costruire è per l'appunto l'atto in cui lo spirito si realizza, tutto l'oggetto in cui si viene costituendo il sapere matematico, ben considerato, non è se non il soggetto che realizza se stesso attraverso la matematica: un realizzamento, anch'esso di pura soggettività, un processo estetico.[121]

Nel 1936 il ministro De Vecchi non apportò sostanziali modifiche ai Programmi gentiliani. Nel 1940 il ministro Bottai faceva leva sugli aspetti stimolanti e formativi della

[118] Gentile G., 1959, vol.I, p.248
[119] Ibi, p.249
[120] Gentile G., 1959, vol.II , p.219
[121] Ibi, p.199

matematica, ma il sopraggiungere della guerra arrestò l'applicazione della sua proposta di Programmi.

In un'analisi storica degli sviluppi e mutamenti nei Programmi della geometria in Italia, viene descritta la fase successiva alla Seconda Guerra mondiale nei termini seguenti:

> *Dopo la guerra la Commissione nominata dal 'Governo Alleato' cercò di mitigare uno sterile e statico rigorismo per attribuire una chiave dinamica al rigore accompagnato allo sviluppo storico delle teorie dando largo spazio anche ad una iniziale intuizione*[122] (primo biennio ginnasio superiore).

Nel 1979 il ministro Pedini mutò i Programmi della Scuola Secondaria di primo grado. In quegli anni tale ordine scolastico diventava scuola di massa, e i Programmi di matematica si fecero più ambiziosi e impegnativi. In essi venne indicato anche il metodo da seguire nell'insegnamento della matematica, metodo che veniva descritto attraverso tre fasi ben distinte: doveva essere impostato un graduale passaggio tra 'operatività iniziale' , una successiva 'interpretazione matematica' di fenomeni reali e una finale 'sistematicità' di trattazione in vista di un'astrazione crescente.

A partire dal 1986, vennero nominate per la Scuola Secondaria di secondo grado diverse commissioni, che cercarono di modificare i Programmi allora vigenti, introducendo anche l'informatica. Come risultato di questi lavori si delinearono due tipologie di proposte: Istituti sperimentali che seguivano i nuovi programmi modificati (i cosiddetti Programmi Brocca[123]) e scuole che aderivano al Piano Nazionale per l'Informatica (PNI[124]), con il quale si voleva introdurre l'insegnamento dell'informatica. Nella Scuola Secondaria con queste due proposte venne assegnato alla matematica un monte ore superiore a quello attribuito agli indirizzi che non attuavano la sperimentazione, dichiarando inoltre apertamente quale dovesse essere il ruolo formativo assegnato alla geometria. Si introducevano, anche nel quinto anno, lo studio delle geometrie non euclidee e si impostava una riflessione sulla costruzione assiomatica della geometria.

Riportiamo alcuni stralci dei Programmi Brocca, presi dai commenti ai singoli temi della matematica, perché in essi si trova un raro ma significativo ed efficace esempio di descrizione di come lo studente potrebbe o dovrebbe essere avvicinato alla disciplina geometrica:

---

[122] Maracchia S., 1998

[123] 1988-1990 che portarono nel 1991 all'inizio delle sperimentazioni

[124] L'introduzione del PNI risale al 1991

Lo studio della geometria nel biennio ha la finalità principale di condurre progressivamente lo studente dalla intuizione e scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale e rappresenta come tale una guida privilegiata alla consapevolezza argomentativa.

A ciò il docente può pervenire adottando un metodo che, facendo leva sulle conoscenze intuitive apprese dallo studente nella scuola media, proceda allo sviluppo razionale di limitate catene di deduzioni; è tuttavia necessario che ogni ipotesi o ammissione cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i punti di partenza del ragionamento.[125]

I Programmi Brocca, data la loro ampiezza e profondità di proposta, sono stati poi assunti anche come modello per impostare i programmi di molte nuove sperimentazioni.

Nel luglio 2000 il Presidente dell'Unione Matematica Italiana (UMI), prof. Carlo Sbordone, facendo seguito ad una delibera della Commissione Scientifica dell'Unione, insediò una Commissione per lo studio e l'elaborazione di un Curricolo di matematica, che portò alla realizzazione del volume *Matematica 2003* per la matematica della Scuola Secondaria di secondo grado. In esso è presente la seguente descrizione dell'ambito *Spazio e figure* (Geometria), che non risulta molto distante dalle idee espresse e sopra riportate per quanto si riferisce ai Programmi Brocca:

è bene mirare a omogeneizzare, correggere e rinforzare gli elementi di intuizione spaziale che gli studenti hanno acquisito, esaminando in un primo momento intuitivamente le figure fondamentali che caratterizzano lo studio della geometria dello spazio e analizzando i problemi di reciproca posizione che queste presentano. Ciò costituirà, tra l'altro, stimolo e motivazione per lo studio razionale e sistematico della geometria del piano, che a questo livello va avviato. In tale ottica è bene condurre progressivamente lo studente dall'intuizione e dalla scoperta di proprietà geometriche alla loro descrizione razionale, partendo da un'attività di esplorazione di situazioni significative collegate alla realtà e procedendo allo sviluppo di limitate catene di deduzioni. In tale sviluppo è necessario, tuttavia, che ogni ipotesi e ammissione cui si fa ricorso sia chiaramente riconosciuta e formulata in modo esplicito, quali che siano le ragioni che inducono ad assumerla tra i

[125] *Piani di studio della Scuola Secondaria superiore e programmi dei primi due anni, Le proposte della Commissione Brocca*, p.65

punti di partenza del ragionamento. La geometria concorrerà, in modo significativo, alla maturazione di una consapevolezza argomentativa.[126]

I due ultimi documenti ora citati vanno nella direzione di esplicitare il ruolo formativo della geometria e descrivono anche una possibile metodologia per realizzarlo.

Nell'ultimo ventennio si sono susseguite altre riforme, tra le quali ricordiamo la proposta del 1997 del ministro Berlinguer, culminata nella Legge del 10 febbraio 2000 : *Legge Quadro in materia di riordino dei cicli d'istruzione,* che però fu abrogata prima di entrare in vigore.

Nella Legge n.53 del 2003, a cura del ministro Moratti, e di cui si è parlato nel Capitolo 2, è presente una svolta nella definizione del ruolo delle discipline, che vengono considerate non più tra loro indipendenti ma le une a sostegno delle altre.

In particolare nel Decreto Legislativo 226/2005, *Definizione delle norme generali e dei livelli essenziali delle prestazioni sul secondo ciclo del sistema educativo di istruzione e formazione ai sensi della legge 53/2003,* si tracciano le finalità delle Scuole Secondarie di secondo grado:

> *I percorsi liceali e i percorsi di istruzione e formazione professionale [...]si propongono il fine comune di promuovere l'educazione alla convivenza civile, la crescita educativa, culturale e professionale dei giovani attraverso il sapere, il saper essere, il saper fare e l'agire, e la riflessione critica su di essi, nonché di incrementare l'autonoma capacità di giudizio e l'esercizio della responsabilità personale e sociale curando anche l'acquisizione delle competenze e l'ampliamento delle conoscenze, delle abilità, delle capacità e delle attitudini relative all'uso delle nuove tecnologie e la padronanza di una lingua europea, oltre all'italiano e all'inglese.*

Questo Decreto Legislativo è stato sospeso e sostituito, di fatto, dalla Riforma Gelmini, attuata dall'A.S. 2010-2011 nelle classi prime della Scuola Secondaria di II grado. Nella riforma Gelmini attraverso le Indicazioni Nazionali, tra *i gruppi di concetti e metodi che saranno obiettivo dello studio* della matematica per i licei si elencano:

1) gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni);

[126] *Matematica 2003*, Presentazione al tema Spazio e figure.

2) una chiara visione delle caratteristiche dell'approccio assiomatico nella sua forma moderna e delle sue specificità rispetto all'approccio assiomatico della geometria euclidea classica;

Nonostante il riferimento 'Concetti e metodi', nell'elenco che abbiamo riportato si fa poi menzione dei soli concetti, glissando sui metodi. Se si prosegue nella lettura delle Indicazioni, fino alla parte che riguarda l'ambito geometrico del primo biennio, si trova;

> *Il primo biennio avrà come obiettivo la conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano. Verrà chiarita l'importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, con particolare riguardo al fatto che, a partire dagli Elementi di Euclide, essi hanno permeato lo sviluppo della matematica occidentale. In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.*

Si afferma dunque che l'approccio euclideo non deve cadere nella pura assiomatizzazione, ma non viene chiarito come tale rischio possa invece essere superato e con quale proposta alternativa possa essere presentato. All'affermazione appena riportata seguono alcuni esempi di come si debbano introdurre e contestualizzare il teorema di Pitagora, la geometria delle trasformazioni e la creazione di costruzioni geometriche elementari, senza però fornire per questo una linea guida metodologica unitaria; ciascun argomento sembra quindi seguire un suo percorso.

Per quanto riguarda invece gli Istituti Tecnici, nelle Indicazioni generali riguardanti la matematica vengono spese queste pochissime righe, riferibili anche alla geometria:

> *Al termine del percorso quinquennale di istruzione tecnica lo studente deve essere in grado di padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica.*

Non è comunque dichiarato che i metodi dimostrativi debbano riguardare la sfera geometrica. Il paragrafo sugli argomenti geometrici è estremamente sintetico ed espresso dal seguente elenco:

> *Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione. Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. Le principali figure del piano e dello spazio.*
>
> *Il piano euclideo: relazioni tra rette, congruenza di figure, poligoni e loro proprietà. Circonferenza e cerchio. Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora.*

Le principali trasformazioni geometriche e loro invarianti (isometrie e similitudini anche in riferimento al teorema di Talete e alle sue conseguenze). Loro utilizzazione nella dimostrazione di proprietà geometriche.

Un insegnante potrebbe dunque sentirsi soddisfatto, almeno a livello burocratico, svolgendo semplicemente il contenuto di ciascun titolo, senza peraltro operare alcun percorso di riflessione sul ruolo della costruzione assiomatica, senza ottenere che gli studenti acquisiscano il senso di un dovuto rigore e senza sviluppare d'altra parte la componente intuitiva come primo momento di approccio al mondo della geometria. Fortunatamente per la Scuola, il soddisfare le Indicazioni Nazionali non è il solo criterio con cui molti docenti operano.

Nella storia dell'insegnamento della geometria nella Scuola Secondaria di secondo grado ora tracciata, emerge una tendenza piuttosto preoccupante: vengono descritte linee operative pratiche che partono dall'intuizione per giungere poi alla razionalizzazione essendo quest'ultima l'obiettivo finale a cui si tende. Raramente si mette però in evidenza una valorizzazione di entrambe le procedure individuando un ruolo "proprio" per ciascuna. L'intuizione sembra solo propedeutica al rigore e non una procedura mentale da coltivare e nutrire perché avente un valore in se stessa.

3.3 INTUIZIONE E RIGORE E PROCEDURE MENTALI CORRELATE

Abbiamo già detto nel Paragrafo 3.1 che *intuizione* e *rigore* sono le due componenti fondamentali con le quali si opera nelle procedure mentali della concettualizzazione in geometria. Gli oggetti mentali costruiti attraverso la procedura di concettualizzazione sono, secondo un'analisi dovuta a Fischbein, i cosiddetti *concetti figurali*[127].

> *[...] geometry deals with mental entities (the so-called geometrical figures) which possess simultaneously conceptual and figural characters. A geometrical sphere, for instance, in an abstract ideal, formally determinable entity, like every genuine concept. At the same time, it possesses figural proprieties, first of all a certain shape. The ideality, the absolute perfection of a geometrical sphere cannot be found in reality. In this symbiosis between concept and figure, as it is revealed in geometrical entities, it is the image*

[127] Termine introdotto da E.Fischbein

component which stimulates new direction of thought, but there are the logical, conceptual constraints which control the formal rigour of the process. We have called the geometrical figures figural concepts *because of their double nature.*[128]

Inizieremo descrivendo cosa intendiamo per *concettualizzazione*, passeremo poi ad illustrare il significato del termine *concetti figurali* ed esamineremo infine come *intuizione e rigore* intervengano nei processi che coivolgono tali concetti.

Intenderemo per *concettualizzazione* l'elaborazione fantastica che dal patrimonio di sensazioni e intuizioni costruisce immagini e concetti astratti e generali [129]

Alla formazione dell'idea di concetto contribuiscono diversi fattori e diverse cause.

Da parte di alcuni Pensatori si tentano caratterizzazioni verbali della nozione di concetto che per la loro generalità, nebulosità e ambiguità aggiungono ben poco all'immagine intuitiva che possiamo avere in modo ingenuo e naturale. Per esempio, Chevallard definisce *oggetto del sapere matematico*:

<<Un emergente da un sistema di prassi dove sono manipolati oggetti materiali che si scompongono in differenti registri semiotici>>.[130]

In ogni caso si deve osservare che alla creazione di un concetto partecipano tanto il *rapporto istituzionale*[131] verso l'oggetto del sapere, quanto il rapporto personale verso l'oggetto stesso. Il concetto è quindi continuamente in fase di costruzione per un soggetto apprendente, il quale cerca di stabilire dentro di sé un equilibrio fra i significati istituzionali e quelli personali da lui acquisiti.

L'appropriazione di un concetto matematico è un processo molto delicato; in uno studente che sta acquisendo un concetto può crearsi una forte componente conflittuale che è stata definita da Duval, e ripresa poi da Autori italiani, come 'paradosso cognitivo del pensiero matematico':

«[...] da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per

---

[128] Fischbein E., 1993, p.139

[129] Cfr. Marchi M., 2006/2007

[130] Chevallard Y., 1991, p.8

[131] *Ciò che è il Sapere costruito dai matematici nella storia,* secondo Chevallard, e che quindi deriva dalla tradizione matematica

l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile».[132]

Sicuramente i soggetti in fase di apprendimento tenderanno a confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche, ma questo avviene a maggior ragione quando le rappresentazioni fornite risultano quasi esclusive, univoche e convenzionali, come nel caso degli enti geometrici fondamentali, per esempio del punto e della retta, e quando non avviene da parte dell'insegnante un lavoro di mediazione tra l'*oggetto personale* e l'*oggetto istituzionale*.

Le difficoltà sono infatti legate al fatto che gli studenti hanno una o più idee riferite agli oggetti, assimilate in modo personale e ingenuo, intuitivo. Un apprendimento degli oggetti matematici intesi in modo istituzionale deve essere necessariamente guidato e motivato.

Ci sembra però che quello descritto da Duval non sia a tutti gli effetti un 'paradosso'; forse sarebbe stato più opportuno chiamarlo 'ostacolo epistemologico', al quale un docente deve prestare molta attenzione e cura per permettere agli studenti di superarlo.

Il superamento di tale ostacolo può infatti avvenire gradualmente attraverso l'acquisizione consapevole di cosa sia una determinata nozione matematica (geometrica, in particolare), affiancata e messa in relazione costante con la costruzione precedentemente operata, insieme allo studente, delle relative *immagini mentali*[133] (generate dall'accostamento di diverse rappresentazioni semiotiche).

Fischbein a tal proposito affermava:

«Un quadrato non è un'immagine disegnata su un foglio di carta; è una forma controllata dalle sue definizioni (anche se può essere ispirata da un oggetto reale). […] Tutte le figure geometriche rappresentano costruzioni mentali che possiedono, simultaneamente, proprietà concettuali e figurali. […] Idealmente, è il sistema concettuale che dovrebbe controllare completamente i significati, le relazioni e le proprietà delle figure. […]

[132] Duval R., 1993, p. 37-65
[133] Ci accingiamo a descrivere più precisamente la nozione di *immagini mentali* nel restante paragrafo

L'evoluzione di un concetto figurale generalmente non è un processo naturale. Di conseguenza, uno dei compiti principali della didattica della matematica [nel campo della geometria] è di creare situazioni didattiche che richiedano sistematicamente una stretta cooperazione tra i due aspetti, fino alla loro fusione in oggetti mentali unitari».[134]

La relazione intercorrente fra il piano concettuale e ideale delle figure geometriche e la loro rappresentazione con un disegno è ben descritto anche dalle seguenti parole di M.Marchi:

è necessario che [le] figure escano dal mondo suggestivo e fantastico delle idee. È necessario che le figure acquistino una loro forma di <<concretezza>>, è necessario[...] poter operare su di esse come in una specie di manipolazione ideale e fantastica.[...]una tale realizzazione concreta è attraverso il disegno. [...] C'è il piano della descrizione razionale, formalizzata, che è l'ambito concettuale nel quale si opera sulle figure geometriche. La categoria conoscitiva a cui ci si riferisce in questo caso è quella che viene indicata con il termine [...] di verità e le procedure che presiedono al suo studio sono quelle del rigore. C'è poi il piano d'indagine che fa più riferimento alle suggestioni dei dati sensoriali: questo è l'ambito nel quale si opera sui modelli[...]. In questo caso la categoria conoscitiva è quella del plausibile, è la ricerca di ciò che è intuitivamente evidente, e le procedure operative si riconducono ai diversi tipi di manipolazioni.[135]

La concettualizzazione geometrica coincide a nostro parere con il processo che porta all'acquisizione dei *concetti figurali* e quindi alla razionalizzazione dell'esperienza reale, che unifica le varie rappresentazioni semiotiche con la formalizzazione razionale.

Con la locuzione *concetti figurali* si fa riferimento quindi ad un'entità mentale che è controllata dalla sfera concettuale, ma che preserva caratteristiche fisiche spaziali, figurali appunto. Per riuscire ad appropriarsi di questi concetti figurali è necessario un duplice movimento euristico:

- costruzione delle *immagini mentali*
- razionalizzazione o formalizzazione.

Ciascuna di queste due attività è costituita, al suo interno, da procedure che vanno dal concreto all'astratto.

[134] Fischbein E. 1993, pp. 139-162
[135] Marchi M., 1997, p. 81

Per quanto riguarda le immagini mentali esse partono dal concreto fisico-sensoriale per poi divenire oggetti mentali, astraendo proprietà che quelle hanno desunte dagli oggetti reali.
La razionalizzazione, che costituisce il processo più alto e profondo della concettualizzazione, parte anch'essa dalla lettura delle relazioni esistenti fra gli oggetti reali, per poi descriverle mediante assiomi o opportune relazioni formali.
Si assiste in entrambi i casi (immagini mentali e concetti) al fatto di aver portato ad un livello mentale e sistematico ormai completamente astratto ciò da cui si era partiti.
Lo Studioso, e quindi il soggetto in apprendimento, opera intellettualmente sul concetto figurale, sia in modo attivo che in modo passivo. Siamo attivi nella sua costruzione, nel raffinarlo, nell'applicarlo all'interno del contesto di riferimento, quando lo acquisiamo. Possiamo divenire passivi quando lo comunichiamo attraverso l'insegnamento, anche se mediante questa attività lo stesso concetto figurale da noi precedentemente acquisito può arricchirsi di nuovi elementi e quindi essere modificato nuovamente.
Questo continuo operare sul concetto figurale lo chiameremo *fare geometria*.
Le procedure mentali di intuizione e rigore con cui *facciamo geometria* poggiano in modo essenziale sulla struttura concettuale della geometria (cioè la *concettualizzazione geometrica*) che abbiamo ora analizzato.
L'intuizione spaziale arricchisce di immagini i concetti astratti e suggerisce la loro manipolazione fantastica. I giudizi espressi mediante il contributo dell'intuizione avranno come punto di partenza le suggestioni che provengono dalla realtà e giungeranno alle categorie conoscitive del plausibile, evidente, verosimile. Il procedimento svolto con rigore consente invece una rappresentazione verbale univoca e convenzionale, che cerchi di raggiungere precisione, generalità e correttezza nella deduzione all'interno di teorie costruite. Il rigore consente quindi di giungere alla categoria che potremmo chiamare di 'verità' interna alla teoria (anche se non 'verità' in senso assoluto).
Intuizione e rigore possono dunque sussistere indipendentemente oppure appoggiarsi l'una all'altra secondo il momento psicologico o euristico nel quale ci troviamo.
Per quanto riguarda il diverso ruolo che può essere attribuito alle procedure di intuizione e rigore, può essere interessante riguardare i termini di una *celebre polemica* che negli anni tra il 1884 e il 1892 contrappose G. Peano e G. Veronese, relativamente al problema della introduzione della nozione di iperspazio. Visto con i nostri occhi si è trattato essenzialmente di una (voluta?) reciproca incomprensione, in cui l'uno si accaniva ad insistere sull'imprescindibile valore dell'intuizione e l'altro, al contrario, sulla necessità

di rendere rigorosa ogni affermazione. Tale scontro non ebbe una pacifica conclusione, quindi non si arrivò a riconoscere i due ambiti come aspetti concettuali complementari. Riportiamo per comodità e curiosità del lettore i testi. Nel 1884 Veronese dichiarava quale metodo intendeva seguire per introdurre gli enti degli spazi a *n* dimensioni:

> *Il metodo [da me seguito] è principalmente sintetico e intuitivo, come nelle altre mie memorie sulla geometria a n dimensioni. Dico intuitivo perché per me il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni in quello a n dimensioni sono elementi di natura nota, cioè hanno sempre lo stesso significato, quello che posseggono nello spazio ordinario; e quindi i corpi a più di tre dimensioni generati con questi elementi sono essi stessi parzialmente intuitivi, perocché vengono rappresentati nella nostra mente non già mediante equazioni, ma mediante figure geometriche.*[136]

Questa posizione fondazionale fu fortemente avversata da Peano con la seguente recensione all'opera fondamentale di Veronese:

> *Riguardo infine al modo in cui l'Autore tratta la teoria degli spazi a più dimensioni, ricorderò brevemente che, mentre la teoria analitica di questi spazi non presenta difficoltà di sorta, riducendosi allora questa teoria ad un cambiamento di nomi ad enti algebrici, la teoria geometrica o sintetica, ove si considerino i punti dell'iperspazio tali e quali quelli dello spazio ordinario, dà luogo a difficoltà, esigendosi allora un numero di postulati maggiore di quelli richiesti per la geometria ordinaria.[…] Risulta da questa teoria che il numero dei postulati necessari per stabilire la teoria degli spazi a più dimensioni, è illimitato, ossia è attualmente infinito.*
>
> *Invece il professor Veronese non parte da alcun postulato, ma si basa sul principio fondamentale: "a) Data una cosa A, determinata, se non è stabilito che A è il gruppo di tutte le cose possibili che vogliamo considerare, possiamo pensarne un'altra non contenuta in A (vale a dire fuori di A) e indipendente da A", che a mio modo di vedere significa: "Data una classe A, se essa non contiene tutti gli oggetti, allora essa non contiene tutti gli oggetti."*
>
> *Da questa proposizione l'A., con logica nuova, sopprime la condizione che la classe non contenga tutti gli oggetti e deduce la a': "La serie delle cose che si*

---

[136] Veronese G., «La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario», in *Memorie R. Accad. Lincei,* 19, 1884

ottiene ponendo una cosa B fuori di un'altra A, una cosa C fuori del gruppo AB, e così via, è illimitata Perché supposto che si ottenga un ultimo gruppo A, si può immaginare un'altra cosa B fuori di A".
Le conseguenze di questo principio assurdo sono evidenti. Così, fuori di tutti i numeri sonvi ancora dei numeri, e in tal modo si generano gli infiniti; e fuori di tutti i punti sonvi ancora dei punti, e per tal via si generano gli spazi a più dimensioni.
E si potrebbero lungamente continuare l'enumerazione degli assurdi che l'A. ha accatastato. Ma questi errori, la mancanza di precisione e rigore in tutto il libro tolgono ad esso ogni valore.[137]

3.4 Intuizione e rigore nel processo di insegnamento-apprendimento

Ciò che interessa in questa sede è analizzare in quale forma può presentarsi il binomio *intuizione* e *rigore* in un processo di insegnamento-apprendimento. Consideriamo diversi ambiti:

- nella scuola primaria viene usata principalmente la procedura intuitiva che opera essenzialmente a partire dalle immagini mentali. Per il bambino di quest'età scolare tale livello intuitivo costituisce già anche il suo livello di rigore; lui *fa geometria* a tutto titolo, compreso il rendere ragione. C'è un rigore per ogni età e non esiste vera matematica senza il dovuto rigore; non c'è una matematica 'adulta' dei grandi, e una dei piccoli. Tutta la matematica è sempre rigorosa, oppure non è matematica! Questa è una matematica rispettabile, adeguata alla maturazione raggiungibile nella scuola primaria. Noi parliamo in questo caso però di procedura intuitiva e non di rigore perché riferiamo questi termini al livello adulto. Il rendere ragione non richiede necessariamente di essere in un sistema assiomatico. È semplicemente l'abitudine mentale di non considerare l'evidenza come il passo conclusivo. Si può rendere ragione anche con una verifica sperimentale (ad esempio: piegamenti con la carta, taglio e costruzione di modellini, …). Il rigore, dice Peano, 'è dire solo cose vere'. Dunque il logos non è coinvolto da un certo livello disciplinare in su, ma è

[137] Peano G., 1892, pp. 143-144

coinvolto in ogni fase dell'apprendimento della geometria. E in ciò è l'errore di considerare una geometria intuitiva contrapposta a quella razionale. La geometria è tutta intuitiva e tutta razionale, cambiano solo i livelli. G.Gentile affermava nel 1959 che

> *quel che si insegna ai putti deve essere un momento reale del sapere, pieno in sé, infinito come la filosofia: deve essere una piccola ed acerba, magià intera filosofia: che non dia soltanto le cose, ma le cose al posto loro, nel loro vitale rapporto con l'animo umano.*

- una procedura rigoroso-formale delle dimostrazioni può anche arrivare a posizioni estreme come quella proposta da J.Steiner il quale nel suo libro "Geometrie del Lage" (1847), offre una presentazione della geometria proiettiva senza l'ausilio di figure supponendo che lo studente riesca ad immaginarle autonomamente[138]. Altro esempio di procedura in cui l'apporto dell'intuizione sembra estraneo è la costruzione di tutta la geometria a partire dalla nozione teorica e astratta di *struttura,* proposta da Bourbaki (nella sua opera enciclopedica '*Elements de mathematiques'* , dal 1939, anno della prima pubblicazione, al 1970 circa);
- nella Scuola Secondaria di secondo grado è solo attraverso un uso equilibrato e adeguato delle componenti ora espresse che si può veramente *fare geometria* (i dettagli verranno offerti in una proposta didattica presentata nel Capitolo 5). F.Enriques scriveva, riguardo all'attività del *fare geometria* nella Scuola Secondaria:

> *[...] importa - non solo - l'attitudine a vedere passivamente un modello che si metta sott'occhio allo studioso, ma anzi la capacità di foggiare - come oggetto della fantasia - un modello possibile, cui si impongono, a priori, talune condizioni: ed una tale attività costruttiva che ordina i dati di osservazioni ed esperienze passate, non è pura fantasia o fantasticheria, sciogliente il freno al libero giuoco delle associazioni d'idee, bensì una vera attività logica.*[139]

L'attenzione didattica a questa attività costruttiva, che ordina i dati di osservazioni ed esperienze passate, educa insieme l'intuizione e la razionalità, vedendole non come

---

[138] Cfr. Paragrafo 1.4.2
[139] Enriques F., 1921

attività separate e distinte dell'intelligenza, bensì come due aspetti inscindibili di uno stesso processo attivo nel quale si richiamano l'una con l'altra.

A ogni insegnante è richiesta l’apertura intellettuale necessaria a sottolineare i due aspetti, intuizione e rigore, per rendere accessibile la geometria secondo i diversi modi di apprendere dei singoli allievi (ovviamente calibrando la proposta didattica in relazione all’età scolare dei destinatari). Un docente deve quindi mettere in atto dentro di sé un’attenta riflessione sulle due procedure anzidette e trovare modalità didattiche per favorirne lo sviluppo negli allievi.

A seguito delle nostre personali riflessioni a riguardo, intendiamo distinguere due modalità con le quali può presentarsi l’approccio intuitivo nel processo di insegnamento-apprendimento. Nel momento in cui si propone un oggetto o una situazione geometrica, ciascuno inconsciamente ne produce una rappresentazione; al soggetto tale interpretazione sembrerà autoevidente, intrinsecamente significativa, che non necessita di spiegazioni. Questo tipo di intuizione Fischbein lo riconosce già presente in J.Bruner (col termine ‘pensiero intuitivo’) e la definisce con la locuzione ‘intuizione affermatoria’ o ‘di adesione’; noi la ribattezziamo con il termine ‘intuizione come atto conoscitivo’, perchè ci sembra meglio esplicitare ciò che si vuole intendere, in particolare il coinvolgimento attivo della sfera cognitiva legata alla persona. Una seconda modalità di intervento dell’intuizione è quella relativa al ruolo da questa giocato nella costruzione di nuove conoscenze o nella risoluzione di un problema, quando si ha la sensazione di aver afferrato la soluzione ancor prima di saperne proporre una completa argomentazione. Questa particolare sfumatura del termine “intuitivo”, invece di nominarla secondo Fischbein ‘intuizione anticipatoria’, preferiamo definirla con parole che rimandano all’azione che essa svolge: ‘attività euristica[140]’; essa consiste nel dispiegarsi di passaggi successivi, nei quali la fantasia opera anche con la possibilità di procedere per tentativi, per errori e rivisitazione delle strategie e delle rappresentazioni immaginate come valide inizialmente e poi valutate come sbagliate. Secondo questa accezione, l’intuizione ci consente di scegliere certe affermazioni rispetto ad altre, annoverandole fra quelle eleggibili al rango di verità, oppure considerandole come proposizioni che in determinati contesti possono essere ritenute vere, o possono costituire la ricerca di risposte plausibili a interrogativi sorti nello studio di problematiche in ambiti più generali.

[140] Attività di ricerca, cioè attività che si propone come obiettivo la ricerca del vero

Scegliendo una delle possibili alternative del significato di *intuizione*, riusciamo ad individuarne delle caratteristiche:

- è una componente essenziale di ogni forma di comprensione attiva e di pensiero produttivo, perché richiede al soggetto di mettere in movimento le sue capacità attraverso l'interpretazione che egli dà delle definizioni proposte dall'insegnante o da lui stesso, della loro rappresentazione e del loro utilizzo per la risoluzione di situazioni problematiche;
- è una componente soggettiva, poiché chiama in causa il bagaglio culturale della persona, in particolare la sua immagine mentale spontanea del concetto considerato o della situazione che si sta affrontando;
- è un processo inconsapevole. Spesso è quindi difficile stabilire la validità dell'intuizione di un'altra persona, fino a quando non viene articolata in una sequenza di passi logici comunicabili, comprensibili e verificabili.

Queste considerazioni sono molto importanti se inserite nel contesto insegnamento-apprendimento al quale ci stiamo riferendo, perché non potranno che essere punti di partenza fondamentali per organizzare e progettare l'azione didattica di qualsiasi formatore che voglia coinvolgere gli studenti nella loro graduale e consapevole acquisizione di conoscenze geometriche, al fine di portarli dalla conoscenza intuitiva personale a quella oggettiva, disciplinante e scientificamente fondata.

Essendo l'intuizione prevalentemente inconsapevole[141], necessita di uno strumento esterno ad essa per validare o meno le sue conclusioni e per ricostruire il perché della conclusione 'conquistata'. Il rigore può essere lo strumento prezioso che permette di ritracciare il percorso a ritroso, di criticare assunzioni precedentemente accettate, di chiarire il contenuto e il significato di certi termini del linguaggio,…

Prima di concludere questo paragrafo è però molto importante ricordare, in ogni caso, che la presenza delle procedure di intuizione e rigore non è ristretta al solo ambito scolastico alle attività di insegnamento-apprendimento, ma si estende anche al contesto della ricerca scientifica e in generale a tutta l'attività del pensiero matematico. Ci sembra estremamente interessante ricordare, a questo proposito, un'affermazione di A. De Morgan che ci può servire come viatico per ogni successiva indagine: *La facoltà che mette in moto l'invenzione matematica non è il ragionamento ma l'immaginazione*[142].

[141] Furinghetti F., 1991, pp.83-96
[142] De Morgan A., citato in S. Sbaragli, 2005, p.72

3.5 LA NATURA DI INTUIZIONE E RIGORE: RICERCA DI SIGNIFICATO

Tenteremo ora di definire nel dettaglio il significato da noi attribuito ai termini *intuizione* e *rigore* e motiveremo in modo più approfondito nel seguito il perché proprio tali componenti ci siano sembrate degne di particolare importanza e di accurato studio.

3.5.1 IL RIGORE

La scelta del significato da conferire al termine *rigore* all'interno di questa ricerca è stata quasi immediata, sia a causa del felice accordo raggiunto nelle discussioni fra ricercatori, sia per l'univocità di interpretazione trovata a livello di ricerca bibliografica. Riportiamo qualche intervento autorevole a riguardo.

Peano conferiva al rigore una finalità riguardante la capacità e il grado di certezza con cui esprimere un giudizio di verità rispetto a ciò che si afferma:

> *Il rigore matematico è molto semplice. Esso sta nell'affermare tutte cose vere, e nel non affermare cose che sappiamo non vere. Non sta nell'affermare tutte le verità possibili; la scienza, o la verità, è infinita; noi non ne conosciamo che una parte finita, e infinitesima rispetto al tutto. E della scienza che conosciamo, noi dobbiamo insegnare solo quella parte che è maggiormente utile agli alunni. ... Se la dimostrazione è complicata, noi possiamo tacere questa verità.* [143]

Anche per Peano, quindi, "rigore" non implica necessariamente e automaticamente il riferirsi al mondo "astratto". Sottintesa è la presenza di un mondo di riferimento limitato e circoscritto, rispetto al quale si cerca il fondamento delle proprie affermazioni. Chiare ed esplicite sono anche alcune note di metodo che il docente dovrebbe seguire su suggerimento di Peano, per trasmettere agli studenti il rigore matematico in modo utile ed efficace:

- coerenza interna alla disciplina che si sta proponendo;
- criterio dell'utilità, a nostro avviso anche intellettuale, per la scelta degli argomenti da trattare;
- scelta accurata delle dimostrazioni da proporre agli alunni.

Secondo Peano il rigore è una onestà intellettuale, è un 'non barare', un eliminare il pressapochismo dalla scienza: se ci sono cose vere all'interno di una teoria, devo

[143] Peano G., 1910, ristampato nel III volume delle *Opere scelte di G.Peano*

dichiararle come tali; se ci sono cose false devo dichiararle come tali; se ci sono cose che non so essere vere o false devo essere in grado di dichiararle come tali, senza fingere o glissare su di esse.

Se poi si cerca di limitare il discorso del rigore all'aspetto dimostrativo, tralasciando per un istante il rigore relativo alla definizione degli enti coinvolti, si può citare per esempio R.Ferro:

> *Non saprei dire nulla di più preciso dell'affermazione che una dimostrazione è una serie di argomentazioni che vogliono convincere in modo conclusivo e adeguato l'ascoltatore che quanto affermato dalle conclusioni segue dalle premesse e si inserisce in un quadro teorico ben organizzato.*
>
> *Il convincimento, normalmente, passa attraverso una comprensione attenta della nozioni coinvolte nelle premesse e nelle conclusioni, nozioni che vengono puntualizzate e chiarite proprio dalle stesse dimostrazioni in quanto queste evidenziano le interdipendenze presenti e costitutive di quanto esse vogliono cogliere. [...]le dimostrazioni possono costituire un momento didatticamente essenziale per la comprensione e assimilazione di certe nozioni, ma non bisogna dimenticare che, anche il ricorso ad una dimostrazione , deve essere ben motivato, facendo sorgere legittime perplessità che proprio la dimostrazione può chiarire.*[144]

All'interno del presente lavoro di ricerca, fatta sintesi di alcuni degli interventi precedenti e reinterpretandone altri, si considererà *rigoroso un approccio nel quale sono state chiaramente esplicitate le premesse iniziali, dalle quali si sono poi tratte, con coerenza deduttiva ed esplicitando il percorso seguito per ottenerle, le relative conseguenze.*

Per *premesse iniziali* si intendono tutte quelle assunzioni coscientemente accettate o dichiarate esplicitamente vere all'interno della costruzione teorica nella quale ci si sta muovendo. Rientrano quindi nelle premesse iniziali l'elencazione degli enti primitivi, le definizioni degli altri oggetti della teoria e gli assiomi della stessa, anche se non necessariamente indicati con questa terminologia.

Con l'espressione 'coerenza deduttiva per trarre le relative conseguenze' non ci riferiremo necessariamente all'utilizzo delle regole della logica formale, ma intenderemo la *deduzione* come argomentazione in cui ogni passaggio è giustificato o giustificabile con riferimento alle premesse iniziali fissate nella teoria o in riferimento a conclusioni già

[144] Ferro R., 2006-07

ottenute, svolte queste con cura e onestà intellettuale (modo comune corretto di ragionare e dedurre).

Un insegnamento della geometria sintetica a livello di Scuola Secondaria di secondo grado, per potersi ritenere rigoroso, dovrà dunque essere in grado di mostrare il perché della scelta di alcune assunzioni, in particolare di quelle che hanno dato luogo a dibattiti storici disciplinari significativi. Il rendere partecipe lo studente della procedura con cui si svolge la scelta delle premesse iniziali, oppure la stessa costruzione assiomatica, gli fa acquisire una maggior consapevolezza e rende la conoscenza della disciplina oggetto di studio vivo, veritiero e più appassionante.

L'importanza di procedure argomentative rigorose non è d'altra parte relegata alla sola costruzione del pensiero geometrico, ma più in generale riguarda anche tutto il pensiero umano in ogni campo.

È per questa ragione che C.F.Manara può affermare che :

> *[la geometria] dovrebbe conferire una formazione mentale alla razionalità, alla chiarezza, all'autonomia di pensiero.*[145]

Nello stesso senso anche V.Villani dichiara che il concetto di rigore è una componente integrante del patrimonio culturale di ciascun uomo. Precisamente egli scrive:

> *Quello che dovrebbe permanere nel tempo come autentico patrimonio culturale, anche al di fuori dell'ambito specifico della matematica, non sono dettagli tecnici di questa o quella dimostrazione, bensì l'atteggiamento mentale critico, attento alla concatenazione logica dei ragionamenti e consapevole del fatto che ogni deduzione si basa su certe premesse, che devono essere esplicitate.*[146]

L'esigenza di rigore è quindi anzitutto intellettuale; essa nasce infatti come risposta al bisogno di rendere ragione delle proprie affermazioni. Scaturisce nel momento in cui non ci si accontenta più dell'evidenza (seppur questa componente sia importante e da tenere in estrema considerazione per le conseguenze alle quali può portare) o della semplice suggestione. È quindi parte fondamentale per lo sviluppo e la sollecitazione alla riflessione critica riguardo ad affermazioni che si vogliono sostenere o verso le quali si intende esprimere disaccordo.

[145] Manara C.F., 1994
[146] V.Villani, 1993

All’interno della definizione di rigore ora fornita, ogni docente dovrà scegliere sia fino a che profondità e raffinatezza proporre il rigore nei percorsi d’apprendimento della Scuola Secondaria di secondo grado, sia come e quanto esigerlo dai suoi studenti. Rinunciarvi sarebbe un venir meno ad un aspetto educativo della geometria; accanirsi su alcune pedanterie ed appesantimenti inutili di questo approccio potrebbe essere controproducente, per le ovvie sconfitte che la maggior parte degli studenti dovrebbe incassare.

3.5.2 L’INTUIZIONE

Sul termine *rigore* l’accordo fra i soli studiosi di Didattica della matematica può essere esaustivo e chiaro; più complicata risulta invece l’attribuzione di significato al termine *intuizione*. Considerato spesso come concetto evidente e quindi non spiegato, o fatto coincidere con la nozione di ‘senso comune’ (come afferma E.Fischbein in un suo intervento del 1983), si fatica a trovare una dichiarata interpretazione di questo termine.
Essendo inoltre una capacità mentale dell’uomo che non riguarda solo la geometria, ma che interviene in molteplici situazioni, il significato della parola “intuizione” è preso largamente in esame anche nelle scienze pedagogiche e psicologiche.
Cercheremo, nella vasta bibliografia, di cogliere ciò che è più attinente alla nostra idea di intuizione per quanto riguarda l’ambito *insegnamento-apprendimento* della geometria.
Un intervento presentato da T.Fujita, aaK.Jones e S.Yamamoto all’ICME-10 del 2004 metteva a tema proprio il ruolo dell’intuizione nell’educazione geometrica affermando:

> *It might be difficult to define ‘intuition’ precisely, but for the purposes of this paper we regard it as a skill* to ‘see’ geometrical figures *and solids, creating and manipulating them in the mind to solve problems in geometry.*

Nello stesso intervento si trova il riferimento alla concezione di intuizione presentata da due matematici della prima metà del XX secolo, quali il tedesco P.Treutlein e il britannico Godfrey.
Per il primo essa è legata principalmente allo sviluppo dell’immaginazione spaziale. L’intuizione non potrà sbagliare se legata al riferimento di modelli concreti. In particolare per P.Treutlein:

[…] his Geometrical Intuitive Instruction particularly aimed at developing 'spatial intuitive skills', *which he considered as an essential skills in geometry as well as in everyday life.*

An interesting feature in Treutlein's instruction is that he strongly recommended that the teaching of geometry be started from concrete models of figures rather than observations of things in everyday life. Treutlein considered that it would not be suitable to use things in everyday life (e.g. desks, windows, etc.) to develop 'spatial intuitive skills', because, firstly, such things would disturb students' concentration, and secondly, students would not find geometrical figures in the things unless they had images of such figures already in their minds. That is to do not. Treutlein hypothesized that unless students have the images of figures in their minds, they would not to be able to find figures in things in everyday life. Thus, the teaching of geometry should start with the models of figures, and it was appropriate to give students the tasks by using the 'air cube' or 'making new figures', which would create 'inner intuition' in the mind.[147]

Per quanto riguarda Godfrey:

Experimental and intuitional methods are not identical. […] Take the equality of vertically opposite angles. If I measure the angles I am proceeding experimentally; if I open out two sticks crosser in the form of an X, and say that it is obvious to me that the amount of opening is equal on the two sides, then I am using intuition.[148]

Egli lega la nozione di intuizione con quella di '*geometrical eye*', che dichiara essere la potenza di vedere le proprietà geometriche separate [*detach themselves*] dalla figura.

Sia Treutlein che Godfrey legano lo sviluppo della capacità intuitiva alla creazione e alla manipolazione di immagini geometriche nella mente che, una volta acquisita, permette di risolvere un problema geometrico o di svolgere una dimostrazione. Bisogna tuttavia rilevare che in questi tre interventi sembrano confondersi il binomio intuizione-rigore con i mondi concreto e astratto, per noi invece diversi come descritto all'inizio di questo capitolo.

[147] Fujita T., Jones K., Yamamoto S., 2004, p.5
[148] Godfrey and Siddons, 1931, p. 21

In tutte queste concezioni di intuizione manca però sempre un riferimento alla fantasia creatrice. L'intuizione pare più un prodotto empirico della mente, piuttosto che uno sguardo curioso ed indagatore nel mondo Platonico delle idee. La capacità di *vedere 'verità' che non si possono vedere se non con il pensiero*[149] è ben altro che *a skill to 'see' geometrical figures and solids*. E la *facoltà che mette in moto l'invenzione matematica*[150], di cui parla De Morgan, è senza dubbio ben più potente delle 'spatial intuitive skills'. Certamente l'educazione alla capacità di vedere le proprietà geometriche separate dalla figura[151] è un buon primo passo per il raggiungimento di quei valori educativi per la persona umana di cui i 'Valori educativi della geometria'[152] sono portatori. Infatti in questo senso *l'intuizione,* educata a vedere nella mente le figure ispirate dai modelli concreti manipolati nella realtà, si può poi evolvere in una conoscenza più approfondita della Verità, secondo le categorie mentali che le sono proprie.

Se si esamina il ruolo giocato dall'intuizione all'interno di un processo dimostrativo, risultano particolarmente illuminanti le parole di E. Fischbein del 1993:

> *Capire intuitivamente non significa semplicemente vedere… Dobbiamo considerare tre livelli di accettazione intuitiva. Un primo livello si riferisce al fatto espresso dall'affermazione stessa… Un secondo livello si riferisce alla struttura della dimostrazione: un allievo può capire intuitivamente il significato di un teorema ma può non essere in grado di capire intuitivamente la struttura della rispettiva dimostrazione (sebbene sia in grado di memorizzare e capire formalmente i suoi passi)…Il terzo livello si riferisce al fatto di capire la validità universale dell'affermazione come garantita ed imposta dalla validità della dimostrazione.* [153]

Quelli che Fischbein chiama livelli non sono tanto delle profondità diverse di utilizzo dell'intuizione nel processo dimostrativo, ma si riferiscono a tre accezioni diverse di intendere l'intuizione, tutte necessarie per impostare un percorso di geometria significativo.

---

149 Cfr. Platone citato nel Cap.3
150 Cfr. De Morgan nel Cap.3
151 Cfr. Godfrey nel Cap.3
152 Cfr. Cap.2
153 Fischbein, 1993, p.22

CAPITOLO 4

RICERCA NELLA SCUOLA

Poiché desideriamo che questo progetto di ricerca sia incarnato nella realtà della scuola di oggi, abbiamo ritenuto necessario effettuare un'analisi panoramica, avente caratteristica di oggettività riguardo a ciò che avviene negli Istituti Secondari di secondo grado, relativamente ai problemi dell'insegnamento-apprendimento della geometria.

In primo luogo abbiamo svolto un lavoro di indagine fra insegnanti di matematica raggiunti attraverso diversi canali di contatto: un contatto diretto con i docenti che si conoscevano personalmente e uno, meno diretto, attraverso l'invio tramite e-mail di una proposta di collaborazione[154], ad altri.

Nella proposta di collaborazione si chiedeva agli insegnanti di compilare un questionario (ALLEGATO 1) e di rendersi eventualmente disponibili per un'intervista strutturata.

Molti insegnanti di Istituti Tecnici si sono 'chiamati fuori' dal contesto di ricerca, affermando di aver scelto di escludere la geometria sintetica nella loro didattica a causa delle forti difficoltà che gli studenti mostravano nell'affrontarla. Il loro 'insegnamento' di geometria si limita, nei casi suddetti, ad una elencazione di formule relative al calcolo di aree e al riconoscimento di figure geometriche (indicando le loro proprietà dal punto di vista descrittivo) per poi passare allo studio della geometria analitica.

Le risposte pervenute da tutti gli insegnanti contattati (che erano solo insegnanti di Liceo o Istituto Tecnico), sono state estremamente esigue: solo 8 insegnanti hanno compilato il questionario e una sola insegnante si è resa disponibile per l'intervista.

Ottenuto il consenso di quattro Dirigenti Scolastici, si è invece potuto somministrare un questionario (ALLEGATO 2 per la classe prima e ALLEGATO 3 per le classi terze e quinte) agli studenti di alcune scuole: Liceo Scientifico 'Bonsignori' di Remedello, l'Istituto Tecnico 'Pastori' di Brescia, il Liceo Scientifico 'Falcone' di Asola e l'Istituto Tecnico 'Bazoli' di Desenzano.

Il poco materiale raccolto non ha quindi potuto rispondere alle aspettative di indagine panoramica che ci si era prefissati. I dati raccolti non sono cioè riferibili ad una

[154] Rivolto a tutti gli insegnanti coinvolti nel Progetto lauree scientifiche promosso dal Dipartimento di matematica dell'Università Cattolica di Brescia.

popolazione statistica significativa né tantomeno all'intera popolazione scolastica bresciana. Resta però pur vero il fatto che le informazioni che si possono trarre da questa indagine sperimentale, e le riflessioni che ne conseguono, offrono una visione dei problemi legati all'insegnamento-apprendimento della geometria che risulta essere piuttosto significativa.

Procederemo ora descrivendo e commentando in generale i risultati ottenuti.

4.1 QUESTIONARIO DOCENTI

Il *questionario docenti* voleva carpire le riflessioni degli insegnanti in merito al valore formativo offerto dalla geometria all'interno del loro insegnamento; alcuni dei quesiti proposti erano direttamente rivolti alle categorie di intuizione e rigore.

I primi quattro quesiti hanno cercato di indagare quale idea di geometria gli insegnanti sottendevano, posti di fronte alle locuzioni: *geometria elementare, geometria delle trasformazioni, geometria euclidea, geometria sintetica, geometria analitica, geometria dello spazio, geometria metrica, geometria simile.* È stato inoltre chiesto loro quali, di tali attributi di geometria, fossero sinonimi o quali includevano gli uni negli altri. Crediamo, dopo aver osservato le reazioni degli insegnanti posti di fronte a questa domanda, di dover rilevare l'imbarazzo degli stessi, la loro indecisione e la mancanza di chiarezza da essi posseduta. Alcuni insegnanti, tra i molti che non hanno consegnato il questionario completato, potrebbero non aver continuato la compilazione proprio perché bloccati da questo quesito. Altri insegnanti, pur compilando il questionario, hanno omesso parzialmente o totalmente la risposta a tale domanda.

Tuttavia questa non prevedeva alcuna risposta esatta; semplicemente voleva capire qual'era l'idea dalla quale l'insegnante partiva. Rappresentava un punto di partenza per noi importante, alla luce del quale leggere in modo più corretto e completo le risposte alle successive domande. Probabilmente un docente si pone sempre nell'ottica di essere valutato e, posto di fronte alla possibilità di 'sbagliare', preferisce evitare l'imbarazzo della situazione. Un'altra possibile interpretazione, augurandoci che non sia vera, è che alcuni docenti non abbiano compreso il significato delle domande poste nel questionario, lettura, questa, assai terribile e pessimista.

È stato poi presentato (quesito 6) un elenco di argomenti trattati/trattabili nella Scuola Secondaria di secondo grado, per ciascuno dei quali si chiedeva nell'ambito di quale geometria (inclusa nell'elenco dei primi quesiti) fossero proposti agli studenti e in quale classe fossero presentati. Quattro su sette insegnanti di Istituti Tecnici hanno propeso per una trattazione il più possibile analitica, ad eccezione delle nozioni di base della geometria (punto, retta, piano, appartenenza, ordinamento,…). Gli altri hanno affermato di svolgere nel biennio una trattazione sintetica, per poi affrontare nel triennio gli stessi ed altri argomenti con metodo analitico.

Nei quesiti 5 e 7 sono state poste alcune domande aperte di carattere generale, che hanno trovato poche risposte:

- Quesito 5) *A Suo parere esiste un ruolo formativo specifico della geometria (all'interno della conoscenza matematica complessiva)? Qual è tale ruolo formativo?*
- Quesito 7) *Come affronta l'introduzione della geometria sintetica? Quali sono i primi passi del suo insegnamento volti ad avvicinare gli studenti alla costruzione assiomatica di tale disciplina? Se possibile, descrivere metodi e successione dei contenuti iniziali.*

Le risposte raccolte per il quesito 5 sono state le seguenti:

- *Ritengo che la geometria sia la 'finestra' che guarda sulla matematica (nel senso che permette di vedere e veicolare contenuti che apparentemente risulterebbero astratti o lontani dalla realtà) e permette di passare dal concreto all'astratto con metodo.*
- *Ritengo di si. La geometria è una palestra del cervello, infatti la apprezzano maggiormente quegli studenti che amano mettersi in gioco e non riducono la matematica ad una serie di regole. Il che è come dire che tutti gli altri la temono, quindi vanno rassicurati partendo da situazioni più semplici per arrivare a costruire 'da soli' una soluzione. Assegno quindi a ciascuno di loro un problema diverso da fare a casa che diventi il loro problema a che devono cercare di risolvere, poi se ne discute insieme e un po' alla volta si arriva alla soluzione.*
- *L'obiettivo principale della geometria è l'aspetto formativo del pensiero razionale. Rigore del pensiero, intelligenza spaziale. Sviluppare le capacità logico-deduttive.*

I tre insegnanti che rispondono, articolano la loro posizione in modo abbastanza chiaro; essi toccano alcuni aspetti dell'educazione geometrica importanti quali:

- creare un ponte fra concreto e astratto seguendo un metodo, il metodo razionale;

- essere luogo e occasione per l'allenamento del pensiero razionale e riflessivo. Ma cosa si intende con queste due tipologie di pensiero?
- offrire un'occasione per la creazione di rigore del pensiero e sviluppo dell'intelligenza spaziale.

Queste risposte sono maggiormente orientate verso una valorizzazione dell'aspetto rigoroso e poco apprezzanti e valorizzanti l'aspetto intuitivo. Fra tutti i docenti, ai quali è stato proposto il questionario, possiamo immaginare che quelli che l'hanno consegnato siano i più aperti alle proposte formative e alla ricerca di risposte sulla modalità di conduzione del loro insegnamento. Eppure, anche fra gli insegnanti motivati, sono pochi quelli che riferiscono gli argomenti a favore dell'insegnamento della geometria. Da notare è il fatto che su 8 questionari, 5 non presentano alcuna risposta al quesito. Potremmo interpretare tale silenzio come una mancanza di riflessività del corpo docente, oppure, di contro, un ritenere la risposta talmente ovvia dal ritenere superfluo il portare qualche contributo sull'argomento. Speriamo che la motivazione sia la seconda!

Nel quesito 7 è stato chiesto agli insegnanti come essi presentino didatticamente la trattazione sintetica della geometria. Le risposte sono:

- *Non rientra nei miei programmi*
- *Purtroppo non la affronto.*
- *Troppo difficile per i nostri studenti*
- *Utilizzo delle regole logiche*
- *Riflessione iniziale sulle conoscenze e competenze acquisite nelle scuole precedenti: 'per me la geometria è…'. Ricerca della motivazione ad una costruzione della geometria condivisa e coerente. Cenni storici sul lavoro di Euclide e cenno alle geometrie non euclidee.*
  Elementi primitivi e assiomi, Definizioni, Teoremi: riconoscere ipotesi e tesi, dimostrare semplici teoremi.

Dunque la maggior parte degli insegnanti che rispondono alla domanda, non affronta con le sue classi il metodo sintetico per studiare la geometria. Le ultime due sono le uniche vere risposte e, fra esse, la penultima risulta anche di difficile interpretazione. Cosa significa in particolare la locuzione 'geometria condivisa'? Forse è quella che riusciamo a comunicare e che ci è stata trasmessa dalla tradizione geometrica. Per gli altri tre docenti che non rispondono si tratta forse di una questione di 'riservatezza professionale'. Magari le strategie didattiche cercate per trasmettere la geometria, dopo anni di estenuante ricerca personale, potrebbero essere in loro possesso, e "svenderle" in un questionario anonimo potrebbe non essere stato ritenuto opportuno. Dalla parte opposta si potrebbe invece ritenere che di anno in anno non si proponga altro che una pedante e noiosa lettura del libro di testo. Dalle 'non risposte' non risulta possibile trovare una soluzione al dubbio che riguarda la situazione reale, vissuta da questi insegnanti e dalle loro classi.

Il quesito 8 ha chiesto di indicare i soggetti (*docente, studente individualmente, classe organizzata in gruppi*) che risultano maggiormente coinvolti in alcune delle attività didattiche proposte dai docenti che si svolgono in classe, considerando: *l'attività dimostrativa, la formulazione di definizioni, la ricerca di proprietà degli oggetti geometrici, la risoluzione di problemi, il collegamento fra i diversi argomenti* e *l'utilizzo di software geometrici*.

Le risposte sono state raccolte nella seguente tabella, dove viene indicata la frequenza assoluta di insegnanti che hanno indicato l'opzione della colonna corrispondente (alcuni docenti per una stessa attività hanno scelto più soggetti che svolgono in modo specifico quella attività):

Attività	*Dell'insegnante*	*Del singolo studente*	*Di gruppo*
Attività dimostrativa	7	1	
Formulazione di definizioni	8		
Ricerca di proprietà	1	6	2
Risoluzione di problemi	2	6	2
Collegamento fra i diversi argomenti	6	2	1
Utilizzo di software geometrici	1	5	1

Dalla tabella emerge che pochi docenti promuovono l'attività di gruppo. Preferiscono condurre essi stessi gli studenti passo passo, gestendo l'apprendimento in modo direttivo. Questo fatto è confermato dalla scelta prevalente dichiarata per l'attività dimostrativa e la formulazione di definizioni, attività operata principalmente dal docente. Agli studenti è riservata la parte operativo - sperimentale di ricerca di proprietà, utilizzo dei software geometrici e risoluzione di problemi. La meta-riflessione, tanto auspicata e citata nelle più recenti Indicazioni Nazionali per la Scuola Secondaria di secondo grado, rimane quindi un po' ai margini di queste esperienze didattiche. Lo studente non è libero di scegliere una definizione o di provare a cimentarsi in una dimostrazione in modo autonomo, può

solo ‘muovere’ pedine già scelte da altri e per di più pedine che devono essere spostate solo in un certo modo.
I quesiti che descriveremo e analizzeremo ora riguardano gli aspetti relativi all’*intuizione* e al *rigore* e il significato che i docenti conferiscono a queste due attività per noi inscindibili.
Nei quesiti 9 e 11 è stato chiesto agli insegnanti di esprimere il loro grado di accordo su alcune proposizioni riguardanti il significato da loro attribuito alle locuzioni ‘approccio intuitivo’ e ‘approccio rigoroso’. Il grado di accordo doveva essere espresso scegliendo fra gli avverbi ‘per niente’, ‘poco’, ‘abbastanza’ e ‘completamente’.
Fra le proposizioni scelte relative all’intuizione riportiamo[155] quelle più condivise dai docenti interpellati:

Accezioni legate alla locuzione ‘Approccio intuitivo’	*Abbastanza*	*Completamente*
Procedere per analogia con altre situazioni	7	1
Precedente o preliminare al rigore	5	3
Primo momento del processo di costruzione concettuale della conoscenza matematica	5	3
Componente essenziale del pensiero ‘produttivo’	5	3
Afferrare la soluzione prima di poter offrire una esplicita e completa giustificazione	3	5

Nessun docente si esime dall’esprimere opinioni in merito all’approccio intuitivo, anche se poi, nelle domande che seguono, sono pochi quelli che indicano le azioni didattiche volte a stimolarlo. Dalle opzioni scelte sembra emergere l’importanza che una tale componente ha nel processo di insegnamento – apprendimento. Perché poi non tradurla in azioni d’aula?
È significativo che non siano state indicate riguardo all’approccio intuitivo le proposizioni:

- *Coinvolge fantasia e creatività*
- *Evidente*
- *Procedere per tentativi*
- *Approccio basato su una spiegazione direttamente accettata dal soggetto come qualcosa di naturale, come un semplice dato di fatto*
- *Basato su di un giudizio di evidenza valutato in modo a-critico*

A nostro parere queste risposte presentavano importanti sfumature relative al ruolo dell’intuizione, perché le conferivano una condizione di ‘autonomia’ rispetto al rigore.

[155] Sono riportate le frequenze assolute dei docenti che operano la relativa scelta.

Tutte le opzioni scelte dalla maggior parte dei docenti riguardano le relazioni che l'intuizione ha rispetto al rigore e rispetto alla sistemazione formale della geometria. Sembra che l'intuizione non sia che una 'miccia' iniziale dalla quale partire, per poi prenderne dovutamente le distanze. Riportiamo l'opinione[156] espressa da V.Villani, in cui si esalta l'importanza della fase intuitiva che va continuamente ripercorsa e riproposta nei percorsi formativi, per alimentare il senso e lo svilupparsi della fase euristica tipica del matematico:

> *Nella Scuola Secondaria superiore la geometria sintetica del piano e […] dello spazio, è trattata da un punto di vista ipotetico-deduttivo. In tale ottica, il ruolo della percezione visiva viene considerato marginale o addirittura fuorviante. Posso essere d'accordo a distinguere nettamente fra la fase di 'scoperta' empirica di una proprietà su di un disegno o su di un modellino, e la fase di 'dimostrazione' della medesima proprietà nell'ambito di una sistemazione teorica basata su concetti primitivi, assiomi, definizioni formali, teoremi, ecc. Non posso essere invece d'accordo con chi sottovaluta l'importanza della prima fase, […], che è frutto di un'attenta osservazione del disegno o del modellino in questione. Emblematico, a sostegno dell'importanza della fase euristica, il motto kantiano[…]: E così dunque ogni umana conoscenza inizia con osservazioni, passa poi a concetti e culmina con idee.*

Il quesito 11 relativo all'approccio rigoroso riporta invece le seguenti risposte:

Accezioni legate alla locuzione 'Approccio intuitivo'	*Poco*	*Abbastanza*	*Completamente*
Procedere per catene deduttive		4	4
Chiaro e sistematico	1	6	1
Dettagliato e analitico		8	
Aver compreso appieno il sistema assiomatico nel quale ci si sta muovendo	1	6	1
Un ragionamento in cui sono state chiaramente esplicitate le premesse		2	6

[156] Villani V., 1997

iniziali dalle quali si sono poi tratte, con coerenza deduttiva , le conseguenze logiche			

Anche in questo caso hanno risposto tutti i docenti. Perché gli insegnanti non concordano nell'attribuire un significato ad *approccio rigoroso*? Addirittura qualcuno non riconosce nell'*approccio rigoroso* le caratteristiche di essere 'chiaro e sistematico' e nemmeno quella di 'comprendere appieno il sistema assiomatico nel quale ci si sta muovendo', scegliendo poi di essere 'completamente' o 'abbastanza' d'accordo con l'ultima affermazione che include la penultima. Qualche insegnante, da buon matematico, non sceglie mai l'opzione 'completamente'; sceglierla infatti avrebbe comportato ritenere l'affermazione esaustiva ed equivalente al significato di 'approccio rigoroso' , e, necessariamente ritenere tutte le altre parziali.

In modo imponente non è stata scelta l'affermazione 'il fondamento della sicurezza con cui si è in grado di giudicare la verità delle proprie affermazioni'. Eppure se non si fornisce agli studenti questa chiave di lettura del significato di *approccio rigoroso* si rischia di fermarsi al formalismo e all'ambito meramente disciplinare, senza dare la possibilità di esportare in altri ambiti un tale possibile modo di operare.

Le due domande aperte che seguivano la 9 e la 11 erano il quesito 10 e il quesito 12 che avevano come obiettivo di rilevare il tipo di azioni didattiche svolte per incentivare intuizione oppure rigore:

- Quesito 10) *Ritiene importante favorire l'intuizione geometrica nei Suoi studenti? Quali strategie mette in atto per incrementarla?*
- Quesito 12) *Ritiene importante favorire il rigore geometrico nei Suoi studenti? Quali strategie mette in atto per svilupparlo?*

Ovviamente, rispetto all'importanza delle due componenti, tutti gli insegnanti hanno risposto affermativamente, ma solo la metà di essi descrive le strategie usate per sviluppare l'intuizione:

- *Ricondursi a problemi reali – Cambiare le ipotesi nella formulazione dei problemi – Vedere altre possibilità di risoluzione.*
- *Osservazione di relazioni e astrazione di proprietà, mediante discussione tra pari o con insegnante. Riconoscimento e applicazione alla vita reale delle relazioni geometriche.*
- *Spesso questo approccio è l'unico possibile nelle classi in cui il rigore geometrico avrebbe come unico risultato un forzato studio mnemonico.*
- *Utilizzo di programmi come Cabri II Plus.*

Le strategie indicate dai docenti per incentivare il rigore sono invece le seguenti:

- *Descrivere per passi le fasi di risoluzione con linguaggio adeguato – Correzione delle scritture o dei termini inadeguati – Discussioni guidate.*
- *Faccio in modo che gli studenti non accettino proprietà solo perché si 'vedono'; il rigore ci impedisce di commettere grossolani errori.*
- *Rendendo ineludibile procedere in modo sequenziale per non incorrere in situazioni assurde. Insinuando il dubbio sulla validità delle affermazioni non bene articolate. Riflettendo sui casi particolari, le situazioni degeneri o i casi limite.*
- *Applicazione di teoremi alla risoluzione di problemi, non dare per scontato nulla, giustificare ogni proprietà, non utilizzare i casi particolari come a loro viene spontaneo fare, considerare tutte le possibilità e non solo le più evidenti.*

Riportiamo infine, in tabella, la media delle valutazioni espresse dai docenti secondo quanto richiesto dal quesito 13.

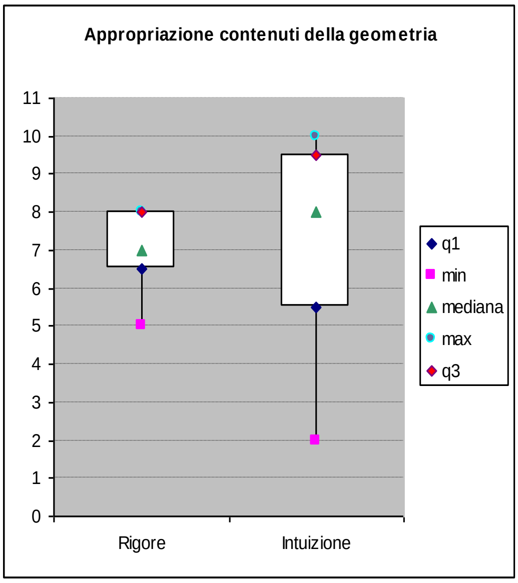
Si indichi con un numero da 1 a 10 (dove 1 indica il massimo dissenso e 10 l'assenso assoluto) il ruolo a suo parere giocato dall'intuizione e dal rigore nei seguenti ambiti:

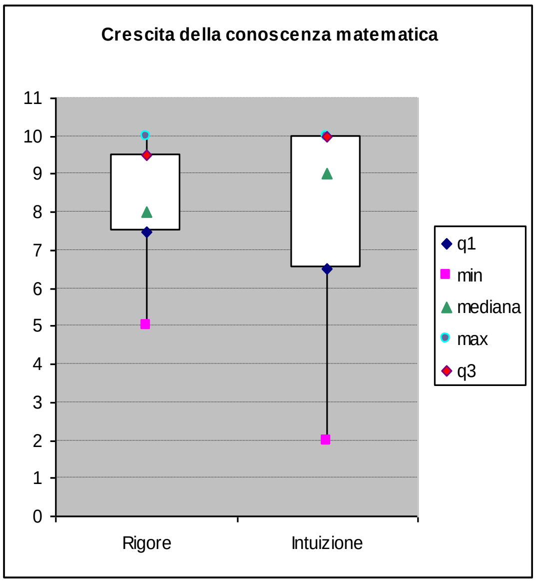
Ambito formativo	*Rigore*	*Intuizione*
Appropriazione da parte dello studente dei contenuti della geometria	7-5-8-7-6-8-8	10-5-6-9-10-8-2
Crescita della conoscenza matematica in generale	7-8-8-9-10-10-5	10-2-9-8-10-10-5
Utilizzo delle due categorie intuizione oppure rigore anche in ambiti di conoscenza non propriamente matematici o specificamente geometrici	4-7-9-8-10-10-5	8-9-9-9-10-10-5

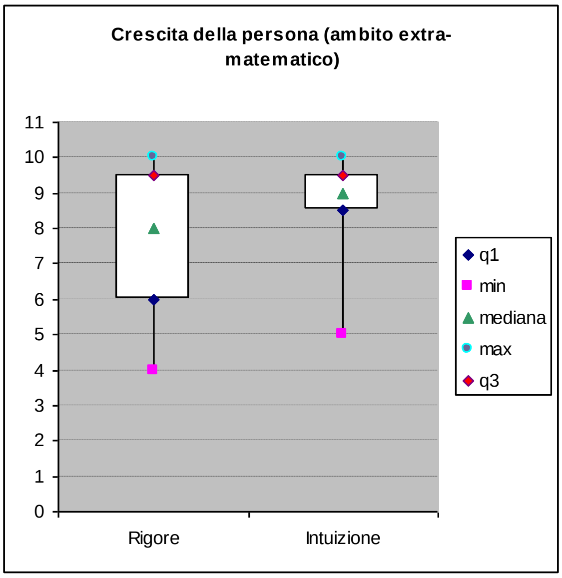
Il valore assegnato all'importanza del ruolo di intuizione e rigore, rispettivamente nei tre ambiti formativi indicati, (a nostro parere estremamente importanti) è stato buono da parte di quasi tutti i docenti. Non è chiara la ragione della presenza di alcuni '5' e la presenza di un '2' riguardante il ruolo giocato dall'intuizione nell'appropriazione dei contenuti geometrici.

Chiarificatori e riassuntivi, riguardo alle distribuzione delle valutazioni elencate in tabella possono risultare i seguenti *box-plot* che, oltre a visualizzare la valutazione massima(cerchio azzurro) e quella minima(quadrato rosa) per ciascuna richiesta, evidenziano chiaramente anche mediana(triangolo), primo e terzo quartile (rispettivamente rombo blu e rombo rosso).

Questi ultimi due indicatori *q1* e *q3* rappresentano i due valori che hanno rispettivamente il 25% delle valutazioni inferiori a *q1* e il 75% delle valutazioni inferiori a *q3*.







Facendo un bilancio generale delle risposte ottenute nel *questionario docenti*, ci sembra di dover rilevare purtroppo una mancanza di collaborazione per quanto riguarda le domande aperte. I pochi casi oggetto d'indagine restituiscono un'immagine della realtà scolastica che non si interroga sui problemi formativi della disciplina geometrica, ma che è tutta dedicata all'esecuzione di procedimenti di routine (svolgimento di esercizi, …). Nel caso in cui il singolo insegnante si ponga tale problema formativo, egli non sa darsi risposte, non sa dove cercarle o nel caso le abbia trovate, non desidera condividerle con altri. Ciò che sembra di dover sottolineare è la mancanza di una particolare attenzione alle strategie di interiorizzazione del pensiero matematico attraverso procedure di scoperta e di riscoperta personalizzata di cui si era parlato nel Capitolo 2.

Una sola insegnante si è resa disponibile per un'intervista, della quale riportiamo in ALLEGATO 4 la trascrizione integrale. Di particolare importanza risultano le risposte alle seguenti domande:

- In quale classe inizia ad insegnare la geometria sintetica?

  *Parto dalla prima fino alla quinta. In particolare affianco in terza la geometria sintetica a quella analitica della circonferenza, in quarta tratto le trasformazioni e in quinta la geometria solida [*dal punto di vista sintetico*].*

- Quale il motivo di questa scelta?

  Perché penso rispetti maggiormente la maturazione dei ragazzi, in particolare la capacità di astrazione dal disegno. Inoltre coinvolge diverse componenti tra cui la logica, il significato di negazione,… che devono essere rielaborate dagli studenti prima che diventino loro patrimonio

- Come motiva agli studenti l'introduzione del metodo assiomatico proposto nella Scuola Secondaria di secondo grado a scapito del metodo 'intuitivo-sperimentale' proposto in quella di primo grado?

  Non abbandono del tutto il metodo intuitivo, infatti, ad esempio quando presento i criteri di congruenza dei triangoli non li dimostro, ma cerco di spiegare loro la bontà della scelta di tali affermazioni. Parto da ciò che loro conoscono già. Chiedo loro di dirmi cosa sanno di geometria e poi pian piano cerchiamo di formalizzare e rendere rigoroso ciò di cui loro parlano.

- Esiste secondo lei una bellezza specifica della geometria sintetica?Se si,qual è ?

  Io preferisco la geometria al calcolo perché richiede di mettere in campo delle capacità quali l'originalità, la 'lettura' del disegno, la sua interpretazione per costruire un ragionamento formale.

Si legge chiaramente in queste parole la consapevolezza del valore formativo della geometria, la passione con cui viene condotta la propria professione e i criteri che illuminano le scelte didattiche messe in campo dalla docente.

4.2 QUESTIONARIO STUDENTI

Il *questionario studenti* per le classi prime di qualsiasi indirizzo della Scuola Secondaria di secondo grado era costituito da 10 quesiti, mentre per le classi terze e quinte, agli stessi 10 quesiti, ne sono stati aggiunti 2.

4.2.1 CREAZIONE DEL QUESTIONARIO

La scelta di riproporre gli stessi quesiti in età scolari diverse e in tutti gli indirizzi indagati ci ha permesso di fare dei confronti che altrimenti non sarebbe stato possibile fare. L'interesse è stato rivolto a cogliere l'evoluzione dell'utilizzo della componente intuitiva o rispettivamente di quella rigorosa, nelle varie età, nonché ad indagare come l'indirizzo di studio possa influire sugli esiti delle risposte degli studenti.

La scelta delle classi non è stata casuale:

- la classe prima è servita per poter dare una valutazione relativa a come è stata appresa la geometria nelle classi scolari precedenti alla Scuola Secondaria di secondo grado;
- la classe terza è stata scelta perché emblematica nel passaggio dalla geometria sintetica a quella analitica. Nella maggioranza degli indirizzi di studio infatti la geometria sintetica viene presentata nel primo biennio per non venir poi più ripresa nel corso del secondo biennio e dell'ultimo anno.
- la classe quinta è stata coinvolta per quanto riguarda il caso di un Istituto nel quale lo studio della geometria sintetica accompagna tutti e cinque gli anni del secondo ciclo d'istruzione.

Il questionario è stato costruito per leggere diversi aspetti legati ai problemi dell'apprendimento della geometria e in particolare alle procedure mentali caratterizzate da intuizione e rigore.

I numeri dei quesiti che verranno richiamati sono quelli relativi al questionario della classe terza e quinta, perché comprensivo anche delle domande della classe prima.

Allo scopo di meglio indagare i comportamenti degli studenti, i quesiti sono stati classificati secondo livelli diversi di natura psicologica, oppure concettuale, oppure ancora razionale-argomentativo. Precisamente:

- il *livello emotivo*[157]: sono quesiti che cercano di sondare come gli studenti vedono la geometria e quali emozioni/sensazioni questa disciplina suscita in loro;
- il *livello definitorio*: in questa categoria si intende raggruppare tutta la serie di quesiti aventi a che fare con la definizione di oggetti geometrici e in particolare con l'uso di un linguaggio appropriato, oppure con il controllo della presenza di tutte le condizioni essenziali per la definizione di un oggetto, o ancora con la non

[157] Cfr. R.Zan, 2000

ridondanza di una definizione e il collegamento esistente fra definizione e rappresentazione grafica coerente;

- il *livello argomentativo/dimostrativo*: sono quesiti che riguardano sia osservazioni dirette su come si deve operare in una dimostrazione, oppure altri nei quali viene chiamata in causa in modo non esplicito una dimostrazione e in tal caso si vuole verificare se gli studenti ricorrono ad essa autonomamente o utilizzino altre forme argomentative.

I quesiti risultano quindi suddivisi secondo la tabella che segue:

Livelli	*Questionario classe prima*	*Questionario classe terza/quinta*
Livello emotivo:	1-2°	1-2a
Livello definitorio:	2b-2c-2d-2e-2f-2g-9-10-12	2b-2c-2d-2e-2f-2g-9-10-12
Livello argomentativo/dimostrativo:	3-4-5-6-8	3-4-5-6-7-8-11

Analizziamo i diversi quesiti seguendo la scansione proposta dalla tabella.

La maggioranza di essi chiedono di scegliere la risposta corretta fra quattro o cinque opzioni; per alcuni viene detto che c'è una sola risposta corretta, per gli altri se ne può scegliere più di una che si ritenga corretta. Sei quesiti su dodici chiedono di giustificare la scelta effettuata e questo proprio perché, attraverso la giustificazione, si può chiarire il metodo dal quale lo studente si lascia condurre nel suo modo di ragionare geometricamente (addestramento, fiducia nelle proprie intuizioni, scelta della strada più breve, rigore…).

Nel quesito 1 è stata proposta la scelta di tre sostantivi (fra 19 proposti e uno che poteva essere aggiunto liberamente) che i ragazzi ritenessero maggiormente attinenti alla loro idea di geometria. Questo per analizzare in particolare la visione che gli studenti hanno della disciplina e per valutare la presenza di un'eventuale evoluzione o cambiamento con il passare degli anni all'interno del ciclo secondario d'istruzione. Che la matematica sia ritenuta da molti un ambito all'antitesi delle emozioni è un luogo comune ancora diffuso, anche se l'accostamento dell'apprendimento della matematica con emozioni negative si sta abbastanza diffondendo. È dall'inizio degli anni '70 che nell'ambito dell'educazione matematica ha assunto sempre maggior risalto e importanza lo studio della relazione esistente fra l'atteggiamento, e più in generale i fattori affettivi-emotivi, e l'apprendimento-insegnamento della disciplina in oggetto. A riguardo riportiamo le parole di Rosetta Zan, una fra i più insigni studiosi italiani in questo campo di ricerca:

> *la ricerca più recente in neurofisiologia evidenzia un rapporto estremamente profondo fra processi cognitivi ed emozionali. Particolarmente interessante [...] è la relazione individuata fra la 'capacità' di provare emozioni e la capacità di prendere decisioni [...]. Non è l'evento in sé che genera l'emozione, ma l'interpretazione che il soggetto dà dell'evento stesso .*[158]

La stessa studiosa descrive come in particolare l'emozione estetica giochi un ruolo fondamentale nell'apprendimento e nella scoperta matematica, prendendo a prestito le parole di Poincarè:

> *Ci si può stupire di vedere invocare la sensibilità a proposito di dimostrazioni matematiche che sembrerebbero interessare solo l'intelligenza. Sarebbe dimenticare la sensazione della bellezza matematica, dell'armonia dei numero e delle forme, dell'eleganza geometrica. È una vera sensazione estetica che tutti i veri matematici conoscono. Ed è proprio questione di sensibilità.*[159]

Questa considerazione e altre[160] che si muovono nella stessa direzione, portano a considerare l'opportunità a livello didattico di insegnare ai nostri allievi ad includere categorie di tipo estetico nella elaborazione dei processi di controllo; imparare a riconoscere la simmetria, la regolarità, la semplicità diventa allora un modo per prevedere e quindi per controllare i risultati. Ovviamente questo criterio non deve essere l'unico che faccia da guida per lo studente.

Premesso che intuizione e rigore sono legati tanto all'aspetto emotivo quanto all'aspetto definitorio oltre che a quello argomentativo/dimostrativo, i quesiti hanno spaziato nei due ambiti suddetti e hanno inoltre analizzato il ruolo giocato dal disegno nel rappresentare gli oggetti geometrici.

---

[158] Zan R., 2000, pp.207-232.
[159] Poincarè H., p.43.
[160]Cfr. Hardy G.H., 2008, p.67 <<*Le forme create dal matematico, come quelle create dal pittore o dal poeta, devono essere belle; le idee, come i colori o le parole, devono legarsi armoniosamente. La bellezza è il requisito fondamentale: al mondo non c'è un posto perenne per la matematica brutta*>>.

Nel questionario sono presenti alcuni quesiti (2-10-12) che riguardano la modalità con cui gli studenti legano una definizione al disegno e altri in cui si intende valutare se essi riconoscano, nell'utilizzo dei termini logici e rigorosi della definizione, altrettante proprietà presenti nella rappresentazione grafica. Il quesito 9 in particolare ha chiesto, data la definizione dell'oggetto geometrico *poligono regolare*, di scegliere, fra un elenco di spiegazioni proposte, cosa significava per un poligono l'essere *non regolare*.
Riguardanti l'aspetto argomentativo-dimostrativo estrapolato da un contesto prettamente formale di richiesta dimostrativa sono invece i quesiti 3-4-5-6-8.
Il quesito 7 richiedeva agli studenti di terza e quinta di interpretare una situazione geometrica 'anomala', nella quale disegno e calcolo delle aree entravano in conflitto; i risultati suggeriti da intuizione e rigore sembravano scontrarsi.
Il quesito 11 chiedeva ai ragazzi di terza e quinta di dichiarare quale fosse, secondo loro, la funzione del disegno in una dimostrazione geometrica.

4.2.2 SOMMINISTRAZIONE DEL QUESTIONARIO STUDENTI

Prima di effettuare la somministrazione, oggetto delle osservazioni che seguono, una bozza di questionario è stato 'provato' in tre classi di controllo, al fine di meglio tararlo sia in ordine alla difficoltà dei quesiti e dei termini utilizzati, sia in ordine al tempo necessario per la compilazione delle risposte. Le modifiche da apportare sono risultate poche e quasi solo riguardanti la comprensione del testo di un paio di quesiti.
Una volta riequilibrato il questionario secondo i criteri ora esposti, si è effettuata la somministrazione che è ora soggetta a elaborazione ed osservazione.
Il questionario creato è stato proposto in alcune scuole della provincia di Brescia. Scarsa è stata la risposta degli Istituti, i quali hanno in parte rifiutato e in altra parte acconsentito alla somministrazione solo per alcune classi. I questionari raccolti risultano quindi i seguenti:

- 87 per le classi prime (2 classi di istituto tecnico e 2 classi di liceo scientifico)
- 76 per le classi terze (2 classi di istituto tecnico e 2 classi di liceo scientifico)
- 21 per le classi quinte (1 classe di liceo scientifico)

I questionari sono stati somministrati nei mesi di dicembre-gennaio, quindi a metà dell'anno scolastico considerato.
La scrivente ha presenziato nelle varie classi al momento della compilazione del questionario da parte degli studenti.

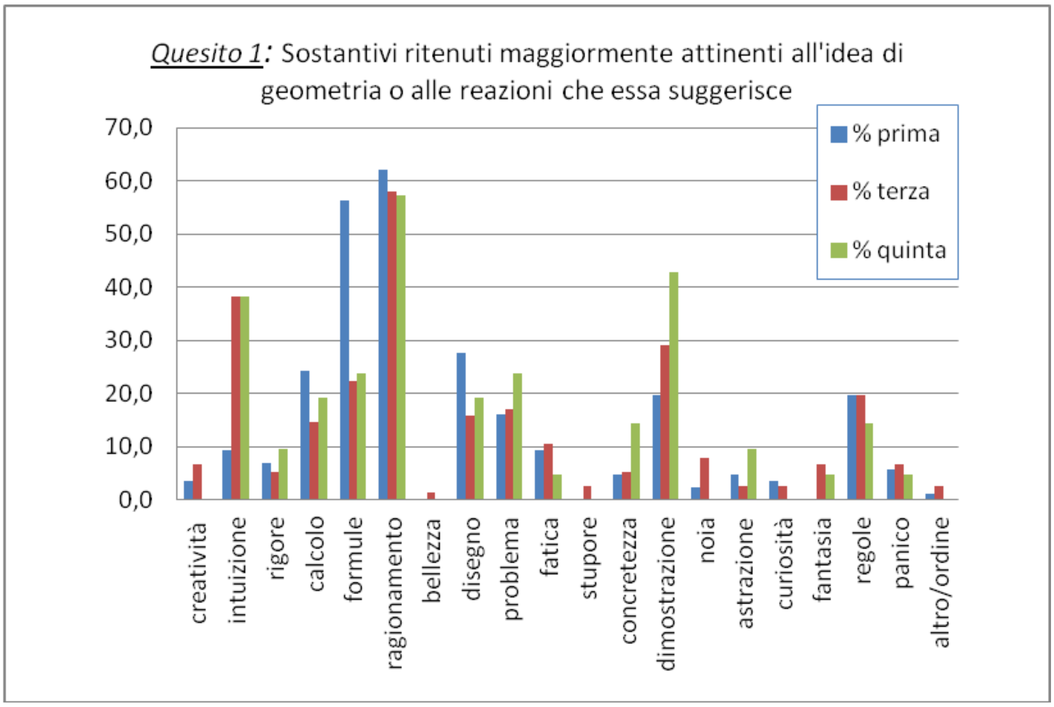
4.2.3 ELABORAZIONE DEI DATI E ANALISI DEI RISULTATI

Si analizzano ora gli esiti dei vari quesiti cercando di confrontare le risposte date nelle tre diverse età scolari.

Per ciascun quesito che preveda una o più risposte corrette, queste saranno affiancate da un asterisco nei grafici a barre riassuntivi delle percentuali di risposta.

I quesiti del *livello emotivo* comprendono l'1 e il 2a.

Le risposte al **quesito 1** sono riassunte dal *grafico1*, nel quale emergono le valutazioni riguardanti i termini che i ragazzi legano alla geometria. Per l'intero Secondo ciclo d'istruzione i ragazzi ritengono che l'aspetto più rilevante della geometria sia la necessità del *ragionamento* o il fatto di essere basata su di esso[161] (circa il 60%).



Non sembrano invece coinvolti dalla geometria la *creatività*, la *bellezza*, lo *stupore*, la *curiosità* e la *fantasia*, che vengono scelti da pochissimi studenti (meno del 7% in tutte e tre le classi). Dispiace in particolare notare la totale mancanza di apprezzamento per la *bellezza* della geometria. C'è da chiedersi di chi o di che cosa potrebbe essere la colpa!

Non sono associati alla geometria nemmeno termini come *noia, fatica* e *panico* (meno del 10%). Sembra quasi che la geometria non generi emozioni, non muova sentimenti o non riguardi considerazioni estetiche.

[161] Questo risultato è a conferma di quanto affermato nel paragrafo 4.1 relativo alla visione della geometria che emerge dal questionario somministrato ai docenti.

Astrazione, rigore, concretezza si posizionano attorno al 10%.
Attorno al 20% si mantengono il *calcolo,* il *problema* e le *regole.*
È interessante rilevare che quasi la stessa importanza del *ragionamento* ha per i ragazzi di prima l'*uso delle formule* e di poco inferiore è il ruolo delle dimostrazioni per i ragazzi di quinta. Un valore molto importante in terza e quinta è riconosciuto anche all'*intuizione*. La scarsa importanza attribuita al *rigore,* in confronto all'importanza di *ragionamento* e *dimostrazione* porta a concludere che i ragazzi non hanno una chiara nozione di ciò che si dovrebbe intendere per rigore.
Gli aspetti che subiscono un cambiamento significativo nell'arco dei cinque anni sono :

- l'*intuizione,* che sembra essere riscoperta nella classe terza;
- le *formule,* che parevano il cuore della geometria per gli studenti di prima e che invece già in terza perdono il 25% di coloro che le scelgono, per poi in quinta mantenersi sullo stesso livello. Riamane da capire la differenza che viene fatta dai ragazzi riguardo alle formule e al calcolo;
- il *disegno,* che perde valore con il crescere dell'età degli studenti e sembra stranamente indipendente dall'intuizione; o forse è il concetto di intuizione che non è così chiaro!
- la *dimostrazione,* che acquista gradualmente un importante ruolo (fra una classe e la successiva acquista 10 punti percentuali).

Dall'osservazione di questi primi dati sembra emergere una visione della geometria al termine della Scuola Secondaria di primo grado improntata sulle formule e sul ragionamento, per poi lasciare gradatamente il posto, all'interno della Scuola Secondaria di secondo grado, ad una geometria che richiede ancora l'attivazione di ragionamenti, ma sostenuti dall'intuizione e dalle procedure dimostrative.
Importante notare che l'intuizione viene scelta da circa il 9% degli studenti di prima; nella loro esperienza geometrica, nella scuola del Primo ciclo, questa componente pare non aver lasciato traccia o è stata schiacciata dalla forza ben più vigorosa delle formule e del problema della scelta delle stesse mediante un opportuno ragionamento.

Nel **quesito 2a** è stata posta la seguente questione: *Se dovessi descrivere un trapezio ad un tuo amico gli diresti che è… .* Si è ritenuto importante inserire tale quesito nel livello emotivo perché coinvolge, oltre che procedure razionali, soprattutto la convinzione posseduta dagli studenti nel presentare una conoscenza che dovrebbe appartenere loro da alcuni anni. Tutti gli studenti delle tre classi rispondono a questa domanda. Nessuno lascia la risposta in bianco o scrive ‘non ricordo’, come accade invece per la *2b* (che chiedeva la definizione precisa di trapezio) nelle classi prime e terze.

Il linguaggio utilizzato nel rispondere al *quesito 2a* (rispetto al quesito *2b* che assume toni formali per la maggior parte dei ragazzi di tutte e tre le età scolari coinvolte) è informale e principalmente descrittiva per l’83% degli alunni della classe prima e per il 64% della classe terza; per gli alunni di quinta le risposte al *2a* e *2b* coincidono e sono tutte corrette, ad eccezione di uno studente che dichiara *‘un trapezio è un parallelogramma con due lati paralleli’*. Per i ragazzi di quinta sembra non essere più presente un distacco fra livello emotivo e livello definitorio. La definizione rigorosa di trapezio data a scuola ha assunto dentro di loro un rilievo tale da essere considerata accettabile e convincente, tanto da essere usata per descrivere il trapezio ad un loro amico.

Alcuni studenti di prima (9 su 87) rispondono alla *2a* descrivendo una modalità di rappresentazione grafica del trapezio, affermando: *una figura geometrica piana formata da un rettangolo al centro e due triangoli rettangoli ai lati*, oppure *un triangolo tronco,* oppure *un rettangolo in cui due lati paralleli sono divenuti i lati obliqui piegati verso l’interno*. Fortissima è la componente legata al disegno o l’attitudine a ricondursi a figure geometriche più conosciute come i triangoli e i rettangoli.

Sedici sono gli studenti di prima che dichiarano: [un trapezio è] *un quadrilatero che può essere di tre tipi: scaleno, isoscele e rettangolo,* sfuggendo così alla descrizione e fornendo invece la classificazione come se questa riuscisse a rendere la comunicazione con l’amico più efficace. Questo richiamo alla classificazione viene fatto da soli 3 ragazzi di terza e da 2 ragazzi di quinta, ma dopo aver dato la definizione corretta di trapezio.

Gli studenti di prima che citano i termini ‘*basi*’ e ‘*lati obliqui*’ sono 34, solo 11 quelli di terza e 4 di quinta. Come se il nominare in modo ritenuto ‘scientifico’ un oggetto, gli conferisse lo status di chiarezza ed esistenza!

Rispetto al livello emotivo emerso dai due quesiti ora analizzati, sembra che gli studenti compiano un percorso (dalla prima alla quinta) nel quale non sia presente la componente di *libertà e creatività.* Piuttosto vi è un re-indirizzamento della geometria verso la standardizzazione delle procedure con cui presentare un’idea. Infatti le risposte date al quesito *2a* dagli alunni di quinta sono tutte pressoché identiche. Non veniva chiesta una definizione rigorosa, ma una descrizione da proporre ad un amico. D’altra parte le emozioni che la geometria muove negli studenti di quinta sono ben rappresentate dalle risposte date al quesito 1, dove le percentuali più alte si riferiscono alle risposte 'ragionamento' e 'dimostrazione'.

Passiamo ora in rassegna i quesiti riguardanti *il livello definitorio* di enti geometrici.
In particolare:

- il quesito 2 chiedeva di fornire la definizione di trapezio per poi, sulla base della stessa, individuare fra alcuni disegni proposti quello (o quelli) che rappresentava un trapezio coerentemente con la definizione data; nello stesso quesito venivano proposte diverse varianti della definizione di trapezio ed era richiesto di tornare a scegliere fra le stesse figure quelle che rispettassero la nuova definizione;
- il quesito 10 chiedeva di individuare fra tre triangoli equilateri posti in posizione diversa e di dimensioni diverse, quelli simili fra loro, avendo fornito nel testo del questionario la definizione di triangoli simili;
- il quesito 12 chiedeva di individuare fra quattro poligoni quelli concavi, avendo fornito nel testo del questionario la definizione di poligono convesso. Veniva anche chiesta una motivazione rispetto alla scelta effettuata.

Esaminando le risposte al questionario si rileva quanto segue.
Il **quesito 2** era molto articolato e ruotava attorno alla relazione che esiste fra definizione e rappresentazione grafica di un oggetto geometrico, in particolare qui si trattava del trapezio.
L'importante valore che il disegno ha all'interno della geometria è sottolineato dalle parole di M.A.Mariotti quando afferma che

> '*una funzione specifica del disegno è quella di essere origine di stimoli percettivi che chiedono una interpretazione e che quindi mobilitano la dialettica fra figurale e concettuale[…]L'ipotesi è che il disegno si ponga alternativamente come supporto per la componente figurale e per la componente concettuale; in tal modo può risultare soggetto ad una certa instabilità, ma allo stesso tempo può risultare elemento determinante nell'innescare quel processo dialettico tra le due componenti, che sta alla base del ragionamento geometrico*'.[162]

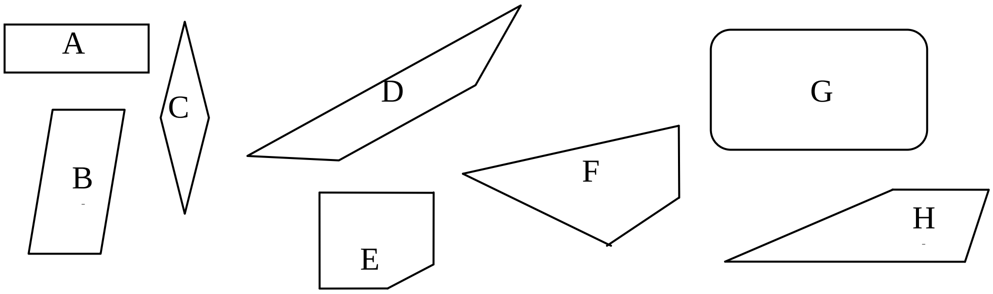
[162] Mariotti M.A., 2005, p.42-43

Il disegno costituisce dunque il ponte che può creare un collegamento fra la concretezza del reale e l'astrazione del concetto geometrico.

Osserviamo anzitutto come si comportano i ragazzi posti di fronte ad alcune definizioni leggermente diverse di trapezio fornite all'interno del questionario:

d) *"Trapezio è ogni quadrilatero che ha almeno due lati opposti paralleli"*
e) *"Trapezio è ogni quadrilatero che ha solo due lati opposti paralleli".*
f) *"Trapezio è un quadrilatero con due lati paralleli".*
g) *"parallelolatero"è ogni quadrilatero con almeno due lati paralleli.*

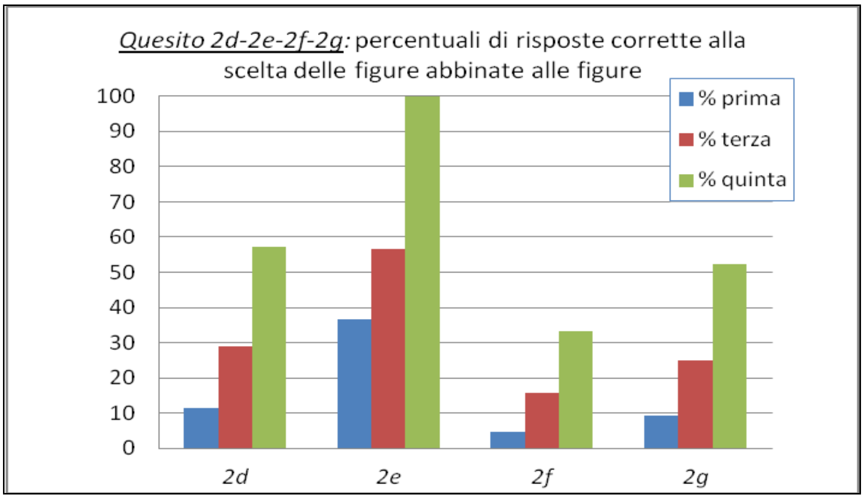
Le figure fra le quali dovevano effettuare la scelta dei poligoni da abbinare alle precedenti definizioni erano le seguenti:



Le figure A,B,C sono state inserite per riproporre l'usuale[163] possibile scelta nella definizione di trapezio, che includa o escluda i quadrilateri più particolari come rombi, rettangoli, parallelogrammi e quadrati, a seconda della richiesta per il trapezio di avere *esattemante* due lati paralleli o *almeno* due lati paralleli. La figura D è l'immagine 'standard' e intuitiva che i ragazzi associano al termine trapezio, mentre la H ne è una piccola variante, per la presenza di un angolo ottuso giacente sulla base maggiore. Le figure E e G non sono l'una nemmeno un quadrilatero e l'altra nemmeno un poligono, ma avendo una coppia di 'lati' paralleli, hanno lo scopo di indurre lo studente ad effettuare un'analisi rigorosa della definizione, attribuendo significato a ciascun termine in essa utilizzato. La figura F, infine, ripropone un'immagine molto simile al trapezio nella forma 'standard', ma non ha la proprietà del trapezio dell'avere due lati paralleli.

Le risposte corrette riportate nel grafico sottostante mostrano come per ciascun quesito vi sia un miglioramento nelle tre classi scolari.

[163]Cfr. Freudenthal, 1994.



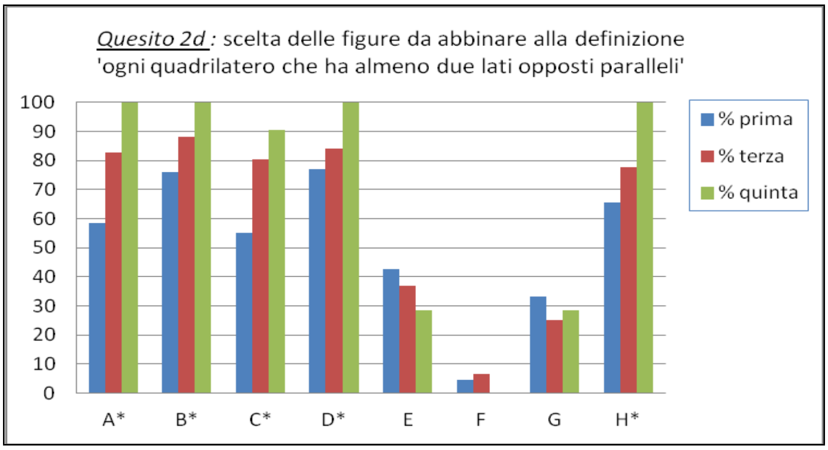
La definizione che desta per gli studenti meno difficoltà nell'interpretazione è la b) per tutte e tre le annate alle quali il questionario è stato proposto; l'aver inserito l'avverbio *esattamente*, per indicare quanti lati paralleli debba avere il trapezio, ha chiarito agli studenti la scelta da operare. Segue poi, in ordine al numero delle risposte corrette date, la definizione a), definizione che gli insegnanti degli studenti ai quali è stato somministrato il questionario dichiarano di aver fornito in classe durante le ore di lezione. Di soli pochi punti percentuali in meno risulta il numero di risposte corrette relative alla definizione d); essa è la stessa definizione di a), ma è stato cambiato il nome classico di trapezio con un nome di fantasia (parallelolatero). Gli studenti che rispondono correttamente non sembrano quindi influenzati dal nome dell'oggetto geometrico analizzato, basando più le loro risposte sulle proprietà presenti nella definizione. Vedremo nella seconda parte dell'analisi del quesito 2 che sono comunque molti i ragazzi che non rispondono correttamente.

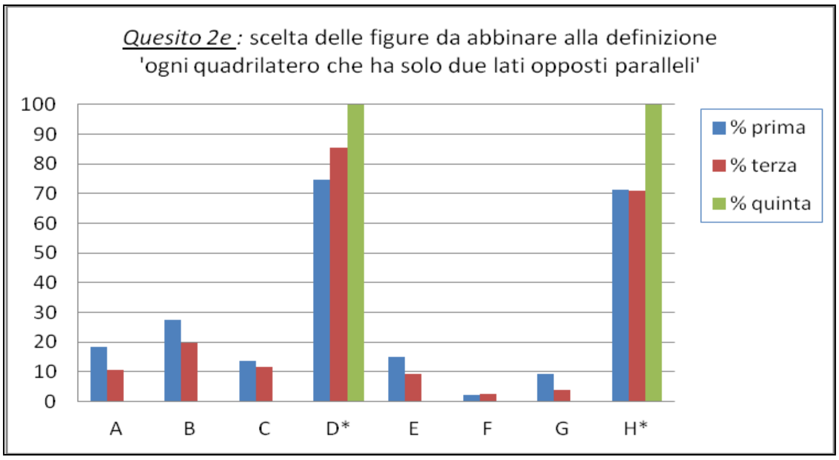
Di dubbia interpretazione per tutti gli studenti è stata la definizione c), nella quale l'aver dichiarato *"Trapezio è un quadrilatero con due lati paralleli"* li pone probabilmente di fronte al dubbio di scegliere fra i quadrilateri che hanno esattamente due lati paralleli e quelli che ne hanno due coppie.

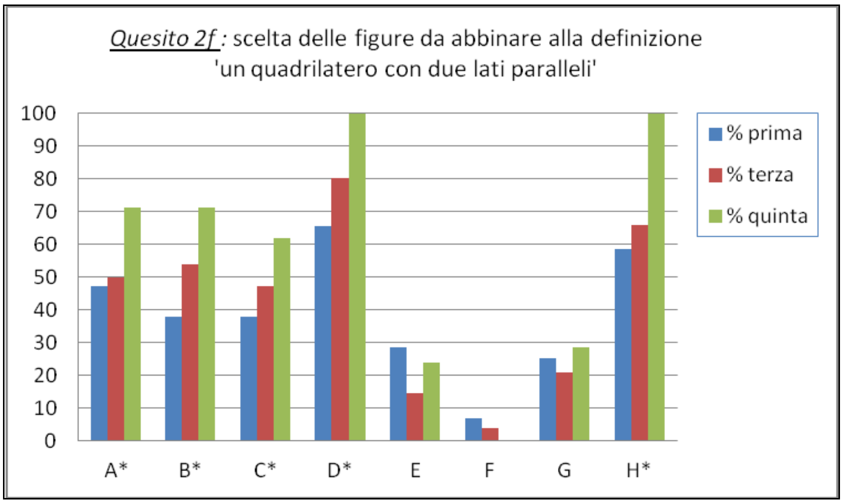
Passiamo ora in rassegna le figure scelte da abbinare a ciascuna definizione al di là delle risposte corrette in toto. Si nota immediatamente che la figura F è stata scelta da pochissimi ragazzi (non ha mai oltrepassato il 6%) e da nessun ragazzo della classe quinta. Sono state invece riconosciute trapezi secondo la definizione d) le figure E e G, raggiungendo anche il 40% nella classe quinta.

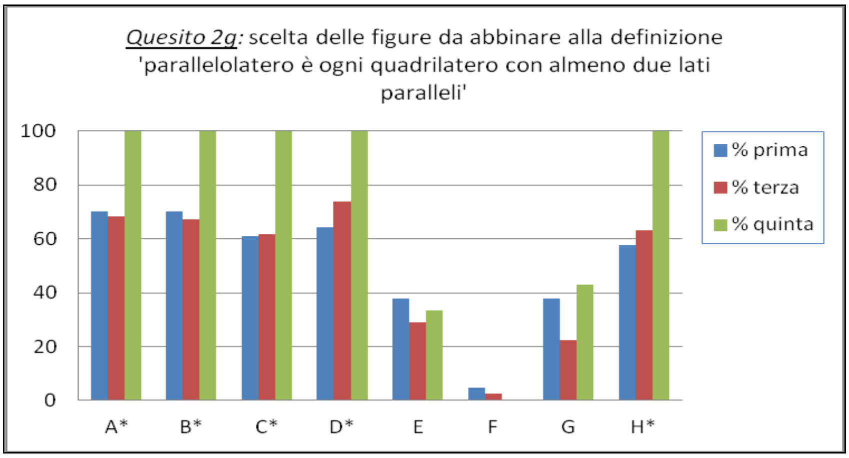
Interessante è il comportamento dei ragazzi di quinta, i quali riconoscono tutti i quadrilateri che soddisfano la definizione in modo corretto (ad eccezione della c), aggiungendone però anche alcuni che non rientrano a pieno titolo nella definizione.

I ragazzi delle altre classi invece spesso non riconoscono nemmeno tutte le figure che soddisfano una certa definizione.









Il rigore richiesto dal linguaggio matematico e affinato all'interno della disciplina stessa è una dura conquista per lo studente, soprattutto in ambito geometrico, dove il disegno sembra 'supplire' alla carenza di proprietà e specificità lessicale.

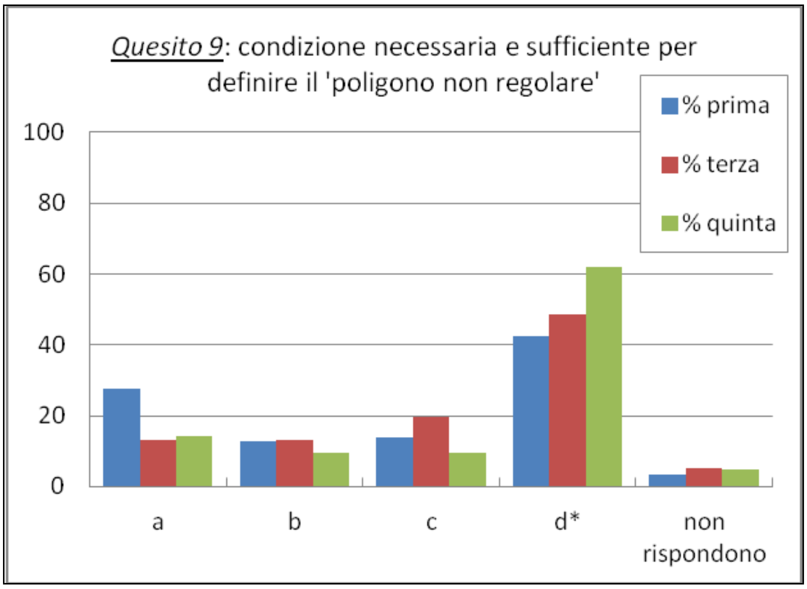
Il **quesito 9** forniva la definizione di poligono regolare come quel *poligono in cui tutti i suoi lati sono uguali e tutti i suoi angoli sono uguali*[164]. È stato chiesto di scegliere la definizione di *poligono non regolare* che fosse necessaria e sufficiente fra le seguenti:

a) tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli sono disuguali.
b) tutti i suoi lati o tutti i suoi angoli sono disuguali.
c) almeno due dei suoi lati e almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali.
d) almeno due dei suoi lati o almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali.

È chiaro che tutte le risposte elencate sono giuste definizioni di poligono non regolare. Tuttavia solo la (d) si caratterizza come condizione necessaria e sufficiente (cioè la richiesta fatta), mentre le altre sono solo condizioni sufficienti.

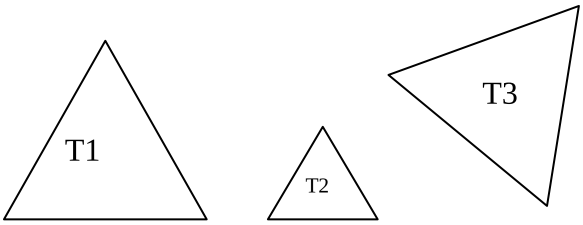
Queste le frequenze delle risposte:

[164] I termini *lati uguali ed angoli uguali* sono stati qui utilizzati per permettere agli studenti della classe prima di cogliere immediatamente il significato di poligono regolare, altrimenti probabilmente meno chiaro se si fosse usato il termine *congruenti* non sempre introdotto nella Scuola Secondaria di primo grado.

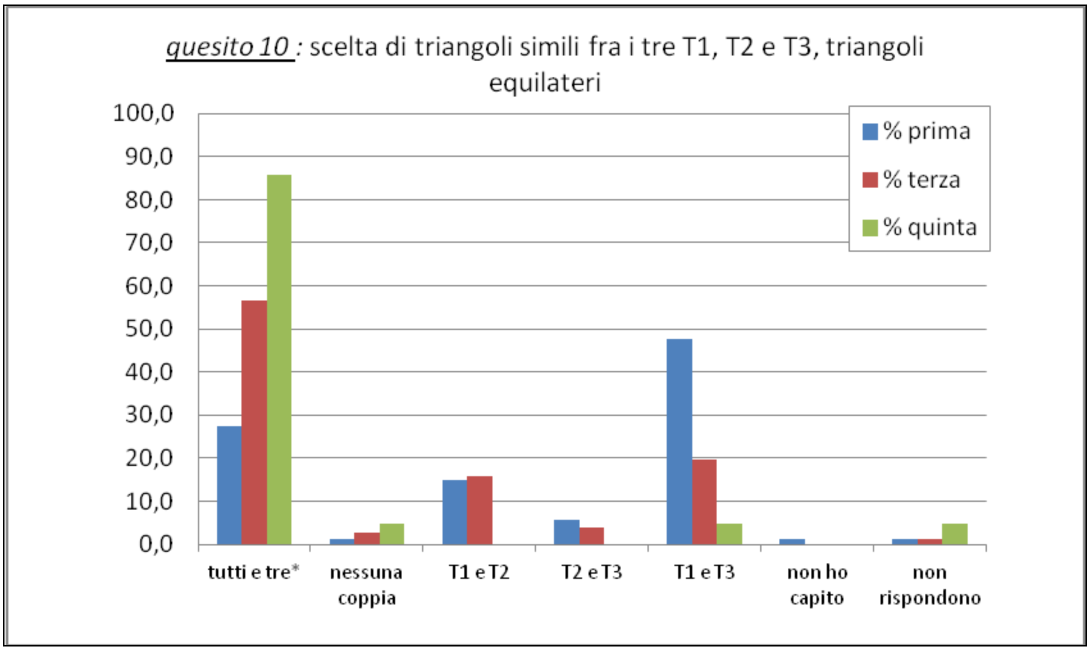


La maggioranza dei ragazzi, indipendentemente dalla classe scolare di appartenenza, sceglie la risposta corretta (d). Per assonanza con la definizione proposta il 27% dei ragazzi di prima superiore sceglie la prima opzione, mentre il 20% dei ragazzi di terza si lasciano convincere dalla c), dove la struttura della negazione è presente nel modo corretto per quanto riguarda i quantificatori, ma il connettivo logico proposto è errato. Sembra mancare negli studenti di queste due classi la capacità di proporsi qualche esempio concettuale o anche grafico per verificare se l'opzione scelta è corretta; manca in sostanza una sorta di plasticità dei modelli geometrici.

In riferimento al **quesito 10**, dove la scelta dei triangoli equilateri da riconoscere simili era da fare tra T1, T2 e T3, emerge una sovrapposizione di significato fra *similitudine* e *congruenza*.



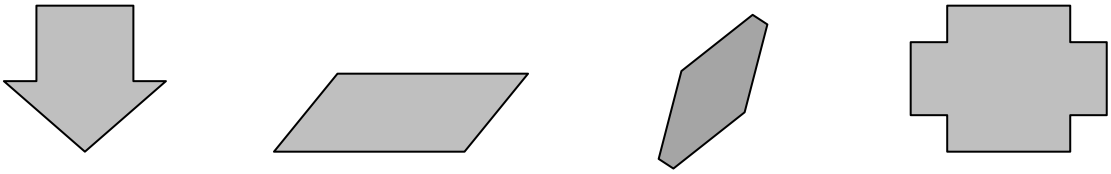
Per quanto riguarda gli studenti di prima, pur avendo proposto la definizione di triangoli simili nel testo della domanda, per circa il 47% l'aspetto intuitivo (presente nella storia e nelle convinzioni dei ragazzi che provengono dal Primo ciclo) prevale su quello rigoroso-definitorio (malgrado ci sia nel testo del questionario). Già in terza si ha un notevole aumento della percentuale dei ragazzi che risponde correttamente (il 56%), per poi raggiungere la quasi totalità degli intervistati della classe quinta.



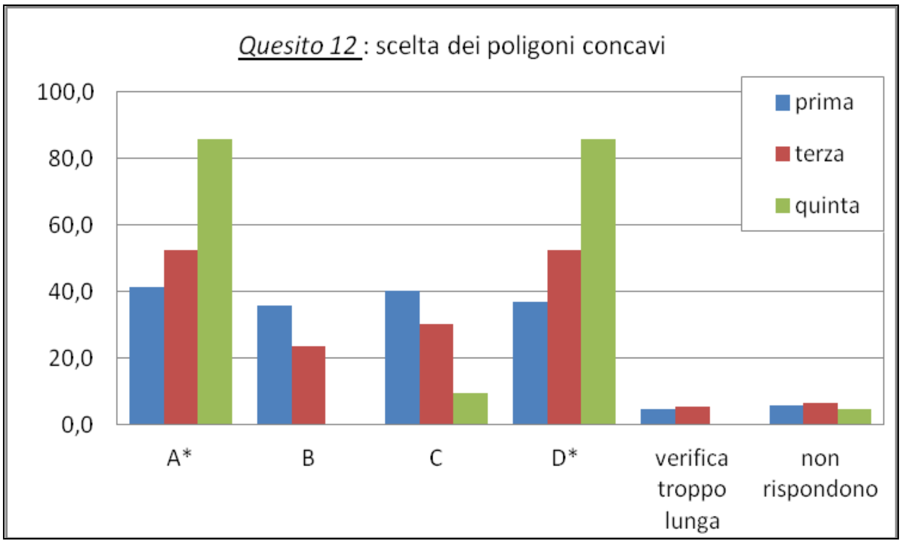
In terza i ragazzi tendono ancora a confondere la definizione di triangoli simili con la congruenza o con la particolare posizione che il triangolo ha nel piano.

Uno studente della classe quinta risponde '*nessuna coppia'*, aggiungendo a fianco della scelta che non ha gli elementi sufficienti per decidere quali dei triangoli sono fra loro simili. Evidentemente ha tralasciato l'informazione essenziale, che i tre triangoli sono equilateri, ma il richiedere ulteriori informazioni può essere indice del fatto che vorrebbe poter valutare i rapporti fra le misure dei lati (seguendo rigorosamente la definizione), ma con i dati forniti non gli è dato di poter svolgere tale verifica. Il ragazzo in questione potrebbe essere uno che cerca, a suo modo, di essere rigoroso senza possedere la capacità di astrarre dalla caratterizzazione di 'essere equilateri', la possibilità di indicare con una stessa incognita la lunghezza dei tre lati.

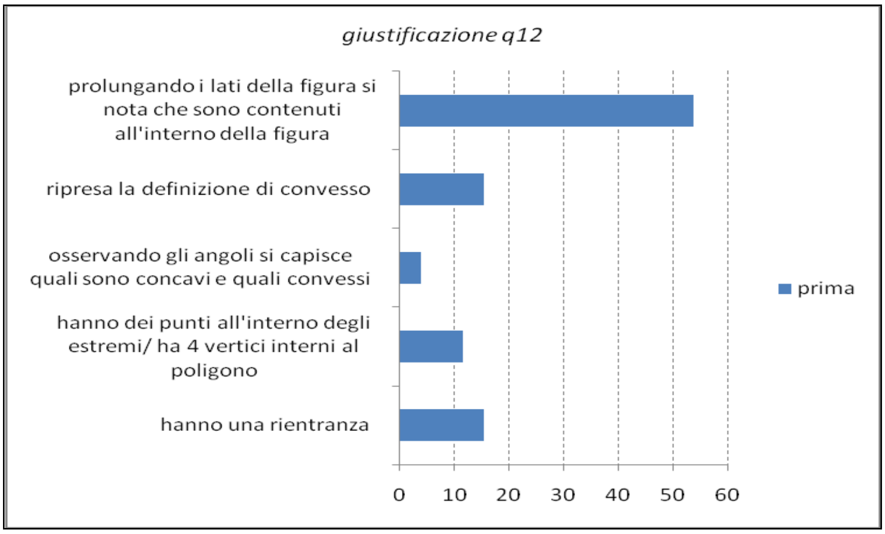
Per quanto riguarda il **quesito 12** veniva affermato che *un poligono è convesso se ciascun segmento avente come estremi una qualsiasi coppia di punti interni al poligono , giace completamente nel poligono. Se un poligono non è convesso, si dice che è concavo.* La richiesta è stata di individuare i poligoni concavi fra quattro proposti, di cui i poligoni A e D erano concavi, mentre gli altri due convessi.



Le scelte effettuate da parte degli studenti mostrano come nella classe prima non si faccia distinzione fra *concavo* e *convesso*, in parte forse per l'assonanza che i due termini hanno e in parte per la difficoltà nella comprensione della definizione.

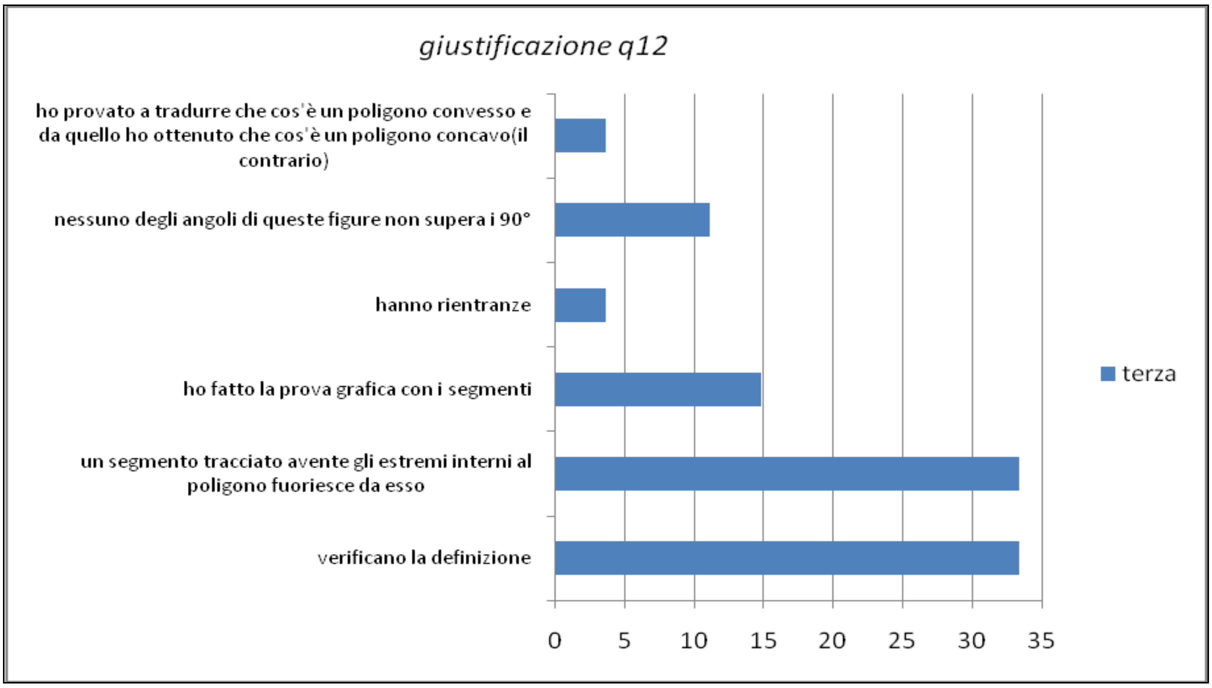


Fra gli studenti che rispondono correttamente vi sono motivazioni del tipo seguente:



Fra i ragazzi che motivano, solo il 15% nega in senso logico la definizione fornita, mentre gli altri si appellano a definizioni o intuizioni relative al prolungamento dei lati, all'osservazione degli angoli, alla forma 'rientrante' del poligono, alla posizione dei vertici. Gli studenti della classe terza si orientano verso le risposte corrette, ma solo in quinta si ha una netta scelta delle alternative corrette.

Nella classe terza le motivazioni dei ragazzi che rispondono correttamente sono più in linea con la definizione fornita e con la richiesta fatta. Solo due tipologie di motivazioni sembrano essere uno strascico delle convinzioni della classe prima: *hanno rientranze(4%)* e *nessuno degli angoli di queste figure non supera i 90°(11%)*. In quest'ultima affermazione molto artificiosa i ragazzi non riescono ad avere il controllo sul significato della frase per la presenza del termine *nessuno* e della negazione.



Nella classe quinta invece le motivazioni portate sono le seguenti, ben visibili anche nei segni grafici aggiunti nel disegno, dove vengono tracciati i segmenti che escono dal poligono:

- prendendo gli estremi della freccia e unendoli con qualsiasi punto della coda il segmento è esterno, vedere il disegno (corretto)
- vedi disegno: i segmenti non giacciono interamente nel poligono (corretto)
- un poligono *è concavo se non è convesso*. *Escludendo* i convessi ho trovato i concavi (disegno corretto)
- ho trovato *almeno* un segmento che presi due punti interni non giacesse completamente all'interno
- il segmento che unisce una coppia di punti *potrebbe essere* in parte esterno
- se prendo due punti interni al poligono, il segmento che li unisce non giace completamente nel poligono(disegno corretto)

- se prendo due punti interni al poligono, il segmento che li unisce non giace completamente nel poligono(disegno corretto); *nella b e nella c, invece* presa una qualsiasi coppia di punti il segmento giace sempre all'interno del poligono

Si sono riportate le motivazioni più significative e nelle quali si può osservare come la padronanza tanto dei termini specifici e rigorosi, quanto della struttura argomentativa sia divenuta una parte essenziale del modo di ragionare dello studente.

Il *livello definitorio* indagato dai quesiti ora presentati pare essere un livello affrontabile all'interno della Scuola Secondaria superiore. I piccoli passi condotti in tutto lo sviluppo dei cinque anni possono portare a buoni risultati. L'analisi di definizioni, la loro negazione per trovare la definizione complementare, il motivare una scelta definitoria a discapito di un'altra sono obiettivi perseguibili.

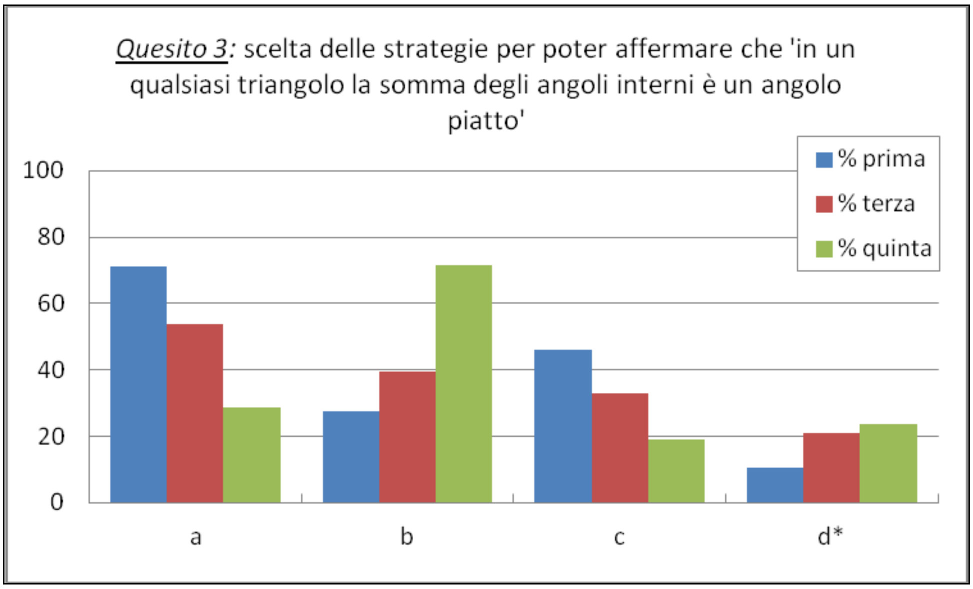
Passiamo ora in rassegna i quesiti relativi alla verifica del livello *argomentativo/dimostrativo*.

Iniziamo con l'analizzare le risposte al **quesito 3,** il quale chiedeva quale fosse la condizione bastante per sostenere che '*in un qualsiasi triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto*'.

Le quattro opzioni erano:

a) Fare bene un disegno e misurare accuratamente gli angoli con il goniometro
b) Ritagliare un triangolo e fare delle piegature in modo da verificarlo
c) Fare tanti disegni di diversi triangoli e tante misure
d) Altro: (specificare……………………………………)

Era data la possibilità di scegliere anche più opzioni.



Nella classe prima l'idea di disegnare accuratamente e misurare con il goniometro è quella che convince maggiormente gli studenti che motivano la scelta con affermazioni del tipo *fare un disegno e misurare gli angoli con il goniometro e sommarli, gli altri modi risulterebbero infiniti; fare bene il disegno serve per ragionare, fare un disegno accurato aiuta sempre; con i disegni riesco a ragionare meglio; è inutile fare così tanti disegni come suggerisce la c; essere molto precisi, nella geometria se si sbaglia di un solo millimetro si sbaglia tutto il resto; ritagliare non mi sembra il caso, non si deve perder tempo a fare tanti triangoli diversi quando è meglio fare bene il proprio triangolo.*

Questa serie di motivazioni, che sono portate dalla maggioranza dei ragazzi, fa emergere l'aspetto sperimentale della geometria insegnata nel Primo ciclo d'istruzione.

Fra i ragazzi che scelgono l'opzione del 'ritagliare gli angoli', le motivazioni sono: *è utile fare qualcosa che puoi toccare oltre che una semplice rappresentazione grafica, se prendiamo un triangolo qualsiasi, ne ritagliamo gli angoli e facciamo la somma (li incolliamo congiunti) esce sempre un angolo piatto.*

Motivazioni che si trovano indifferentemente rispetto alla scelta effettuata sono le seguenti:

- per sapere se la somma è un angolo piatto o usiamo le regole, oppure prendo il foglio, taglio tutti gli angoli e li metto vicini e verifico;
- dimostrarlo con un ragionamento perché così si è convinti che è vero, oppure misurare accuratamente;
- studiare la regola. B e C sono modi possibili ma abbastanza complicati, sapendo la regola e avendola capita, sicuramente tanta fatica non si fa;
- è di 180° perché è così ed è una cosa giusta.

Nelle prime due motivazioni, anche quando sembra essere stata individuata una forza superiore (quella della regola) sui diversi metodi 'empirici', i ragazzi tendono comunque a voler affiancare tale legge generale con la possibilità di verificarla attraverso la misura o il taglio degli angoli il teorema.

Molto convinte sembrano le ultime due affermazioni, ma rimangono a noi oscuri i significati delle espressioni 'aver capito una regola' e 'l'essere giusto' in matematica.

Chi sceglie l'opzione del disegno ripetuto lo motiva dicendo che *in ogni misura c'è una incertezza e quindi per trovare la soluzione bisogna fare il disegno varie volte facendo bene le misure e farle su diversi triangoli posso notare che le misure sono costanti,* quasi a voler significare che il fatto di riproporre il disegno varie volte non è per verificare l'universalità della proprietà, ma per ovviare agli errori di imprecisione dovuti alla rappresentazione grafica.

Alcune motivazioni legate ad una geometria atta solo alla risoluzione di problemi emergono dalle seguenti motivazioni:

- *fare la somma degli angoli con la calcolatrice*
- *se ho un angolo diviso in due parti disuguali e so che uno è di 13° devo sottrarre a 180° la misura dell'angolo (13°): 180°-13°*
- *scrivere i dati; avendo i dati risolvo il problema*.

I termini rappresentazione, dimostrazione, misurazione, risoluzione di un problema, verifica di alcune proprietà sembrano non essere distinguibili nelle motivazioni dei ragazzi di prima.

Le motivazioni portate dai ragazzi di terza, che propendono ancora per la maggior parte verso lo strumento della misurazione, sono, rispetto alla scelta di questa risposta, le seguenti: *misuro gli angoli del disegno e li sommo* (9 studenti su 76)*, il goniometro è lo strumento per misurare gli angoli e la c perché si può vedere se in tutti i triangoli la somma interna è un angolo piatto* (3 studenti su 76), *se si calcolano gli angoli di un triangolo disegnato perfettamente e si sommano dovrebbe uscire un angolo piatto. Se si ripete questa cosa su tanti triangoli è meglio* (3 studenti su 76).

Quindici ragazzi di terza su 76 sembrano aver interiorizzato il significato di *teorema* con motivazioni di questo tipo: *per ogni triangolo la somma degli angoli interni è 180°, enuncio un teorema e lo dimostro perché devo trovare una regola generale che comprenda tutti i casi e sia sempre vera.* Questa tipologia di risposta era completamente assente per i ragazzi della classe prima.

Riportiamo anche questa serie di giustificazioni che confermano la conoscenza dei ragazzi relativa alla somma degli angoli interni di un triangolo, ma confondono la *verifica* con la *dimostrazione*: *visto che qualsiasi triangolo ha la somma degli angoli interni pari a 180°, è sufficiente verificare quest'affermazione con un solo triangolo, bisogna vedere più casi anche se è provato che faccia 180°.*

Interessanti, ma non catalogabili in alcuna delle tipologie sopra esposte, risultano le tre motivazioni seguenti:

- *tutto ciò non è preciso. È utile, ma il ragionamento lo è di più.*
- *se facciamo più ipotesi su triangoli diversi con misure diverse e otteniamo ciò che dovevamo dimostrare, le probabilità che sia giusto aumentano*
- *è più facile misurare gli angoli con le formule di topografia che conosciamo.*

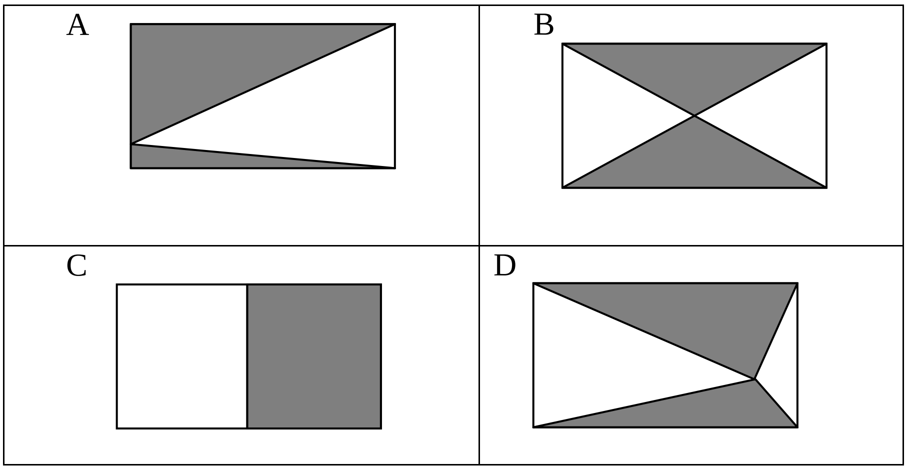
Nella classe quinta il 70% dei ragazzi sceglie l'opzione *b) Ritagliare un triangolo e fare delle piegature in modo da verificarlo*. La loro insegnante, intervistata, dichiara che tale attività era stata da lei proposta nella classe seconda, poi seguita dalla dimostrazione rigorosa del teorema della somma degli angoli interni di un triangolo. Tale opzione scelta ora dai ragazzi mette in evidenza come l'aspetto intuitivo-sperimentale abbia lasciato un segno 'forte' negli studenti, che non hanno saputo sostituire tale approccio con quello formale-rigoroso.

Le motivazioni rispetto alle classi precedenti risultano nettamente diverse a livello di consapevolezza nel dominare la struttura logico-razionale e deduttiva della geometria, anche se sono pochi gli studenti che le esprimono chiaramente. Le risposte sono giustificate come segue:

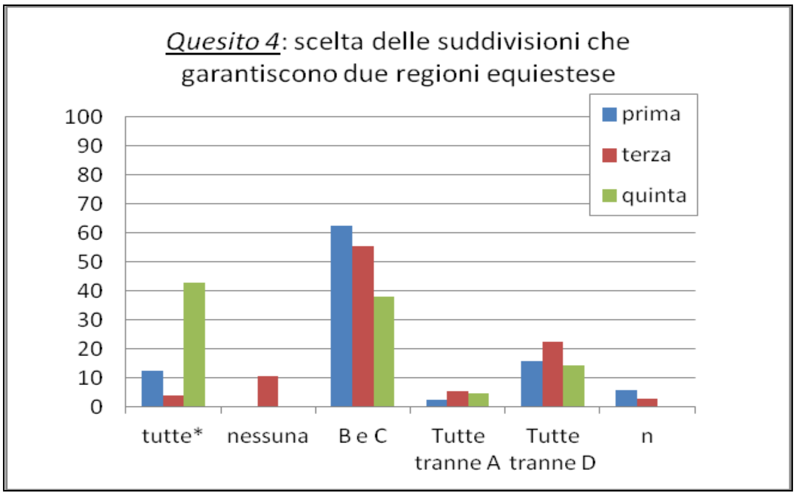
- *Dimostrare*
- *una dimostrazione geometrica attraverso teorie. Per poter affermare una cosa non ci si può basare su di un solo esempio, bisogna fare tante prove, disegni e misure. Il modo più corretto è eseguire una dimostrazione attraverso teorie geometriche su angoli e lati e loro proprietà*
- *si verifica l'impossibilità di costruire triangoli con somma di angoli interni diversa da 180*
- *non puoi esaminare ogni triangolo esistente con le proprie misure.*

Qualche studente sembra quasi ricordare che esistono dei teoremi, ma forse a causa della distanza temporale rispetto al momento scolastico in cui si è affrontato tale argomento (solitamente la classe prima), non risulta loro immediato ricorrere alla enunciazione e alla dimostrazione del relativo teorema coinvolto. È strano che, non avendo mai abbandonato l'approccio sintetico della geometria, non emerga come motivazione spontanea e ovvia il citare il teorema relativo. È stupefacente che l'idea di enunciare le proprietà sottoforma di teorema e poi dimostrarlo non emerga chiaramente, almeno fra i ragazzi di quinta.

Il **quesito 4** ha chiesto di scegliere, fra alcune coppie di regioni in cui si è divisa una figura assegnata, quelle equiestese. Tutte le regioni presentate sono equiestese. Il quesito non è banale e si nota in tutte e tre le classi la difficoltà enorme nel riconoscere la equiestensione delle quattro coppie di regioni.



Più del 10% degli studenti di ciascuna classe non riesce a vedere, nell'irregolarità dell'ultima figura, l'equiestensione della parte bianca e di quella nera.
Fra coloro che scelgono la risposta B) e la C) tanti indicano l'ovvietà della B) e alcuni[165] richiamano la proprietà del rettangolo che è diviso dalle sue diagonali in parti equiestese.
La maggior parte degli studenti che sceglie B) e C) motiva dicendo che le altre due suddivisioni non generano regioni equiestese.



Gli studenti che dichiarano l'equiestensione delle regioni della figura A), oltre che della B) e C) e non della figura D), la motivano immaginando uno spostamento del triangolino nero costruito sulla base del rettangolo A), da 'trasferire' sopra al rettangolo in modo tale da costituire insieme all'altro triangolone nero, un triangolo nero congruente a quello bianco già presente nel rettangolo iniziale.

[165] 9 su 56 in prima, 5 su 42 in terza, 3 su 8 in quinta

Nella classe quinta il 40% dei ragazzi sceglie la risposta corretta, ma ancora molti si lasciano influenzare dal disegno, scartando la suddivisione D) per il 14% e scartando contemporaneamente A) e D) per il 38%.
Immaginamo che se il quesito fosse stato: *dimostra che in ciascuna delle suddivisioni seguenti si ottengono regioni equiestese*, probabilmente i risultati sarebbero stati migliori. Nel momento in cui non si chiede esplicitamente una dimostrazione, lo studente si affida maggiormanete all'intuizione, componente personale forse più facilmente e spontaneamente utilizzabile, senza però cercare strategie più raffinate. Affrontare una vera argomentazione comporta alcuni specifici e raffinati requisiti base tra cui: chiarezza espositiva, chiarezza dei passaggi che servono per argomentare, capacità di ordinare i passaggi e le proprie affermazioni, utilizzo di affermazioni riconosciute come valide almeno dall'interlocutore al quale ci si rivolge. Credo che lo studente medio decida di utilizzare tale ricercatezza e di impiegare tanta fatica, solo se richiesta dall'insegnante. Pochi studenti, soprattutto nei primi anni della Scuola Secondaria di secondo grado, apprezzano la chiarezza e l'ordine presenti nel modello dimostrativo geometrico.
In questo quesito 4 viene inoltre chiesto di giustificare la risposta, giustificazione che potrebbe essere data attraverso una veloce dimostrazione valida per tutte e quattro le situazioni presentate nel quesito.
Passiamo in rassegna le motivazioni che accompagnano le risposte corrette nelle tre classi.
Un solo studente della classe prima, scegliendo l'opzione corretta, la motiva nel seguente modo: *se si spostano leggermente le figure e si compongono in modo diverso si vede che sono divise equamente*. Gli altri studenti di prima che scelgono l'opzione corretta, non portano alcuna motivazione o dicono che *si vede dal disegno*, oppure che non sono del tutto convinti della scelta effettuata.
Tre soli fra i ragazzi di terza che scelgono l'opzione A)*Tutte*, riportano le seguenti motivazioni riconducibili ad una sorta di argomentazione:

- *se si tagliano le figure e si riassemblano si formano figure dello stessa area*
- *calcolando l'area grigia e quella bianca sono uguali*
- *scomponendo ulteriormente la parte bianca e quella grigia ottengo figure equivalenti*

Per convalidare quest'ultima si vede che nel disegno il ragazzo ha costruito le distanze fra il punto P e i lati dei rettangoli, ottenendo triangoli congruenti.

Per i ragazzi di quinta le risposte corrette si ottengono per circa il 40% con motivazioni di questo tipo:

- *A,B,D sono formate da triangoli che insieme sono costituiti dalla base del rettangolo per l'altezza divisa per 2, quindi l'area del rettangolo divisa per due. Supponendo che la C sia esattamente divisa a metà, anche quella soddisfa la condizione*
- *dimostrazione con formula area del triangolo*
- *scomponendo il rettangolo iniziale in triangoli più piccoli, ogni rettangolo viene diviso in 2 triangoli, uno nero e uno bianco, tra loro congruenti*

Più di un ragazzo riporta l'ultima motivazione. Interessante notare come la prima motivazione ponga dei dubbi anche sulla suddivisione a metà del disegno C), rispetto alla quale viene chiarito essere una suddivisione in poligoni equiestesi solo nel caso in cui si congiungano i punti medi dei lati del rettangolo. In conclusione si vede che quasi la metà dei ragazzi di quinta indica la risposta esatta e la giustifica con argomentazioni molto vicine a quella di una corretta dimostrazione. Essi non arrivano tuttavia a riconoscere esplicitamente nelle loro argomentazioni le caratteristiche proprie di una vera dimostrazione e rimangono quindi ad un livello intermedio fra una procedura di carattere intuitivo e una procedura logico-deduttiva.

I **quesiti 5 e 6** sono stati ispirati da un quesito presente nel Progetto Pilota 2 svolto dall'INValSI nell'anno scolastico 2002-2003, che chiedeva ai ragazzi di prima della Scuola Secondaria di primo grado: *Quale delle seguenti affermazioni è vera?*

Opzioni	*Percentuali di risposta corretta nel quesito INValSI*
☐ *Un triangolo ha sempre tre altezze*	*34,6%*
☐ *Un triangolo ha solo un'altezza*	*42,5%*
☐ *Il numero delle altezze dipende dal tipo di triangolo*	*18%*
☐ *Un triangolo non sempre ha l'altezza*	*2,8%*

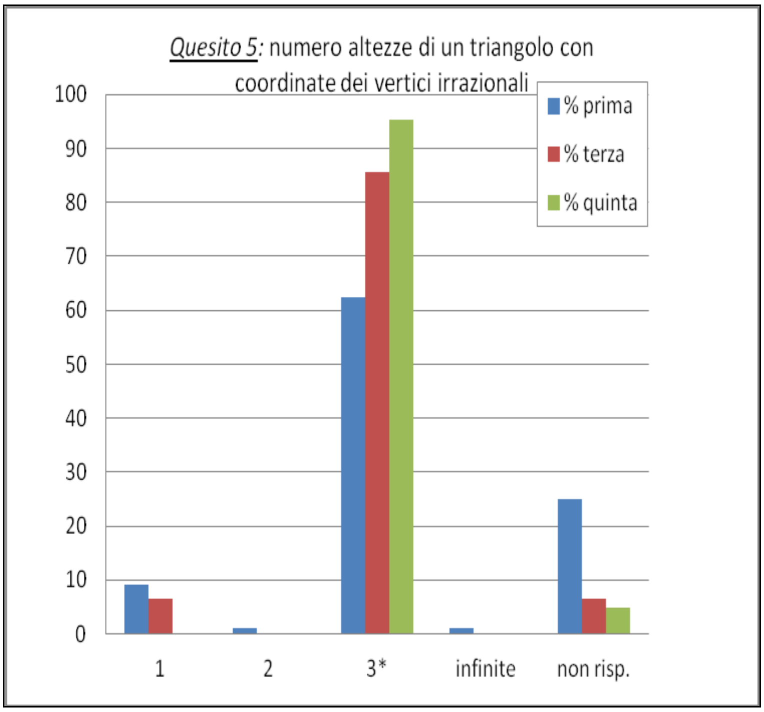
A fronte dei deludenti risultati a suo tempo ottenuti e qui sopra ricordati, si è voluto indagare a che età scolare la convinzione teorica che un triangolo abbia sempre tre altezze entri a far parte delle conoscenze dei ragazzi, slegandosi dall'aspetto intuitivo-grafico che sembra convincere i ragazzi, fino dalla classe prima della Scuola Secondaria di primo grado.

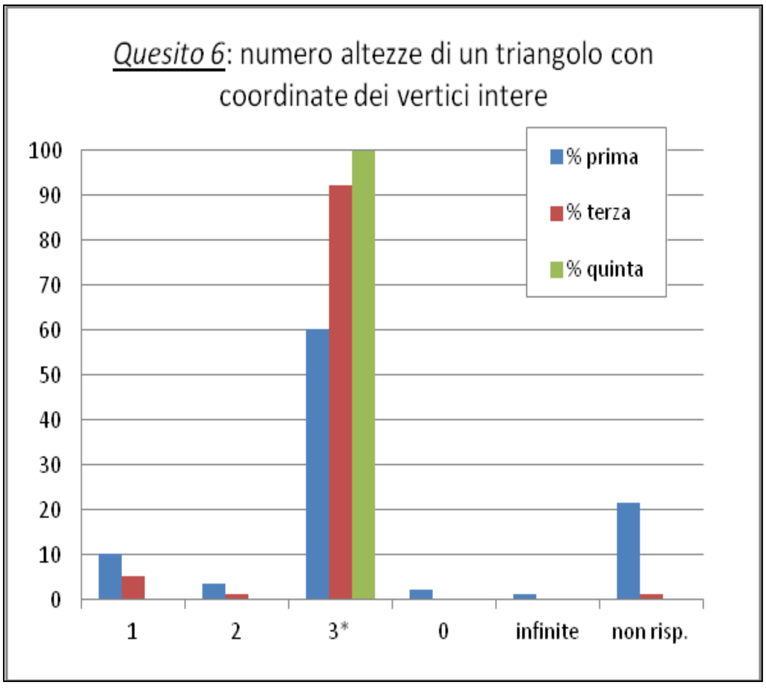
Si sono quindi creati due quesiti tra loro differenti solo per il tipo di coordinate dei vertici del triangolo:

quesito 5) Quante altezze ha il triangolo ABC essendo $A\left(\frac{1}{3},\pi\right)$, $B\left(-\frac{2}{35},0\right)$ *e* $C\left(2,-\frac{\pi}{2}\right)$*?*

quesito 6) Quante altezze ha il triangolo ABC essendo $A(1,4)$, $B(-2,0)$ *e* $C(2,-5)$*?*

Riportiamo nei due grafici seguenti le risposte:

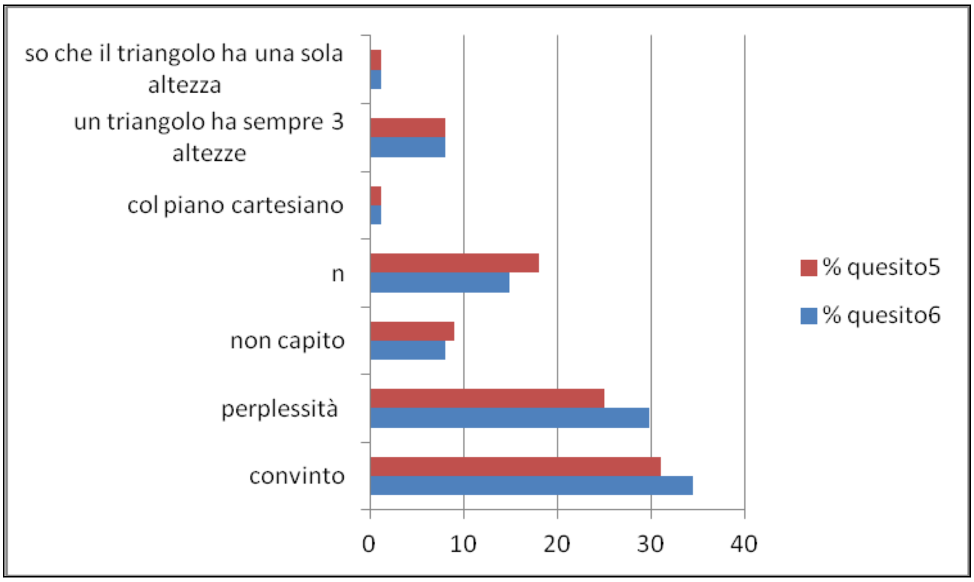




Nella classe prima solo il 60% sceglie la risposta corretta. Nella stessa classe si nota la scelta non solo fra le opzioni 1 e 3, ma anche l'introduzione della possibilità per un triangolo di avere 2 o infinite altezze. Ancora in prima gli studenti che si astengono dal rispondere sono attorno al 20% in entrambi i quesiti. Nella classe quinta vi è la convinzione da parte di tutti i ragazzi che un triangolo abbia 3 altezze, mentre nella classe terza ancora qualcuno opta per una sola altezza.

Rispetto al quesito INValSI sopra riportato sembra aver giocato un ruolo fondamentale la Scuola Secondaria di primo grado, ma la vera conquista si ha al termine della Secondaria di secondo grado, non prima di questo ordine di studi.

I ragazzi di prima, a fronte della richiesta *sei convinto della risposta data nei due quesiti?*, rispondono con le seguenti affermazioni:



Più del 40% degli studenti è convinto della propria scelta e tra essi circa l'8% del totale motiva dicendo che un triangolo ha sempre tre altezze. I rimanenti ragazzi o sono perplessi, o non hanno capito il quesito, oppure non rispondono a questa ulteriore domanda.

In terza i ragazzi convinti salgono al 50%, mentre in quinta al 90%. Un ragazzo di quinta esprime la sua motivazione affermando che, avendo verificato che i due triangoli non sono degeneri, si può affermare che hanno entrambi tre altezze.

Con il **quesito 8** si è inteso sondare la capacità dei ragazzi di visualizzare situazioni geometriche semplici quali la relazione di parallelismo, di incidenza e di perpendicolarità fra rette nel piano, chiedendo poi di motivare il perché della scelta effettuata, spiegazione che non poteva essere la semplice motivazione grafica.

8) Sono date in un piano tre rette distinte r, s, t. Quale delle seguenti proposizioni è VERA, qualunque siano le rette assegnate con le caratteristiche specificate? [Scegli una sola risposta]

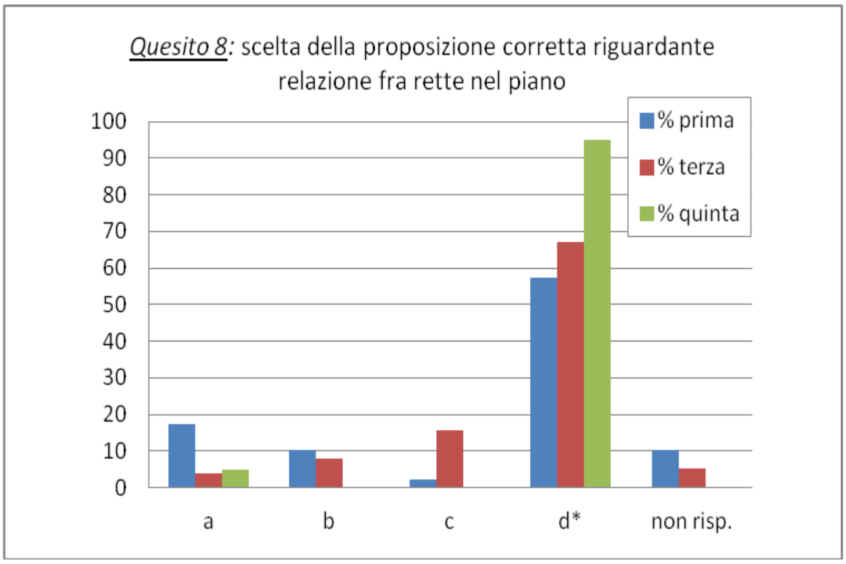
a) Se r è perpendicolare a s e s è perpendicolare a t, allora r è perpendicolare a t.

b) Se r interseca sia s che t, allora le tre rette si incontrano in un unico punto.

c) Se r interseca s e s interseca t, allora r interseca t.

d) Se r è parallela a s, e s interseca t, allora anche r interseca t.

Queste le risposte:



Dalle risposte e dalle motivazioni date sembra che alcuni studenti delle classi prima e terza confondano i termini parallelismo e perpendicolarità. Inoltre la maggior parte di essi motiva la scelta sostenendo che ha rappresentato la situazione d) e l'ha ritenuta la più plausibile. Ricorrono affermazioni di questo tipo:

- *se r e s sono parallele e t interseca s, anche se l'angolo che formano è minimo, prima o poi t intersecherà anche r*
- *due rette parallele sono infinite e se s è intersecata da t, prima o poi t intersecherà r*
- *se s interseca t allora visto che r è parallela a s interseca anche t*

Di raffinatezza diversa sono le motivazioni dei ragazzi di quinta:

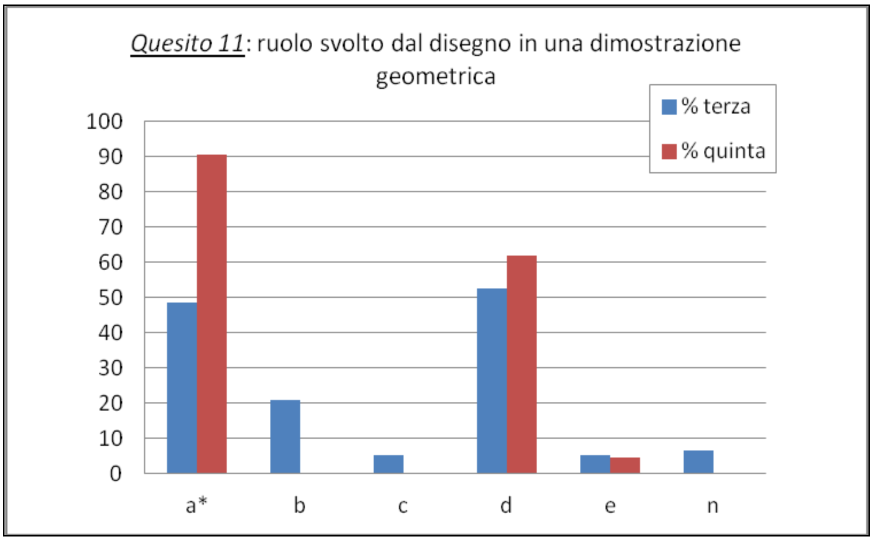
- *le altre propongono erronee ipotesi che possono essere confutate con semplici disegni*
- *s ha lo stesso coefficiente angolare di r mentre t ha coefficiente angolare diverso da s. s intersecherà prima o poi anche t.*

- *si dimostra con un disegno o un ragionamento oppure mostrando un controesempio per le altre*
- *è un teorema.*

È qui presente la consapevolezza dell'ambiente nel quale si chiede di esprimere consenso o dissenso rispetto ad una affermazione. Non è sufficiente il disegno per sostenere una propria affermazione; è invece necessaria una maggior cura nel motivare un'opzione all'interno di un quadro teorico rigoroso. Da rilevare il connettivo 'o' presente nella penultima affermazione, che pone sullo stesso livello il disegno, il ragionamento e il mostrare il controesempio per le altre affermazioni. Tutte queste 'attività' sono ritenute dallo studente degli strumenti di dimostrazione, non riconoscendo in modo consapevole quale fra esse ne sia veramente la conferma dal punto di vista teorico.

Il **quesito 11** era presente solo nei questionari delle classi terza e quinta perché nella classe prima a metà anno scolastico spesso non è stato affrontato il discorso relativo alla dimostrazione geometrica, anzi, talvolta la geometria viene proprio affrontata nel secondo quadrimestre.

11) *Quando devi svolgere una dimostrazione di un teorema di geometria solitamente fai il disegno della situazione presentata. A cosa serve, a tuo parere, il disegno? [Scegli al massimo due risposte]*
   a) *Aiuta nella scelta dei passi da compiere*
   b) *Dice già che tutto ciò che è espresso nel teorema è vero*
   c) *Non serve a niente*
   d) *Mi verifica che ciò che si affermerà nella dimostrazione è corretto*
   e) *Altro*



Chiaro è il ruolo del disegno per i ragazzi della classe quinta, che vedono in esso un *aiuto nella scelta dei passi da compiere in una dimostrazione*. Il ruolo originario e canonico del disegno dovrebbe essere quello di costituire una traccia sintetica del ragionamento da seguire nei passi dimostrativi. È una sorta di sostegno grafico alla formazione e costruzione dei concetti figurali[166].

Va però rilevato che fra questi studenti il 60%, oltre a questa funzione principale, ne affianca una secondaria non propriamente e correttamente attribuibile al disegno: *verifica che ciò che si affermerà nella dimostrazione è corretto.*

È importante sottolineare che questa scelta traduce e teorizza la loro esperienza dimostrativa, realizzata interamente ed escluisivamente nell'ambito della geometria euclidea durante i cinque anni di Scuola Secondaria di secondo grado; essa è per la maggior parte sostenuta dalla rappresentazione su foglio, che implicitamente racchiude alcuni assiomi euclidei e quindi contribuisce ad arricchire il disegno di tutta una serie di informazioni, che nella struttura assiomatica e nell'attività dimostrativa andrebbero motivate e ricercate nelle ipotesi sotto le quali si sta operando.

> *La figura è l'oggetto matematico [che appartiene al] modello euclideo preso come dominio di realtà, mentre il disegno è una materializzazione della figura sulla carta, sulla sabbia o sullo schermo del computer[…] Il supporto di materializzazione non è neutro, e condiziona il dominio di interpretazione.*[167]

I ragazzi, più o meno consapevolmente, si rendono conto dell'aspetto espresso nell'opzione d). Nel disegno e nel sostegno grafico sono implicite molte proprietà che servono per la dimostrazione. Si può anche riconoscere una certa attendibilità all'idea che il disegno stesso costituisca una dimostrazione. Non è un'asserzione corretta ma è un pezzo di dimostrazione e di 'verità'.

Questo conflitto disegno/dimostrazione è molto sentito nell'insegnamento della geometria euclidea piana. Solo una profonda riflessione può riuscire a staccare e a distinguere i piani coinvolti e cioè:

- immagine grafica
- immagine mentale

---

[166] Cfr. paragrafo 3.3
[167] Laborde C., 1995, p.276

- parte concettuale.

Per passare dall'immagine grafica a quella mentale è necessaria una sorta di sublimazione; per poter realizzare invece l'altro passaggio è necessario calarsi nella struttura assiomatica. L'aver diviso i tre piani deve poi confluire nella creazione del concetto figurale, il quale poggia sul concreto dell'immagine grafica come occasione per sviluppare gli altri tre piani.

I ragazzi di terza non sono completamente consapevoli del ruolo del disegno, solo l'opzione d) raggiunge il 50%, che peraltro non è quella più corretta, ma che potrebbe essere motivata da quanto si è detto sopra. Una possibile interpretazione di questo risultato potrebbe essere il non aver compreso il significato delle risposte proposte.

4.3 OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Le classi in cui è stato somministrato il *questionario studenti* sono quelle di alcuni docenti fra gli otto che hanno risposto al *questionario docenti* analizzato in questo stesso capitolo. Sono state scelte quelle classi in cui viene presentato l'approccio sintetico della geometria.

La poca chiarezza d'intenti e la mancanza di riflessioni degli insegnanti sul valore formativo della disciplina geometrica, rilevata nel paragrafo 3.1, possono aver portato gli studenti a non aver assimilato e fatti propri gli aspetti caratterizzanti la disciplina, in modo da essere poi in grado di tradurli nelle situazioni 'non-standard' proposte nel Questionario Studenti.

Non tenteremo di stabilire un legame fra i risultati del *questionario docenti* e quelli ottenuti dai loro studenti, poiché l'esiguità dei dati raccolti e l'anonimato del *questionario docenti* non ci consente una tale operazione statistica.

Analizzando le risposte degli studenti si osserva prima di tutto che, come era facile prevedere, le conoscenze geometriche, l'intuizione e il rigore posseduti da un alunno subiscono un notevole cambiamento all'interno del percorso dei cinque anni di Scuola Secondaria di secondo grado.

Interessante è notare che fra i traguardi raggiungi a metà della classe terza e quelli raggiunti in quinta ci sono forti margini di miglioramento. Ritenere che la geometria sintetica sia da trattare nel biennio[168] per poi essere abbandonata negli ultimi tre anni è un

[168] Questa è l'attuale pratica per l'insegnamento della geometria nella Scuola Secondaria di secondo grado.

forte errore. Gli studenti del biennio non hanno ancora la sufficiente maturità per comprendere e fare propria la capacità argomentativa geometrica nella sua essenza e completezza. Va notato inoltre che alcuni quesiti richiedevano l'attivazione di riflessioni sulla struttura assiomatica della geometria, riflessioni che sono state raggiunte da pochissimi studenti e nemmeno in modo del tutto esplicito. La maturità richiesta è quella che scaturisce dal raggiungimento del livello di apprendimento massimo che Van Hiele descrive nel seguente modo:

> *ciò che caratterizza la gerarchia dei livelli di apprendimento è il fatto che la tecnica delle operazioni di un certo livello diventa oggetto di riflessione ad un livello superiore; relazione che in logica viene espressa con i termini di 'teoria e metateoria'.*[169]

Un'analisi di questa puntualizzazione è dettagliata nel presente lavoro al Capitolo 2.

Negli studenti della classe terza l'intuizione e il rigore sono ancora ben lontani dall'avere una loro identità e risulta difficile capire il momento nel quale l'uno o l'altra di queste procedure deve intervenire. È necessario da parte dell'insegnante tenere sotto osservazione e stimolate entrambe le componenti anche nel secondo biennio e nella classe quinta; questo periodo scolastico sembra, secondo i dati raccolti dalla nostra indagine, essere molto importante, perché è durante questo tempo che gli studenti imparano a dare il giusto ruolo ad entrambe le componenti in geometria.

Le differenze in merito alla correttezza nelle risposte date ai quesiti si hanno sì in ambito nozionistico, ma lo scarto più significativo si nota nella capacità di svolgere un'argomentazione, capacità che appartiene maggiormente ai ragazzi di quinta. Per gli studenti di prima e terza tale abilità risulta sconosciuta o non ritenuta fondamentale quando si devono presentare motivazioni nelle risposte.

Una domanda che sorge dall'analisi dei risultati del questionario studenti è quella relativa all'età scolare, in cui una convinzione teorica ottenuta per mezzo di una dimostrazione entra a far parte in modo stabile delle conoscenze dei ragazzi, slegandosi dall'aspetto intuitivo-grafico (quesiti 5 e 6).

Nello stesso ordine scolastico sembrano obiettivi poco perseguibili o, se perseguiti, dotati di scarsa possibilità di successo, i seguenti:

[169] Van Hiele, citato in *Ripensando l'educazione matematica* di Freudenthal H., p.133

- riconoscere la geometria come un luogo privilegiato per lo sviluppo di creatività e fantasia (quesito 1);
- riuscire ad applicare un approccio rigoroso in situazioni in cui apparentemente non è richiesto tale componente (quesito 4);
- riuscire a tradurre le caratterizzazioni elencate in una definizione assegnata di un oggetto matematico astratto, in un criterio di scelta propria di oggetti soddisfacenti o meno tale definizione (quesiti 2, 10, 12). Tale competenza sembra essere raggiungibile forse dai ragazzi di quinta, e nemmeno da tutti;
- riuscire ad astrarre da un'immagine mentale di un oggetto matematico la sua definizione in un linguaggio proprio della geometria, dopo aver comunque incontrato la definizione almeno tre volte nel corso della propria carriera scolastica (si veda la definizione di trapezio fornita nel quesito 2).

I risultati deludenti ottenuti in merito ai temi ora esposti ci hanno indotto a pensare e proporre all'interno del Capitolo 5 alcune strategie didattiche volte a stimolare l'apprendimento degli aspetti della geometria che più concorrono all'appropriazione del suo valore formativo.

CAPITOLO 5

STRATEGIE PER LA CREAZIONE DI UN PERCORSO DIDATTICO[170]

Essendo molto esteso il programma di matematica del biennio, molti docenti concentrano la loro azione didattica sugli argomenti algebrici, relegando alla geometria poche ore annuali, nelle quali sembrano privilegiare la presentazione di dimostrazioni di teoremi importanti, che gli studenti devono poi ripetere in maniera mnemonica.

Altre prassi didattiche in uso, a discapito di una presentazione della geometria che ne permetta un'autentica appropriazione, sono:

- la scelta di tralasciare nella didattica gran parte della geometria sintetica e di presentare ai ragazzi solo quella analitica: ne emerge un'immagine parziale e quindi falsata della disciplina. È risaputo il modo in cui operano molti insegnanti e la maggioranza degli alunni posti di fronte ad un problema geometrico: si preferisce inquadrarlo nel piano cartesiano per sfruttare procedimenti analitici (e quindi riconducibili a calcoli e formule svolti in modo automatico) piuttosto che chiarire concettualmente i dati assegnati o le questioni proposte.
- l'utilizzo sempre più diffuso e sistematico di software didattici; viene così dichiarata in modo tacito la sfiducia sia nelle capacità intuitive degli studenti, che quindi si ritiene vadano aiutati con il computer, sia nelle loro capacità logiche, perché spesso alla lezione/esercitazione in laboratorio non segue la relativa razionalizzazione. Ovviamente l'uso di software didattici geometrici può essere anche uno strumento positivo se non diventa la totalità dell'attività geometrica proposta.

Nel presente capitolo intendiamo esporre alcune osservazioni per la creazione di percorsi di apprendimento relativi alla geometria. Sono idee volte a stimolare la riflessione di ciascun docente per la costruzione di esperienze didattiche significative, che tengano viva tanto la dimensione intuitiva quanto quella rigorosa presente nella trattazione della

[170] Nel titolo si parla di un unico percorso didattico, ma questo potrebbe concretizzarsi nella realizzazione di diversi mini-percorsi didattici.

geometria e che approfondiscono quella autentica appropriazione della disciplina di cui si è parlato nei Capitoli 2 e 3.
Non si forniranno ricette o procedimenti standard da sperimentare in classe (questi infatti andrebbero contro al quadro teorico che si è dipinto) ma si tenterà di riflettere in quali punti dell'attività didattica è opportuno essere particolarmente attenti e sensibili, in modo da favorire un'educazione alla geometria corretta e fruttuosa, rispetto alle componenti irrinunciabili di intuizione e rigore analizzate nel Capitolo 3.

A questo scopo presenteremo e discuteremo alcuni argomenti di geometria che vengono trattati non solo nei corsi liceali, ma che sono presenti anche nei corsi degli Istituti Tecnici[171]. All'interno delle attuali Indicazioni Nazionali la geometria e il suo irrinunciabile valore educativo è infatti ritenuto fondamentale per qualsiasi studente frequentante un percorso di studi liceale o tecnico.

Il primo ostacolo[172] incontrato dagli studenti, reduci da otto anni di impostazione descrittivo-sperimentale della geometria, è quello di non comprendere il motivo del cambiamento di rotta proposto dal docente. Tutto ciò che prima sembrava evidente, tutte le affermazioni nelle quali avevano creduto, sembrano vacillare. 'Perché l'insegnante propone un nuovo metodo per affrontare la geometria?' si chiede il discente.
Il docente si trova di fronte a classi dubbiose, ma rispondere alla domanda immediatamente senza che gli studenti conoscano il nuovo metodo risulta difficile. Qualche accenno a situazioni non gestibili con il 'vecchio metodo' possono sì creare stupore, ma non in tutti fanno nascere il desiderio di affidarsi ad una modalità nuova di affrontare la geometria.

---

[171]Riportiamo a titolo esemplificativo uno stralcio delle Indicazioni Nazionali per gli Istituti tecnici (uguali sia per il settore economico che per quello agrario): '*Al termine del percorso quinquennale di istruzione tecnica del settore economico lo studente deve essere in grado di: […] padroneggiare il linguaggio formale e i procedimenti dimostrativi della matematica.'* Fra le conoscenze di geometria, all'interno dello stesso documento compaiono '*Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione. Nozioni fondamentali di geometria del piano e dello spazio. Le principali figure del piano e dello spazio. Il piano euclideo: relazioni tra rette, congruenza di figure, poligoni e loro proprietà. Circonferenza e cerchio. Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora. Le principali trasformazioni geometriche e loro invarianti (isometrie e similitudini anche in riferimento al teorema di Talete e alle sue conseguenze). Loro utilizzazione nella dimostrazione di proprietà geometriche.'*
[172] Con il termine *ostacolo* si comprendono in particolare quelli indicati con i termini *ostacoli di origine didattica* (dipendenti dal sistema educativo adottato e dalle scelte effettuate dall'insegnante) e *ostacoli di natura epistemologica* (dipendenti dalla natura della disciplina) indicati nella classificazione di Brousseau (Brousseau G., 1983). Si tralasciano in questa sede gli ostacoli di tipo *ontogenetico*.

L'alunno deve compiere piccoli passi per capire appieno il nuovo metodo. Solo conoscendolo sarà possibile farne comprendere per intero la portata, la potenza, la bellezza e il significato.
Allo studente viene chiesto di 'avere fede' per un breve periodo di tempo; gli viene chiesto di affidarsi, di lasciarsi condurre per mano, per un breve tragitto di strada, dall'insegnante, dall'adulto che lo porterà a contemplare un panorama fantastico che poi lui stesso potrà scoprire autonomamente pian piano.
Questi piccoli passi sono molto delicati a causa della profondità di pensiero che viene richiesta al discente; gestire tali fasi in modo superficiale lo può fuorviare nella comprensione e nella capacità di muoversi in autonomia nella nuova costruzione concettuale.
Molte e non immediate sono le scelte che devono essere condotte a livello didattico per raggiungere l'equilibrio fra diverse componenti, al fine di favorire la comprensione della nuova impostazione; solo con il pieno e corretto coinvolgimento di tutte queste componenti la geometria sintetica può essere conosciuta nella sua vera natura ed essere così apprezzata.

Una buona partenza può essere quella di presentare ai ragazzi quali sono gli obiettivi che vogliamo raggiungere e poi costruire a ritroso il percorso per raggiungerli. Ad esempio li si informa, o si fa loro immaginare, quali siano le convinzioni e i contenuti dai quali la geometria non può sottrarsi: parallelismo, equivalenza, similitudine, proprietà di alcune figure (triangoli, quadrilateri, circonferenza,…), Teoremi di Euclide e Pitagora, passaggio dalla geometria del piano alla geometria dello spazio, …
Crediamo che dare la possibilità allo studente di riguardare, rileggere, riordinare ed interpretare le conoscenze acquisite fino a quel momento per inserirle nella 'tradizione geometrica' possa essere interessante; l'insegnante avrà così stabilito con la classe quei 'paletti fissi' del futuro modo di affrontare la geometria che si dovranno inserire in un unico quadro, il quadro teorico euclideo.
Personalmente, sperimentando in classe la rilettura e la scelta dei passi obbligati da compiere nel parlare di geometria, mi sono resa conto del maggior coinvolgimento degli studenti i quali, avendo chiare le diverse tappe, si chiedono, e chiedono a me docente, 'quanto manca all'arrivo?'; tipica domanda questa di ogni bambino in viaggio, motivata sia dalla pena e dalla fatica del tragitto, sia dal desiderio di scorgere il prima possibile la meta.

Un altro vantaggio del nuovo modo di operare è quello di non generare false aspettative negli studenti; soprattutto al biennio si incontrano, per la maggior parte, teoremi già visti nel percorso scolastico precedente. Dichiarare fin dall'inizio che si giungerà a stabilire la 'verità' delle disuguaglianze esistenti fra i lati e gli angoli del triangolo, oppure il teorema dell'angolo esterno, il Teorema di Pitagora, e così via, pone gli allievi in un mondo noto e rassicurante, nel quale è possibile collegare tutti gli elementi fino a quel momento un po' sparpagliati.

5.1 APPROCCIO ALLA TRATTAZIONE SINTETICA DELLA GEOMETRIA

Un primo passo non facile da compiere è quello dell'introduzione e della presentazione dell'approccio assiomatico – sintetico. Questo non può essere lasciato alla sola lettura del libro di testo, il quale, nella maggior parte dei casi, procede con la noiosa elencazione di termini primitivi, assiomi, definizioni e primi teoremi, relegando ad un brevissimo capitolo introduttivo o ad una scheda in appendice la spiegazione di cosa si intenda per costruzione assiomatica e metodo sintetico.

Provare a *motivare* i ragazzi e allo stesso tempo far loro *sperimentare* la potenza e le peculiarità del nuovo modo di costruire la geometria riteniamo che possa essere la miscela vincente.

La *motivazione* deve essere presente anzitutto nella mente del docente che propone il percorso, se si vuole avere la speranza di riuscire a sradicare l'iniziale diffidenza degli studenti, per catturarne poi l'interesse degli stessi verso il nuovo metodo di *costruire la geometria* e per appassionarli all'autonoma gestione ed evoluzione delle conoscenze da acquisire. Il termine utilizzato '*costruire* la geometria' è proprio lo snodo fondamentale della questione motivazionale. Non si tratterà più di *fare geometria*[173], come veniva proposto nella Scuola Secondaria di primo grado, ma di *costruirla*. Per costruire si rende quindi necessario sapere da dove partire, quali materiali grezzi utilizzare, quali gli strumenti consentiti, come accostare i diversi componenti e, non ultimo per importanza, perché e a che fine iniziare la costruzione.

Una prima esigenza sarà quella di operare una scelta degli argomenti da trattare e dove situarli. La proposta del docente potrebbe inquadrare l'ambito ristretto della geometria piana, come scelta di campo iniziale, rispetto alla geometria dello spazio (pur essendo

[173] Con il termine *fare geometria* intendiamo riferirci a problemi di misurazione di aree, segmenti, angoli e ad azioni di manipolazione 'fisico-sperimentale' delle figure geometriche

questa più compatibile con il mondo reale) perché questa è più difficilmente rappresentabile, gestibile e più complessa da visualizzare nella mente del ragazzo al fine di studiare il suo funzionamento.

Calarsi immediatamente nell'ambito geometrico astratto potrebbe indurre gli studenti a non capire il perché di tale operazione, dal momento che loro possiedono già l'idea di cosa sia un segmento, un angolo,… Potrebbe essere interessante invece far loro sperimentare cosa accade in un contesto diverso da quello prettamente disciplinare. La ricerca di termini su di un dizionario monolingue inglese (per esempio) o su di una enciclopedia medica potrebbe essere un valido esercizio per cominciare a dare risposta a questa difficile scelta dei termini dai quali partire e perché sia necessario essere accorti in tale operazione. Posti davanti a ciò che accade dinnanzi alla conoscenza e alla costruzione di un nuovo sapere, come potrebbe e vorrebbe essere anche la costruzione della geometria, gli studenti possono comprendere l'esigenza irrinunciabile del dare definizioni chiare e univoche degli oggetti che poi si utilizzeranno, ferma restando la considerazione dell'impossibilità di definire tutto. Sarà necessario, dunque, partire da alcuni termini primitivi, per i quali si supporrà l'evidenza è l'univocità di interpretazione.

L'individuazione di quali enti trattare come termini primitivi può essere determinata da una proposta fatta dagli studenti e discussa in classe. Una sperimentazione ulteriore da proporre agli alunni è la scelta del significato da attribuire ai termini usati, tappa questa molto importante perché li rende protagonisti attivi coinvolti nell'*aspetto definitorio*.

La definizione dei termini e l'individuazione degli enti primitivi può essere un lavoro svolto a piccoli gruppi dagli studenti, i quali, confrontandosi poi fra loro, con la proposta del libro e con le riflessioni e i suggerimenti del docente, giungono ad un impianto il più coerente, corretto e chiaro possibile. Non è ovvio che tutti appoggino la stessa scelta; per motivi di univocità di percorso didattico si opterà per una proposta piuttosto che un'altra, ben evidenziando, dove possibile nel prosieguo del percorso, le differenti conseguenze a cui una scelta anziché l'altra avrebbe portato.

Una volta costruita la descrizione degli oggetti, è bene procedere ad esaminare in quale modo essi possano essere in relazione fra loro e come ne possano generare altri. Proprio a questo punto è necessario decidere gli assiomi propri di questa nuova teoria, arrivando quindi a riconoscere l'esigenza di una fondazione assiomatica. Per far comprendere cosa sia una costruzione assiomatica proponiamo due attività che potrebbero risultare interessanti:

- Far descrivere in modo schematico ai ragazzi un gioco da loro conosciuto (di società, di carte o di squadra), che sia lo stesso per tutta la classe (per esempio briscola, scopa, scacchi, dama);
- Far inventare un nuovo gioco.

Al termine di questo lavoro si chiede ai ragazzi di distinguere le regole necessarie da quelle derivabili dalle altre. Da qui potrà nascere una riflessione sul diverso ruolo giocato dalle une e dalle altre e il corrispettivo comportamento di assiomi e teoremi nella struttura assiomatica.

Per fare un esempio[174]: in un sistema assiomatico come quello degli scacchi descritto dal seguente regolamento possono essere fatti individuare agli studenti gli assiomi e i teoremi:

La Regina si muove sia in diagonale che in orizzontale e verticale;
la Torre si muove in orizzontale e in verticale;
l'Alfiere si muove in diagonale;
il Cavallo si muove ad L, due caselle in orizzontale o verticale e una perpendicolare;
l'Alfiere non può mai abbandonare il colore della sua casella;
il Cavallo deve sempre cambiare il colore della casella che occupa;
il Re si muove di una casella, in ogni direzione;

La quinta e la sesta affermazione sono, ad esempio, dei teoremi che si desumono dalla struttura della scacchiera e dagli assiomi contenuti nella terza e nella quarta affermazione.

Come iniziare a parlare di dimostrazione?

Dopo aver analizzato la scelta dei termini ed aver inquadrato la specificità di una struttura assiomatica, un altro elemento delicato dell'insegnamento della geometria, in vista del raggiungimento del rigore, consiste nel far cogliere l'importanza e il significato della dimostrazione.

Conviene coinvolgere i ragazzi nell'individuazione di quali saranno le affermazioni che vogliamo dichiarare vere nella nostra teoria, per poi, insieme a loro, costruire a ritroso il percorso per raggiungerle. Avere degli alunni consapevoli delle tappe da tenere fisse è di enorme aiuto, perché conferisce al percorso una direzione che lo studente può seguire con poca probabilità di perdersi.

Immagino il disorientamento di uno studente che di lezione in lezione si trova di fronte ad un insegnante che sembra inventarsi teoremi e dimostrazioni a caso, cercando deduzioni da ciò che ha dimostrato fino a quel momento. Più interessante è invece il sapere che ciò

[174] Esempio tratto dalla presentazione del tema '*Assiomi, definizioni e teoremi*' presente nel sito della rivista *Nuova Secondaria* dell'Editrice La Scuola, a cura di Alfredo Marzocchi

che si sta affermando e dimostrando potrà portare a delle conclusioni sperate e dichiarate fin dall'inizio dal docente. Questo non esime l'insegnante da eventuali approfondimenti o ricerca di proprietà ulteriori nel percorso che sta tracciando.

Tenendo viva l'attenzione sui paletti stabiliti, può essere didatticamente utile presentare alcune proposizioni che per Euclide sono teoremi, in veste di assiomi. In particolare alcune che sembrano estremamente ovvie: per esempio i criteri di congruenza dei triangoli oppure le relazioni esistenti fra gli angoli che si formano a partire da due rette parallele tagliate da una trasversale. Spesso si tratta di proposizioni dimostrate; proviamo invece a presentarle come assiomi. Scoprire con gli studenti perché tali proposizioni sono significative e quali elementi sono bastanti ad affermare la congruenza fra triangoli ci sembra un elemento di riflessione più rilevante, piuttosto che proporre una dimostrazione che spesso è poco convincente. La riflessione sulla scelta degli elementi bastanti per affermare la congruenza fra triangoli è un esempio di allenamento dell'intuizione, che cerca di immaginare cosa accade sotto determinate condizioni e che fantastica su cosa accadrebbe sotto altre ipotesi, che cerca cioè una generalizzazione che contempli tutti i possibili triangoli coinvolti.

Da questo momento in poi si possono presentare alcuni teoremi e le relative dimostrazioni.

Per poter apprezzare la complessità, la bellezza e l'intera portata dello strumento 'dimostrazione', è necessario calarsi in essa con la dovuta cautela.

> *'E' di somma importanza che l'allievo arrivi il più presto possibile a vedere nel processo di dimostrazione un mezzo per passare dall'ignoto al noto, uno strumento cioè di prova e, ancor più, di ricerca, mentre solo più tardi potrà apprezzarne e gustarne l'efficacia come strumento d'analisi, e di riduzione al minimo, dei concetti e delle ipotesi fondamentali.'*[175]

In questa fase iniziale consigliamo di fare solo alcune dimostrazioni, in una seconda fase torneremo a presentare altre dimostrazioni che, se proposte troppo presto, rischiano di svilire il loro significato, perché già il disegno sembrava contenere tutti gli elementi per dichiarare vera la tesi (pe esempio: In un triangolo isoscele gli angoli alla base sono congruenti, chi lo metterebbe in dubbio?). L'insegnante sceglie quali dimostrazioni eseguire, ma tra esse almeno una che 'certifichi' le conoscenze già apprese mediante questo nuovo metodo di costruire la geometria (Teorema dell'ampiezza dell'angolo

[175] Vailati G., 1904

esterno come somma delle ampiezze dei due angoli non adiacenti ad esso). Questa proposta è motivata dalla semplicità della dimostrazione del teorema presentato, che poggia però sull'esistenza e unicità della parallela condotta per un punto esterno ad una retta. Il fatto che se supponessimo l'esistenza di più di una parallela ad una retta condotta per un punto esterno ad essa le cose potrebbero non funzionare allo stesso modo, può far riflettere gli studenti e aprire loro diversi scenari che non rispecchierebbero più la realtà. Spesso, nei percorsi didattici dei libri di testo è illustrata invece la dimostrazione per assurdo dell'unicità della parallela che pochi studenti riescono veramente a gustare nella classe prima.

Un altro tipo di dimostrazione che proporrei di svolgere è quella relativa ad un teorema che dichiara una verità non troppo ovvia (per esempio: Esistenza ed unicità del Punto d'incontro delle tre altezze di un triangolo o dei tre assi). Cerco di immaginarmi i pensieri di un docente che deve presentare in classe il teorema di esistenza e unicità del punto d'incontro delle tre altezze di un triangolo.

'Prima liceo. Domani cercherò di spiegare ai miei studenti che le altezze di un triangolo si incontrano in un punto.

Sarà difficile destare lo stupore dei ragazzi con una affermazione del genere per due motivi principali: questa conoscenza appartiene già al loro bagaglio culturale e, inoltre, provando a costruire tale punto d'incontro per qualche triangolo, si vede con facilità che ciò si verifica. Perché quindi riproporsi tale questione?

Meglio allora, da insegnante industrioso, aggiungere alcuni termini all'affermazione iniziale: le <u>tre</u> altezze di un <u>qualsiasi</u> triangolo si incontrano <u>sempre</u> in un punto.

Aggiungere un aggettivo e un avverbio di tempo conferiscono all'affermazione un carattere più deciso ed universale, di fronte al quale uno studente comincia a porsi qualche domanda in più rispetto al suo stato di certezza e convinzione, stato che lo avrebbero privato di interesse nei confronti dell'argomento che si vuole affrontare. Per esempio: siamo proprio sicuri che l'affermazione vale <u>per ogni</u> triangolo?Perché non provare a costruire un contro-esempio (se ci riusciamo!). E il punto di incontro, dove si trova? Perché?'

5.2 I QUADRILATERI

Riteniamo l'argomento dei quadrilateri interessante per riconoscere la molteplicità di definizioni che si possono dare per uno stesso ente, e quindi come occasione per effettuare l'individuazione di definizioni comode alle quali fare poi seguire dimostrazioni più o meno immediate[176]. Tale possibilità di creare diverse definizioni per uno stesso quadrilatero è stato lo sfondo ispiratore anche del quesito 2 del questionario studenti, dove effettivamente le risposte hanno rispecchiato la varietà ipotizzata, e forse quelle non date sono in parte da attribuire alla mancanza di criteri, per lo studente, di sceglierne una a discapito di un'altra.

Si può procedere nel seguente modo.

Si lasciano definire i quadrilateri agli studenti, dividendoli per questo lavoro in piccoli gruppi. Si prova poi ad analizzare e a confrontare le diverse definizioni, scegliendo quelle più economiche ed esaustive. A partire da esse si prova a dimostrare le proprietà di ciascun quadrilatero che sono già note ai ragazzi (perché frutto dell'osservazione e dell'intuizione già messa in atto nel percorso scolastico precedente), ma delle quali essi non sapevano prima di tale attività fornire alcuna giustificazione razionale.

Si può provare a vedere cosa sarebbe accaduto se invece di una definizione di un certo quadrilatero se ne fosse data un'altra.

Essendo i quadrilateri delle figure già note ai ragazzi, questo argomento potrebbe essere sfruttabile per stimolare i ragazzi a inventare nuovi teoremi, modificando le ipotesi o mantenendo le ipotesi e inventando nuove tesi. Vedere in un disegno, o in una situazione geometrica a loro abbastanza nota, quello che non è esplicitato nelle ipotesi, ma che da esse deriva (e che diventerà la nuova tesi), è un allenamento per l'intuizione a cogliere, anche nella realtà, delle conseguenze non dichiarate in modo esplicito e non 'scopribili', se la mente non è abituata a questo esercizio.

Con lo stesso obiettivo si possono far inventare ai ragazzi dei piccoli teoremi, per i quali si fornisce la tesi, per poi stabilire gruppi di ipotesi dai quali la tesi può discendere. Un esercizio di questo tipo all'inizio può sembrare difficile, ma spesso[177] poi, per i ragazzi di seconda superiore, tale metodo investigativo risulta affascinante; fa loro percepire la possibilità di scegliere, la libertà di creare in modo ragionato dei percorsi propri che si discostano anche da quelli proposti dai compagni. Riguardo alla scelta delle definizioni riportiamo l'intervento di H. Freudenthal[178]:

[176] Una proposta di come presentare i quadrilateri nella Scuola Secondaria di secondo grado è presente in Cannizzaro L., Menghini M., 2004.
[177] Questa conclusione è emersa dal confronto con alcuni colleghi ai quali ho proposto tali attività, riscuotendo in effetti successo.
[178] Freudethal H., 1994.

> *Ci possono essere incertezze, per esempio nel sapere se un quadrato appartiene ai rombi, o un rombo ai parallelogrammi. L'insegnante può imporre le definizioni per risolvere queste controversie, ma se fa così degrada la matematica a qualcosa che è governato da regole arbitrarie […]. Le proprietà del parallelogramma sono connesse fra loro; una di esse può diventare la fonte dalla quale sorgono le altre. Così ora nasce una definizione, e ora diventa chiaro perché un quadrato deve essere un rombo e un rombo deve essere un parallelogramma. In questo modo lo studente impara a definire, e impara per esperienza che definire è più di descrivere, e che è un mezzo per organizzare deduttivamente le proprietà di un oggetto."*

L'ambiente relativo allo studio dei quadrilateri si dimostra fecondo anche per un'analisi che riguarda la ricerca del rigore matematico, che può essere introdotto in riferimento ai quadrilateri.

Un problema consistente nella didattica della matematica è quello di riuscire a far comprendere agli alunni la differenza fra "condizione sufficiente" e "condizione necessaria" e il significato di implicazione logica fra due affermazioni, concetti che sono la base per una piena comprensione del significato di teorema.
Un ambito che secondo il nostro parere può aiutare i ragazzi a comprendere il significato di queste funzioni logiche è l'utilizzo di tali concetti nella geometria piana, in particolare nella trattazione di quadrilateri e triangoli.
Gli studenti in questo campo possono visualizzare facilmente esempi e controesempi, che appartengono alla loro esperienza scolastica pregressa o a semplici intuizioni visive. Chiedere ai ragazzi, ad esempio, se avere due diagonali che si bisecano è condizione sufficiente per essere un parallelogramma, oppure un trapezio isoscele… Dopo aver ipotizzato la risposta si imposta la dimostrazione. Lo stesso per le condizioni necessarie: è necessario per un quadrilatero avere gli angoli alla base congruenti[179] per essere un trapezio isoscele?... Questo gioco si può proporre per qualsiasi proprietà.
Al termine del capitolo sulle figure piane potrebbe essere proposta la seguente attività che può favorire la creazione nell'alunno di forme di argomentazione e di strategie di pensiero matematico. Tali obiettivi vengono declinati nella comprensione delle

[179] Ovviamente occorrerà aver definito in qualche modo opportuno la nozione di base.

proposizioni e nella valutazione del loro valore di verità. A questo si aggiunge un aumento della capacità di intendere i connettivi logici, i quantificatori e il significato di verificabilità in matematica. L'attività può essere utile anche al fine di sottolineare l'abilità che deve acquisire il ragazzo nell'utilizzare il linguaggio degli insiemi per parlare di oggetti matematici e la capacità che deve avere di verificare una congettura in casi particolari, oppure di produrre controesempi per confutarla. Per prepararsi all'attività, viene organizzato, insieme alla classe, uno schema sulle definizioni e sulle proprietà dei diversi quadrilateri. Gli alunni possono anche essere divisi in gruppi ciascuno dei quali riassume un quadrilatero particolare.

Viene dunque esposto il seguente quesito preso dai *Giochi di Archimede*[180], per rispondere al quale gli studenti propongono delle congetture che andranno verificate alla fine dell'esperienza.

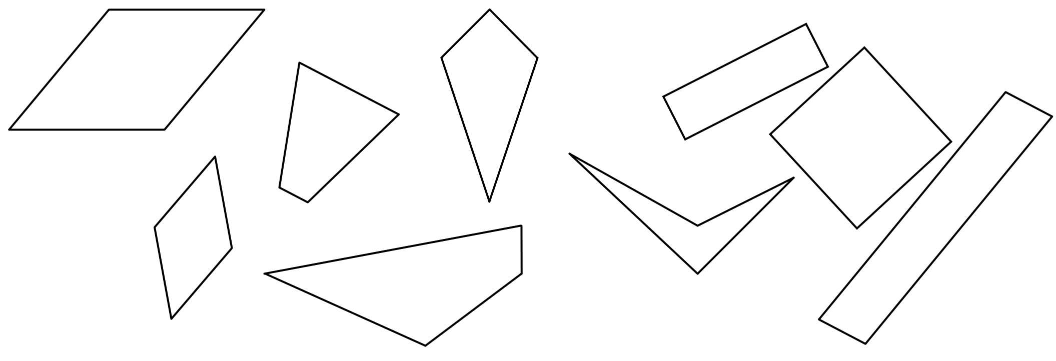
Quale fra le seguenti affermazioni è corretta?

- *se un quadrilatero ha tutti i lati uguali allora ha anche tutti gli angoli uguali;*
- *se un quadrilatero ha tutti gli angoli uguali allora ha anche tutti i lati uguali;*
- *se un quadrilatero ha due angoli uguali allora ha anche due lati uguali;*
- *esiste un triangolo con tutti gli angoli uguali ma in cui i lati non sono tutti uguali;*
- *esiste un pentagono con tutti gli angoli uguali ma i cui lati non sono tutti uguali.*

I ragazzi vengono guidati:

- nel riflettere su tutti i possibili quadrilateri;
- nel costruire insiemi di quadrilateri aventi le stesse proprietà;
- nel costruire una rappresentazione insiemistica delle inclusioni esistenti fra i quadrilateri.

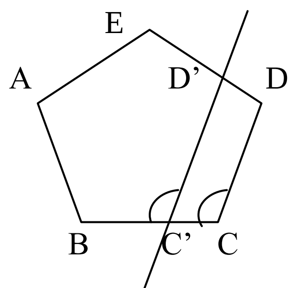
Si possono costruire esempi e controesempi che riguardano i diversi insiemi. Alcuni fra gli esempi li riportiamo qui di seguito, come modello di casi possibili.



[180] Giochi di Archimede 1999, Triennio, quesito 18

Si fanno poi rappresentare agli alunni le implicazioni logiche esistenti fra i vari insiemi di quadrilateri.
Si introduce il significato di condizione sufficiente(criterio) e necessaria(proprietà).
È necessario che gli studenti siano abili nell'analisi del periodo: la collaborazione con l'insegnante di lettere è quindi consigliabile affinché potenzi in loro questa capacità.
Si illustrano altri esempi e si chiede ai ragazzi di inventarne di nuovi, sia relativamente ai quadrilateri che ai triangoli. In questo esercizio l'ausilio della rappresentazione insiemistica è un forte aiuto.
Il quesito dei Giochi d'Archimede viene riproposto a questo punto: gli alunni saranno in grado ora di discutere con maggior accuratezza le diverse opzioni e riusciranno a motivare l'inesattezza delle affermazioni false fornendo controesempi.
In particolare, in riferimento alle alternative proposte dal quesito, verranno analizzati:

- per il primo caso: il rombo ha tutti i lati uguali[181] ma non ha gli angoli altrettanto uguali
- per il secondo caso: il rettangolo ha tutti gli angoli uguali ma non ha i lati uguali
- per il terzo caso: basta prendere un trapezio rettangolo con tutti i lati di misura diversa, oppure un "trapezio isoscele" e inclinare la base minore in modo tale che non sia più parallela all'altra base (ovviamente uno dei lati obliqui diventa maggiore dell'altro, avendo come estremi gli estremi delle due 'vecchie' basi)
- per il quarto caso: un triangolo che abbia tutti gli angoli uguali ha ciascun angolo di 60°, quindi è sicuramente un triangolo equilatero e quindi ha tutti i lati congruenti
- per il quinto caso (risposta corretta): mostriamo l'esistenza di un pentagono che verifichi le condizioni espresse dal quesito.
  Il pentagono ABCDE rappresentato è regolare.
  La retta tracciata r è parallela ad un lato (per esempio a CD), quindi gli angoli che vengono a formarsi sono congruenti agli angoli del pentagono regolare perché angoli corrispondenti.



  I lati del nuovo pentagono ABC'D'E non sono più tutti congruenti fra loro.

Oltre alle osservazioni già esposte sul quesito, si può far notare ai ragazzi l'uso dei quantificatori:

[181] In questa trattazione 'uguale' è utilizzato come sinonimo di 'congruente' per allinearsi con il lessico presente nel quesito dei Giochi di Archimede.

- *esiste:* devo solo mostrare un esempio in cui la condizione espressa è verificata
- dove non è presente il quantificatore è come se ci fosse un *per ogni* in quanto l'affermazione deve essere vera qualsiasi scelta si faccia della figura. Infatti per alcuni quadrilateri sono veri i primi tre enunciati.
  Insieme agli alunni si può provare a renderli veri in generale:
  "esiste un quadrilatero che ha tutti i lati uguali e tutti gli angoli uguali"
  "esistono quadrilateri che hanno solo due lati uguali e solo due angoli uguali".

5.3 IL TEOREMA DI PITAGORA

Un buon punto di partenza può essere proporre in primo luogo agli studenti una verifica sperimentale fatta con programmi informatici, dell'uguaglianza affermata dal Teorema di Pitagora. Essi devono potersi convincere che tale relazione vale 'molte volte' svolgendo i calcoli relativi a diversi triangoli con lati di misura intera. Spesso i programmi informatici, per problemi legati alla precisione di misurazione di segmenti con misura non intera e per difetti di arrotondamento, sembrano però non verificare in modo totalmente esatto la relazione pitagorica[182]. Possono così sorgere i primi dubbi sulla generalità del Teorema, perché *naturalmente* non si mette in dubbio l'attendibilità del calcolatore. Si propone ai ragazzi di provare a chiedersi come affermare tale generalità (se è vera!). Si comincia quindi a tentare una risposta a questa domanda. Si accolgono allora le ipotesi degli studenti e si prova poi a suggerire la possibilità di una dimostrazione del teorema per *il triangolo rettangolo isoscele*, basandosi sulla equiscomponibilità dei quadrati coinvolti nel Teorema di Pitagora. Ho provato a far lavorare a questa dimostrazione gli studenti in piccoli gruppi (solitamente a coppie) e quasi tutti vi riescono senza troppa difficoltà; talvolta si è reso necessario il suggerimento relativo alla rappresentazione delle diagonali dei quadrati coinvolti, dopodiché la dimostrazione è seguita in modo fluido.
Una volta dimostrato questo caso particolare si può illustrare la dimostrazione mediante la proprietà di equiscomponibilità di due quadrati congruenti. Questi quadrati si possono considerare:

- *Figura 1*: ricopribile con quattro triangoli rettangoli congruenti fra loro e i due quadrati di lato la lunghezza dei cateti;

[182] Questo errore 'istruttivo' lo commette GeoGebra.

- *Figura 2:* gli stessi quattro triangoli rettangoli con il quadrato di lato la lunghezza dell'ipotenusa.

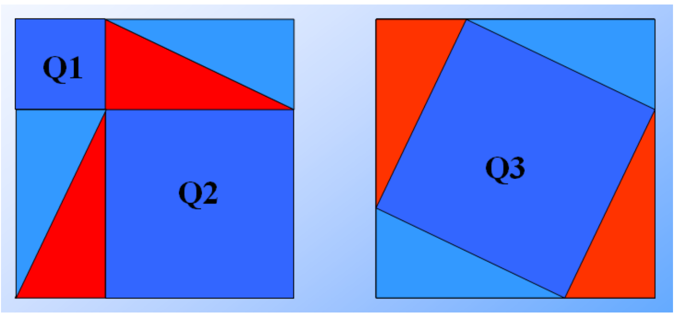


Figura 1 *Figura 2*

Per introdurre la nozione di equiscomponibilità, equivalenza ed equiestensione non si può prescindere dalla teoria della misure e delle grandezze, che occuperebbe molte ore di spiegazioni e raffinatezza di trattazione, cosa che al secondo anno di Scuola Secondaria di secondo grado non è ammissibile richiedere agli alunni. L'argomento della dimostrazione del Teorema di Pitagora è uno fra i molti esempi che potremmo riportare riguardante la presentazione di nozioni intuitivamente raggiungibili e accettabili senza difficoltà dalla maggior parte degli alunni, che richiederebbero però un notevole impianto teorico per essere giustificate da un punto di vista rigoroso e formale.

L'azione dell'intuizione sui concetti figurali è talmente potente che ci porta a nascondere quasi completamente i problemi concettuali. Non è da sottovalutare che nel testo dello stesso Euclide tali nozioni non fossero presenti; ciò non toglie che le affermazioni in esso contenute siano vere. Questo è uno degli aspetti più provocatori, interessanti ed educativi dello studio della geometria, che rivela continuamente nuovi sottofondi alle verità che sembrano ovvie. La dimostrazione classica, peraltro presente nei libri maggiormente in uso attualmente nella Scuola Secondaria di secondo grado, che passa dall'equiestensione di quadrati, parallelogrammi, rettangoli con stessa base e stessa altezza la riproporrei come seconda possibilità di dimostrazione.

La strategia didattica qui esposta è una sorta di 'percorso scoperto', una reinvenzione guidata! Come se lo stessimo riscoprendo noi, insieme ai ragazzi, un'altra volta. Se partissimo invece con tutta la teoria della equiestensione, equiscomponibilità, equivalenza, gli studenti si troverebbero disorientati e non coscienti del perché tutta quella serie di nozioni venga loro propinata. Ho sperimentato io stessa un tale avvio: la fatica dei ragazzi è enorme. Le domande che li assalgono e i dubbi sul percorso da me proposto sono pesanti.

Far percepire agli alunni l'esigenza di concetti raffinati come equiestensione, equiscomponibilità, equivalenza, per dimostrare il Teorema, li motiva seriamente, ma solo dopo aver già proposto una prima dimostrazione. La presenza di due dimostrazioni diverse per uno stesso teorema importante è inoltre un aspetto inedito per essi, che li dovrebbe ulteriormente stimolare. La libertà nel processo razionale-argomentativo, nonostante la razionalità che deve necessariamente soggiacere alla dimostrazione, è un elemento da sottolineare insieme ai ragazzi, i quali, altrimenti, potrebbero invece interpretare la geometria come una scienza che obbliga ad imboccare una strada uguale per tutti e per di più a senso unico.
Consiglierei di far seguire i Teoremi di Euclide a quello di Pitagora, una volta che sia stata introdotta la definizione di triangoli simili e di similitudine più in generale. Questo percorso risulta una buona alternativa alla proposta standard, che molti libri di testo fanno, di dimostrare tali teoremi sfruttando nuovamente procedimenti che fanno riferimento alla equiscomponibilità.

5.4 LE TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE

Spesso sui libri di testo si procede nella presentazione delle trasformazioni geometriche, fornendo una loro classificazione (affinità, similitudini, isometrie) che risulta piuttosto monotona e noiosa. Suggerisco qui di introdurre le trasformazioni proponendo agli studenti una situazione nella quale utilizzare non una generica trasformazione, ma in particolare le isometrie, poiché sono le trasformazioni geometriche più semplici da intuire. Da qualche anno scelgo di partire dalle trasformazioni che danno luogo alle tassellazioni e che quindi permettono di avere un primo approccio alle isometrie. Queste particolari costruzioni hanno inoltre il pregio di riassumere e richiamare molte proprietà dei poligoni (in particolare relative alle ampiezze angolari) già viste in precedenza con i ragazzi.
Riporto di seguito la scheda e le fasi operative attraverso le quali imposto l'attività in classe, dove gli alunni lavorano poi in modo autonomo fino alla fase 4.
Doto i ragazzi della seguente scheda da compilare in un file di testo. In questo modo possono sfruttare l'opzione '*Copia-Incolla*' per le parti che ritengono si possano ripetere in modo identico, o quasi, rispetto alle richieste fatte. Scelgo la strategia dell'utilizzo del computer, sia per il fatto che agli studenti di questi ultimi anni tale strumento è congeniale e naturale, sia perché un'attività del tipo illustrato è resa meno noiosa e ripetitiva con l'utilizzo delle opzioni dei file di elaborazione testuale oggi in uso.

	RICHIESTA	RISPOSTA
	Tassellazione scelta	
FASE 1	*Elenca, immaginandoli, i passi per costruire la tassellazione o pavimentazione scelta.*	
FASE 2	*Sperimenta i passi immaginati con il programma Cabrì o GeoGebra. Le tue ipotesi costruttive, risultano verificate?*	
FASE 3	*Scegli fra i passi della fase 1 solo quelli che ti consentono di realizzare la tassellazione con il minor numero possibile di azioni.*	
FASE 4	*Traduci la sequenza dei passi da te proposti con i termini usati da GeoGebra per indicare i vari movimenti che proponi.*	
FASE 5	*Confronta la tua proposta definitiva con quella di un tuo compagno. Che osservazioni/ correzioni devi apportare alla tua proposta o a quella del compagno?*	

Si descrivono ora nei dettagli le varie fasi indicate nella scheda:

1) Chiedo di scegliere una tassellazione fra una gamma di proposte presentate mediante i disegni contenuti nell'ALLEGATO 5 e nell'ALLEGATO 6. Non chiedo la riproduzione, ma di elencare, immaginandoli e non provandoli, i passi da effettuare per la costruzione del disegno. Invito i ragazzi a fare un elenco dei passi da svolgere prima di operare in modo 'sperimentale' con il software Cabri o GeoGebra. Questa scelta è volta ad aiutare gli studenti ad abbinare la componente immaginativa con quella espressivo-linguistica desumibile dal linguaggio comune e non ancora formalizzata in alcun modo (le isometrie, a questo punto del percorso didattico non sono ancora state definite).
2) Chiedo agli studenti di sperimentare con il programma GeoGebra o Cabri la loro ipotesi relativa ai passi immaginati per la costruzione del disegno. Se la loro costruzione della pavimentazione scelta è smentita, devono modificarla, in modo da renderla corretta.

3) Chiedo di operare una scelta dei passi individuati nella prima fase affinchè essa venga realizzata con il minor numero di passi possibile a partire dai poligoni base della pavimentazione scelta. Possono ovviamente, a prova avvenuta, correggere le loro ipotesi costruttive o eliminare alcuni passaggi ritenuti prima necessari alla costruzione, anche trovando suggerimento dalle isometrie proposte dal programma grafico utilizzato.
4) Chiedo di tradurre la loro successione di passi con il linguaggio del software GoeGebra, il quale riporta i nomi delle isometrie (e quindi opera già una prima traduzione formale).
5) Chiedo ai ragazzi che hanno scelto la stessa tassellazione di unirsi e costituire dei gruppetti di confronto nei quali discutere i passi scelti, correggendosi a vicenda. Spesso una stessa tassellazione può essere realizzata sfruttando isometrie diverse e con lo stesso numero minimo di passi.

Dopo una tale introduzione, eseguita come attività laboratoriale[183], si discutono i risultati ottenuti in ciascun gruppetto creatosi. Successivamente i ragazzi assieme assegnano le definizioni formali delle isometrie incontrate, valutandole a partire dalla loro azione sui poligoni delle tassellazioni. Si studieranno gli elementi uniti di ciascuna isometria e si comporranno tra loro due o più isometrie, per scoprire che tipo di trasformazione composta si ottiene.

La proposta qui presentata e sperimentata da me in tre diverse classi seconde, ha portato a risultati sorprendenti per diversi aspetti. Gli studenti infatti:

- hanno apprezzato l'uso delle tecnologie per svolgere il lavoro assegnato;
- hanno mostrato interesse e vivacità nella realizzazione della tassellazione (FASE 2);
- si sono sentiti responsabili della correzione dei compagni (FASE 5);
- hanno riconosciuto la possibilità di diverse strategie per raggiungere uno stesso obiettivo;

[183] La didattica laboratoriale è intesa in Sandrone G., A.A 2007-2008 come <<*modalità operativa utile per sviluppare la personalizzazione dei percorsi nei diversi momenti ed articolazioni dell'attività formativa […]per rispondere all'esigenza dell'allievo di dar "senso" al proprio operare utilizzando un ambiente di apprendimento che lo porta a interrogarsi e a porsi in modo riflessivo rispetto ai problemi e alle situazioni presentate*>>. All'interno dell'ambiente di Didattica della matematica, viene ad assumere lo stesso significato qui citato, in particolare ricorrendo all'idea di laboratorio come originato dalla realtà della bottega rinascimentale dove <<*l'apprendista impara lavorando, osservando, collaborando, quasi mai eseguendo dopo aver ascoltato una spiegazione teorica*>> (cfr Chiappini G., 2007 e Reggiani M., 2008).

- hanno mostrato di riuscire a definire le isometrie in modo formale con estrema facilità e spigliatezza, obiettivo questo che non ero mai riuscita a raggiungere con le attività ‘standard’ che proponevo gli anni precedenti.

5.5 GEOMETRIA SOLIDA

Gli studenti possono essere motivati all’introduzione della nozione di spazio tridimensionale attraverso domande e osservazioni sulla realtà che li circonda. Il complesso sistema spaziale nel quale viviamo, presenta alcune situazioni che se lette con la sola intuizione spaziale, possono generare false previsioni di ciò che poi accade realmente.

I ragazzi sono poi maggiormente stimolati a comprendere come tale ambiente tridimensionale possa essere studiato razionalmente e rigorosamente, attraverso l’uso della geometria.

In particolare chiedo loro di prevedere come può avvenire lo spostamento di un tavolo (di cui fornisco le misure) nel mio appartamento dallo studio alla cucina (fornendo loro la pianta del mio appartamento). Nessuno di loro si immagina di dover fare tutte le manovre che poi, in realtà, io e un aiutante dobbiamo effettivamente eseguire per riuscire nell’impresa.

Spostare un tavolo da una stanza ad un’altra, se non passa dalla porta tenendo il piano d’appoggio orizzontale, è un’operazione che necessita di innumerevoli ‘manovre’ che non riusciamo ad intuire velocemente! Nel mio appartamento per transitare da studio a cucina, collegati da un semplice corridoio, deve entrare parzialmente con le gambe in altre tre stanze (bagno, camera e ripostiglio).

Chi l’avrebbe mai detto?

Di natura più classica possono essere ritenute le situazioni presentate in alcuni temi dell’esame di stato (ALLEGATO 7) che mettono comunque in moto l’immaginazione e l’intuizione.

A causa delle difficoltà che questo argomento genera in molti studenti, io suggerirei di affrontarlo nella classe quarta, o comunque non nel primo biennio della Scuola Secondaria di secondo grado.

Per iniziare il discorso sulla geometria dello spazio in una classe quarta[184] ho proposto il test contenuto nell’ALLEGATO 8, da affrontare e risolvere a coppie. Descrivo nel

[184] In un corso di potenziamento in orario extracurricolare in preparazione all’esame di stato.

seguito del paragrafo l’attività delle dodici coppie frequentanti la classe quarta in cui il lavoro è stato proposto.
Inizialmente non ho dato indicazioni in merito alle modalità di come potessero reperire le risposte, se non basandosi sulla loro intuizione spaziale, sulle loro conoscenze di geometria piana e su quelle di geometria solida acquisite nella Scuola Secondaria di primo grado (incontrata quattro anni prima). Oltre alla risposta corretta ho chiesto ai ragazzi di motivare la scelta da loro effettuata. Poco dopo l’inizio del lavoro uno studente mi ha chiesto di poter riprodurre la situazione del quesito 5 (che chiedeva di scegliere fra quattro figure quella che riproduceva la proiezione sul piano **ABC** di una piramide con vertici **A, B, C** ed **S**, la cui base **ABC** era un triangolo rettangolo, con $A\hat{B}C = 90°$ e con **SA=SB=SC**) con l’ausilio di un compagno e di un po’ di materiale da lui posseduto, quale biro e fogli. Ho però vietato, in questa prima fase, l’utilizzo di qualsiasi tipo di materiale per riprodurre e sperimentare le diverse situazioni proposte dai quesiti presenti nei test, promettendogli, in una seconda fase, la possibilità di attuare la sua strategia. Ho operato la scelta di rifiutare solo in prima battuta la proposta del mio alunno, per poi invece adottarla come modalità vincente, poiché ritengo che la presentazione di modellini che rappresentino gli enti di volta in volta trattati sia proficua; oltre a rendere l’esposizione più attraente e interessante, chiarisce molte situazioni che intuitivamente risultano complicate. In particolare in questi anni mi sono servita di modellini in legno per i quali predisponevo anche dei ‘tagli’ opportuni per visualizzare concretamente le sezioni dei solidi, spesso inaccessibili alla capacità immaginativa di alcuni studenti.
In una seconda fase, come promesso, ho lasciato la libertà agli studenti di utilizzare del materiale che ho messo a loro disposizione: stuzzicadenti lunghi, cannucce, cartoncini, forbici, colla, pongo, coltellini,…
Il risultato è stato buono, sia rispetto all’aumento della motivazione degli studenti, i quali attraverso la concretizzazione si sono sentiti più sicuri, sia perché essi hanno trovato la conferma o la smentita delle loro ipotesi di risoluzione di situazioni che, se solo immaginate, non avrebbero trovato adeguate risposte. Forse l’aspetto davvero rilevante e peculiare di questo lavoro può ritenersi la stabilizzazione rispetto ad alcune nozioni che, con l’ausilio di altri strumenti solo teorici o rigorosi, non sarebbe stata raggiungibile. Con il termine *stabilizzazione* intendiamo la capacità acquisita da uno studente di collegare fra loro le diverse situazioni geometriche come parti di un tutto intercorrelato. Spesso gli studenti infatti, sembrano capire un singolo problema, ma poi stentano a riconoscere, in

un nuovo problema, elementi simili o parzialmente riconducibili a ciò che precedentemente hanno visto. Con la visualizzazione ‘fisica’ questo aspetto sembra essere meno presente, per lasciare spazio ad una maggior consapevolezza e convinzione di poter trasporre le relazioni comprese anche in nuove situazioni. Tutto sembra essersi stabilizzato e sedimentato nella razionalità dei ragazzi.

Vedere ragazzi di diciotto anni stupirsi di fronte alle sezioni ottenibili da alcuni solidi è stata la conferma del fatto che è molto forte la difficoltà di dominare a livello intuitivo le relazioni spaziali.

Riporto nella seguente tabella le risposte che le 12 coppie hanno dato ai quesiti dell’ALLEGATO 8. Le celle con sfondo grigio sono quelle relative alla risposta corretta.

n° quesito	**Frequenza assoluta delle risposte ai singoli quesiti**			
	a	**b**	**c**	**d**
1	6	6		
2		6		8
3		3		9
4	2	2		8
5	2	9		
6	3	0	0	9
7	1	10		1
8	1			11
9	10		2	
10	8			4
11	4	5	2	1
12				12
13	4	1	7	
14		3	7	2
15		8		4

Più della metà degli alunni non aveva mai sentito parlare di rette sghembe e questo perché l’unico argomento di geometria solida che avevano affrontato nella Scuola Secondaria di primo grado era la classificazione dei solidi con relativi volumi e aree delle superfici totali, mentre una descrizione della relazione fra gli enti geometrici nello spazio era a loro sconosciuta. Di fronte alla prima domanda che chiedeva se vi è la possibilità che due rette nello spazio non abbiano nè punti in comune e né siano parallele, i ragazzi si sono trovati indecisi fra le risposte *a)No, se non hanno punti in comune, sono necessariamente parallele* e la *b)Certo, se sono sghembe.* Questa indecisione ha generato una iniziale diffidenza nei confronti del test.

Difficili sono risultate le motivazioni della scelta effettuata tra le risposte a questa domanda.
Una coppia di ragazzi ha motivato la scelta della alternativa *b)* sostenendo che la *a)* e la *c)* erano corrette se riferite al piano, che la *d)* era errata e che quindi la *b)* era per loro accettabile (Protocollo 1). Chi invece ricordava la definizione di *rette sghembe* dalla Scuola Secondaria di primo grado ha motivato la scelta della alternativa *b)* con la definizione stessa di questa particolare posizione fra rette: (Protocollo 2) *se due rette si trovano nello stesso piano, se non sono parallele hanno almeno un punto in comune poiché sono infinite. Mentre se sono sghembe non appartengono allo stesso piano e nonostante non siano parallele, non possono avere punti in comune.*
Il quesito 2 e il quesito 3 erano riferiti anch'essi alla relazione di parallelismo fra rette e piani.
Il quesito 3) chiedeva quante erano nello spazio le parallele ad una retta data passanti per un punto P esterno ad essa. Gli studenti che non avevano ben chiara la definizione di rette parallele nello spazio hanno optato per una 'non scelta' dell'alternativa corretta oppure per la scelta di entrambe le alternative: la *b)Una e una sola* e la *d)Infinite, che formano un piano*, scelta che pure non era legittima.
Questa duplice scelta è stata motivata da più coppie con una argomentazione molto valida (Protocollo 3A e Protocollo 3B):

- *se parallele significa che non si incontrano e giacciono sullo stesso piano, la risposta è b);*
- *se parallela significa che non si incontrano mai, la risposta è d)*

Ritengo questa argomentazione molto interessante, perché risultato di una questione strutturale e portante della geometria: non ci sono definizioni assolute e perentorie; quelle che lo sviluppo e la storia della geometria hanno scelto e maturato sono semplicemente le più opportune rispetto ad alcune richieste, ma potrebbero non esserlo rispetto ad altri parametri. Il fatto che uno studente si renda conto che è possibile scegliere una certa accezione di *parallelismo fra rette nello spazio* con le relative conseguenze, oppure optare per un'altra definizione (e questo non lo scandalizza) significa che per lui la geometria non è una disciplina né morta, né tantomeno priva di alternative e di possibili sviluppi futuri. Questi sono, a mio parere, parte dei frutti dell'aver tentato di coltivare negli studenti responsabilità, criticità e libertà!

Di fronte al quesito 3) e al quesito 4) i ragazzi si sono trovati meno spaventati poiché la situazione risultava loro più facile e la relazione di *parallelismo retta-piano* come quella di *perpendicolarità fra rette* non hanno avuto dubbi nell'interpretarla in modo univoco.

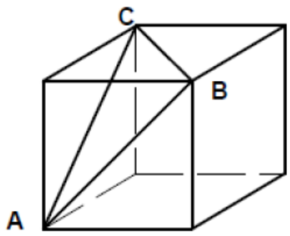
Il quesito 5) è risultato non immediato per la maggior parte degli studenti ed è stato proprio rispetto a questa situazione che uno studente, fra i più intuitivi della classe, (a mio modo di vedere) mi aveva chiesto la possibilità di realizzare un modellino tridimensionale.

Di facile comprensione e risoluzione per i ragazzi sono risultati i quesiti 6), 7), 8) e 12) dove le richieste erano attinenti a proiezioni, sviluppi di semplici solidi e classificazione di solidi ottenuti per sezione da altri. Questi sono i quesiti che nella loro formulazione hanno anche la predisposizione di una rappresentazione grafica. Che la figura abbia aiutato gli studenti?

Questa ipotesi è però sconfessata dalle risposte del quesito

9) **AB** e **BC** sono due diagonali delle facce di un cubo.
Quanto misura l'angolo **ABC** ?

a. 90°
b. 120°
c. 60°
d. 45°



il quale ha trovato gli studenti molto influenzabili dal disegno e poco attenti alla ipotesi costruttiva del triangolo ABC. La maggior parte della classe ha infatti risposto che un angolo di questo triangolo era retto, non badando a quanto potesse essere l'ampiezza degli altri angoli del triangolo ABC. In sede di correzione del quesito, prima di dare la risposta corretta ho provato a chiedere agli studenti quale fosse l'ampiezza dei tre angoli di ABC e solo osservando il triangolo nella sua interezza, lo hanno riconosciuto come triangolo equilatero andando a valutare anche la lunghezza dei lati, più facilmente calcolabile o intuibile rispetto alla misura degli angoli (non facilmente visualizzabile come tale, nel disegno proposto).

Tra i quesiti che sono risultati meno intuitivi ed evidenti per gli alunni c'è il quesito 11) che chiedeva una caratterizzazione per individuare due piani fra loro perpendicolari con **r** retta d'intersezione fra loro, scegliendo fra queste alternative:

a. *ogni retta che giace su uno di essi è perpendicolare ad ogni retta dell'altro.*

b. *ogni retta che sta su essi è perpendicolare ad* ***r****.*

c. *ogni piano che incontra* **r** *taglia i due piani secondo rette perpendicolari.*

d. *ogni piano che sia perpendicolare ad* **r** *incontra i due piani secondo rette perpendicolari tra loro.*

La risposta corretta, essendo l'ultima, ha assorbito minor attenzione rispetto alle altre. Forse erano troppe le situazioni da scandagliare per ciascuna alternativa di risposta; le prime tre affermazioni potevano essere vere solo per alcune posizioni della retta o dei piani coinvolti, mentre le opzioni affermavano che la relazione sostenuta dovesse valere *per ogni retta* o *per ogni piano* considerato.

Risultati modesti si sono avuti per i quesiti 13) 14) e 15), i quali, riferendosi a dei solidi e alla questione del calcolo di volumi hanno trovato gli studenti abbastanza sicuri, essendo questo un argomento da loro già incontrato, seppur a livello sperimentale-intuitivo nella Scuola Secondaria di primo grado. Da rilevare è stata una discussione che due coppie di studenti hanno intrattenuto fra loro, ciascuna per difendere la sua posizione in relazione al quesito 13) che domandava il tipo di sezione ottenuta fra un piano e una superficie sferica. L'una (Protocollo 4) affermava che in base all'inclinazione del piano, la sezione della sfera potesse essere un ellisse o un ovale, ma non sapeva quale delle due alternative scegliere, perché poi avrebbe dovuto anche scegliere l'alternativa che proponeva 'una circonferenza'; l'altra sosteneva che invece se si gira la sfera, il piano lo si può far diventare 'parallelo al piano d'appoggio della sfera' in modo tale da mostrare che la sezione risultava sempre una circonferenza o un punto (nel caso di piano tangente alla sfera). Questo test ha permesso ai ragazzi di 'entrare subito nel mondo tridimensionale', facendo loro toccare con mano alcune delle difficoltà irrinunciabili presenti in questo ambito. Nella correzione del test ho utilizzato dei modellini che costruivano gli studenti stessi e che loro stessi giudicavano esplicativi della situazione in oggetto.

Ho fatto poi seguire alcune lezioni nelle quali, insieme a loro formulavo le varie definizioni e facevo loro notare l'opportunità nella scelta di alcune di queste a discapito delle altre.

I ragazzi ai quali ho somministrato il test costituiscono un gruppo classe dalle capacità logico-argomentative appena sufficienti. La loro difficoltà di formalizzazione e di rigore è sempre stata accentuata e nel corso dei quattro anni liceali si è sempre, per questo motivo, dovuti partire dalla loro intuizione e creatività (doti queste che appartenevano loro maggiormente) per poi guidarli nella struttura teorica più difficilmente raggiungibile da loro. L'averli posti dinanzi ad un test su di un argomento quasi completamente 'nuovo'

senza l’ausilio di strumenti non ha fatto altro che aumentare la loro predisposizione ‘intuitiva’ nell’affrontare le situazioni problematiche.
Sulla sorta di questa osservazione riferita ad un contesto reale, emerge un aspetto interessante relativo alla componente rigorosa. Se il rigore è una risorsa che rafforza il valore del pensiero, è d’obbligo, perché è quello che mi dà la sicurezza delle conclusioni a cui arrivo razionalmente. Ma un insegnante che introducesse in modo artificiale (o che risultasse artificiale agli occhi dei propri studenti) una specie di ‘camicia di forza’ del ragionamento e lo costringesse entro schemi prestabiliti, oppure ritenesse come pericolosi e da evitare dei procedimenti mentali che non si adeguassero agli schemi prestabiliti, finirebbe per avere il risultato opposto rispetto alla ragione per cui il rigore sarebbe invece da apprezzare.
È esperienza comune degli insegnanti, incontrare ragazzi nei quali l’attenzione e la preoccupazione del rigore intesa nel primo senso ha come conseguenza la riduzione della capacità intuitivo-creativa di immaginare e di risolvere le situazioni prospettate.
È quindi nella scelta di un accorto e proporzionato equilibrio dell’utilizzo delle due componenti di intuizione e rigore che esse assumono il loro massimo e giusto significato.

Terminata l’analisi del test proposto ai ragazzi di quarta superiore, illustro un aspetto piuttosto difficoltoso legato alla didattica della geometria dello spazio: è la richiesta di svolgere dimostrazioni rigorose per oggetti tridimensionali.
Quando ho presentato il *teorema delle tre perpendicolari* ho fornito agli studenti l’enunciato e ho domandato loro di preparare per la lezione successiva un modellino che fosse esplicativo della situazione presentata dal teorema. Ho richiesto inoltre di pensare come poteva essere impostata la dimostrazione. Venti studenti su ventiquattro hanno portato modellino e dimostrazione corretti; gli altri quattro hanno portato il modellino non corretto dal quale non riuscivano poi a costruire la dimostrazione.
Per la fase di passaggio al rigore può essere importante la visualizzazione in 3D operata da Cabri, in alternativa ai modellini in cartoncino o altro materiale. Come ultimo passaggio ho richiamato la possibilità della rappresentazione grafica a mano su carta, con relative proiezioni ortogonali. Tutte le mini-dimostrazioni proponibili per la geometria solida sono parcellizzabili in dimostrazioni di geometria piana. Il proporre la geometria solida in quarta è dunque anche un modo per ripassare e tener viva la passione sintetica per la geometria iniziata nel primo anno della Scuola Secondaria di secondo grado!

5.6 LA GEOMETRIA: TRAMPOLINO PER LA LIBERTÀ?

In quest'ultimo paragrafo intendo esporre alcune osservazioni riguardanti certi temi attraenti, trattabili non tanto e non solo per il loro interesse dal punto di vista rigoroso-formale, ma semplicemente anche come curiosità per gli studenti. Nelle proposte che seguono è evidente la reazione di sorpresa e quindi di interesse che può scattare nell'alunno; perché allora non utilizzarle, da buoni oratori quali dovremmo essere noi insegnanti, per 'vendere' un prodotto a noi caro e che sappiamo 'fare del bene' ai ragazzi?

Il *primo tema* che indicherei è la narrazione di qualche diatriba fra matematici/geometri. Illustrare anche alcuni dibattiti storici avvenuti tra grandi matematici non fa altro che alimentare questo dinamismo presente nella costruzione del sapere geometrico.

Il *secondo tema* è quello della presentazione dei modelli euclidei di geometrie non euclidee. Questo ambito costituisce un banco di prova nel quale vengono messe in luce sia esigenze razionali di deduzione, sia esigenze psicologiche (capacità di convincere, vedere intuitivamente, rappresentare in modo corretto e plausibile).

> *La presentazione delle geometrie non euclidee non sarà fine a se stessa, ma servirà a chiarire il significato di assioma e di sistema ipotetico-deduttivo; la dimostrazione, per via elementare di alcune proprietà fondamentali di tali geometrie e la costruzione di idonei modelli rappresentativi potranno essere precedute, se lo si ritiene didatticamente proficuo,dalla illustrazione dei più significativi tentativi di dimostrazione del V postulato di Euclide.*[185]

Il *terzo spunto* è invece costituito dall'idea di affiancare l'inizio dello studio della geometria con la lettura di alcuni brani del testo *Flatlandia*[186]. È questo un racconto che stimola enormemente la fantasia geometrica. Consente, ad una attenta lettura di alcuni stralci, di poter verificare attraverso una buona conoscenza della geometria euclidea piana, il perché certi comportamenti nel mondo bidimensionale descritto siano possibili e consentiti. Si pensi, ad esempio, al fatto che il riconoscimento tramite la vista è pensato possibile; sono infatti immaginati presenti in questo mondo solo poligoni[187] regolari, che quindi hanno una ampiezza angolare fissata ed uguale per tutti i loro angoli.

I tre temi ipotizzati, due di tipo storico e uno di tipo fantastico, permettono ai ragazzi di gustare alcuni aspetti della geometria che appaiono più umani e liberanti.

[185] *Programmi Brocca, p.242*
[186] Cfr. Capitolo 2
[187] Oltre ai poligoni compare solo il Cerchio

Tutte le riflessioni di questo ultimo capitolo sono sostenute dalla convinzione che anche nella trattazione della geometria vada tenuta in considerazione l'*integralità* della persona. Le idee spendibili in classe cercano di toccare e stimolare la creatività degli studenti, il senso della loro appartenenza al mondo reale, la loro capacità di intuizione, le loro abilità informatiche, la loro potenzialità nel procedere in modo rigoroso e formale.
Non ci potremmo accontentare di una geometria che educhi solo una componente, quella del rigore; procedere solo in una direzione non sarebbe, secondo il mio modo di intendere l'educazione geometrica[188], un'autentica educazione, ma solo una presentazione di contenuti insignificanti.

[188] Cfr. Capitolo 2.

« L'intuizione quale puro immediato,
e il raziocinio, quale pura mediazione, sono due astrazioni;
e la realtà consiste nell'unità dell'immediato e della mediazione.

Sicchè non v'è esercizio di pensiero che non sia intuitivo e razionale ad un tratto;
e se il maestro non tiene conto dell'uno o dell'altro elemento,
non si può incontrare con lo spirito del suo scolaro, né penetrarvi dentro.

L'intuizione trascurata nel ragionamento
importa la astrattezza del ragionamento,
in cui il soggetto non potrà ritrovare se stesso. […]
C'è la luce, manca il calore.

Il ragionamento trascurato nella intuizione
importa l'arresto del processo spirituale
in cui l'universalità si realizza[…].
C'è il calore, manca la luce.

Fate intuire quanto volete, ma ragionando;
e fate ragionare quanto vorrete, ma intuendo.

La discriminazione ha luogo incessantemente nel processo reale dello spirito,
in cui l'intuizione si fa di continuo razionale; e lo sviluppo della razionalità, che è lo
sviluppo del pensiero sempre più ricco ne' suoi momenti costitutivi,
è la stessa realtà autocreatrice dello spirito».[189]

[189] Gentile G., vol.II, 1959, pp.100-101

Grazie…

Grazie prof. *Mario Marchi* per la professionalità, per la disponibilità e per l'affetto paterno espressi in questi anni di lavoro fianco a fianco. Grazie per le sfide che ha deciso di affrontare insieme a me e per me. Credo non sia stato un percorso facile …

Grazie al prof. *Giuseppe Bertagna* che ha sempre sostenuto con estrema fermezza la valenza formativa della matematica. Grazie per aver creduto nel connubio pedagogia-matematica. Grazie per aver accolto e risolto i dubbi che ponevo. Grazie per le esperienze di ricerca che mi ha sempre proposto sia all'interno del dottorato che in altri ambiti formativi.

Grazie al prof. *Ruggero Ferro*, alla prof.ssa *Maria Pia Perelli d'Argenzio*, alla prof.ssa *Rosa Iaderosa*, alla prof.ssa *Giuliana Sandrone* e alla prof.ssa *Vilma Chioda* che a vario titolo hanno contribuito al lavoro di ricerca qui presentato.

Grazie a *Laura* e *Francesca* che mi hanno affiancato da matematiche nel percorso di Dottorato facendomi gustare la bellezza del lavorare in un 'gruppo di ricerca'. Abbiamo condiviso impressioni, dubbi e speranze sul nostro percorso formativo e sul nostro percorso lavorativo.

Grazie ad *Evelina* e *Valentina* che da colleghe di dottorato provenienti da ambito pedagogico mi hanno reso familiare e comprensibile questo mondo attraente ma allo stesso tempo lontano da me e dalla mia formazione scientifico-matematica.

Grazie alla prof.ssa *Ketty Radice* che avendomi fatto incontrare le geometrie non euclidee al liceo scientifico mi ha fatto propendere per una visione 'aperta e liberante' della matematica. Da questa idea e convinzione hanno poi preso le mosse tutte le mie attività legate a questa disciplina.

Grazie alla prof.ssa *Patrizia Marastoni* che con la sua lunga e competente esperienza mi ha trasmesso, da studente la sua passione verso la matematica e la necessità del rigore in questa disciplina, e da docente una proficua condivisione da 'pari'.

Grazie *ai docenti e agli studenti delle Scuole* che hanno collaborato attraverso la compilazione dei questionari presentati nella tesi. In particolare ringrazio il mio Dirigente scolastico ing. *Giuseppe Raineri* e il Direttore *P.Igor Manzillo* che hanno sempre rispettato e acconsentito all'affiancamento della mia attività didattica con quella di ricerca per il dottorato.

Grazie ai *miei studenti*, che attraverso il loro modo di apprendere, di lasciarsi coinvolgere ed entusiasmare dalla matematica, di mostrare e raccontare le loro difficoltà, mi hanno sempre fatto percepire quanto fosse possibile sentire la matematica come una disciplina importante e ancora significativa.

Grazie *ai miei colleghi docenti* che hanno sempre espresso ammirazione verso questo percorso di studi che stavo percorrendo.

Grazie ai *miei genitori* per avermi sempre permesso di seguire e proseguire nel percorso di studi che desideravo.

Grazie *Roberto* perché tramite te riesco a vedere meglio e con più chiarezza me stessa. Grazie per l'incitamento costante a continuare nel percorso di dottorato nonostante le difficoltà quotidiane incontrate.

Grazie a te, piccola *Maria*, perché hai saputo pazientare molto nei tuoi primi tre anni di vita, concedendomi di portare a termine questa esperienza.

Francesca

ALLEGATO 1

QUESTIONARIO PER I DOCENTI DI MATEMATICA

Anni di insegnamento: ……………..

'Status docente':

- ☐ Di ruolo
- ☐ Tempo determinato
- ☐ Breve supplenza
- ☐ Abilitato
- ☐ Laureato
- ☐ Vincitore di concorso

Classi in cui sta attualmente insegnando:

☐ I ☐ II ☐ III ☐ IV ☐ V

Tipologia di scuola in cui insegna attualmente:

☐ Liceo ☐ Istituto tecnico ☐ Istituto professionale

1) Esaminando alcuni libri di testo per la scuola secondaria di secondo grado, quali fra i seguenti termini relativi alla geometria, le è capitato di incontrare?

- ☐ Geometria elementare
- ☐ Geometria delle trasformazioni
- ☐ Geometria euclidea
- ☐ Geometria sintetica[1]
- ☐ Geometria analitica
- ☐ Geometria dello spazio
- ☐ Geometria metrica
- ☐ Geometria simile

2) Quali fra i seguenti termini sono presenti nel suo libro di testo?

- ☐ Geometria elementare
- ☐ Geometria delle trasformazioni
- ☐ Geometria euclidea
- ☐ Geometria sintetica
- ☐ Geometria analitica
- ☐ Geometria dello spazio
- ☐ Geometria metrica
- ☐ Geometria simile

3) Quali fra i seguenti termini riferiti alla geometria ritiene sinonimi?

…è sinonimo di…	G.delle trasformazioni	G.euclidea	G.metrica	G.sintetica	G.analitica	G.dello spazio	G.simile
G.elementare							
G.delle trasformazioni							
G.euclidea							
G.metrica							
G.sintetica							
G.analitica							
G.dello spazio							

[1] Con questo termine indichiamo la trattazione della geometria utilizzando metodi sintetici.

4) Quali fra i seguenti termini riferiti alla geometria contengono gli altri?

…contiene,,,	G. elementare	G.delle trasformazioni	G.euclidea	G.metrica	G.sintetica	G.analitica	G.dello spazio	G.simile
G.elementare								
G.delle trasformazioni								
G.euclidea								
G.metrica								
G.sintetica								
G.analitica								
G.dello spazio								
G.simile								

5) A Suo parere esiste un ruolo formativo specifico della geometria (all'interno della conoscenza matematica complessiva)? Qual è tale ruolo formativo?

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

6) Attraverso gli strumenti di quali tipi di geometria fra quelli elencati affronta i seguenti argomenti? Indichi con una 'x' la scelta didattica che conduce affiancata dall'anno(I, II, III, IV, V) nel quale intraprende tale percorso di apprendimento e dalla lettera L = liceo, T = istituto tecnico e P = istituto professionale in base alla tipologia di scuola alla quale si sta riferendo:

	G.elementare	G.delle trasformazioni	G.sintetica	G.analitica
Nozioni di base (punto, retta, piano, appartenenza, ordinamento,…)				
Confronto fra segmenti e angoli				
Posizione reciproca fra rette nel piano e nello spazio				
Proprietà metriche dei triangoli				
Classificazione dei triangoli				
Criteri di congruenza dei triangoli				
Punti notevoli dei triangoli				
Criteri di similitudine dei triangoli				
Isometrie (definizione, composizione di isometrie e proprietà)				

	G.elementare	G.delle trasformazioni	G.sintetica	G.analitica
Similitudine (definizione e proprietà di similitudine)				
Quadrilateri				
Poligoni regolari				
Misura di segmenti e di superfici				
Equivalenza ed equiscomponibilità				
Teorema di Pitagora ed Euclide				
Circonferenza e cerchio (definizioni e prime proprietà)				
Teoremi sugli enti legati alla circonferenza				
Geometria solida				

7) Come affronta l'introduzione della geometria sintetica? Quali sono i primi passi del suo insegnamento volti ad avvicinare gli studenti alla costruzione assiomatica di tale disciplina? Se possibile descriva metodi e successione dei contenuti iniziali.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

8) Quali delle seguenti attività sono maggiormente presenti nella Sua didattica della geometria? Si ponga una sola 'x' per ciascuna riga a seconda del soggetto che maggiormente svolge quel tipo di attività.

	Dell'insegnante	Del singolo studente	Di gruppo
Attività dimostrativa			
Formulazione di definizioni			
Ricerca di proprietà degli oggetti geometrici			
Risoluzione di problemi			
Collegamento fra i diversi argomenti			
Utilizzo di software geometrici			

9) Si esprima il proprio grado di accordo o disaccordo con le seguenti affermazioni riguardanti i possibili significati della espressione: “approccio INTUITIVO”

	Per niente	Poco	Abbastanza	Completamente
Opposto a rigoroso				
Approccio più semplice di uno detto rigoroso perché si usano parole più semplici				
Approccio più semplice di uno detto rigoroso perché ci si appoggia su un solo esempio				
Approccio più semplice di uno detto rigoroso perché si ragiona guardando il disegno				
Coinvolge fantasia e creatività				
Procedere per tentativi				
Procedere per analogia con altre situazioni				
Precedente o preliminare al rigore				
Usuale				
Evidente				
Plausibile per cui non serve una dimostrazione				
Primo momento del processo di costruzione concettuale della conoscenza matematica				
Approccio basato su una spiegazione direttamente accettata dal soggetto come qualcosa di naturale, come un semplice dato di fatto				
Componente essenziale del pensiero ‘produttivo’				
Afferrare la soluzione prima di poter offrire una esplicita e completa giustificazione				
Incompleto				
Che si appoggia essenzialmente su un modello fisico e/o grafico				
Basato su di un giudizio di evidenza valutato in modo a-critico				
Sono le conoscenze da cui lo studente parte				
Altro……………………………………………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………………………				

10) Ritiene importante favorire l’intuizione geometrica nei Suoi studenti? Quali strategie mette in atto per incrementarla?

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

11) Si esprima il grado di accordo con le seguenti affermazioni riguardanti il significato di "approccio RIGOROSO" :

	Per niente	Poco	Abbastanza	Completamente
Opposto a intuitivo				
Approccio difficile perché basato su ragionamenti astratti e formali				
Approccio difficile perché si utilizza in modo da sembrare inutile su fatti che sono ritenuti ovvi (pedanteria)				
Procedere per catene deduttive				
Il fondamento della sicurezza con cui si è in grado di giudicare la verità delle proprie affermazioni				
Sottostare a regole logiche/espositive severe				
Metodo 'freddo' ch esclude creatività e fantasia				
Artificioso				
Chiaro e sistematico				
Dettagliato e analitico				
Aver compreso appieno il sistema assiomatico nel quale ci si sta muovendo				
Un concetto in divenire				
Un ragionamento in cui sono state chiaramente esplicitate le premesse iniziali dalle quali si sono poi tratte, con coerenza deduttiva , le conseguenze logiche				
Altro………………………………………………………………………………………………….. ……………………………………………………………………………………………………… ………………………………………………………………………………………………………				

12) Ritiene importante favorire il rigore geometrico nei Suoi studenti? Quali strategie mette in atto per svilupparlo?

……

……

……

13) Si indichi con un numero da 1 a 10 (dove 1 indica il massimo dissenso e 10 l'assenso assoluto) il ruolo a suo parere giocato dall'intuizione e dal rigore nei seguenti ambiti:

Ambiti	**Rigore**	**Intuizione**
Appropriazione da parte dello studente dei contenuti della geometria		
Crescita della conoscenza matematica in generale		
Utilizzo delle due categorie intuizione oppure rigore anche in ambiti di conoscenza non propriamente matematici o specificamente geometrici		

ALLEGATO 2

QUESTIONARIO STUDENTI - Biennio

Ti chiediamo di affrontare il seguente questionario con serietà.
Il fine delle domande non è valutativo, ma è quello di capire meglio come apprendi la geometria.
Dove richiesto, ti chiediamo di sforzarti nel giustificare la risposta.

CLASSE FREQUENTATA: ____________

1) Scegli 3 sostantivi che ritieni maggiormente attinenti alla tua idea di geometria o alle reazioni che questa disciplina ti suggerisce:

☐ Creatività	☐ Ragionamento	☐ Stupore	☐ Curiosità
☐ Intuizione	☐ Bellezza	☐ Concretezza	☐ Fantasia
☐ Rigore	☐ Disegno	☐ Dimostrazione	☐ Regole
☐ Calcolo	☐ Problema	☐ Noia	☐ Panico
☐ Formule	☐ Fatica	☐ Astrazione	☐ Altro:................

2) a)Se dovessi descrivere un trapezio ad un tuo amico gli diresti che è:

____

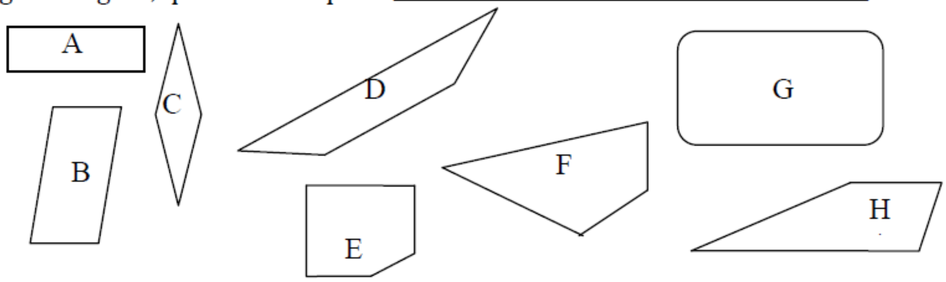
____

b) Quale definizione di trapezio ti è stata data a scuola?

____

____

c) Fra le seguenti figure, quali sono trapezi? ______________________________



d) Se denominiamo "Trapezio ogni quadrilatero che ha almeno due lati opposti paralleli", quali fra le precedenti figure sono trapezi? ____________________

e) Se denominiamo: "Trapezio ogni quadrilatero che ha solo due lati opposti paralleli". Quali fra le precedenti figure sono trapezi? ____________________

f) Se denominiamo "Trapezio un quadrilatero con due lati paralleli". Quali fra le precedenti figure sono trapezi? ____________________

g) Se denominiamo "parallelolatero" ogni quadrilatero con almeno due lati paralleli, quali fra le precedenti figure sono parallelolateri? ____________________

3) Per poter sostenere la seguente affermazione 'in un qualsiasi triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto', quale/i fra le seguenti strategie ritieni bastante?

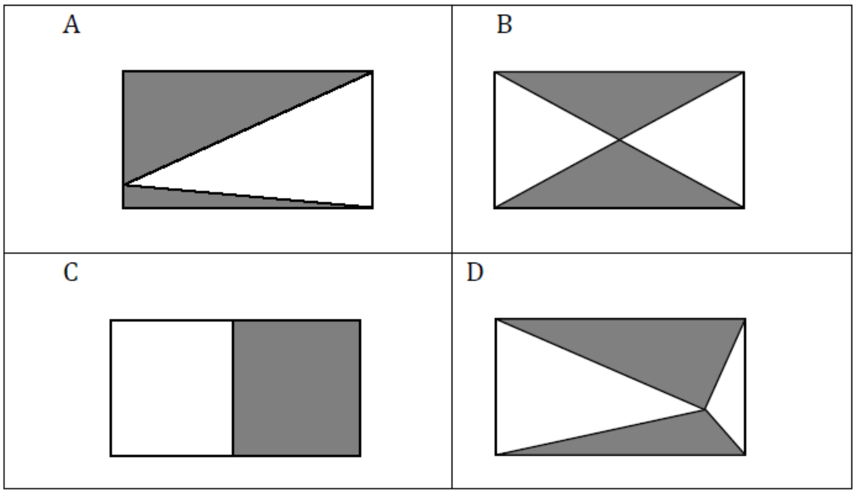
	Si	no	
A			Fare bene un disegno e misurare accuratamente gli angoli con il goniometro
B			Ritagliare un triangolo e fare delle piegature in modo da verificarlo
C			Fare tanti disegni di diversi triangoli e tante misure
D			Altro: (specificare...)

Giustifica la tua risposta: ____

____

____

4) *Per dividere un rettangolo in due parti della stessa estensione (l'una bianca e l'altra grigia) si propongono le seguenti soluzioni:*



Quali delle proposte ti sembra possano soddisfare la condizione sopra espressa? [scegli una sola risposta]

- ☐ Tutte
- ☐ Nessuna
- ☐ Solo la B e la C
- ☐ Tutte tranne la A
- ☐ Tutte tranne la D

Giustifica la tua risposta:

____

____

____

____

5) Quante altezze ha il triangolo ABC essendo $A\left(\frac{1}{3},\pi\right)$, $B\left(-\frac{2}{35},0\right)$ e $C\left(2,-\frac{\pi}{2}\right)$? ______

Come hai fatto ad arrivare al risultato? Scegli al massimo due delle alternative proposte:

- ☐ Hai fatto un disegno preciso
- ☐ Hai usato un ragionamento
- ☐ Hai fatto dei calcoli
- ☐ Hai usato delle formule
- ☐ Hai utilizzato vecchie conoscenze
- ☐ Altro: ....

Sei convinto o hai qualche perplessità? ____

6) Quante altezze ha il triangolo ABC essendo $A(1,4)$, $B(-2,0)$ e $C(2,-5)$? __________

Come hai fatto ad arrivare al risultato? Scegli al massimo due delle alternative proposte:

- ☐ Hai fatto un disegno preciso
- ☐ Hai usato un ragionamento
- ☐ Hai fatto dei calcoli
- ☐ Hai usato delle formule
- ☐ Hai utilizzato vecchie conoscenze
- ☐ Altro: ....

Sei convinto o hai qualche perplessità? ____

8) Sono date in un piano tre rette distinte *r*, *s*, *t*. Quale delle seguenti proposizioni è VERA, qualunque siano le rette assegnate con le caratteristiche specificate? [Scegli una sola risposta]

- ☐ Se *r* è perpendicolare a *s* e *s* è perpendicolare a *t*, allora *r* è perpendicolare a *t*.
- ☐ Se *r* interseca sia *s* che *t*, allora le tre rette si incontrano in un unico punto.
- ☐ Se *r* interseca *s* e *s* interseca *t*, allora *r* interseca *t*.
- ☐ Se *r* è parallela a *s*, e *s* interseca *t*, allora anche *r* interseca *t*.

Spiega perché è vera l'opzione che hai scelto:

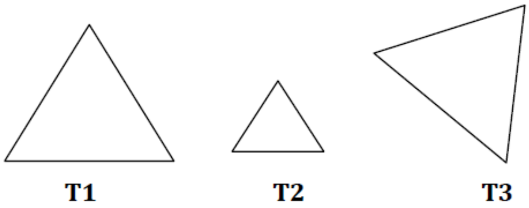
____

____

9) Un poligono è regolare se tutti i suoi lati sono uguali e tutti i suoi angoli sono uguali. Un poligono non è regolare se e solamente se… [Scegli una sola risposta]

- ☐ tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli sono disuguali.
- ☐ tutti i suoi lati o tutti i suoi angoli sono disuguali.
- ☐ almeno due dei suoi lati e almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali.
- ☐ almeno due dei suoi lati o almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali.

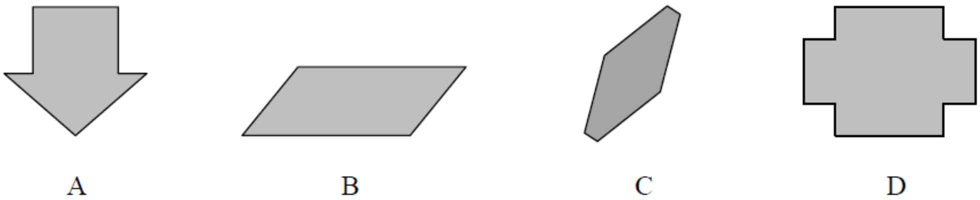
10) Due triangoli ABC e A'B'C' sono simili se i rapporti fra le coppie di lati AB e A'B', AC e A'C', BC e B'C' sono fra loro uguali. Osserva i triangoli equilateri T1, T2 e T3.



Accettando la definizione ora introdotta, quali fra i triangoli rappresentati sono simili? [Scegli una sola risposta]

- ☐ Tutti e tre
- ☐ Nessuna coppia
- ☐ Solo T1 e T2
- ☐ Solo T2 e T3
- ☐ Solo T1 e T3

11) *Un poligono è convesso se ciascun segmento avente come estremi una qualsiasi coppia di punti interni al poligono , giace completamente nel poligono.*
Se un poligono non è convesso, si dice che è concavo.
Osserva i seguenti poligoni:



Quali sono concavi? Scegli anche più opzioni:

- ☐ A
- ☐ B
- ☐ C
- ☐ D
- ☐ È una verifica troppo lunga da svolgere

Giustifica la risposta:

____

____

____

Grazie per la collaborazione!

ALLEGATO 3

QUESTIONARIO STUDENTI - Triennio

Ti chiediamo di affrontare il seguente questionario con serietà.
Il fine delle domande non è valutativo, ma è quello di capire meglio come apprendi la geometria.
Dove richiesto, ti chiediamo di sforzarti nel giustificare la risposta.

CLASSE FREQUENTATA: ______________

1) Scegli 3 sostantivi che ritieni maggiormente attinenti alla tua idea di geometria o alle reazioni che questa disciplina ti suggerisce:

☐ Creatività	☐ Ragionamento	☐ Stupore	☐ Curiosità
☐ Intuizione	☐ Bellezza	☐ Concretezza	☐ Fantasia
☐ Rigore	☐ Disegno	☐ Dimostrazione	☐ Regole
☐ Calcolo	☐ Problema	☐ Noia	☐ Panico
☐ Formule	☐ Fatica	☐ Astrazione	☐ Altro:....................

2) a. Se dovessi descrivere un trapezio ad un tuo amico gli diresti che è:

___

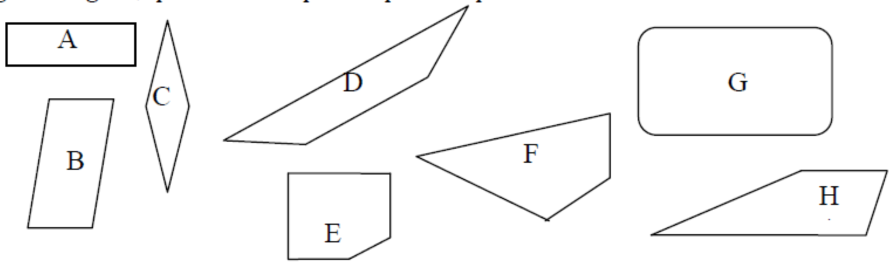
___

b. Quale definizione di trapezio ti è stata data a scuola?

___

___

c. Fra le seguenti figure, quali sono trapezi rispetto a quest'ultima definizione? ______________________



d. Se denominiamo "Trapezio ogni quadrilatero che ha almeno due lati opposti paralleli", quali fra le precedenti figure sono trapezi? _________________________

e. Se denominiamo: "Trapezio ogni quadrilatero che ha solo due lati opposti paralleli". Quali fra le precedenti figure sono trapezi? _________________________

f. Se denominiamo "Trapezio un quadrilatero con due lati paralleli". Quali fra le precedenti figure sono trapezi? _________________________

g. Se denominiamo "parallelolatero" ogni quadrilatero con almeno due lati paralleli, quali fra le precedenti figure sono parallelolateri? _________________________

3) Per poter sostenere la seguente affermazione 'in un qualsiasi triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto', quale/i fra le seguenti strategie ritieni bastante?

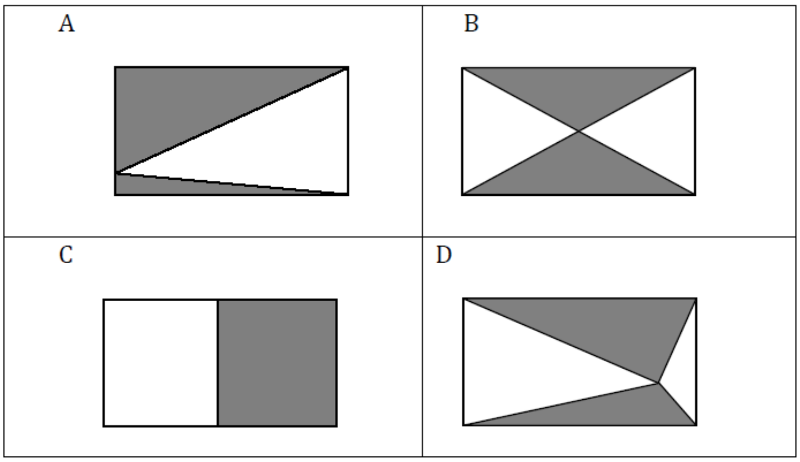
	Si	no	
a)			Fare bene un disegno e misurare accuratamente gli angoli con il goniometro
b)			Ritagliare un triangolo e fare delle piegature in modo da verificarlo
c)			Fare tanti disegni di diversi triangoli e tante misure
d)			Altro: (specificare...)

Giustifica la tua risposta: ____

____

____

4) *Per dividere un rettangolo in due parti della stessa estensione (l'una bianca e l'altra grigia) si propongono le seguenti soluzioni:*



Quali delle proposte ti sembra possano soddisfare la condizione sopra espressa? [scegli una sola risposta]

- ☐ Tutte
- ☐ Nessuna
- ☐ Solo la B e la C
- ☐ Tutte tranne la A
- ☐ Tutte tranne la D

Giustifica la tua risposta: ____

____

____

____

5) Quante altezze ha il triangolo ABC essendo $A\left(\frac{1}{3},\pi\right)$, $B\left(-\frac{2}{35},0\right)$ e $C\left(2,-\frac{\pi}{2}\right)$? __________

Come hai fatto ad arrivare al risultato? Scegli al massimo due delle alternative proposte:

- ☐ Hai fatto un disegno preciso
- ☐ Hai usato un ragionamento
- ☐ Hai fatto dei calcoli
- ☐ Hai usato delle formule
- ☐ Hai utilizzato vecchie conoscenze
- ☐ Altro: ....

Sei convinto o hai qualche perplessità? ______________________________________

6) Quante altezze ha il triangolo ABC essendo $A(1,4)$, $B(-2,0)$ e $C(2,-5)$? __________

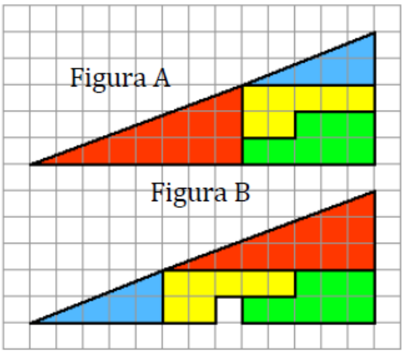
Come hai fatto ad arrivare al risultato? Scegli al massimo due delle alternative proposte:

- ☐ Hai fatto un disegno preciso
- ☐ Hai usato un ragionamento
- ☐ Hai fatto dei calcoli
- ☐ Hai usato delle formule
- ☐ Hai utilizzato vecchie conoscenze
- ☐ Altro: ....

Sei convinto o hai qualche perplessità? ____

7)Le due figure rappresentate a fianco sono costruite ciascuna dagli stessi 4 poligoni.

Eppure se calcoliamo l'area delle due figure otteniamo:



Area della Figura A→ (13x5):2=32,5

Area della Figura B→ (13x5):2 – 1 =31,5

Cosa è successo? Scegli solo una fra le seguenti opzioni e completa:

- ☐ Non è vero che i quattro poligoni sono gli stessi, infatti__________________________________
  ____
- ☐ È sbagliato il disegno perché ____
  ____
- ☐ È sbagliata la formula che viene utilizzata per il calcolo dell'area, infatti, _______________
  ____
- ☐ Altro:____
  ____

8) Sono date in un piano tre rette distinte *r*, *s*, *t*. Quale delle seguenti proposizioni è VERA, qualunque siano le rette assegnate con le caratteristiche specificate? [Scegli una sola risposta]

a) Se *r* è perpendicolare a *s* e *s* è perpendicolare a *t*, allora *r* è perpendicolare a *t*.

b) Se *r* interseca sia *s* che *t*, allora le tre rette si incontrano in un unico punto.

c) Se *r* interseca *s* e *s* interseca *t*, allora *r* interseca *t*.

d) Se *r* è parallela a *s*, e *s* interseca *t*, allora anche *r* interseca *t*.

Spiega perché è vera l'opzione che hai scelto:

____

____

9) Un poligono è regolare se tutti i suoi lati sono uguali e tutti i suoi angoli sono uguali.
Un poligono non è regolare <u>se e solamente se</u>… [Scegli una sola risposta]

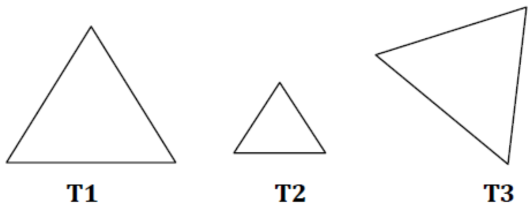
a) tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli sono disuguali.

b) tutti i suoi lati o tutti i suoi angoli sono disuguali.

c) almeno due dei suoi lati e almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali.

d) almeno due dei suoi lati o almeno due dei suoi angoli sono tra loro disuguali.

10) Due triangoli ABC e A'B'C' si dicono simili se i rapporti fra le coppie di lati AB e A'B', AC e A'C', BC e B'C' sono fra loro uguali. Osserva i triangoli equilateri T1, T2 e T3.



Accettando la definizione ora introdotta, quali fra i triangoli rappresentati sono simili? [Scegli una sola risposta]

a) Tutti e tre

b) Nessuna coppia

c) Solo T1 e T2

d) Solo T2 e T3

e) Solo T1 e T3

11) Quando devi svolgere una dimostrazione di un teorema di geometria solitamente fai il disegno della situazione presentata. A cosa serve, a tuo parere, il disegno?

[Scegli al massimo due risposte]

a) Aiuta nella scelta dei passi da compiere
b) Dice già che tutto ciò che è espresso nel teorema è vero
c) Non serve a niente
d) Mi verifica che ciò che si affermerà nella dimostrazione è corretto
e) Altro

Se hai scelto l'opzione 'Altro' specifica qui di seguito a cosa serve a tuo parere il disegno in una dimostrazione geometrica: ______________________________

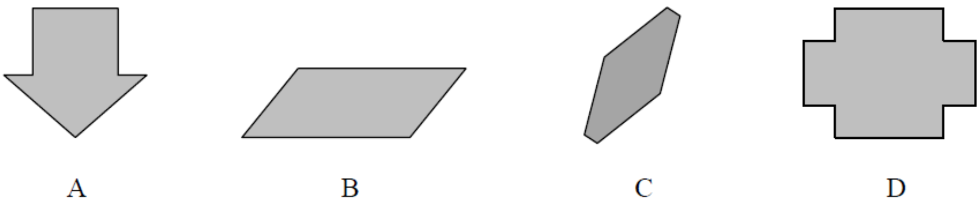
____

____

12) *Un poligono è convesso se ciascun segmento avente come estremi una qualsiasi coppia di punti interni al poligono , giace completamente nel poligono.*

Se un poligono non è convesso, si dice che è concavo.

Osserva i seguenti poligoni:



Quali sono concavi? Scegli anche più opzioni:

- ☐ A
- ☐ B
- ☐ C
- ☐ D
- ☐ È una verifica troppo lunga da svolgere

Giustifica la risposta:

____

____

____

Grazie per la collaborazione!

ALLEGATO 4

Tema chiave dell'intervista: Gli aspetti sintetici della geometria.
Ruolo di intuizione e rigore.

1. Tipo di scuola nella quale insegna: *Liceo scientifico (II, IV, V) PNI*

   Liceo scienze sociali (III, 3h settimanali)

SCELTE DIDATTICHE - RIFLESSIONI SULLA DISCIPLINA

2. Insegna la geometria sintetica ? Perché sì (ruolo formativo….)? … Perché no?

   Al liceo scientifico si, al liceo delle scienze sociali in genere si, tranne quest'anno perché la classe era molto indietro con il programma, quindi ho dovuto riprendere tutte le equazioni e disequazioni (risoluzione grafica). L'anno prossimo tratterò la circonferenza sia dal pdv analitico che da quello sintetico.
   Ruolo formativo: insegna a ragionare bene.

LICEO SCIENTIFICO(da qui in poi)…

3. 3.1 In quale classe inizia ad insegnarla?

Parto dalla prima fino alla quinta. In particolare affianco in terza la geometria sintetica/analitica della circonferenza, in quarta le trasformazioni e in quinta la geometria solida.

3.2 Quale il motivo di questa scelta?

- ☐ Motivo istituzionale
- ☐ In base alla fisionomia della classe
- ☐ Per scelta personale
- ☐ *Perché penso rispetti maggiormente la maturazione dei ragazzi, in particolare la capacità di astrazione dal disegno. Inoltre coinvolge diverse componenti tra cui la logica, il significato di negazione,...che devono essere rielaborate dagli studenti prima che diventino loro patrimonio*

4. Strumenti utilizzati per l'insegnamento:

- ☐ Software*(uso dell'insegnante)*
- ☐ Libro testo X
- ☐ Lezione frontale X
- ☐ Appunti ragazzi X
- ☐ Schede fornite insegnante X
- ☐ Materiale di storia della matematica*(ogni anno viene ridotta per mancanza di tempo. In prima faccio accenni alle geometrie non euclidee per poi riprenderle in quinta in modo più sistematico)*

Da quando nell'istituto i corsi di recupero interrompono per una settimana le lezioni a gennaio, il tempo a nostra disposizione è davvero poco, quindi cerco di andare in profondità sul metodo geometrico assiomatico limitando le osservazioni storiche a come si è arrivati alla costruzione di tale impianto.

5. Parlare di geometria sintetica coincide con l'uso del 'metodo assiomatico'?

No, il metodo assiomatico è qualcosa di più ampio. La geometria sintetica lo utilizza ma ci sono anche altri ambiti in cui utilizzarlo.

6. Come motiva agli studenti l'introduzione del metodo assiomatico proposto nella scuola secondaria di secondo grado a scapito del metodo 'intuitivo-sperimentale' proposto in quella di primo grado?

Non abbandono del tutto il metodo intuitivo, infatti, ad esempio quando presento i criteri di congruenza dei triangoli non li dimostro, ma cerco di spiegare loro la bontà della scelta di tali affermazioni. Parto da ciò che loro conoscono già.

7. Come affronta l'introduzione della geometria sintetica? Quali sono i primi passi del suo insegnamento volti ad avvicinare gli studenti alla costruzione assiomatica di tale disciplina?

Chiedo loro di dirmi cosa sanno di geometria e poi pian piano cerchiamo di formalizzare e rendere rigoroso ciò di cui loro parlano.

8. Esiste secondo lei una bellezza specifica della geometria sintetica? Se si, qual è ?

Io preferisco la geometria al calcolo perché richiede di mettere in campo delle capacità quali l'originalità, la 'lettura' del disegno, la sua interpretazione per costruire un ragionamento formale.

<u>RIFLESSIONI SUL PERCORSO DI APPRENDIMENTO DEGLI STUDENTI</u>

9. Quali le difficoltà legate all'insegnamento della geometria sintetica?
   - ☐ Difficoltà della disciplina
   - ☐ Difficoltà di metodo
   - ☐ Immaturità dei ragazzi
   - ☐ …………………

10. Negli studenti prevale l'approccio intuitivo verso la geometria sintetica. Nel suo insegnamento come incanala/sfrutta questa loro propensione?

11. Il ruolo del disegno in geometria è irrinunciabile. Come lo sfrutta nel suo insegnamento? Come chiede agli studenti di utilizzarlo?

12. Come intende il rigore geometrico all'interno della sua proposta didattica della geometria sintetica? *Scelte tutte le opzioni*

- ☐ Rigore-precisione nella presentazione dei contenuti
- ☐ Rigore nella definizione delle premesse
- ☐ Rigore degli studenti nella restituzione di informazioni fornite dal docente
- ☐ Rigore nell'espressione linguistica dell'insegnante e degli studenti
- ☐ Rigore nella deduzione-giustificazione di teoremi o affermazioni
- ☐ ……………………..

13. Fino a che punto un insegnante può pretendere il 'rigore' nei suoi studenti? In che senso va inteso tale termine?

Con gradualità

PERCEZIONE DEL PROPRIO LAVORO

14. E' soddisfatto di come insegna la geometria sintetica?
Ogni insegnante appassionato al suo lavoro è soddisfatto di come lo svolge

15. Ha sempre impostato il lavoro nello stesso modo o negli anni ha variato la sua proposta didattica? Per quale motivo?

Vario ogni anno con il variare della classe. Ci sono classi in cui è necessario …
Anni fa proponevo l'utilizzo del software ai ragazzi, ora per mancanza di tempo non è più possibile.

RELATIVAMENTE ALLA RICERCA

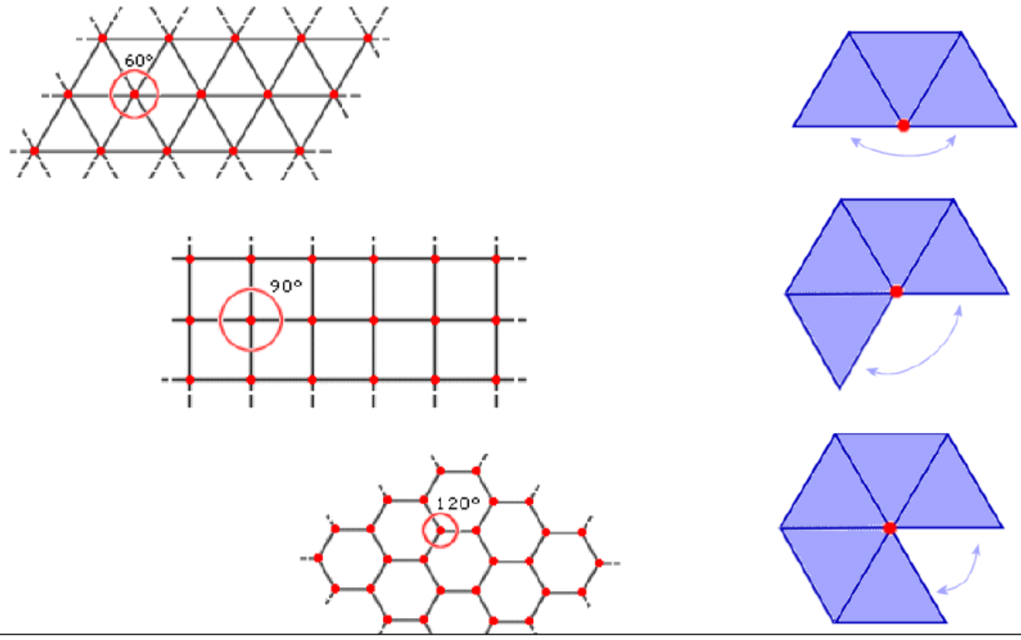
16. Ritiene utili riflessioni del tipo proposto da questa intervista al fine di un miglioramento della proposta didattica sulla geometria sintetica ?

Soprattutto al fine di stimolare il Ministero a non annullare la geometria sintetica. In particolare nelle ultime Indicazioni nazionali la geometria sintetica viene condensata nel biennio; tale proposta è poco rispettosa della geometria, infatti sia per la vastità dei contenuti che essa deve trattare, sia per il processo inadeguato all'età degli studenti, significa non poter approfondire contenuti e metodo della geometria e quindi cercarne il suo annullamento.

17. Commenti all'intervista ora effettuata e al questionario compilato.

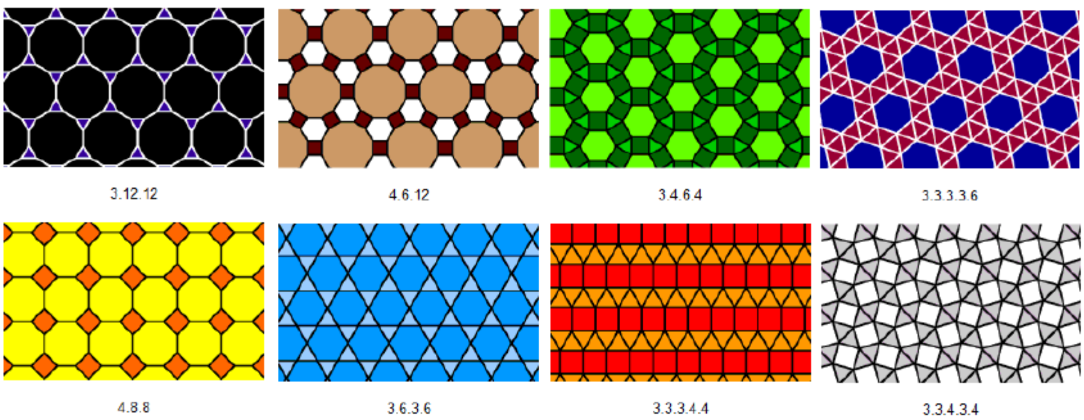
ALLEGATO 5

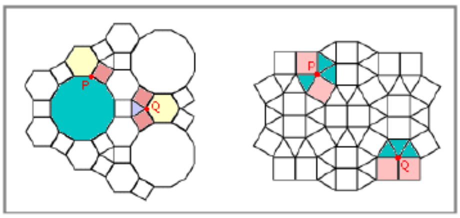
Tassellazioni regolari



ALLEGATO 6

Le 8 tassellazioni semiregolari





Non sono semiregolari

Quesiti all'esame di stato

1. *Sessione Suppletiva a.s.2001/2002 Liceo Scientifico*
   Di due rette a, b, assegnate nello spazio ordinario, si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari ad una stessa retta p.
   - ◊ E' possibile che le rette a, b siano parallele?
   - ◊ E' possibile che le rette a, b siano ortogonali?
   - ◊ le rette a, b sono comunque parallele?
   - ◊ le rette a, b sono comunque ortogonali?

   Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

2. *Sessione Ordinaria a.s. 2002/2003 Liceo Scientifico*
   Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe. Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3. *Sessione Suppletiva a.s. 2002/2003 PNI*
   Nello spazio ordinario sono dati due piani a , b ed una retta r. Si sa che r è parallela ad a e perpendicolare a b . Cosa si può concludere circa la posizione reciproca di a e b ? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

4. *Sessione Straordinaria a.s. 2002/2003 PNI*
   Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

5. *Sessione straordinaria a.s. 2003/2004 PNI*
   Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare ad uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.
   Si può concludere che ogni retta parallela ad uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

1) È possibile che due rette nello spazio **non** abbiano punti in comune e **non** siano parallele?

a. No, se non hanno punti comuni, sono necessariamente parallele.
b. Certo, se sono sghembe.
c. No, se non sono parallele, allora hanno almeno un punto in comune.
d. E' possibile, dipende da come si prolungano.

2) Nel piano, dati una retta **r** ed un punto **P** che non appartiene ad **r**, esiste una ed una sola retta che passi per **P** e sia parallela ad **r**.
Nello spazio, data una retta **r** ed un punto **P** fuori di essa, quante rette parallele ad **r** passano per **P** ?

a. Nessuna.
b. Una ed una sola.
c. Infinite, che formano un semispazio.
d. Infinite, che formano un piano.

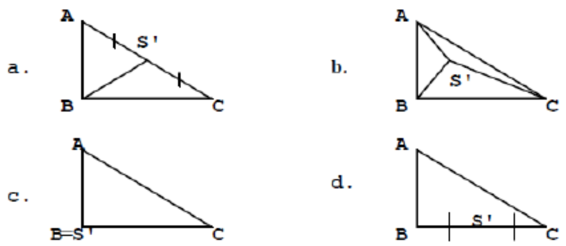
3) Dati un piano π ed un punto **P** fuori di esso, quante rette passano per **P** e sono parallele a π?

a. Nessuna.
b. Una ed una sola.
c. Infinite, che formano un semispazio.
d. Infinite, che formano un piano.

4) Quante sono nello spazio le rette perpendicolari ad una retta data r in un suo punto **P** ?

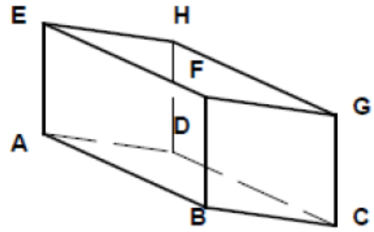
a. Una sola.
b. Due.
c. Nessuna.
d. Infinite.

5) Si consideri una piramide con vertici **A, B, C** ed **S**, la cui base **ABC** è un triangolo rettangolo, con $A\hat{B}C = 90°$ e con **SA=SB=SC**.
Qual è la proiezione della piramide sul piano della sua base **ABC** (essendo S' la proiezione di S)?

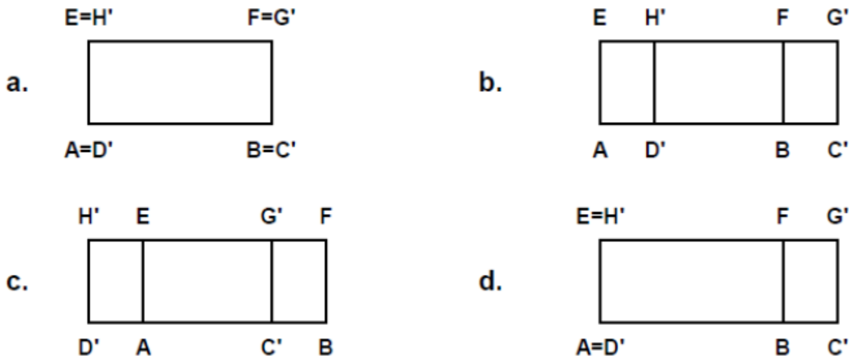


6) Si consideri un prisma retto, la cui base è un *parallelogramma* con ABC > DAB **, (**in un prisma “retto” le “pareti” sono perpendicolari alle basi) . Il piede della perpendicolare condotta da **A** al piano **BCGF è:**

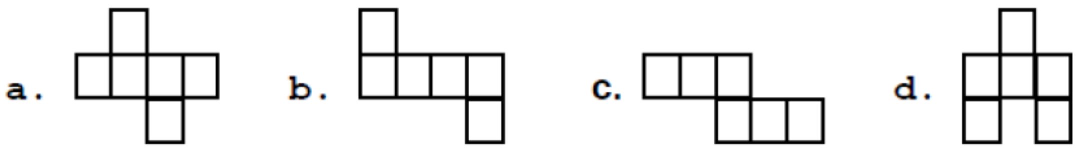
a. in **B**
b. in **CF**
c. sul segmento **BC**
d. sulla retta **BC** ma non tra **B** e **C**



7) La proiezione ortogonale del prisma precedente sul piano **ABFE** è:

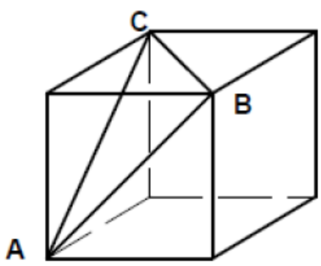


8) Tra i seguenti disegni individua quello che **non** rappresenta lo sviluppo di un cubo.



9) **AB** e **BC** sono due diagonali delle facce di un cubo.
Quanto misura l’angolo **ABC** ?

a. 90°
b. 120°
c. 60°
d. 45°



10) Con un comune foglio di carta della macchina da scrivere **lungo cm 30** e **largo cm 20** si possono costruire due cilindri: in un caso si arrotola il foglio nel senso della lunghezza e nell'altro nel senso della larghezza. Cosa possiamo dire dei due cilindri?

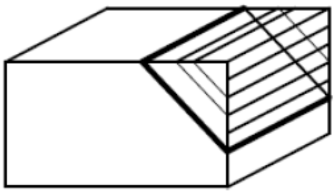
a. Hanno la stessa superficie totale.
b. E' maggiore la superficie laterale di quello con **altezza cm 30.**
c. E' maggiore la superficie laterale di quello con **altezza cm 20.**
d. Hanno la stessa superficie laterale.

11) Due piani si incontrano in una retta **r**. Essi sono perpendicolari tra loro se:

a. ogni retta che giace su uno di essi è perpendicolare ad ogni retta dell'altro.
b. ogni retta che sta su essi è perpendicolare ad **r**.
c. ogni piano che incontra **r** taglia i due piani secondo rette perpendicolari.
d. ogni piano che sia perpendicolare ad **r** incontra i due piani secondo rette perpendicolari tra loro.

12) Il solido tratteggiato è:

a. un prisma a base triangolare
b. un parallelepipedo
c. un tronco di piramide
d. una piramide a base quadrata



13) Se un piano incontra una superficie sferica, i punti dell'intersezione tra piano e superficie formano:

a. una circonferenza.
b. un'ellisse.
c. una circonferenza o un punto.
d. un ovale.

14) Nello spazio, si consideri un triangolo equilatero **ABC**. Se si fa compiere alla figura un giro completo attorno alla retta **AB**, si ottiene una superficie che è:

a. un cono (limitato) che ha la stessa altezza del triangolo.
b. un cono (limitato) la cui altezza è il segmento **AB**.
c. due coni congruenti aventi la base in comune.
d. un tronco di cono.

15) Se si raddoppia il lato di un cubo, il volume risulta:
a. raddoppiato
b. moltiplicato per 8
c. triplicato
d. elevato al cubo

PROTOCOLLI

Protocollo 1

Risposta alla domanda 1

a - c: risposte corrette se limitatamente al piano.
d: è errata; discorda con il concetto di parallelismo.
b: soluzione accettabile.

Protocollo 2

Risposta alla domanda 1

Perché se due rette si trovano sullo stesso piano, e se non sono parallele hanno almeno un punto in comune perché sono infinite. Mentre se sono sghembe non appartengono allo stesso piano e nonostante non siano parallele non possono avere punti in comune.

Protocollo 3A

Risposta alla domanda 2

2) - Se parallele significa non si incontrano mai e giacciono sullo stesso piano la risposta è B
- Se parallele significa che non si incontrano mai la risposta è D

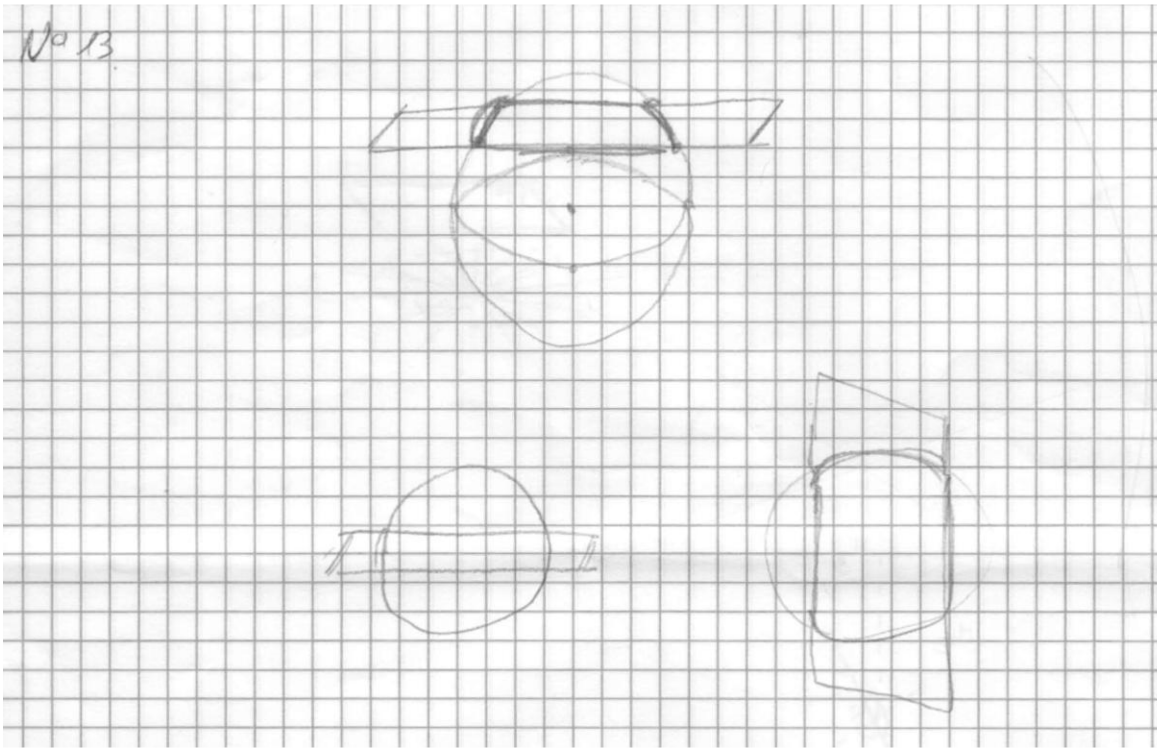
Protocollo 3B

Risposta alla domanda 2

2) b_
Se per parallele ~~rette~~ intendiamo due rette appartenenti allo stesso piano esiste una e una sola retta passante per P.
d) Se per parallele intendiamo due rette non appartenenti allo stesso piano esistono infinite rette passanti per P che formano un piano -

Protocollo 4

Risposta alla domanda 13



BIBLIOGRAFIA

AA.VV., ICMI Study : *Perspectives on the teaching of geometry in the 21th century*, pre-proceedings for Catania Conference, Editor C.Mammana, Dpt. of Mathematics, University of Catania, 1995.

AA.VV., *Matematica 2003, Attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curricolo di Matematica*, Lucca 2003.

AA.VV. *Un'indagine sulle conoscenze di Geometria dello spazio degli studenti negli anni iniziali delle Scuole Superiori*, Ricerca finanziata dal C.N.R. e dalla Università della Calabria, 2000.

Abbott E.A., *Flatlandia*, Gli Adelphi, Milano 2007.

Bagni G.T., *Artefatti, strumenti e didattica della matematica*, Appunti per il Corso Master Educazione Scientifica, Dip. di Matematica e Informatica, Univ. di Udine, a.a. 2006-2007.

Bartolini Bussi M.G. e Boni M., *Analisi dell'interazione verbale nella discussione matematica: un approccio Vygotskiano* in «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», vol.18°, n.3, maggio 1995.

Bernardi C., *Intuizione e dimostrazione nell'insegnamento della geometria dello spazio*, Appunti della conferenza tenuta il 17 aprile, Verona 2008.

Bernardo A., *Leggere Klein*, in «Nuova Secondaria», n°2 1998-1999.

Bertagna G., *Dall'educazione alla pedagogia, Avvio al lessico pedagogico e alla teoria dell'educazione*, Editrice La Scuola, Brescia, 2010.

Bertagna G., *Quale identità per la pedagogia? Un itinerario e una proposta* in «Rassegna di Pedagogia», 1-4, 2009.

Betti R., *Lobacevskij. L'invenzione delle geometrie non euclidee*, Bruno Mondadori, 2005.

Bottazzini U., *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino 1981.

Bottazzini U., *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino, 2005.

Boyer C., *Storia della Matematica*, Oscar saggi Mondadori, 1990.

Brousseau G., *Ostacles epistemologiques en mathèmatiques* , in «Recherches ed Didactiques Mathèmatiques», 4, 2, 1983.

Bruner S., *The process of education*, Harvard University Press, Cambridge, Massachussets, 1965.

Campedelli M.G., *Studi sui quadrangoli, Percorsi dalla storia* in «Nuova Secondaria», n.6, 2008 , p.59.

Canetta P., Manara C.F., Marchi M.(a cura di), *Per un curricolo continuo di educazione matematica nella scuola dell'obbligo*, Quaderni IRRSAE Lombardia n.13, 1986.

Cannizzaro L., Menghini M., *Figure geometriche e definizioni: un itinerario guidato per l'inizio della Scuola Secondaria,* Quaderno del Centro Ricerche didattiche 'U.Morin', 2004.

Casari E., *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli Editore, Milano 1972.

Castelnuovo E., *Geometria intuitiva, per le scuole medie inferiori*, Carrabba, Lanciano-Roma, 1948.

Chevallard Y., *Dimension instrumentale, dimension sèmiotique de l'activitè mathèmatique. Seminaire de Didactique des Mathèmatique et de l'Informatique de Grenoble.* LSD2, IMAG, Universitè J. Fourier, Grenoble 1991.

Chiappini G., *Il laboratorio didattico di matematica: riferimenti teorici per la sua costruzione*, in «Innovazione educativa», Irre Emilia Romagna, n°8, ottobre 2007.

Damiano E., *Insegnare con i concetti. Un modello didattico tra scienza e scuola*, Sei, Torino 1994.

D'Amore B., *Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica*, in «La matematica e la sua didattica», n.2, 2001.

D'Amore B., *Didattica della Matematica,* Pitagora Editrice, Bologna, 2001.

D'Amore B., *Elementi di Didattica della Matematica,* Pitagora Editrice, Bologna, 1999.

D'Amore B., *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice, Bologna, 2003.

De Bartolomeis F. , *Sistema dei laboratori*, Feltrinelli, Milano, 1979.

Dewey J., *Logica. Teoria dell'indagine* (ed.or. 1938), tr. It., Einaudi, Torino, vol.II, 1973-1974.

Di Stefano C., *Sull'evoluzione del concetto di rigore nella storia delle matematiche,* parte I, in «La matematica e la sua didattica», Vol.4, pp.374-382, 1994.

Duval R., *Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée,* in «Annales de didactique et de sciences cognitives», 5, 1993.

Enriques F., *Insegnamento dinamico*, Periodico di matematica, 1921, pp.6-16.

Enriques F., *Le matematiche nella storia e nella cultura,* Zanichelli, Bologna 1938 (Ristampa anastatica 1971).

Ferro R., Appunti delle Lezioni *di Logica ed epistemologia della matematica*, Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario, Università Cattolica di Brescia, a.a. 2006-07.

Fischbein E., Vergnaud G., *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, Pitagora Editrice Bologna, 1992.

Fischbein E., *Intuizione e dimostrazione*, 1983.

Fischbein E., *The theory of figural concepts*, in «Educational studies in Mathematics», 24, Kluwer Academy Publisher, Netherlands 1993.

Frajese A., Maccioni L., (a cura di), *Gli Elementi di Euclide*, Unione Tipografico-Editrice torinese, 1970.

Frattini G., *Geometria intuitiva: per uso delle scuole complementari e del ginnasio inferiore*, G.B.Paravia, Torino 1901.

Freudenthal H., *Ripensando l'educazione matematica*, Editrice la scuola, 1994.

Fujita T., Jones K., Yamamoto S., *The role of intuition in geometry education: learning from the teaching practice in the early 20th century*, ICME 10, Copenhagen, Denmark, July 4-11, 2004.

Furinghetti F., *Luci e ombre nell'approccio "intuitivo",* in Furinghetti, F., *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, CNR,-TID project, FMI series, 13, 83-96 (1991).

Gario P., *Perché dimostrare ciò che è evidente?,* in «L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate», Centro ricerche didattiche U.Morin, Paderno del Grappa, vol.33B N.2, aprile 2010.

Gentile G., *Sommario di pedagogia come scienza filosofica*, Sansoni, vol. I-II, Firenze 1959.

Geymonat L., *Filosofia e filosofia delle scienze*, Feltrinelli, Milano, 1960.

Godfrey C. and Siddons A. W., *The teaching of Elementary Mathematics*. University Press, Cambridge 1931.

Hardy G.H., *Apologia di un matematico*, Garzanti Elefanti, Bergamo 2008.

Heath T.L., *History of Greek Mathematics*, vol.1, 1921.

Hilbert D., Grundlagen der Geometrie, 1899.

Iaderosa R., *L'avvio alla dimostrazione nella scuola dell'obbligo*, Tesi del corso di perfezionamento in didattica della Matematica, Brescia, a.a.1993-94.

Kant I., *Critica della ragion pura*, trad.it. Colli G., Einaudi, Torino 1957.

Kline M., *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano, 1976.

Labertonnière L., *Teoria dell'educazione*, 1901, tr. it. in *Saggi di filosofia religiosa*, a cura di C. Cantone, Las, Roma 1993.

Laborde C., *Insegnare la geometria: continuità e rivoluzioni*, in C.Bernardi (a cura di), *Sviluppi e tendenze internazionali in didattica della matematica*, Pitagora Editrice, Bologna, 1995.

Lanciano N. e al., *Geometria in città*, in «Quaderni» del Centro ricerche didattiche U.Morin, Giovanni Battagin Editore, Treviso 1998.

Manara C.F., *Geometria: intuizione e ragione*, in «L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate», vol.17A-17B, n°6, nov-dic 1994.

Manara C.F., Giorello G., *La matematica nel secolo XX*, in *Storia delle scienze,* Città Nuova, Roma 1984.

Manara C.F., Lucchini G., *Momenti del pensiero matematico*, Mursia Editore, Milano, 1976

Maracchia S., *Sviluppi e mutamenti nei programmi della geometria in Italia*, in «La matematica e la sua didattica», n°1, p.45-67, Pitagora Editore, Bologna, 1998.

Marchi M., *Aspetti educativi di una presentazione assiomatica della matematica(I parte),* in «Nuova Secondaria», n°6, pp.66-69, 1984.

Marchi M., *Aspetti educativi di una presentazione assiomatica della matematica(II parte),* in «Nuova Secondaria», n°8, pp.81-82, 1984.

Marchi M., *Costruzioni geometriche*, in «Nuova Secondaria», n°3, 1998-1999, p. 62.

Marchi M., Appunti delle Lezioni di *Fondamenti della matematica*, Scuola di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario, Università Cattolica di Brescia, a.a. 2006/2007.

Marchi M., *Geometria: verità o verosimile?*, in «Nuova Secondaria», n.9, 1997, p.81

Marchi M., Moncecchi G., Perelli M.P., *Geometrizzazione dello spazio ambiente: una proposta didattica*, in *Innovazioni didattiche per la matematica-Progetti strategico del C.N.R.*, Quaderno n°4, 1990.

Marchi M., *Rigore e verità nell'insegnamento della matematica*, in *Atti del Convegno internazionale –Cultura matematica e insegnamento- nel decimo anniversario della scomparsa di Luigi Campedelli*, 1988.

Marchini C., Speranza F., Vighi P. (a cura di), *La Geometria da un glorioso passato a un brillante futuro*, in *Atti del terzo incontro Internuclei Matematici delle Scuole Secondarie Superiori*, Università di Parma, 1992.

Mariotti M.A., *Interazioni fra immagini e concetti nel ragionamento geometrico*, 1990.

Mariotti M.A., *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*, Pitagora Editrice, Bologna, 2005.

Marzocchi A., Presentazione del tema '*Assiomi, definizioni e teoremi*', sito della rivista «Nuova Secondaria» dell'Editrice La Scuola.

Menghini M., *La geometria intuitiva nella scuola media italiana nel '900*, in «La matematica nella società e nella cultura», UMI, Bologna 2010.

Paola D., Robutti O., *La dimostrazione alla prova*, in *Matematica ed aspetti didattici, Seminario di formazione per docenti*, in «Quaderni» 45, M.P.I. Dir.Classica, Lugo di Romagna(RA), Novembre 2001, p.134-135.

Peano G., Recensione al volume di Giuseppe Veronese, *Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, ecc.*, in «Rivista di Matematica», Padova 1891.

Peano G., *Sui fondamenti dell'analisi*, Bollettino 'Mathesis' 2, 1910, ristampato nel III volume delle *Opere scelte* di G.Peano.

Peano G., *Sui fondamenti della Geometria*, in «Rivista di Matematica», v. 4, 1894, pp. 51-90.

Peano G., *Sui fondamenti della geometria, Opere Scelte*, vol.III, UMI, Bologna 1959.

Piaget J., *La costruction du rèel chez l'enfant*, Neuchatel, Delachaux et Niestlé, 1937.

Platone, *La Repubblica*, (510 d,e) , 395-368 a.C.

Plücker J., *Analytisch-geometrische Entwicklungen* (Sviluppi analitico-geometrici), vol.2, Essen, 1828-1831

Poincarè H., *L'invenzione matematica*, in *Opere epistemologiche*, vol.II., Piovan Editore, Abano Terme 1989.

Reggiani M., *Il laboratorio come ambiente per l'insegnamento*-*apprendimento della matematica: riflessioni*, in «L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate», vol. 31B n. 6, 2008

Sandrone G., Appunti lezioni dottorato, A.A.2008.

Sandrone G., Dispensa del corso di Didattica A, A.A. 2007-08.

Sandrone G., *Personalizzare l'educazione*, Rubbettino Univerità, 2008.

Sbaragli S., *L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria,* in *Bollettino dei docenti di matematica*, n. 50, Maggio 2005.

Segre C., *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche,* Rivista di Matematica, 1891, v. 1, pp. 42-65.

Sempio L.(a cura di), *Vygotskij Piaget, Bruner, Concezioni dello sviluppo,* in 'Modelli e concezioni', Raffaello Cortina Editore, 1998.

Sfrad A., *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing,* Cambridge University Press, England, 2008, trad.it. Lo Iacono G., *Psicologia del pensiero matematico. Il ruolo della comunicazione nello sviluppo cognitivo,* Erickson, 2009.

Sitia C.(a cura di), *La didattica della matematica oggi: problemi, ricerche, orientamenti*, in "Quaderni dell'Unione Matematica Italiana", Pitagora Editrice, Bologna, 1979.

Speranza F., *Per il dibattito sulla geometria,* Lettera PRISTEM 16, 1995.

Spotorno B., *L'insegnamento della geometria nella scuola superiore italiana*, in *Il ruolo della geometria nella cultura e nella scuola*, pp.73-82, Rassegna di matematica(2), Tilgher-Genova s.a.s., 1983.

Tirosh D., Tsamir P., *Intuition and rigor in Mathematics Educatio,* in ICMI 1908-2008 *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008)-Reflecting and shaping the world of mathematics education,* Istituto della Enciclopedia Italiana fondata da Giovanni Treccani, Roma, 2008.

Vailati G., Enriques F. e Amaldi U., *Elementi di Geometria ad uso delle scuole secondarie superiori,* in *Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze Matematiche*, gennaio-febbraio-marzo 1904.

Vailati G., *L'Insegnamento della Matematica nel Primo Triennio della Scuola Secondaria*, in *Bollettino di Matematica,* anno VI, n.8-9,agosto-settembre 1907.

Veronese G., *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario,* in *Memorie R. Accad. Lincei,* 19, 1884.

Veronese G., *Nozioni elementari di geometria intuitiva. Ad uso del ginnasio inferiore,* Verona-Padova Fratelli Drucker, 1901, pp.VI-VII.

Vita V., *Programmi di matematica per le scuole secondarie dall'unità d'Italia al 1986,* Pitagora Editrice, Bologna, 1986.

Villani V., *Cominciamo dal punto,* Pitagora editrice, Bologna, 2006.

Villani V., *Dal concreto della scuola dell'obbligo all'astratto della scuola superiore. Conquista di nuovo sapere o perdita di significato?,* in «L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate», Vol.20 A-B, n.5, settembre-ottobre 1997.

Villani V., *Rigore e significato in matematica*, vol.16, n°5-6, in «L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate», maggio-giugno 1993.

Vygotskij L.S., *Mind in society. The development of Higher Psychological Processes*, Harvard University Press, 1978.

Vygotskij L., *Thought and Language*, MIT Press, Cambridge 1962, Ed. italiana Laterza, Bari 1990.

Zan R., *Emozioni e difficoltà in matematica*, in «L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate», vol.23A(3), 2000, pp.207-232.

Altro Materiale consultato:

Giochi di Archimede, Triennio, quesito 18, 1999.

Indicazioni Nazionali 2010, Riforma Gelmini.

Piani di studio della Scuola Secondaria superiore e programmi dei primi due anni, Le proposte della Commissione Brocca, Le Monnier, Firenze.

Testo e Risultati Prova INValSI, Progetto Pilota 2, anno scolastico 2002-2003, Classi prime di Scuola Secondaria di Secondo grado.