



# UNIVERSITY OF BERGAMO

**DEPARTMENT OF MANAGEMENT, ECONOMICS  
AND QUANTITATIVE METHODS**

Working paper n. 1/2015

[ricerca\\_meq@unibg.it](mailto:ricerca_meq@unibg.it)

## *Series Education*

Aspetti metodologico-didattici  
nell'apprendimento collaborativo  
della matematica e sperimentazione  
di percorsi disciplinari

*Angela Pesci, Marco Sgrignoli,  
Maddalena Andreoletti, Caterina  
Scarpaci, Silvia Turlon*



# **Aspetti metodologico-didattici nell'apprendimento collaborativo della matematica e sperimentazione di percorsi disciplinari**

## **Prefazione**

Questo lavoro nasce dall'esigenza di raccogliere contributi che riguardano alcuni progetti che il centro MatNet dell'Università degli studi di Bergamo ha realizzato negli ultimi anni.

MatNet si è costituito nel 2006 con lo scopo di favorire una collaborazione fra mondo universitario e insegnanti sull'innovazione nella didattica della matematica.

Il punto di partenza delle proposte che sono state fatte agli insegnanti di ogni ordine di scuola è stata l'esigenza di migliorare la qualità della preparazione matematica degli studenti introducendo metodologie che rendano la matematica uno strumento effettivo.

Se inizialmente ci si è rivolti ad insegnanti della secondaria di secondo grado, rapidamente ci si è resi conto che poteva essere utile coinvolgere gli insegnanti a partire dalla scuola primaria; quindi l'attività di MatNet si è svolta nell'ambito di corsi e di laboratori rivolti a insegnanti di diversi ordini scolastici nei quali si è valorizzata la verticalità dei curricula.

L'obiettivo di tutte le attività, dai corsi sulle difficoltà di apprendimento ai laboratori per il passaggio primaria-secondaria, per la secondaria di primo e secondo grado e per il passaggio secondaria-università, è quello di mettere in relazione gli insegnanti proponendo loro attività finalizzate ad una visione unitaria dell'apprendimento della matematica.

In questo percorso è maturata in molti insegnanti la consapevolezza della necessità di innovare le pratiche didattiche aprendo a sperimentazioni che permettano di introdurre il problem solving come momento centrale dell'insegnamento-apprendimento della matematica.

Il progetto che si descrive in questo lavoro è maturato come naturale prosecuzione di tali attività, in particolare delle attività laboratoriali rivolte a insegnanti di diversi ordini scolastici sulla didattica della matematica e sulle relative difficoltà di apprendimento.

A partire dall'analisi delle esperienze fatte ci si è resi conto che le difficoltà di apprendimento in matematica (risultati complessivamente non soddisfacenti nei test locali, nazionali e internazionali) andavano affrontate su due livelli connessi tra loro: da una parte l'aspetto metodologico – didattico, dall'altra la scelta di percorsi disciplinari più aderenti al contesto socio-culturale degli studenti e alle esigenze educative attuali.

In questo lavoro si propongono contributi su entrambi i livelli: nel Capitolo 1 Angela Pesci dell'Università di Pavia presenta una metodologia per un efficace laboratorio matematico basata sul problem solving attraverso la collaborazione tra pari.

Tale metodologia è stata sperimentata a partire dalla scuola primaria dove si è scelto di introdurre laboratori matematici guidati da tutor fino alla scuola secondaria, con la costruzione di un percorso di accoglienza matematica che facesse da ponte tra il primo e il secondo grado.

Nel Capitolo 2 Marco Sgrignoli descrive la sperimentazione del laboratorio matematico nella scuola primaria di Telgate avviata a gennaio 2012. Elementi caratteristici sono: l'adozione di un modello di apprendimento collaborativo, l'impostazione didattica basata su problemi, il ruolo centrale

dell'elemento manipolativo, l'affiancamento all'insegnante – esperto della classe – di un tutor – esperto del metodo didattico.

Nel Capitolo 3 un gruppo di insegnanti presenta l'esperienza della realizzazione dei Laboratori di accoglienza matematica in numerose istituti superiori di Bergamo a partire dall'a.s.2011-2012.

I laboratori sono stati pensati per facilitare il problematico passaggio tra il primo e il secondo grado della scuola secondaria ma soprattutto con l'obiettivo di modificare l'atteggiamento verso la disciplina, trasformando la concezione della matematica da un insieme di procedure e norme da memorizzare ed applicare a un'occasione di scoperta, discussione e costruzione di risorse personali.

Bergamo, 27/05/2015

Adriana Gnudi  
Direttore *MatNet –CQIA*  
Centro per la didattica della matematica  
e delle sue applicazioni

# CAPITOLO 1

## L'attività sui problemi e la collaborazione tra pari per un efficace laboratorio matematico

Angela Pesci, Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia

### 1.1 L'attività sui problemi per sviluppare le competenze matematiche

Da alcuni decenni è largamente condivisa la convinzione che le attività di risolvere e porsi problemi (*problem solving* e *problem posing*) siano centrali nell'educazione matematica e siano vie privilegiate per apprendere in modo significativo la matematica; un apprendimento risulta significativo per una persona quando le nuove informazioni entrano in relazione con le sue concezioni preesistenti e si collocano in modo stabile nella sua rete di conoscenze, pronte ad essere utilizzate nei contesti opportuni.

E' da aggiungere, tuttavia, che tale convinzione è ancora oggi ben lontana dall'essere tradotta nella pratica abituale degli insegnanti, ad ogni livello di scolarità e questa situazione costituisce la ragione principale del presente contributo.

Senza entrare in troppi dettagli, vorrei ricordare le principali ragioni che hanno condotto a considerare centrale in matematica l'attività sui problemi, collegandomi anche agli studi di alcuni ricercatori che hanno contribuito in modo decisivo ad approfondire e diffondere questa tematica.

Tra i principali lavori sulla questione di cosa sia un problema e cosa significhi risolvere un problema ci sono senza dubbio quelli di Polya (intorno agli anni '70 ed oltre) e in ambito nazionale, dagli anni '80 circa in poi, quelli di Pellerrey e Zan, oltre a numerosi altri.

Di Polya mi piace ricordare questa citazione, forse la più nota, che connota in modo particolarmente semplice ed incisivo sia il significato di problema sia quello della sua soluzione:

*"Risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è il dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano".* (1971, pag. XI della Prefazione).

Dunque l'attività di soluzione di un problema costituisce un passo necessario nel corso della vita di un individuo, poiché le difficoltà e gli ostacoli sono senza dubbio occasioni che inevitabilmente si presentano a tutti.

In particolare, sulla necessità dell'attività di soluzione di problemi per un apprendimento significativo della matematica, sono molto chiare le seguenti dichiarazioni di Pellerrey:

*"Un apprendimento significativo della matematica comporta sempre un approccio per problemi, nel senso che ogni nuovo concetto, costruzione o procedimento deve venire introdotto dopo aver in qualche modo esplorato ciò che è già stato acquisito, e preso coscienza della necessità di procedere oltre a causa della constatazione di qualche incompletezza, provvisorietà od errore.*

*Questa presa di coscienza è la molla fondamentale che spinge alla riflessione ed al lavoro di ricomposizione della conoscenza."* (1979, pag. 72).

Ciò che occorre avere presente è che la matematica ha bisogno di essere ricostruita da ogni persona la voglia apprendere, ha bisogno cioè di un atto creativo, come ben sottolinea il seguente contributo, tratto da un documento, che ritengo fondamentale, della “Association of Teachers of Mathematics” in Inghilterra e tradotto in italiano nel 1973 sulla rivista *L'insegnamento della matematica* (vol. 4, n. 1, pag. 35):

*“Siccome la matematica è fatta dagli uomini ed esiste solo nelle loro menti, essa deve essere fatta o rifatta nella mente di ogni persona che l'apprende. In questo senso la matematica può essere appresa soltanto creandola. Noi non crediamo che si possa fare una netta distinzione tra le attività dei matematici che inventano nuova matematica e le attività degli alunni che apprendono una matematica che è nuova per essi. Gli alunni hanno risorse diverse ed esperienze diverse ma sia i primi, i matematici professionisti, che i secondi, gli alunni, sono coinvolti in un atto creativo.”*

L'analogia citata, tra l'attività del ricercatore matematico e quella dello studente che impara, è a fondamento della proposta dei concetti di “situazione a-didattica” e di “situazione-problema” da parte dei ricercatori francesi in didattica della matematica negli anni '80-'90 (Bessot, 1991, Jaquet, 1993), concetti poi ampiamente ripresi e rivisitati. Il primo concetto, quello di situazione a-didattica, si riferisce ad una situazione ottimale per il processo di insegnamento-apprendimento: quella in cui gli alunni, dopo una adeguata consegna da parte dell'insegnante, agiscono in modo autonomo, assumendo personalmente su di loro il compito di indagare la problematica posta, di confrontarsi e discutere le eventuali proposte di soluzione, agendo in tal modo come una comunità di ricercatori, proprio come suggerito nella precedente citazione.

La problematica scelta dall'insegnante come compito per i suoi studenti non può essere un semplice esercizio per dar luogo ad un'indagine significativa che li coinvolga in modo produttivo: deve essere, in relazione alla situazione cognitiva degli studenti, abbastanza nuova o complessa, così da richiedere davvero una riflessione sulle conoscenze già a disposizione, un loro eventuale nuovo utilizzo, una formulazione di congetture e una loro discussione. Per indicare un compito con queste caratteristiche, così da poter dar luogo ad una situazione a-didattica, si usa il termine di situazione-problema. Le situazioni-problema, dunque, sono quelle più interessanti e sono decisive nel processo di apprendimento, perché richiedono all'alunno di costruire nuove conoscenze o di utilizzare in un modo nuovo conoscenze già acquisite.

I concetti di situazione a-didattica e di situazione-problema sono stati riferimenti essenziali nelle esperienze collaborative citate nel paragrafo che segue. Ovviamente negli anni c'è stata una re-interpretazione e una personalizzazione di queste idee, tuttavia le connotazioni che ho richiamato rimangono a mio parere essenziali per avviare con gli studenti dei momenti di autentica indagine matematica.

Ciò che caratterizza un'attività sui problemi di matematica non è solo il bagaglio cognitivo che gli studenti possiedono ma senza dubbio anche il loro atteggiamento, le loro convinzioni (e quelle dell'insegnante) sull'idea stessa di problema e sull'attività di soluzione di un problema. Gli studi di R. Zan dagli anni '90 in poi si sono sviluppati ampiamente su questa tematica delle convinzioni e degli atteggiamenti che riguardano il problem solving (si vedano ad esempio Tonelli, Zan, 1995 e Zan, 1998 e 2007) ed hanno messo anche in rilievo la centralità della figura dell'insegnante: è chiaro che le sue convinzioni, i suoi atteggiamenti e le sue scelte determinano in modo essenziale l'attività didattica, il suo svolgersi e i suoi esiti.

Se un insegnante ritiene che l'attività sui problemi sia particolarmente difficile e non adatta a tutti gli studenti ma riservata a pochi, quelli più capaci, è chiaro che le sue scelte didattiche saranno orientate a compiti che ritiene più eseguibili da tutta la classe, ad esempio ad esercizi ripetitivi che richiedono solo di imitare soluzioni già viste. E l'attività sui problemi, di conseguenza, verrà relegata ad eventuali pochi momenti (ad esempio come ultima prova, spesso facoltativa, nei compiti in classe). Questa prassi non può certo sviluppare un atteggiamento flessibile nel ricorrere alle proprie risorse cognitive, di fiducia rispetto a ciò che si conosce e di curiosità per ciò che risulta nuovo.

Si può dire che l'attività ripetitiva risulti ancora l'atteggiamento più frequente nella prassi scolastica odierna per l'insegnamento della matematica nella scuola secondaria ed è noto come questo atteggiamento sia poco coinvolgente per gli studenti e si configuri come la via migliore sia per spegnere l'interesse dei ragazzi più motivati sia per sviluppare negli altri sentimenti di rifiuto, di incertezza e di paura nei confronti dei problemi in generale.

A mio parere ancora oggi il significato e il valore dell'attività sui problemi non fanno parte in pieno del bagaglio culturale dell'insegnante di matematica e dunque neppure delle sue abituali azioni didattiche.

C'è da notare, invece, che le indicazioni ministeriali sottolineano da almeno un trentennio l'aspetto formativo dell'attività sui problemi nell'educazione matematica, sia in riferimento al primo ciclo di istruzione che in riferimento alla scuola secondaria. Ricordiamo che i Programmi Ministeriali del 1985 per la scuola elementare sono stati i primi documenti ufficiali ad evidenziare in modo esplicito la necessità di una attività matematica centrata sui problemi, esprimendo gli esiti di un'evoluzione del significato di educazione matematica che dagli anni '60 aveva caratterizzato la ricerca e gli studi in didattica della matematica.

Lo stesso spirito si trova nelle successive versioni ministeriali: il problem solving risulta una attività mirata a migliorare l'atteggiamento dello studente nei confronti della matematica e a potenziare le sue competenze di esplorazione e di scoperta:

*“Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola. [...] l'alunno imparerà ad affrontare con fiducia e determinazione situazioni problematiche [...] congetturando soluzioni e risultati [...]”* (Ministero della Pubblica Istruzione, Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo di istruzione, 2007, pag. 93, riproposte nella versione attuale del 2012 pubblicata sulla G.U. del 5 febbraio 2013, pag. 51).

In riferimento alla scuola secondaria di secondo grado, i programmi P.N.I. e Brocca del 1991, che hanno segnato una svolta nei documenti ufficiali della scuola italiana per la scuola superiore e il cui spirito, almeno per quanto riguarda la matematica, è rimasto lo sfondo anche per le indicazioni ministeriali più recenti, nelle “Indicazioni didattiche specifiche per matematica ed informatica”, precisano:

*“La scelta delle situazioni e dei problemi rientra in un quadro più vasto di progettazione didattica che si realizza attraverso la valutazione delle disponibilità psicologiche e dei livelli di partenza dei singoli studenti, l'analisi e la determinazione degli obiettivi di apprendimento, l'analisi e la selezione dei contenuti, l'individuazione di metodologie e tecniche opportune, l'adozione di*

*adeguate modalità di verifica*” (Studi e documenti degli annali della pubblica istruzione 56, 1991, pag.169).

Dunque risulta centrale, nella progettazione didattica da parte dell’insegnante, non solo la scelta delle situazioni problematiche su cui centrare l’attività degli alunni, ma anche l’individuazione delle metodologie più opportune per raggiungere gli obiettivi di insegnamento.

Sono i due aspetti chiave su cui ogni insegnante è impegnato quotidianamente e su cui, a mio parere, si gioca il suo successo professionale in termini di partecipazione attiva dei suoi studenti, in qualsiasi tipo di scuola secondaria: la scelta dei problemi e la scelta delle modalità di azione in classe. Si tratta di scelte non semplici, tuttavia la letteratura di riferimento è oggi molto ampia e la disponibilità di materiale didattico in rete è tale da permettere ad ognuno la scelta più adeguata ai propri gusti e alle proprie inclinazioni personali. Ricordo solo, a questo proposito, il vasto contributo dell’UMI (Unione Matematica Italiana) che ha reso disponibili a tutti, in rete, i documenti *Matematica 2001*, *Matematica 2003* e *Matematica 2004*, frutto di un lungo e fondamentale lavoro sinergico di numerosi ricercatori in didattica della matematica e i materiali di *M@tabel*, tuttora in elaborazione ma in gran parte già disponibili. Si tratta di risorse importanti, data la ricchezza di proposte didattiche, di commenti e di approfondimenti: purtroppo non sono ancora note a tutti gli insegnanti ma in ogni caso sono presenti in rete e dunque costituiscono un patrimonio disponibile e aperto a tutti.

Il paragrafo che segue è dedicato a specifiche metodologie didattiche, di tipo collaborativo, che ritengo particolarmente idonee ad interpretare, nella pratica della lezione in classe, un’educazione matematica ispirata all’indagine e alla partecipazione di tutti gli studenti, nello spirito fino ad ora sottolineato.

## **1.2 Modalità collaborative: apprendere la matematica comunicando tra pari**

La letteratura sull’apprendimento collaborativo è ormai vastissima, sia a livello nazionale che internazionale e per una sua panoramica, datata qualche anno fa ma ancora oggi molto significativa, si può vedere ad esempio il testo di Comoglio e Cardoso (1996), tra i primi studiosi ad avere contribuito alla diffusione in Italia di modelli di cooperazione fra studenti.

In questo paragrafo, allo scopo di evidenziare le potenzialità delle metodologie collaborative, mi sembra importante descrivere i risultati più significativi emersi da alcuni studi che ho realizzato nell’arco di poco più di un decennio (dal 2000 ad oggi) su esperienze di insegnamento della matematica nella scuola secondaria di primo e secondo grado, condotte con modalità di collaborazione fra pari.

Tra i numerosi modelli di implementazione, nella pratica dell’azione in classe, di collaborazione tra studenti, abbiamo privilegiato, con un gruppo di insegnanti, due particolari modalità: la prima, che qui chiamo *modalità collaborativa*<sup>1</sup>, è stata quella a cui abbiamo lavorato fin dai primi anni delle nostre esperienze in classe; la seconda, *il tutoraggio*, è emersa in seguito, a completamento della prima modalità e con obiettivi differenti ma sempre avendo al centro l’idea di avvalersi della

---

<sup>1</sup> In precedenti lavori ho utilizzato il termine *cooperativo*, come sinonimo di *collaborativo*, per la maggiore diffusione del primo termine rispetto al secondo. Dal punto di vista tecnico è preferibile il secondo, che qui adotto, perché indica in modo specifico che l’obiettivo di ogni gruppo è lo stesso (tutti puntano alla soluzione dello stesso compito) ma svolgono ruoli specifici differenti. Nella modalità *cooperativa* il significato dei ruoli non è altrettanto cruciale, tanto che non si danno loro termini specifici (come si può vedere ad esempio sul testo appena citato). Il tutto apparirà più chiaro dalla descrizione del modello *collaborativo* al punto seguente.

collaborazione fra pari. Qui vorrei delineare entrambi i modelli, precisandone caratteristiche specifiche e obiettivi per poi passare ad evidenziare alcuni risultati significativi ottenuti dalla loro attuazione con gli studenti (Pesci, 2011b).

### **a) Il modello collaborativo**

Il modello *collaborativo* è un modello di insegnamento–apprendimento che si fa carico, in modo esplicito, sia della dimensione disciplinare che della dimensione affettiva e sociale delle relazioni tra i partecipanti al processo educativo.

In riferimento al concetto di sistema didattico (insegnante, alunno e sapere, immersi in un ambiente, Brousseau, 1997; Margolinas, 1990) il modello collaborativo da noi proposto può essere visto come una sua re-interpretazione (Pesci, 2004), perché le relazioni tra gli elementi del sistema vengono considerate non solo sul piano cognitivo ma anche emozionale, tenendo dunque conto della sensibilità, delle credenze, delle scelte e delle risorse delle persone coinvolte nel processo educativo.

Il riferimento teorico per il modello *collaborativo* è ovviamente quello del costruttivismo sociale, in base al quale sono fondamentali i momenti di discussione, di negoziazione dei significati, di collaborazione e di sviluppo di relazioni personali positive (Ernest, 1995; Bauersfeld, 1995). È anche essenziale che il concetto di sapere sia interpretato non solo come “sapere situato”, con rilievo al contesto, ma anche come “sapere distribuito”, con rilievo alle relazioni interpersonali e alla condivisione.

L'aspetto specifico che caratterizza il modello *collaborativo* è l'enfasi posta, in modo simmetrico, sia al progresso delle competenze scientifiche che allo sviluppo delle competenze sociali: dunque gli obiettivi non riguardano solo aspetti della disciplina di insegnamento ma anche aspetti personali e sociali, con la necessaria attenzione alla qualità delle relazioni che si stabiliscono tra le persone.

Ciò che le neuroscienze hanno confermato, in anni recenti, circa la stretta connessione tra emozione, sentimento e cognizione (Damasio, 1999) ha messo in rilievo, con notevole evidenza, che occorre riconciliare, nel processo di costruzione di conoscenza, la ragione e l'emozione. Molti studi, come è noto, si stanno sviluppando proprio in questa direzione e i modelli di insegnamento – apprendimento *collaborativo* propongono metodologie che rendono possibile questa conciliazione nella prassi didattica.

Tra le condizioni necessarie per un apprendimento collaborativo (Comoglio e Cardoso, 1996) c'è anzitutto l'*interdipendenza positiva*, cioè i membri del gruppo devono capire l'importanza della collaborazione ed essere consapevoli che non può esistere il successo individuale senza il successo collettivo; di conseguenza, il fallimento di un solo elemento del gruppo è un fallimento per tutti. Ognuno deve essere convinto di poter dare un contributo personale utile alla realizzazione del progetto comune; in questo modo ognuno sviluppa un forte senso di responsabilità e può riuscire ad impegnarsi maggiormente, con esiti positivi sul suo apprendimento e sulla sua capacità di lavorare con gli altri.

Un'altra condizione importante è la definizione e l'*assegnazione di ruoli* a ciascun elemento del gruppo: la ripartizione di competenze sociali e disciplinari tra i membri del gruppo favorisce la collaborazione e l'interdipendenza, assicura che le abilità individuali vengano utilizzate per obiettivi comuni e riduce la possibilità che qualcuno si rifiuti di cooperare o tenda a dominare.

Una riflessione che contribuisce a far comprendere l'efficacia del modello *collaborativo*, e in particolare il significato e l'importanza dell'assunzione dei *ruoli*, è quella relativa alla differenza tra lo *status* di un individuo e il *ruolo* a lui attribuito (Cohen, 1999). E' noto che in relazione alle caratteristiche di *status* di un individuo (ciò che gli viene riconosciuto dalla società, non solo in riferimento alle sue doti intellettive o alle sue caratteristiche personali, ma anche alla sua condizione sociale) sono legate aspettative generali di competenza, condivise non solo dal gruppo di appartenenza ma anche dall'individuo stesso e questo potrebbe essere un ostacolo in relazione agli obiettivi che si vogliono raggiungere nel lavoro con gli altri. Chi è considerato di livello "basso" tende ad esempio ad intervenire meno di chi è considerato di livello "alto" e quindi ha meno occasioni per sviluppare la sua competenza, consolidando ulteriormente il suo "basso" livello.

Il *ruolo*, che è assegnato per via gerarchica da una autorità, ad esempio dall'insegnante, è invece ciò che potrebbe cambiare le aspettative. Attribuendo un *ruolo* ad uno studente si dà piena attuazione alla sua autonomia, cioè lo si autorizza a prendere delle decisioni, a valutare e a controllare. Si mette dunque in atto il suo protagonismo, cioè l'insieme delle sue emozioni, la sua capacità di decidere e di gestire le varie competenze. Il riconoscimento di un *ruolo* da parte dei compagni, che avviene a prescindere dalle difficoltà della persona e si attua attraverso le relazioni interpersonali, favorisce il superamento di eventuali problemi (come una scarsa autostima, la mancanza di regolazione, il senso di non efficacia) che solo attraverso lo *status* non sarebbe possibile affrontare (Vianello, 2003; Locatello e Meloni, 2003).

Nell'attuazione del modello *collaborativo* occorre dare ovviamente un'attenzione particolare alle *abilità sociali*: una efficace gestione delle relazioni interpersonali richiede che gli studenti sappiano sostenere un ruolo di guida all'interno del gruppo, sappiano prendere decisioni, esprimersi e ascoltare, siano capaci di chiedere e dare informazioni, di stimolare la discussione, di mediare e condividere, incoraggiare ed aiutare, facilitare la comunicazione, creare un clima di fiducia e risolvere eventuali conflitti. Le abilità elencate, fondamentali per lo sviluppo completo di un individuo, dovrebbero essere insegnate (o almeno essere oggetto di riflessione in classe) con la stessa consapevolezza e cura con cui si insegnano le abilità disciplinari.

Il ruolo dell'insegnante di classe nella gestione di una modalità collaborativa è piuttosto complesso. È evidente che accanto alle sue competenze disciplinari assumono una importanza decisiva anche le sue competenze sociali, perché occorre prendere decisioni per la formazione dei gruppi, sviluppare negli studenti le abilità sociali citate, controllare l'adeguatezza del lavoro di gruppo, decidere di intervenire con suggerimenti opportuni o di non intervenire affatto, favorire la discussione e la sintesi finale, promuovere interventi e valutare i risultati ottenuti.

Anche la competenza richiesta sul versante disciplinare, ovviamente, non è banale: una cura particolare deve essere posta nella scelta delle situazioni di indagine da proporre agli studenti. Poiché il lavoro in collaborazione richiede tempi ampi, è auspicabile che si tratti in ogni caso di questioni centrali per lo sviluppo del pensiero matematico e tuttavia alla portata delle risorse della classe, così da sviluppare una partecipazione autentica. Questa scelta può essere effettuata opportunamente solo se l'insegnante ha sviluppato riflessioni sul valore epistemologico dei contenuti matematici da proporre ed ha inoltre una buona conoscenza delle competenze dei suoi studenti. Il riferimento più opportuno per un'attività collaborativa autentica e produttiva è quello alle situazioni-problema descritte al paragrafo precedente, come sarà evidenziato anche più avanti al punto c).

La particolare interpretazione del modello *collaborativo* nelle esperienze che ho seguito e studiato (tra cui quelle citate in bibliografia, tutte svolte nella scuola secondaria) è dovuta a Lino Vianello, studioso psicoterapeuta che ha lavorato a lungo con il CSA e l'Università di Venezia.

All'origine il modello era stato ideato per corsi di formazione sull'educazione alla salute, negli anni 1985/86, poi è stato applicato in contesti educativi più ampi e descritto per la prima volta in una pubblicazione di Locatello e Meloni (2003), nella quale si riferiscono esperienze svolte nella scuola primaria.

La caratterizzazione dei cinque *ruoli* previsti per ogni gruppo di lavoro, dovuta a Lino Vianello ed esposta nel testo citato di Locatello e Meloni (riportata poi anche in Pesci, 2004) è molto dettagliata e prevede, per ognuno di essi, una lista di compiti che devono essere svolti da chi assume quello specifico *ruolo*. Qui si propone una sintesi dei compiti per ciascuno di questi *ruoli*.

L'*orientato al compito* è lo studente che deve far sì che il suo gruppo raggiunga il migliore risultato possibile in relazione al compito disciplinare assegnato dall'insegnante (ogni gruppo, nelle nostre esperienze, svolge lo stesso compito). Quindi, ad esempio, propone un piano di lavoro controllando adeguatamente il tempo a disposizione, prevede una riflessione individuale prima della messa in comune delle strategie e della loro discussione, fa il punto della situazione e promuove momenti decisionali.

L'*orientato al gruppo* è il responsabile del clima comunicativo del gruppo: sollecita la partecipazione positiva dei compagni, fa sì che gli interventi siano adeguati nei tempi e nei modi e media eventuali conflitti tra i partecipanti.

La *memoria* è lo studente che si fa carico della formulazione scritta degli esiti ottenuti nell'attività collettiva: ripete le decisioni che emergono durante il lavoro e scrive su un apposito foglio ciò che il gruppo condivide come soluzione finale al compito assegnato.

La soluzione finale di ogni gruppo viene poi letta a tutta la classe dal *relatore*, lo studente che è portavoce delle soluzioni proposte dal suo gruppo a conclusione dell'attività collaborativa.

Infine, l'*osservatore* è lo studente che propone il suo *feedback* relativamente ad alcuni aspetti del processo interattivo: scrive su un apposito foglio le sue osservazioni sulla partecipazione dei compagni di gruppo, sulla scansione temporale dei vari momenti dell'attività, sulla adeguatezza, da parte di ciascuno, dell'assunzione del rispettivo ruolo. A conclusione dell'attività collaborativa di ogni gruppo egli dà lettura delle sue osservazioni a tutta la classe.

Sulle relazioni finali dei *relatori* e degli *osservatori* si incentra poi la discussione di tutta la classe: sono in gioco, in questa ultima fase, sia questioni che riguardano la matematica sia questioni che riguardano aspetti sociali, che l'insegnante ha l'opportunità di sottolineare, discutere e approfondire nel modo che ritiene più adeguato.

Dal punto di vista metodologico una osservazione molto importante, che risulta decisiva anche per la ricaduta sullo sviluppo individuale delle competenze in gioco, riguarda la conservazione, da parte di ogni studente, di ciò che si è concluso attraverso l'attività collaborativa: poiché si ritiene che i problemi affrontati siano cruciali per la disciplina studiata è dunque essenziale che ciò che si è discusso e condiviso diventi patrimonio di ogni studente. In particolare, la versione finale della soluzione del compito assegnato, dopo la discussione delle proposte dei vari gruppi, risulta sempre più completa e adeguata rispetto a quella proposta da ciascun gruppo: è dunque importante che ogni studente conservi una versione scritta dell'esito finale, così che possa diventare oggetto di studio e di successive riflessioni personali.

## b) Il tutoraggio fra pari

A seguito dell'utilizzo del modello di insegnamento-apprendimento *collaborativo* e nella direzione sia del recupero di competenze matematiche da parte di alunni in difficoltà sia di una maggiore responsabilizzazione di tutti gli studenti, con o senza difficoltà, in questo processo, abbiamo sviluppato alcune esperienze, nella scuola secondaria, con la modalità del *tutoraggio*. In base alla constatazione che gli esiti di corsi di recupero extracurricolari risultano spesso poco efficaci e deludenti anche per gli insegnanti (Torresani, 2007, 2008) si era deciso di pianificare interventi che coinvolgessero tutta la classe, con l'obiettivo sia di recuperare le competenze degli studenti in difficoltà, sia di potenziare le competenze degli studenti più capaci.

In Baldrighi, Pesci (2011) si distinguono due differenti modalità di tutoraggio, il *tutoraggio fra pari* e il *tutoraggio reciproco*, a seconda che i due ruoli, di *tutor* e *allievo*, siano più o meno espliciti. Qui non sembra opportuno entrare in dettagli (si rimanda il lettore interessato al contributo citato) ma si delineano i tratti che evidenziano al meglio la possibile efficacia di questa modalità di collaborazione tra pari, in riferimento al *tutoraggio fra pari*.

Dopo una adeguata preparazione della classe, durante la quale si rendono espliciti gli obiettivi di recupero per alcuni e di potenziamento in ogni caso per tutti, l'insegnante procede alla formazione di coppie o terne in cui ci sia un'apprezzabile differenza di rendimento scolastico e in cui si ritenga anche possibile la nascita o il consolidamento di rapporti interpersonali. L'insegnante può concordare poi con la classe un programma di lavoro, con l'eventuale scansione dei contenuti e dei tempi previsti.

Compito dell'insegnante è anche quello di predisporre i materiali per il recupero (ad esempio schede contenenti attività di difficoltà graduale, elaborate dal docente o reperite su testi). Durante l'attività il docente rimane a disposizione come esperto, che chiarisce eventuali dubbi ai *tutors* in difficoltà e come supervisore, garante del rispetto dei tempi e della gestione ottimale del processo.

All'alunno che assume il ruolo di *tutor* sono richieste diverse abilità cognitive: saper dare suggerimenti e spiegazioni, saper gestire il materiale individuando gli argomenti sui quali il proprio *allievo* ha bisogno di esercizi di rinforzo, verificare e registrare i risultati.

Tra i requisiti necessari alla riuscita di un progetto di tutoraggio non bisogna dimenticare, le abilità sociali necessarie alla costruzione di un buon rapporto che metta l'*allievo* a suo agio e che permetta la condivisione degli obiettivi. Nelle nostre esperienze il monitoraggio sistematico dei risultati da parte dei *tutors* è spesso guidato da una scheda da completare, consegnata durante ogni incontro e che suggerisce la riflessione sugli eventuali punti di forza e sulle difficoltà riscontrate nel proprio allievo (Torresani, 2008; Baldrighi e Pesci, 2011). L'allievo dedica all'esperienza un apposito quaderno, sul quale riporta tutta l'attività svolta in classe e i lavori a casa assegnati dal *tutor*.

Le esperienze di tutoraggio su uno specifico contenuto disciplinare si svolgono di solito in pochi incontri, dopo i quali si propone alla classe un momento di verifica. Mentre l'*allievo* affronta il compito disciplinare, il *tutor* compila una relazione di tutoraggio e, a seconda dei casi, svolge anch'egli una parte del compito. Tale relazione costituisce uno strumento che caratterizza in modo essenziale un'esperienza finalizzata non solo al recupero delle competenze su temi disciplinari già svolti, ma alla riflessione metacognitiva sul proprio lavoro. L'alunno *tutor* è dunque chiamato a riflettere sulle difficoltà incontrate dal suo allievo, o che lui stesso ha incontrato in qualità di *tutor*, è invitato ad esprimersi sull'impegno che l'alunno ha mostrato e sulle ragioni del suo eventuale successo (o insuccesso).

Tra le difficoltà che i *tutors* evidenziano nello svolgere il loro ruolo, spesso gli alunni *tutors* indicano questi due aspetti: dare spiegazione sui procedimenti e capire le difficoltà del proprio allievo. La difficoltà di capire il proprio compagno e di dare spiegazioni adeguate è accolta da molti come una stimolante sfida per lo sviluppo di uno spiccato senso di orgoglio personale. Secondo le osservazioni degli insegnanti e le relazioni finali degli studenti, la consapevolezza delle difficoltà insite nel processo di insegnamento-apprendimento fa nascere spesso nei *tutors* un sentimento di solidarietà verso il proprio insegnante, con il quale spesso migliora il rapporto.

In base alle analisi di esperienze svolte, dal punto di vista cognitivo l'apprendimento diventa vantaggioso sia per il *tutor*, che colma lacune e consolida conoscenze, sia per l'*allievo* che usufruisce di un insegnamento individualizzato.

Dagli esiti degli studenti nelle esperienze svolte nella scuola secondaria, emerge che il dialogo fra pari garantisce una maggiore libertà e spontaneità, annullando quel disagio e quella tensione che spesso si percepiscono nella relazione con il proprio insegnante: tra compagni non si ha timore ad esprimere dubbi e perplessità e questo viene esplicitamente riconosciuto dagli studenti come principale motivazione dell'efficacia della comunicazione tra allievo e *tutor*. Un ulteriore aspetto importante del dialogo fra pari è l'utilizzo di parole più semplici rispetto a quelle del testo o dell'insegnante e questo agevola la condivisione degli obiettivi e in alcuni casi la consapevolezza, da parte degli allievi, di quei comportamenti fallimentari da modificare per superare la difficoltà.

Il tutoraggio fra pari costituisce dunque una strategia promettente, poiché incoraggia gli studenti a farsi carico del problema del recupero, favorisce l'assunzione della responsabilità del proprio apprendimento, incoraggia la riflessione sui processi di pensiero propri e dei compagni e riduce al minimo l'atteggiamento rinunciatario e fatalista con cui spesso si affrontano gli insuccessi in Matematica.

### **c) Analogie e differenze fra i due modelli collaborativi**

Può risultare interessante, a conclusione di questo paragrafo, delineare analogie e differenze tra i due modelli collaborativi descritti. Si è messo in rilievo che sia il modello dell'*apprendimento collaborativo* che quello del *tutoraggio fra pari* hanno come obiettivo principale comune quello di sviluppare le competenze degli studenti attraverso l'assunzione di *ruoli* specifici, focalizzati sia su compiti disciplinari che sulle relazioni interpersonali. L'assunzione di *ruoli*, in un gruppo o in una coppia, rende gli alunni corresponsabili del proprio apprendimento, favorendolo in modo significativo.

Entrambi i modelli, inoltre, mettono in luce l'importanza che l'insegnante dovrebbe dedicare allo sviluppo di riflessioni metacognitive da parte degli studenti, attraverso compiti che richiedano un continuo ripensamento su ciò che si è svolto, su ciò che si sta svolgendo e su come si potrebbe fare per migliorare.

In entrambi i modelli risulta poi importante che gli studenti abbiano traccia scritta di ciò che si discute e si condivide: una sorta di collezione personale di tutti i risultati raggiunti, da poter rivedere e su cui riflettere all'occorrenza. L'importanza delle questioni affrontate, scelte appunto dall'insegnante perché cruciali nello sviluppo delle competenze matematiche, rende questa collezione particolarmente preziosa, a cui ogni studente dovrebbe poter ricorrere per prepararsi alle usuali verifiche individuali, come interrogazioni o compiti in classe.

In base agli studi condotti su esperienze svolte nella scuola secondaria<sup>2</sup> si può dire che, per quanto riguarda il *compito matematico* da proporre agli studenti, la *modalità collaborativa* sembra più opportuna in riferimento ad una situazione-problema, in particolare quando:

- l'argomento su cui indagare è aperto a diverse piste di indagine; ad esempio quando si richiedono dimostrazioni differenti di una stessa proposizione, eventualmente già nota (ad es. il teorema di Pitagora, in Baldrighi, Fattori e Pesci, 2004);
- gli strumenti tecnici a disposizione sono particolarmente ridotti e non ancora codificati in formule (ad es. la risoluzione delle equazioni di secondo grado, come in Baldrighi e Bellinzona, 2004 oppure l'individuazione e applicazione, in contesti concreti, di relazioni trigonometriche, come in Bellinzona e Torresani, 2011);
- si affronta un problema nuovo e abbastanza complesso (ad es. la relazione di Eulero, con giustificazione, sul numero di vertici, facce e spigoli di un poliedro, in Angelini *et al.*, 2007);
- il compito non è usuale e dunque difficile, anche se richiede conoscenze già note agli studenti ma utilizzate in modo poco consapevole (ad es. le proprietà delle potenze, in Baldrighi, Bellinzona e Pesci, 2007);
- l'argomento è già noto agli studenti ma occorre richiamarlo alla memoria perché affrontato molto tempo prima: invece di chiedere direttamente agli studenti cosa si ricordano, organizzare un'attività di gruppo collaborativo risulta molto più fruttuoso per il riemergere di termini specifici, proprietà e definizioni.

Il *tutoraggio fra pari* sembra invece appropriato, come si è già messo in rilievo, quando uno specifico contenuto matematico non è dominato da tutta la classe e quindi c'è la necessità, da parte di un buon numero di studenti che sono in difficoltà, di recuperare competenze specifiche. Le nostre analisi hanno messo in evidenza che non solo gli studenti in difficoltà riescono più facilmente a recuperare (Torresani, 2007 e 2008) ma anche gli alunni che sono *tutors* rafforzano la loro competenza matematica, la padronanza linguistica, le abilità di comunicazione interpersonale e le capacità di riflessione metacognitiva (Baldrighi, Bellinzona e Pesci, 2007; Baldrighi, 2011; Pesci, 2011a).

In riferimento agli aspetti relazionali, osservati tra insegnante e studenti e tra gli studenti stessi, si può dire, in generale, che attraverso il ripetersi di esperienze collaborative la partecipazione al discorso matematico risulta potenziata per tutti gli studenti, che sviluppano una crescente attenzione ai propri processi cognitivi e a quelli dei compagni, si abituano ad ascoltare e ad intervenire con modalità appropriate, ad esprimere il proprio assenso o dissenso in termini adeguati, sviluppano la capacità di condividere risorse, imparano a lavorare insieme verso obiettivi comuni e a condividere la soddisfazione per un successo raggiunto in collaborazione.

Si è anche esplorata l'ipotesi (Baldrighi, Bellinzona e Pesci, 2005; Baldrighi, Bellinzona, Pesci, Polo, 2011; Baldrighi, 2011) che le modalità collaborative, realizzate da insegnanti competenti, possano sviluppare negli studenti alcuni fattori di *resilienza*, dove per *resilienza* si intende la capacità di reagire positivamente ad eventi negativi quali l'insuccesso scolastico o l'esclusione e isolamento dal gruppo dei compagni. Si sono analizzati, in particolare, alcuni casi di studenti che in seguito ad attività di tipo collaborativo hanno mostrato chiari segni di cambiamento, passando da

---

<sup>2</sup> I risultati qui sintetizzati si riferiscono, oltre che agli articoli citati in bibliografia, alle analisi di esperienze attuate secondo il modello collaborativo o il tutoraggio fra pari e sviluppate in occasione di tesi di laurea in matematica, dal 2002 ad oggi.

situazioni di grave difficoltà (relativamente alla matematica o alle relazioni interpersonali) a situazioni progressivamente positive.

La letteratura sottolinea che per potenziare la resilienza di uno studente occorre che egli percepisca di avere un ambiente cui appartenere, possa condividere attività con altri e abbia l'occasione di potenziare il senso della propria esistenza lavorando per un progetto. I modelli collaborativi presentano proprio tutte queste caratteristiche e dunque risultano particolarmente adatti a sviluppare la resilienza degli studenti.

In base agli studi delle esperienze svolte si può dire che riuscire ad intrecciare opportunamente, nel processo educativo, la *modalità collaborativa* e il *tutoraggio fra pari*, costituisce per gli studenti un'occasione di crescita cognitiva e personale molto ricca e per gli insegnanti un'opportunità per mettere in gioco e potenziare la propria competenza disciplinare, metodologica e relazionale.

### **1.3 L'attività sui problemi e l'apprendimento collaborativo per realizzare il laboratorio matematico**

E' già stato sottolineato nei due paragrafi precedenti che per un docente che voglia attuare momenti di insegnamento davvero coinvolgenti e produttivi per tutti i suoi studenti risultano decisive e particolarmente impegnative due scelte sostanziali: la scelta delle situazioni problematiche da proporre agli studenti e la scelta della metodologia didattica da adottare nell'attività in classe.

Oltre a quanto si è finora descritto, un orientamento fondamentale per effettuare queste scelte viene dato proprio dalle attuali Indicazioni nazionali per il curriculum del primo ciclo d'istruzione (sottese e richiamate anche nelle indicazioni per la scuola secondaria di secondo grado) che propongono un'idea di "laboratorio"<sup>3</sup> molto suggestiva, più ampia dell'accezione usuale data a questo termine e che delinea la possibilità di realizzare, nel percorso educativo, quelle situazioni di indagine e di ricerca che si configurano come ideali per uno sviluppo completo della persona.

Tali indicazioni, nella formulazione del Decreto 16 novembre 2012, n. 254, pubblicato sulla G. U. del 5 febbraio 2013, sono la versione finale delle indicazioni ministeriali del 2007, sostanzialmente le stesse, nelle linee generali, del 2012 e invece abbastanza innovative rispetto alle precedenti per la scuola media del 1979.

Si può dire che le attuali indicazioni ministeriali siano il risultato più evidente e l'espressione di tante fondamentali ricerche in didattica svolte dagli anni '70 ad oggi, come si può constatare ad esempio dal confronto con i documenti UMI, già citati, del 2001, 2003 e 2004.

In tali indicazioni nazionali, prima ancora delle parti specifiche dedicate alle varie discipline, nel paragrafo "*L'ambiente di apprendimento*", dove si presentano in generale "*alcuni principi metodologici che contraddistinguono un'efficace azione formativa*", si propone tra questi principi, oltre ad esempio a "*favorire l'esplorazione e la scoperta*" e "*incoraggiare l'apprendimento collaborativo*", il seguente:

*"Realizzare attività didattiche in forma di laboratorio, per favorire l'operatività e allo stesso tempo il dialogo e la riflessione su quello che si fa. Il laboratorio, se ben organizzato, è la modalità di lavoro che meglio incoraggia la ricerca e la progettualità, coinvolge gli alunni nel*

---

<sup>3</sup> Un contributo molto interessante sul concetto e l'interpretazione di *laboratorio*, che ne propone anche una prospettiva storica nell'ambito della scuola italiana, è l'articolo di M. Reggiani "Il laboratorio come "ambiente" per l'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni", sulla rivista *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 2008, Vol. A-B, n. 6, 645-665

*pensare, realizzare, valutare attività vissute in modo condiviso e partecipato con altri, e può essere attivata sia nei diversi spazi e occasioni interni alla scuola sia valorizzando il territorio come risorsa per l'apprendimento.*" (pag. 29 G.U. 5 febbraio 2013)

Più in particolare, nello stesso documento, nell'ambito specifico della Matematica, si precisa, ancora in riferimento al concetto di laboratorio, quanto segue:

*"In matematica, come nelle altre discipline scientifiche, è elemento fondamentale il laboratorio, inteso sia come luogo fisico sia come momento in cui l'alunno è attivo, formula le proprie ipotesi e ne controlla le conseguenze, progetta e sperimenta, discute e argomenta le proprie scelte, impara a raccogliere dati, negozia e costruisce significati, porta a conclusioni temporanee e a nuove aperture la costruzione delle conoscenze personali e collettive."* (ib., pag. 51)

E' evidente che nella direzione di attuare in classe attività di laboratorio come quelle cui si fa riferimento, occorre effettuare scelte opportune non solo delle situazioni su cui sviluppare l'indagine ma anche delle modalità di interazione da adottare in classe.

Appare così molto naturale, in questo quadro, il riferimento sia all'attività sui problemi caratterizzata nel modo descritto nel primo paragrafo, sia ad una modalità di interazione personale come quella proposta dai modelli collaborativi del paragrafo precedente. La realizzazione di un tale laboratorio di matematica non può che essere l'esito di un intreccio opportuno tra una scelta oculata di questioni su cui indagare e una modalità interattiva ben strutturata e non casuale.

Mi piace sottolineare ancora come non sia affatto scontato che i ragazzi siano capaci di lavorare insieme, *progettando, discutendo, argomentando, negoziando e costruendo significati*, giusto per riprendere i verbi proposti dal documento, così come risulta chiaro che non tutte le questioni proposte agli studenti possano avere le caratteristiche di essere adatte a favorire indagini, formulazioni di ipotesi, scoperte.

Un aspetto che vorrei infine segnalare e che mi sta particolarmente a cuore perché riguarda il sentire dell'insegnante durante una tale auspicata attività di laboratorio, è che quando ci si trova in una situazione di indagine genuina, con studenti coinvolti nelle questioni proposte e si è davvero aperti alle loro strategie risolutive e alle loro osservazioni, a volte inaspettate, si può tornare a percepire quella sensazione di curiosità e scoperta che caratterizza i momenti in cui ci si accosta ad argomenti nuovi o comunque non del tutto esplorati. Mi piace ricordare, a questo proposito, le parole di Giovanni Prodi, che in riferimento alle caratteristiche positive di un insegnamento per problemi, diceva:

*"L'attuazione di una proposta di questo tipo pone l'insegnante in una vera e propria attività di ricerca, parallela a quella dell'allievo.*

*L'insegnante è spinto a mettere in atto un po' della mentalità acquisita durante gli studi universitari, mentre la prassi attuale tende piuttosto a creare una discontinuità fra la scuola secondaria e l'università."* (Prodi in AA.VV., 1977, pag. 4)

Si tratta, in conclusione, di progettare attività che possano essere davvero adeguate non solo a sviluppare la conoscenza in gioco ma anche a coinvolgere i protagonisti del processo didattico, studenti e insegnanti, ponendo dunque una particolare attenzione sia alle loro caratteristiche cognitive che interpersonali ed emozionali.

## CAPITOLO 2

### La sperimentazione del laboratorio matematico nella scuola primaria

Marco Sgrignoli, Centro MatNet-CQIA, Università degli studi di Bergamo

#### 2.1 Introduzione

L'esperienza di più lunga durata, e più significativa per numero di studenti coinvolti, è quella che riguarda la scuola primaria di Telgate. Le attività, avviate a gennaio 2012, hanno coinvolto per i primi due anni gli alunni di terze, quarte e quinte per una dozzina di incontri l'anno a cadenza bisettimanale, svolte in orario scolastico. L'anno scolastico 2013/2014 ha visto alcuni importanti cambiamenti logistici, tra cui l'estensione del progetto alle classi prime e seconde e una parziale rimodulazione dell'impianto didattico. Poiché questa seconda fase è ancora in corso di analisi, ci soffermiamo qui unicamente sui primi due anni.

Quattro le scelte fondamentali dell'esperienza per come è stata condotta finora: l'adozione di un modello di apprendimento collaborativo, l'impostazione didattica basata su problemi, il ruolo centrale dell'elemento manipolativo, l'affiancamento all'insegnante – esperto della classe – di un tutor – esperto del metodo didattico.

Il modello collaborativo adottato è stato quello del gruppo collaborativo sviluppato da Lino Vianello e studiato in ambito della didattica della matematica specialmente da A. Pesci ed è ampiamente descritto al punto a) del paragrafo 1.2 del Capitolo 1.

L'attività-tipo che costituisce il cuore di un incontro è strutturata in due parti: durante la prima, i gruppi lavorano come unità autonome confrontandosi con un problema o un gioco che chiama in causa la creatività di ogni membro; durante la seconda le strategie sviluppate da ciascun gruppo vengono messe in comune e, sotto la guida del tutor, confrontate, approfondite, generalizzate. Se nella prima fase sono le dinamiche di gruppo a prevalere, con la ripartizione in ruoli ad agevolare la piena partecipazione di ogni studente, nella seconda emerge la funzione della classe come comunità plurale, ambiente ideale per il dibattito e la costruzione di idee comuni. A fare da ponte fra una fase e l'altra sono i due “prodotti” fondamentali del lavoro di ogni gruppo, le relazioni di *memoria* e *osservatore*.

Le attività proposte sono strutturate su percorsi tematici dalla durata di 5-6 incontri, solitamente aperti da un gioco dal forte elemento manipolativo e, successivamente, sviluppati attraverso problemi di carattere verbale, numerico, visuale. I giochi proposti, inizialmente basati su materiali del centro MateMatita dell'Università di Milano, poi affiancati da altri di nuova creazione, consentono ai ragazzi di “toccare con mano” situazioni problematiche permettendo a concetti astratti e generali di svilupparsi da oggetti tangibili, che fungono poi da modello di partenza e appiglio concreto per le attività al centro degli incontri successivi. Il successivo spostamento dell'attenzione sui problemi, infatti, dà ai ragazzi l'occasione di rielaborare gli strumenti sviluppati attraverso il gioco adattandoli a nuovi contesti, e di trasformare quelli che nascono come “trucchi”

utili a riuscire in un gioco specifico in schemi strategici generali, potenzialmente declinabili in ambiti completamente diversi.

Nella scelta dei problemi, particolare attenzione è dedicata all'individuazione di quesiti "aperti": situazioni da interpretare più che insiemi di dati da combinare in maniera pedissequa; consegne semplici e chiare ma sotto qualche aspetto vaghe, completabili solo grazie a valutazioni soggettive (e poi collettive) da parte dei ragazzi; questioni affrontabili con diversi approcci e punti di vista, possibilmente prive di un'unica soluzione etichettabile come corretta. Anche la molteplicità di linguaggi – verbale, grafico, numerico – è un cardine di molte attività proposte, che vedono gli studenti adoperarsi in un lavoro – spesso inconsapevole, ma nondimeno ricco – di traduzione, rappresentazione, accomodamento, riconversione tra diverse forme espressive.

Infine, la funzione del "tutor". Come esperto dell'aspetto metodologico, il tutor guida le attività durante entrambe le fasi del loro svolgimento, favorendo il buon funzionamento dei gruppi nella prima e coordinando la discussione nella seconda. Sebbene gli obiettivi matematici delle attività siano ben chiari al tutor, questo evita accortamente di "forzare la mano" nella loro direzione: non fornisce "indizi" ai gruppi in difficoltà, non dà conferme né smentite agli studenti che chiedono se la propria idea è corretta, non inserisce nella discussione collettiva idee "calate dall'alto" né introduce termini specifici per rimpiazzare quelli fantasiosi utilizzati dai ragazzi. Al contrario, circola fra i banchi stimolando la partecipazione di tutti, invitando ad ascoltarsi, a fare ciascuno una proposta; gira agli altri componenti del gruppo le eventuali richieste riguardanti la correttezza di un ragionamento o mette in dubbio opinioni del tutto corrette solo per stimolare la riflessione e il confronto di gruppo.

La discussione a conclusione dei lavori di gruppo coglie gli elementi significativi – corretti o scorretti – che emergono nelle discussioni collettive e li porta al centro dell'attenzione della classe e del suo democratico processo di mediazione concettuale; stimola la riflessione su analogie, differenze e categorie generali portando gli alunni stessi ad avvertire l'esigenza di elaborare una terminologia condivisa.

Il fatto che sia il tutor a svolgere questo compito così complesso non toglie importanza al ruolo dell'insegnante, sempre presente durante le attività. Conoscendo i ragazzi in maniera approfondita e a tutto tondo, è l'insegnante la figura più adatta a individuare gli alunni in difficoltà, agevolare la risoluzione delle molteplici situazioni conflittuali che possono e devono determinarsi nel corso di attività di gruppo, trovare le parole migliori per associare due idee rievocando le esperienze della classe, valutare l'effettiva ricaduta educativa delle attività.

Non ultimo, il lavoro in accoppiata col tutor è per l'insegnante occasione di confronto e formazione, in vista anche di quello che è l'orizzonte ultimo dei progetti condotti: il potenziamento dell'autonomia degli insegnanti, pienamente consapevoli del metodo educativo alla base delle attività e in grado di assumere su di sé anche quei ruoli che nelle prime esperienze competono al tutor.

## **2.2 Due esempi di attività di laboratorio**

Tra i molti problemi affrontati coi ragazzi nei due anni scolastici considerati, due in particolare ci hanno stupito e meritano un resoconto specifico. Si tratta di attività che toccano temi – il calcolo combinatorio l'una, la geometria solida l'altra – tendenzialmente estranei al curriculum della scuola

primaria, che tuttavia hanno registrato un forte interesse da parte degli alunni e prodotto esiti interessanti, decisamente lontani dalle aspettative iniziali.

L'attività di calcolo combinatorio, con cui si è aperto nelle classi terze il percorso del primo anno del progetto, ha posto i ragazzi di fronte al seguente problema:

“Una mia amica vuole decorare il muro del bagno con una riga di piastrelline quadrate di quattro colori diversi, disposte regolarmente. Prima di scegliere, vorrebbe vedere diversi motivi possibili, ma non ha molta fantasia. Datele una mano voi!”.

A ogni gruppo di alunni sono stati forniti, oltre alla scheda, anche quattro quadrati di gomma colorata, di quattro colori diversi. Sebbene non sia stata condivisa coi ragazzi alcuna particolare interpretazione dell'espressione “disporre regolarmente”, a tutti i gruppi è risultato chiaro che i quattro quadrati potevano essere interpretati come “modulo” da ripetere lungo tutto il fregio.

Come facilmente immaginabile, i gruppi hanno iniziato a lavorare cercando di combinare fra loro i quadrati/piastrelle di gomma, elaborando diversi possibili allineamenti. Presto però l'osservazione del riproporsi delle stesse combinazioni ha spinto alcuni studenti a tener traccia su di un foglio delle combinazioni già esplorate. In poco tempo, per imitazione, tutti i gruppi hanno iniziato a tenere un “archivio” dei motivi scoperti.

Di lì a poco, diversi gruppi hanno iniziato a trascurare le piastrelle di gomma e a concentrarsi sui loro fogli. Con una quindicina di motivi a cui attingere, evidenziare analogie tra i pattern esplorati, individuare “buchi” nelle serie di ordinamenti simili e adattare gli schemi per ottenere i casi mancanti è diventata una strategia più efficiente del puro e semplice procedere per tentativi a caso.

Raggiunta la soglia fatidica dei 24 fregi (il numero di permutazioni possibili per quattro oggetti), i gruppi si sono accorti – chi prima, chi dopo – dell'impossibilità di creare ordinamenti che non fossero già “censiti”. In alcuni gruppi sono stati trovati modi per “ordinare” i diversi fregi ottenuti ed evidenziare che si trattasse davvero di tutti quelli possibili. Non tutti questi schemi di ordinamento si sono rivelati efficaci o sufficientemente generali da abbracciare ogni possibile caso, ma il fatto in sé che più di un gruppo sia arrivato – partendo dal ragionamento prova-ed-errore – a un simile traguardo di astrazione ci è da subito parso entusiasmante, e senz'altro inaspettato.

Nella discussione successiva, il confronto tra le diverse modalità di conteggio, ordinamento e generazione dei fregi sviluppate dai gruppi ha portato, intervento dopo intervento, all'emergere di una strategia generale per esaurire le possibili permutazioni delle piastrelle. La strategia, diversa nelle due classi a cui l'attività è stata proposta, è sostanzialmente basata sul fissaggio di un elemento e lo scambio di posto in coppie di elementi restanti. Uno schema essenzialmente induttivo, che riduce lo studio delle permutazioni di quattro elementi a quello delle permutazioni di tre, e quello delle permutazioni di tre al caso (banale) con soltanto due elementi. L'intuizione della strategia per ottenere  $24 = 2 \times 3 \times 4$  che giustifica il numero massimo dei fregi diversi è sorta senza alcuna forzatura, portata nella discussione da bambini il cui sguardo si è, per un attimo, illuminato. Abbiamo aggiunto una quinta piastrella e riproposto il problema alla classe: nessun gruppo ha ritenuto di avere bisogno del quadratino di gomma. Armati di fogli, matite e tabelline, i ragazzi hanno rapidamente concluso che  $60 = 2 \times 3 \times 4 \times 5$  avrebbe dovuto essere la nuova soluzione.

Nell'attività chiamata “Mr. Cubo” (quesito liberamente tratto da matematica senza frontiere, Competizione Junior 2006-07) a ciascun gruppo delle classi terze e quarte sono stati forniti un cubetto di cartone bianco e una scheda riportante tre visioni assonometriche di un dado, inquadrato

frontalmente da tre facce diverse. Ogni faccia del dado riportava una figura geometrica: alcune di esse si ripetevano da un'immagine all'altra, altre no. La didascalia recitava:

“A Mr. Cubo piace guardarsi allo specchio. Si gira, si rigira, e si rigira ancora... Osserva le tre riflessioni e ricostruisci l'aspetto di Mr. Cubo”.

Si trattava, insomma, di scoprire la disposizione delle figure geometriche sul dado conoscendo solo tre informazioni molto parziali, per di più con destra e sinistra invertite!

Come prevedibile (col senno di poi!) i gruppi hanno incontrato difficoltà fortissime nell'affrontare il problema. In nessuna classe le consuete due ore di un'attività sono bastate per portare a termine la consegna, e anche quando, la settimana successiva, i gruppi sono riusciti a disporre le figure sulle facce in modo a loro avviso coerente, lo scontro con lo specchio li ha fatti riprecipitare nel caos. Per “raddrizzare” i loro cubi incapaci di superare la prova della specchio sarebbe bastato scambiare le figure a destra con quelle a sinistra, ma nessun gruppo – in nessuna classe! – ci ha pensato.

Un po' frustrati, abbiamo cercato un modo per concludere l'attività facendo sì che i ragazzi riuscissero a far emergere qualche strategia generale, a “portare a casa” qualcosa di significativo dall'esperienza. Con un po' di riluttanza, abbiamo proposto la settimana successiva una scheda di lavoro sugli sviluppi piani del cubo, che spingesse gli alunni a confrontarsi su quali di alcune disposizioni piane di sei quadrati potessero essere “richiuse” per formare un cubo e quali no. Con estrema sorpresa, abbiamo osservato che non solo i ragazzi di quarta che la settimana precedente apparivano in crisi davanti all'oggetto concreto “cubo di cartone” e alle sue rotazioni si mostravano perfettamente a loro agio con lo studio – aiutato inizialmente da forbici, ma rapidamente ricondotto a “piano” – dei ripiegamenti di sei quadrati, ma addirittura, terminato senza particolari difficoltà il lavoro sulla scheda, anche la risoluzione del problema di “Mr. Cubo” si rivelava ora molto più semplice per loro!

Le rotazioni e riflessioni del cubo, così oscure e disorientanti quando applicate direttamente all'oggetto fisico, sono state gestite in maniera decisamente più agile ricorrendo a trasformazioni geometriche condotte sullo sviluppo piano, guidati dalla sola immaginazione e dal confronto tra intuizioni in conflitto presenti in uno stesso gruppo. La discussione finale ha permesso alle intuizioni dei ragazzi di trasformarsi in strategie esplicite, e a noi di ricrederci fortemente sulle capacità geometriche dei ragazzi di quarta.

Nelle due terze l'attività di “Mr. Cubo” ci è parsa talmente fallimentare da indurci a non proseguire con la scheda sugli sviluppi. Non ci è possibile, dunque, mettere a confronto i risultati ottenuti sulle due fasce d'età.

### **2.3 Conclusioni**

Nell'arco di due anni di attività, alcuni tratti ricorrenti ci paiono meritevoli di un'analisi esplicita: la diversa efficacia dell'assegnazione dei ruoli nel caso di attività di tipo gioco manipolativo e attività di tipo problema, le difficoltà dei ragazzi nello svolgere in modo incisivo i ruoli di *orientato al compito* e *orientato al gruppo*, le peculiarità relative all'applicazione del metodo dei gruppi collaborativi in classi con una forte presenza di alunni stranieri.

Nel caso di attività tipo problema, l'assegnazione di ruoli preordinati appare un forte stimolo alla partecipazione attiva; al tempo stesso, bastano poche attività perché i ragazzi si abituino all'importanza dei ruoli per il successo rispetto alla consegna. Quando hanno a che fare con schede-

problema, dunque, in tutte le classi gli alunni accettano i ruoli e agiscono – chi con più risolutezza, chi con meno – conformemente a essi.

Nel caso di attività a carattere giocoso e fortemente manipolativo (tombole, puzzle geometrici, geopiani, ecc.), gli alunni sembrano dimenticarsi dei propri ruoli molto facilmente e i gruppi smettono di funzionare come comunità collaborative strutturate, assestandosi su dinamiche più libere e paritarie. Questo tuttavia non compromette, in genere, la riuscita delle attività stesse, né sul piano matematico né su quello relazionale. Probabilmente, avere a che fare con oggetti concreti e regole di gioco sufficientemente definite tende a far ricadere ogni bambino nel ruolo “giocatore leale” che, probabilmente, ragazzi di quell’età padroneggiano in maniera abbastanza matura da permettere l’instaurarsi di dinamiche relazionali costruttive.

Nonostante i ruoli di *memoria*, *relatore* e *osservatore* siano inizialmente svolti in maniera poco funzionale, col tempo in tutte le classi gli alunni hanno mostrato fortissimi miglioramenti nella capacità di produrre testi chiari, puntuali, esaustivi e – nel caso degli *osservatori* – autocritici e circostanziati. Al contrario, nello svolgimento dei ruoli di *orientato al compito* e *orientato al gruppo* abbiamo registrato progressi molto meno incisivi. In particolare, diversi alunni affermano di non comprendere la distinzione tra l’uno e l’altro; in molti gruppi, inoltre, capita spesso che solo uno dei due sia “attivo” e si faccia carico sia delle responsabilità dell’uno che di quelle dell’altro. Tendenzialmente, poi, gli interventi degli *orientati* sono blandi, poco solerti, portati avanti con toni e modalità più vicine a quelle del rimprovero che della mediazione o della leadership. Sovente, infine, alla mancanza di polso degli *orientati* supplisce l’elemento più carismatico del gruppo, a prescindere dal ruolo assegnatogli.

Il frequente tentativo, da parte di tutor e insegnanti, di discutere coi ragazzi – sia nei gruppi, che a livello classe – delle strategie più adeguate per svolgere questi ruoli in modo efficace non ha finora dato risultati significativi.

La scuola di Telgate ha larghe percentuali di alunni stranieri in ciascuna classe. La maggior parte di questi alunni risiede in Italia da tempo e, sebbene a casa parli un’altra lingua, padroneggia bene l’italiano e ha condotto nel nostro paese tutti gli studi scolastici. In quasi ogni classe, tuttavia, una piccola frazione di alunni è costituita da inserimenti recenti che provengono da altri sistemi scolastici, non comprendono e non parlano l’italiano con una competenza paragonabile a quella media dei loro compagni.

L’integrazione di questi alunni in attività collaborative è stata finora, come facile immaginare, difficoltosa e mai del tutto efficace. Spesso abbiamo registrato l’esclusione – in genere *autoesclusione* – di questi alunni dalle dinamiche del gruppo collaborativo a cui sono assegnati, e frequentemente il tutor o l’insegnante hanno ritenuto più produttivo proporre a questi ragazzi delle attività “semplificate”, da svolgere senza allontanarsi dal gruppo, piuttosto che premere attivamente e caparbiamente per la loro completa partecipazione alle attività del resto del gruppo. Ciò nonostante, la sensazione ricavata da un paio d’anni di esperienze, supportata dai ricorrenti scambi di opinione con gli insegnanti è che nel corso delle attività di tipo collaborativo il livello di partecipazione e integrazione degli alunni stranieri da poco inseriti sia maggiore che durante il resto delle lezioni, e che l’azione didattica risulti più efficace con questa modalità che in altre attività rivolte all’intero gruppo classe. Ci sentiamo di affermare, dunque, che le esperienze condotte finora abbiano avuto una ricaduta positiva anche su ragazzi le cui aspettative di apprendimento sono per tempi e modalità significativamente diverse da quelle della classe in generale.

## CAPITOLO 3

### **La sperimentazione del laboratorio di accoglienza matematica nella scuola secondaria di secondo grado**

Maddalena Andreoletti, Caterina Scarpaci, Silvia Turlon,  
Centro MatNet-CQIA, Università degli studi di Bergamo

#### **3.1 Introduzione**

Dall'anno scolastico 2011-2012 il centro Matnet propone laboratori di accoglienza matematica che facilitino il problematico passaggio tra il primo e il secondo grado della scuola secondaria. Hanno aderito a tali laboratori complessivamente 18 scuole di diverso indirizzo. I materiali necessari alla realizzazione delle attività laboratori lai sono a disposizione degli insegnanti tramite una piattaforma on-line dell'Università degli Studi di Bergamo. Gli insegnanti hanno quindi la possibilità di confrontarsi in tempo reale sulle esperienze in classe sia tramite il forum attivo sulla piattaforma sia grazie a incontri mensili presso la sede dell'università. A seguito dei positivi risultati del laboratorio di accoglienza dall'anno scolastico 2014-2015 è in atto una sperimentazione che prevede la possibilità di proseguire l'esperienza del laboratorio di accoglienza per tutto il primo anno. Nei successivi paragrafi vengono descritte la struttura del laboratorio e due significative esperienze condotte in due diverse tipologie di Istituti Superiori della provincia di Bergamo.

#### **3.2 Le motivazioni della scelta del laboratorio di accoglienza**

L'analisi dei risultati dei test d'ingresso, somministrato in quasi tutti gli istituti superiori della provincia di Bergamo, ha evidenziato che generalmente gli studenti acquisiscono procedure di calcolo senza avere la consapevolezza dei concetti ad esse sottesi. All'inizio di un nuovo percorso scolastico gli insegnanti sentono quindi la necessità di rivedere ed eventualmente approfondire concetti e procedure di calcolo già affrontate dagli studenti negli anni precedenti: il cosiddetto "ripasso".

Il laboratorio di accoglienza matematica vuole aiutarli a riflettere sui concetti di base e a rimettere in gioco le loro risorse avvicinandoli con maggiore positività allo studio della matematica.

Il nucleo portante del progetto è quello sui numeri, dall'insieme  $N$  all'insieme  $Q$ .

Nelle Indicazioni nazionali si legge infatti che *“il primo biennio sarà dedicato al passaggio dal calcolo aritmetico a quello algebrico”* e che *“lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali sia per rappresentare un problema (mediante un'equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica”*.

È in questa ottica che nelle attività proposte nel laboratorio l'uso delle lettere è sollecitato continuamente, e serve ad esprimere proprietà dei numeri, generalizzare, fare congetture arrivando, quando possibile, a costruire dimostrazioni.

La scelta di approfondire la riflessione sugli insiemi numerici è dettata da alcune fondamentali convinzioni:

- il calcolo numerico precede il calcolo algebrico e gli dà significato, l'utilizzo del linguaggio formalizzato introdotto gradualmente diventa così una conquista e una necessità;
- l'uso delle lettere per costruire formule è trasversale ad altri argomenti come relazioni e funzioni, equazioni e disequazioni, dati e previsioni;
- anche la geometria pur avendo un suo specifico contenuto può essere oggetto di riflessione in modo che non appaia una parte separata della matematica.

Nelle Indicazioni nazionali si legge infatti che *“l'intervento dell'algebra nella rappresentazione degli oggetti geometrici non sarà disgiunto dall'approfondimento della portata concettuale e tecnica di questa branca della matematica”*.

Ovviamente il progetto non ha la pretesa di essere esaustivo rispetto a tutte le problematiche connesse al passaggio dal primo al secondo grado, ma di mettere l'accento su quei nodi fondamentali, e per questo irrinunciabili, che sono la base di un apprendimento consapevole e stabile.

Il laboratorio coinvolge scuole di ordine diverso, per cui il materiale preparato è piuttosto ricco e vario. In relazione a come è stato strutturato gli insegnanti possono scegliere fra due percorsi, base e avanzato, in funzione del tipo di classe e dei livelli di partenza. Per ogni tappa del percorso sono forniti i materiali così suddivisi:

Attività (da usare per i lavori di gruppo),

Scheda attività (per il lavoro individuale a casa),

Power Point come guida per la sintesi e la sistematizzazione.

Le schede di lavoro, uguali per tutti gli ordini di scuola, presentano quesiti distinti in esercizi applicativi, problemi di routine e non, congetture e dimostrazioni.

La modalità “laboratoriale” proposta, finalizzata al raggiungimento di alcuni obiettivi: costruzione del proprio sapere; comunicazione delle proprie scoperte; interiorizzazione delle nozioni apprese, è quella realizzata in gruppi collaborativi (cfr. paragrafo 1.2 del capitolo 1).

Ogni docente ha potuto utilizzare la piattaforma on-line del centro MatNet per confrontarsi e comunicare con gli altri insegnanti coinvolti nella sperimentazione.

Il progetto è stato monitorato attraverso una scheda di osservazione per gli insegnanti e a due questionari di gradimento, uno di gruppo e uno individuale, per gli studenti

### **3.3 La sperimentazione nel liceo scientifico Lussana di Bergamo**

Il laboratorio d'accoglienza matematica è stato attuato a partire dall'a.s. 2011-12 in complessivamente 9 classi prime del liceo scientifico Lussana, di cui 5 ad indirizzo delle scienze applicate. Il percorso scelto è stato quello “avanzato” coinvolgendo due insegnanti e circa 260 studenti.

L'utenza coinvolta è quella di studenti provenienti da un contesto socio-culturale medio - alto con aspettative ambiziose anche da parte delle famiglie.

Nonostante risultati positivi negli anni precedenti e nel test di ingresso, al termine del primo anno in generale si registra un numero di insuccessi non in linea con i presupposti di partenza. Questo da

una parte disorienta gli studenti e le loro famiglie e dall'altra deve far riflettere gli insegnanti sulle cause.

Il metodo tradizionale spesso radica negli studenti, penalizzante a maggior ragione in un liceo scientifico, la convinzione che basti conoscere un insieme di formule da applicare in esercizi ripetitivi e in situazioni note per ottenere risultati soddisfacenti. La cosiddetta lezione frontale, che a partire da definizioni e teoremi propone un modello passivo di apprendimento, non facilita l'emergere di abilità acquisite o di lacune nei concetti di base. Nel corso degli anni si assiste inoltre al cronicizzarsi degli errori tipici e ad una progressiva disaffezione rispetto allo studio della matematica, dimostrata dal basso numero di studenti che proseguono gli studi scientifici.

Metaforicamente è come se gli insegnanti si preoccupassero di costruire o ristrutturare un edificio senza dare ad ogni studente la possibilità di rivedere criticamente le fondamenta.

Adottando la metodologia collaborativa e il problem solving si dà la possibilità agli studenti di rimettere in moto conoscenze e abilità già acquisite e di ristrutturarle criticamente e nel contempo di dare senso alla disciplina facendosi carico anche dell'aspetto relazionale.

Il progetto ha come punto significativo di partenza un'attività di risoluzione di problemi pensati per essere ripresi in momenti e ambiti diversi in un percorso a spirale. Il ruolo dell'insegnante è in questa fase quello di coordinatore e sollecitatore. La successiva discussione con l'intera classe permette di parlare di matematica fuori dagli ambiti classici dell'interrogazione e convince gli studenti della necessità di appropriarsi di un linguaggio specifico e di un rigore altrimenti difficili da recuperare. La sistematizzazione dei concetti coinvolti nelle attività diventa così un momento di riflessione collettiva che li fa essere protagonisti del loro apprendimento. L'interesse suscitato negli studenti e il generale apprezzamento delle famiglie ha indotto gli insegnanti coinvolti a proseguire con la stessa metodologia per entrambi gli anni del primo biennio.

Tra le tante attività proposte in classe in apprendimento collaborativo alcune ci sembrano particolarmente esemplificative di quanto descritto:

*1. Cinque persone si incontrano e ognuna stringe la mano a ciascun'altra.*

*Quante strette di mano sono avvenute?*

*E se persone fossero 12 oppure 34?*

*Sapete generalizzare a  $n$  persone?*

Non ci sono formule da applicare, gli studenti sono arrivati alla soluzione con strategie diverse, nella discussione è stato interessante confrontarle cosicché gli studenti hanno scoperto, con molto stupore, che metodi completamente diversi e formule apparentemente dissimili, l'una additiva e l'altra moltiplicativa ( $1+...+n = (n(n-1)/2)$ ), portano allo stesso risultato. Interessante anche l'accesa discussione e la conseguente analisi, suscitata dai ragazzi stessi, delle due espressioni  $(n(n-1)/2)$  e  $(n(n+1)/2)$  trovate, è stata l'occasione per interpretare una formula e tradurre dal linguaggio simbolico a quello naturale e viceversa.

Il quesito è stato ripreso più volte nel corso dell'anno in contesti apparentemente molto diversi e sempre riconosciuto dagli studenti.

2. Considerate un numero di due cifre; scambiando fra loro le due cifre si ottiene un altro numero. La differenza tra questi due numeri è divisibile per 9. Provate a ripetere l'operazione con un altro numero; la differenza è ancora divisibile per 9? Questo fatto si verifica sempre? Perché? E se consideriamo un numero di tre cifre con la prima e la terza cifra diverse e scambiamo tra loro queste due cifre, la differenza tra il numero considerato e quello ottenuto dopo lo scambio per quale numero è divisibile?

Il quesito proposto ha presentato diverse difficoltà e ha messo in luce che la formalizzazione necessita della comprensione dei concetti fondamentali. Nonostante apparentemente tutti conoscano il valore posizionale delle cifre e siano stati abituati nella scuola primaria a colorare in modo diverso le potenze del 10, il processo di generalizzazione è stato faticoso. Quasi tutti i gruppi hanno generalizzato il numero di due cifre con  $xy$  e quello con le cifre scambiate con  $yx$ , non riconoscendo la struttura moltiplicativa della loro traduzione simbolica. La discussione successiva ha sottolineato che usare le lettere al posto dei numeri è spesso molto utile, ma che bisogna usarle in modo opportuno. Questo risultato ci ha rafforzato nella convinzione che non bisogna dare nulla per scontato e che senza questa metodologia avremmo perso un'occasione. Questa attività ha aperto la strada ad un uso consapevole delle lettere al posto dei numeri ed ha avviato alla dimostrazione di proprietà in ambito numerico non limitando il processo deduttivo solo ai teoremi geometrici, come troppo spesso accade nella pratica didattica. I polinomi sono stati così introdotti in modo non convenzionale a partire dalla scrittura polinomiale di un numero.

Le attività proposte hanno condotto naturalmente, spesso a partire dalle osservazioni dei ragazzi, a toccare argomenti quali la probabilità, il calcolo combinatorio, l'aritmetica modulare, le strutture algebriche che normalmente non vengono affrontati e quindi non ne viene sfruttata la potenzialità anche nel dare una veste unitaria alla disciplina.

Il calcolo letterale che occupa sempre molto spazio e molte energie, spesso con risultati deludenti, non è stato costretto in un ambito fine a se stesso, è stata invece vista come un'esigenza ed un aiuto per la risoluzione di problemi.

È stato proposto a studenti con debito formativo di due classi seconde, una che ha lavorato in modo tradizionale (A) e l'altra che ha sperimentato il progetto (B), il seguente quesito:

Esplicita rispetto alla lettera  $p$  la seguente uguaglianza  $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ .

Tutti gli studenti della classe A hanno dato la risposta  $p = f - q$ , solo uno studente della classe B ha sbagliato.

Senza voler generalizzare è comunque possibile fare una riflessione sull'efficacia del metodo laboratoriale nel consolidare la consapevolezza matematica dei processi in gioco.

### **Punti di forza e criticità sperimentate**

La modalità collaborativa e il problem solving all'inizio hanno molto disorientato gli studenti, destabilizzando la loro idea di lezione di matematica.

Nel corso dell'anno gli studenti hanno imparato a collaborare tra loro e sono significative alcune loro considerazioni che riportiamo integralmente (compresi gli errori grammaticali), tratte dal questionario individuale proposto a conclusione dell'esperienza collaborativa.

1. Molti dicono che l'apprendimento cooperativo richiede più impegno ma risulta più efficace: qual è la tua opinione dopo l'esperienza svolta?

*“È vero, è difficile stare ad ascoltare e capire quello che vogliono dire gli altri, ed è anche difficile fare capire agli altri quello che si pensa. Però alla fine se si ha lavorato bene le cose si capiscono meglio e si ricordano meglio”*

*“... non richiede più impegno, in quanto se non si sa fare qualcosa gli altri ti aiutano però risulta più efficace perché i compagni ti chiariscono le idee”*

2. Come ti sei sentito durante i lavori di gruppo?

*“all'inizio ero timido a rispondere poi mi sono abituato e mi è piaciuto”*

*“coinvolto, le mie opinioni e le mie idee sono state sempre prese in considerazione e i miei compagni mi aiutavano sempre quando ero in difficoltà”*

3. Cosa pensi della discussione di classe a conclusione dei lavori di gruppo? Come ti sei sentito durante le varie discussioni?

*“quando i relatori, gli osservatori .... Descrivevano l'attività ho avuto l'impressione che non dicessero la verità”*

*“la discussione è stato il momento più emozionante, infatti ogni gruppo proponeva le sue soluzioni (a volte identiche a volte completamente diverse) e le motivava e poi arrivavano le spiegazioni dell'insegnante”*

4. Cosa ti è piaciuto di più dell'esperienza compiuta? Perché?

*“... ci ha rivelato il valore della collaborazione, infatti il mio gruppo che prima non si conosceva ha stretto amicizia e ha condiviso idee, sentimenti e concetti matematici. Il lavoro di gruppo è un ottimo espediente per la coesione della classe ...”*

*“il fatto di confrontare il metodo diverso di ognuno per risolvere lo stesso problema”*

*“... È stato il buon lavoro del gruppo perché non ci si annoia anziché la correzione alla lavagna quando magari si annoia”*

5. Cosa ti è piaciuto di meno dell'esperienza compiuta? Perché?

*“... quando un membro del gruppo si intestardiva su un concetto e non si riusciva a fargli cambiare idea”*

*“non mi sono piaciuti molto alcuni esercizi delle schede”*

6. Hai considerazioni da aggiungere?

*“ penso che i lavori di gruppo siano un’esperienza “rivoluzionaria” perché nessuno me li aveva mai proposti”*

Significative sono anche le risposte tratte dal questionario di gruppo proposto a conclusione dell’esperienza.

1. Provate ad indicare uno o più esercizi, delle varie attività proposte, che vi hanno aiutato a capire meglio alcuni aspetti della matematica. Perché?
2. Se doveste progettare un’attività da proporre ad un compagno quale o quali esercizi, delle varie attività proposte, **scegliereste?** Perché?

*“ abbiamo preferito gli esercizi che richiedono un maggior ragionamento e le cui soluzioni non sono raggiungibili tramite formule fisse”*

*“I quesiti giudicati positivamente sono quelli “che richiedono tempo e ragionamenti logici”*

*“ per progettare un percorso per i nostri compagni proporremo loro gli stessi esercizi .... secondo noi riusciranno ad avere un ripasso completo del programma dell’anno scorso. Aggiungeremo alcune attività sulle dimostrazioni non avendole mai fatte.”*

3. Se doveste progettare un’attività da proporre ad un compagno quale o quali esercizi, delle varie attività proposte, **non scegliereste?** Perché?

*“Le attività “semplici e noiose””*

*“Sconsigliamo quelli in cui prevale il calcolo sul ragionamento”*

4. Quali aspetti del lavoro vi sono risultati utili e perché?

*“ imparare a non spaventarsi davanti a concetti nuovi ma ragionare a fondo discutendo e aiutandosi a vicenda .....”*

*“ ognuno può esprimere le proprie opinioni .....in tanti si è più critici verso il lavoro svolto”*

*”sentire i punti di vista degli altri compagni perché ci possono essere metodi diversi per arrivare ad un’unica soluzione”*

5. Quali aspetti del lavoro sono risultati negativi e perché?

*“ capita che durante gli esercizi ci si distrae e si cominci a lavorare di altri argomenti”*

*“la buona riuscita del lavoro dipende totalmente dall’affidabilità dei compagni”*

Durante le attività si percepisce la classe come un vero laboratorio dove la tensione non è più rivolta al risultato scolastico e quindi non si trasforma in paura, ma tutti sono alla ricerca di strategie risolutive.

Il lavoro per prove ed errori è molto stimolante e divertente e permette all’insegnante di rassicurare gli studenti valorizzando i loro errori, che di solito percepiscono come penalizzanti. Generalmente svanisce la paura di sbagliare che, siamo certe, sia un forte ostacolo all’apprendimento.

La condivisione all'interno del gruppo, sia delle frustrazioni che delle gratificazioni, è un altro elemento pregnante e permette a tutti di sentirsi protagonisti della costruzione del proprio sapere, il confronto tra pari, inoltre, è un buon avvio sulla strada dell'autonomia e della consapevolezza della forza del lavoro di squadra.

Da non sottovalutare, infine, l'importanza, non solo in matematica, dell'apprendere comportamenti sociali rispettosi delle diversità e il valore della coesione.

La discussione a classe intera è stato un momento importante anche se molto delicato.

Gestire infatti una discussione matematica, tenendo conto delle osservazioni di tutti i gruppi, può condurre a percorrere strade non previste rischiando di anticipare concetti che possono far perdere di vista gli obiettivi specifici o, per contro, non soddisfare del tutto le curiosità sorte.

Le problematiche maggiori si sono riscontrate su due fronti, uno interno alla classe e uno esterno:

- la gestione all'interno dei gruppi dei diversi ruoli, la valutazione dei comportamenti sociali e il fatto che il consiglio di classe che non sempre abbia sostenuto la sperimentazione.
- La rigida organizzazione scolastica, il permanere di modalità tradizionali di insegnamento che favoriscono più l'aspetto procedurale che la reale comprensione dei concetti non facilita l'adesione degli insegnanti al progetto soprattutto nei casi in cui i Consigli di Classe non lo supportino.

### **3.4 La sperimentazione nel Liceo di Scienze Umane “O. Romero” di Albino (Bg)**

La sperimentazione in oggetto è stata condotta negli anni scolastici 2012-2013 e 2013-2014 e ha coinvolto gli alunni di due classi prime.

Due sono le motivazioni personali che mi hanno spinto a partecipare al progetto del centro Matnet dell'Università di Bergamo.

La prima è sicuramente stata la presa di coscienza del fallimento del “metodo tradizionale” nel costruire apprendimenti reali e duraturi in matematica.

La seconda risiede nella peculiarità dell'utenza del Liceo Scienze Umane, prevalentemente composta da studenti che desiderano, per le ragioni più diverse, cimentarsi con la matematica il meno possibile. Molto interessante, a questo proposito, risulta la lettura di ciò che scrivono, per raccontare del loro rapporto con la matematica, nel tema che viene loro assegnato in uno dei primi giorni di scuola, dall'insegnante di Italiano.

*“Ho scelto questa scuola perché mi piacciono le materie umanistiche, i pensieri delle persone, quindi mi piace la letteratura. Ma quando per la prima volta ho visto il fascicolo delle materia di questo indirizzo e ho notato che in griglia c'era scritto: matematica: 3,3,2,2,2 la mia prima reazione è stata del tipo Wou!”.*

### **Punti di forza e criticità sperimentate**

Premesso che “non c'è la metodologia didattica panacea, non ci sarà mai, né ha senso pensarla” (D'Amore B. Fandiño Pinilla M.I., *Matematica come farla amare*, Giunti, 2012) vorrei focalizzare l'attenzione su quali siano le potenzialità dell'apprendimento collaborativo nei confronti della costruzione di un percorso significativo per gli studenti e in linea con le Indicazioni Nazionali.

Le riflessioni che seguono fanno anche riferimento alle risposte date dagli studenti al questionario individuale di gradimento somministrato, in forma anonima, circa a metà gennaio 2014, a conclusione del percorso di accoglienza. Le risposte date dagli studenti sono riportate in corsivo e senza correzioni ortografiche.

Nelle indicazioni Nazionali si trovano, relativamente all'area logico-argomentativa, i seguenti risultati di apprendimento comuni all'istruzione liceale:

- saper sostenere una propria tesi e saper ascoltare e valutare criticamente le argomentazioni altrui;
- acquisire l'abitudine a ragionare con rigore logico, ad identificare i problemi e a individuare possibili soluzioni.

Io credo che i due momenti caratterizzanti l'apprendimento collaborativo, ovvero la ricerca delle soluzioni all'interno del gruppo e la discussione a classe intera siano davvero un veicolo per raggiungere i risultati di apprendimento citati.

In particolare la possibilità che hanno gli studenti di cercare la soluzione al problema posto, senza interferenze da parte dell'insegnante, apre la possibilità reale di scoprire diverse soluzioni allo stesso problema. Non solo si scopre che non esiste un'unica soluzione, quella scelta dall'insegnante, ma può capitare che gli studenti elaborino una strategia risolutiva "nuova", rispetto a quelle pensate dall'insegnante.

Durante la discussione a classe intera ho potuto osservare gli studenti cimentarsi con la difesa delle proprie idee risolutive, nella messa in discussione di quelle altrui e nella eventuale correzione degli errori commessi dai compagni. Durante le prime attività condotte in modo collaborativo, gli studenti si aspettano che l'insegnante dichiari immediatamente cosa sia giusto e cosa sia sbagliato. All'inizio faticano ad ascoltare tutte le relazioni presentate dai relatori dei gruppi e continuano a chiedere "quale sia la risposta giusta". Gli alunni che intervengono si rivolgono esclusivamente all'insegnante e si aspettano immediatamente una risposta definitiva e incontrovertibile alle loro affermazioni/domande. La discussione a classe intera tende, all'inizio, a ridursi a un rapporto tra un singolo studente e l'insegnante. E' inoltre necessario accettare, almeno nella fase iniziale, un certo livello di confusione e dispersione e fare i conti con la relativa sensazione di non avere tutto sotto controllo. In questo senso la lezione tradizionale è molto più rassicurante perché, anche solo nella gestione dei tempi, si procede senza imprevisti.

Per quanto mi riguarda la fatica maggiore che ho sperimentato risiede nel non anticipare il "risultato corretto". Ho osservato che tanto più riesco a controllare le mie risposte verbali e non verbali, tanto più favorisco la possibilità che la discussione avvenga anche tra compagni. Se condotta in modo efficace la discussione porta ad una soluzione del problema che risulta costruita insieme alla classe e non "calata dall'alto" dall'insegnante. Si può leggere una delle risposte date alla domanda 3 del questionario e relativa proprio alla discussione di classe:

*"Durante le discussioni la cosa più bella è che parlavamo solo tra studenti e se qualcuno diceva qualcosa di sbagliato erano le compagne che lo correggevano. Era molto divertente e dava tanta soddisfazione arrivare alla soluzione corretta senza l'aiuto dell'insegnante".*

Mi ha sorpresa trovare, in tante risposte degli studenti, il desiderio più o meno esplicitato, di essere protagonisti attivi del proprio processo di apprendimento. La soddisfazione e gratificazione che si

sperimentano si colgono nella comparsa di quelle parole che assai raramente sono associate alla matematica: divertimento, amore, coinvolgimento, partecipazione.

*“A me la matematica non mi ha mai esaltata, anche se comunque non andavo male. Invece qua, con questo metodo mi appassiona, è bella proprio mi piace... poi è bello anche il rapporto che si instaura con le compagne e anche con la prof.”*

La possibilità di lavorare in gruppo è un altro dei punti di forza dell'apprendimento collaborativo. I motivi sono facilmente individuabili:

- motivazione sociale, ossia la possibilità di conoscere meglio i compagni e di facilitare i processi di integrazione nella classe
- motivazione relativa all'apprendimento, ossia tra pari la comunicazione è più immediata e efficace e anche le persone che fanno più fatica vengono aidate dai compagni a comprendere e a superare le difficoltà.

Risulta chiaramente in alcune risposte degli studenti al questionario:

*“Ciò che mi è piaciuto di più è il gruppo perché tutti collaboravamo senza escludere nessuno spiegando molte volte la stessa cosa in modo tale che la capissero tutti.”*

*“Abbiamo potuto lavorare insieme, dire ciò che pensavamo liberamente e ragionare di più.”*

Mi sembra utile soffermarmi sulle criticità che ho sperimentato rispetto alle modalità di partecipazione all'interno del gruppo. Ci sono gruppi in cui le dinamiche sono funzionali al lavoro e gruppi ove alcuni componenti sono decisamente meno attivi di altri. La partecipazione non adeguata è stata riferita dagli studenti a persone che *“dopo aver pensato ad altro pretendevano di capire la risoluzione trovata da altri”*.

L'anno scorso invece, oltre al problema delle persone non interessate, era emersa in modo forte la criticità da parte degli alunni che *“facevano fatica”* in matematica e si sentivano esclusi dai compagni *“più veloci e bravi”*.

Cosa è cambiato? I gruppi sono stati formati quest'anno, come l'anno scorso, in base alle libere scelte degli alunni durante i primi giorni di scuola. Quest'anno, facendo tesoro dell'esperienza precedente, sono stata però meno rigida e meno condizionata rispetto ai tempi indicati nel progetto. Non credo si possa intervenire sulla diversa velocità di risoluzione dei quesiti perché dipende da troppe variabili diverse come le caratteristiche proprie di ogni alunno, la sua storia personale e il tipo di quesito proposto. E' invece necessario intervenire sui tempi a disposizione dei gruppi. Ho scelto di rendere più snelle le prime attività, senza preoccuparmi di proporre tutti i quesiti, per permettere agli alunni di capire come muoversi all'interno del gruppo in modo da ottenere soluzioni realmente condivise.

Resta aperto il problema degli alunni che non partecipano e non si fanno coinvolgere. Una delle azioni da intraprendere può essere quella di lavorare più intensamente sui ruoli dei gruppi collaborativi e sulla loro importanza. Come ho potuto vedere dalle risposte date dai miei alunni, i ruoli sono a volte percepiti in maniera diversa. Alcuni alunni hanno capito perfettamente la loro importanza: *“grazie ai ruoli ognuno deve svolgere qualcosa, deve portare a termine un suo obiettivo”*; altri trovano i ruoli inutili.

Concludo con una riflessione riguardo ad un'altra evidenza positiva che è relativa allo sviluppo del seguente obiettivo specifico di apprendimento del primo biennio:

“Lo studente acquisirà la capacità di eseguire calcoli con le espressioni letterali, sia per rappresentare un problema (mediante un’equazione, disequazioni o sistemi) e risolverlo, sia per dimostrare risultati generali, in particolare in aritmetica.”

Il calcolo letterale rappresenta, nella mia esperienza, un grosso ostacolo per gli studenti e i risultati sono generalmente insoddisfacenti a fronte di una notevole quantità di tempo utilizzato. I risultati delle prove di verifica sono generalmente negativi e evidenziano una serie di problematiche relative agli insiemi numerici che sembravano ormai risolte e superate. La diversa impostazione al lavoro data nel progetto permette agli studenti di essere stimolati, sin dai primi giorni, a generalizzare enunciati che riguardano proposizioni aritmetiche. Il momento del passaggio al calcolo letterale avviene pertanto senza discontinuità, come un approfondimento di quanto già visto in moltissime situazioni “numeriche”. Lo studente affronta il calcolo letterale non come qualcosa di avulso rispetto a quanto trattato precedentemente e i risultati che si ottengono sono decisamente migliori. Il tempo dedicato al calcolo si riduce a favore di quello utilizzato per dimostrare risultati generali, discutendone più facilmente tra pari.

## **Riferimenti bibliografici**

- AA.VV., (1977), *Guida al progetto d'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori proposto da G. Prodi*, Volume primo, D'Anna, Messina - Firenze
- Angelini V., Nannelli P., Pesci A., Vitali E. (2007), Poliedri: non solo geometria, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol.30 A-B n. 4, pp. 355-396
- Baldrighi A., (2011), Una testimonianza di collaborazione positiva tra pari: il ruolo della riflessione metacognitiva, *Matematica&Difficoltà n. 16, Il senso dell'educazione matematica. Valorizzare valutando*, Imperiale R., Pesci A., Sandri P., Vighi P. (a cura di), Bologna, Pitagora, pp. 109-114
- Baldrighi A., Bellinzona C., (2004), Esperienze di apprendimento cooperativo: le equazioni di secondo grado, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 27A-B n. 6, pp. 773-784
- Baldrighi A., Bellinzona C., Pesci A., (2005), L'evoluzione disciplinare e sociale di alcuni alunni in difficoltà durante esperienze di apprendimento cooperativo, *Atti del Convegno Nazionale n. 14 Matematica & Difficoltà, "Alunni, insegnanti, matematica. Progettare, animare, integrare"*, A. Davoli, B. Piochi, P. Sandri (a cura di), Bologna, Pitagora, pp. 104-109
- Baldrighi A., Bellinzona C., Pesci A., (2007), Una esperienza sull'intreccio di linguaggi per un uso consapevole di simboli matematici, *Atti del Convegno Nazionale n. 15 Matematica & Difficoltà, "Matematica e difficoltà: i nodi dei linguaggi"*, R. Imperiale, B. Piochi, P. Sandri (a cura di), Bologna, Pitagora, pp. 60-65
- Baldrighi A., Bellinzona C., Pesci A., Polo M., (2011), Promoting resilience in students through cooperative learning experiences. A work in progress, *Current State of Research on Mathematical Beliefs XVI, Proceedings of the MAVI-16 Conference, Tallin, Estonia*, K. Kislenko (Ed.) , pp. 7-26
- Baldrighi A., Fattori A., Pesci A., (2004), Un'esperienza di apprendimento cooperativo nella scuola secondaria superiore: il teorema di Pitagora, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 27B n. 2, pp. 125-146
- Baldrighi A., Pesci A. (2011), L'attività di tutoraggio in matematica: esempi di schede per la riflessione metacognitiva degli studenti, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 34B, n. 1, pp. 67-86.
- Bauersfeld H., (1995), The Structuring of the Structures: Development and Function of Mathematizing as a Social Practice, in Steffe Leslie P. – Gale Jerry (Eds.), *Constructivism in Education*, Hillsdale, New Jersey, LEA, pp. 137–158.
- Bellinzona C., Torresani M., (2011), Una esperienza didattica al triennio superiore per valorizzare le risorse di tutti, *Matematica&Difficoltà n. 16, Il senso dell'educazione matematica. Valorizzare valutando*, Imperiale R., Pesci A., Sandri P., Vighi P. (a cura di), Bologna, Pitagora, pp. 115-120.
- Bessot A., (1991), La didattica della matematica in Francia. Una introduzione alla “teoria delle situazioni” di Guy Brousseau, *L'educazione Matematica*, n. 1, pp. 61-74
- Brousseau G., (1997), *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Ed. and translated by N. Balacheff, M. Cooper, R. Shuterland, V. Warfield, Kluwer.

- Cohen E. G., (1999), *Organizzare i gruppi cooperativi*, Trento, Erickson.
- Comoglio M., Cardoso M. A. (1996), *Insegnamento e apprendimento in gruppo: il cooperative learning*, LAS, Roma
- Damasio A. R. (1999), *Emozione e Coscienza*, Milano, Adelphi.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2012), *Matematica come farla amare*, Giunti.
- Ernest P., (1995), The one and the Many, in Steffe Leslie P. – Gale Jerry (Eds.). *Constructivism in Education*. New Jersey , Hillsdale, LEA, pp. 459–486.
- Jaquet F., (1993), Dalla ricerca in didattica della matematica alla pratica in classe, *L'Educazione Matematica*, n. 1, pp. 37-63
- Locatello S., Meloni G., (2003), *Apprendimento collaborativo in matematica*, Bologna, Pitagora.
- Margolinas C., (1990), Una introduzione alle problematiche della didattica della matematica in Francia, *Quaderni di Ricerca Didattica G.R.I.M.*, n. 1, Palermo, 1990, pp. 5-25.
- Pellerey M., (1979), Ruolo dei problemi nell'apprendimento della matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 2 n. 1, pp. 62-73
- Pesci A. (2004), Insegnare e apprendere cooperando: esperienze e prospettive, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 27 A-B n. 6, pp. 637-670
- Pesci A., (2011a), Sollecitare la riflessione metacognitiva in attività di tutoraggio per valorizzare le risorse di tutti gli studenti, *Matematica&Difficoltà n. 16, Il senso dell'educazione matematica. Valorizzare valutando*, Imperiale R., Pesci A., Sandri P., Vighi P. (a cura di), Bologna, Pitagora, pp. 69-78
- Pesci A., (2011b), Studi di esperienze collaborative in presenza per una loro eventuale implementazione on-line, *TD-Tecnologie Didattiche*, 19 (3), pp. 183-188.
- Polya G., (1971), *La scoperta matematica Vol. I, Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi*, Feltrinelli
- Reggiani M., (2008), Il laboratorio come “ambiente” per l'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 31, pp. 645-665
- Tonelli M., Zan R., (1995), Il ruolo dei comportamenti metacognitivi nella risoluzione di problemi, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 18A, n. 1, pp. 7-35
- Torresani M. (2007), Attività di tutoraggio nel recupero in itinere di matematica, , *Atti del Convegno Nazionale n. 15 Matematica & Difficoltà, “Matematica e difficoltà: i nodi dei linguaggi”*, R. Imperiale, B. Piochi, P. Sandri, (a cura di), Bologna, Pitagora, pp. 66-71.
- Torresani M. (2008), Una esperienza di *Peer Education* finalizzata al recupero nella scuola secondaria di secondo grado, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 31 A-B, 6, pp. 573-585
- U.M.I., *Matematica 2001, Matematica 2003, Matematica 2004*, reperibili in rete
- Vianello L. (2003), La relazione tra intelligenze ed autonomia, *Matematica e Difficoltà n. 12*, Longo P., Davoli A., Sandri P. (a cura di) , Bologna, Pitagora, pp. 27-40.
- Zan R., (1998), *Problemi e convinzioni*, Pitagora, Bologna
- Zan R., (2007), *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire*, Springer Verlag, Milano