Libro di Matematica

In questo libro vengono affrontati i temi svolti in un corso triennale di un Centro di Formazione Professionale.

Sito:	moodle.puntocometa.org
Corso:	Sinatra
Libro:	Libro di Matematica
Stampato da:	Giuseppe Sinatra
Data:	venerdì, 22 aprile 2016, 17:33

Sommario

1 Introduzione

Questo libro si pone come supporto all'apprendimento di uno studente che studia per acquisire una qualifica professionale. In ogni capitolo verranno indicati gli elementi di competenza (abilità e conoscenze) sviluppati e verranno proposti dei test di autovalutazione che gli studenti possono svolgere durante la loro attività di studio.

Riporto le competenze e la suddivisione in elementi di competenza affrontati durante il percorso:

Competenza

M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica.

Abilità

MA1.1: Comprendere il significato logico-operativo di numeri appartenenti ai diversi sistemi numerici. Utilizzare le diverse notazioni e saper convertire da una all'altra (da frazioni a decimali, da frazioni apparenti ad interi, da percentuali a frazioni...).

MA1.2: Comprendere il significato di potenza; calcolare potenze e applicarne le proprietà.

MA1.3: Risolvere brevi espressioni nei diversi insiemi numerici; rappresentare la soluzione di un problema con un'espressione e calcolarne il valore anche utilizzando una calcolatrice.

MA1.4: Tradurre brevi istruzioni in sequenze simboliche (anche con tabelle); risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici.

MA1.5: Comprendere il significato logico-operativo di rapporto e grandezza derivata; impostare uguaglianze di rapporti per risolvere problemi di proporzionalità e percentuale; risolvere semplici problemi diretti e inversi.

MA1.6: Risolvere equazioni di primo grado e verificare la correttezza dei procedimenti utilizzati.

MA1.7: Rappresentare graficamente equazioni di primo grado; comprendere il concetto di equazione e quello di funzione.

MA1.8: Risolvere sistemi di equazioni di primo grado seguendo istruzioni e verificarne la correttezza dei risultati.

Conoscenze

MC1.1: Gli insiemi numerici N, Z, Q, R; rappresentazioni, operazioni, odinamento.

MC1.2: I sistemi di numerazione.

MC1.3: Espressioni algebriche; principali operazioni.

MC1.4: Equazioni e disequazioni di primo grado.

MC1.5: Sistemi di equazioni e disequazioni di primo grado.

Competenza

M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.

Abilità

MA2.1: Riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con linguaggio naturale.

MA2.2: Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete.

MA2.3: Disegnare figure geometriche con semplici tecniche grafiche e operative.

MA2.4: Applicare le principali formule relative alla retta e alle figure geometriche sul piano cartesiano.

MA2.5: In casi reali di facile leggibilità risolvere problemi di tipo geometrico e ripercorrere le procedure di soluzione.

MA2.6: Compredere i principali passaggi logici di una dimostrazione.

Conoscenze

MC2.1 Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini: assioma, teorema, definizione.

MC2.2: Il piano euclideo: relazioni tra rette; congruenza di figure; poligoni e loro proprietà.

MC2.3: Circonferenza e cerchio.

MC2.4: Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora.

MC2.5: Teorema di Talete e sue conseguenze.

MC2.6: Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.

MC2.7: Interpretazione geometrica dei sistemi di equazioni.

MC2.8: Trasformazioni geometriche elementari e loro invarianti.

Competenza

M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.

Abilità

MA3.1: Progettare un percorso risolutivo strutturato in tappe.

MA3.2: Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici.

MA3.3: Convalidare i risultati conseguiti sia empiricamente, sia mediante argomentazioni.

MA3.4: Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa.

Conoscenze

MC3.1: Le fasi risolutive di un problema e loro rappresentazioni con diagrammi.

MC3.2: Principali rappresentazioni di un oggetto matematico.

MC3.3: Tecniche risolutive di un problema che utilizzano frazioni, proporzioni, percentuali, formule geometriche, equazioni e disequazioni di 1° grado.

Competenza

M4: Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Abilità

MA4.1: Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati.

MA4.2: Rappresentare classi di dati mediante istogrammi e diagrammi a torta.

MA4.3: Leggere e interpretare tabelle e grafici in termini di corrispondenze fra elementi di due insiemi.

MA4.4: Riconoscere una relazione tra variabili, in termini di proporzionalità diretta o inversa e formalizzarla attraverso una funzione matematica.

MA4.5: Rappresentare sul piano cartesiano il grafico di una funzione.

MA4.6: Valutare l'ordine di grandezza di un risultato.

MA4.7: Elaborare e gestire semplici calcoli attraverso un foglio elettronico.

MA4.8: Elaborare e gestire un foglio elettronico per rappresentare in forma grafica i risultati dei calcoli eseguiti.

Conoscenze

MC4.1: Significato di analisi e organizzazione di dati numerici.

MC4.2: Il piano cartesiano e il concetto di funzione.

MC4.3: Funzioni di proporzionalità diretta, inversa e relativi grafici, funzione lineare.

MC4.4: Incertezza di una misura e concetto di errore.

MC4.5: La notazione scientifica per i numeri reali.

MC4.6: Il concetto e i metodi di approssimazione.

MC4.7: I numeri "macchina".

MC4.8: Il concetto di approssimazione.

MC4.9: Semplici applicazioni che consentono di creare, elaborare un foglio elettronico con le forme grafiche corrispondenti.

2 Geometria Piana

In questo capitolo verranno sviluppati i seguenti elementi di competenza:

Competenza

M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.

Abilità

MA2.1: Riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con linguaggio naturale.

MA2.3: Disegnare figure geometriche con semplici tecniche grafiche e operative.

MA2.6: Comprendere i principali passaggi logici di una dimostrazione.

Conoscenze

MC2.1: Gli enti principali della geometria e il significato dei termini: assioma, teorema, definizione.

MC2.2: Il piano euclideo: relazioni tra rette; congruenza di figure; poligoni e loro proprietà.

MC2.3: Circonferenza e cerchio.

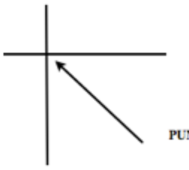
MC2.4: Misura di grandezza; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora.

2.1 Concetti Primitivi

Euclid as the father of geometry: Euclid and his Elements (and how much Abraham Lincoln liked them)

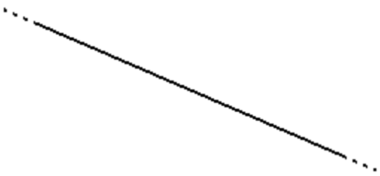
KHANACADEMY

Euclide padre della geometria



PUNTO

Un punto è un **concetto primitivo**[1] e nella geometria euclidea non ha grandezze di alcun tipo (volume, area, lunghezza), e nessuna caratteristica in generale tranne la sua posizione.



RETTA

La **retta** è **un concetto primitivo**; geometricamente priva di alcuno spessore ha una sola dimensione: la lunghezza.

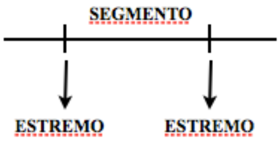
PIANO

Il **piano** è un **concetto primitivo**, è privo di spessore ed è esteso illimitatamente in tutte le direzioni.

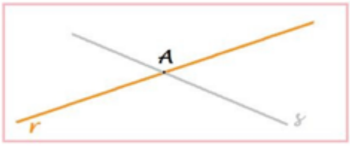
SEMIRETTA

La **semiretta** è una linea ricavata dividendo una retta in due parti. Il punto che divide la retta e che le appartiene si chiama punto d'origine e da esso parte la semiretta, proseguendo all'infinito. Una semiretta è univocamente individuata dal punto di origine e da un altro punto ad essa appartenente.

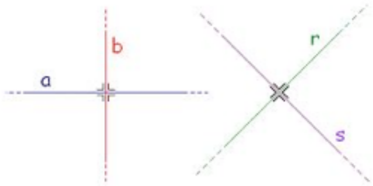
Un **segmento** è una parte di retta delimitata da due punti, detti **estremi**.



Due rette si dicono **incidenti** sehanno esattamente un punto in comune.

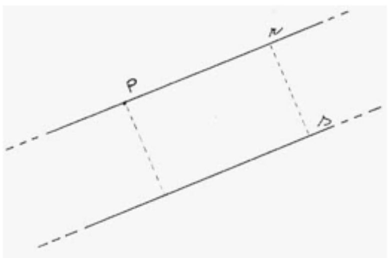


RETTE INCIDENTI



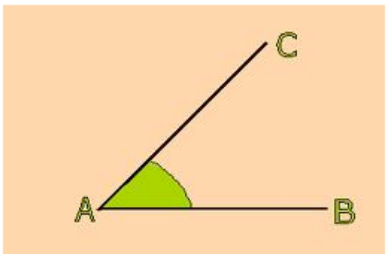
RETTE PERPENDICOLARI

Un caso particolare di rette incidenti si ha quando le due rette formano nel punto di intersezione quattro angoli retti (cioè di ampiezza uguale a 90°), in tal caso sono dette **perpendicolari**.



RETTE PARALLELE

Due rette si dicono parallele se non si intersecano mai. Due rette parallele nel piano mantengono sempre la stessa distanza[2] tra di loro.



ANGOLO

Si definisce **angolo** ciascuna delle due porzioni di piano individuata da due semirette aventi la stessa origine.

---

1. Con **concetto primitivo** si intende un concetto che, per la propria semplicità ed intuitività, si rinuncia a definire mediante termini e concetti già definiti all'interno di un sistema formale, e che al contrario si sceglie di sfruttare per formulare la definizione di altri concetti; pertanto un concetto primitivo si accetta senza spiegazioni perché il suo significato è ovvio.

2. La distanza tra due rette parallele r ed s è la lunghezza del segmento AB condotto perpendicolarmente da una retta all'altra

2.2 Perché il Sistema Internazionale di Unità di Misura

Proponiamo agli studenti la seguente attività:

- Dividete la classe in gruppi da due o da tre.
- Date loro 2 listelli di legno (ogni *team* deve avere di lunghezza diversa rispetto a quelli degli altri gruppi).
- I listelli non devono avere alcuna indicazione della loro lunghezza.
- Gli studenti devono, senza usare alcuno strumento di misura convenzionale, trovare una strategia per misurare con la maggior precisione possibile il loro banco e la loro sedia (supponiamo che la classe abbia banchi e sedie tutte uguali).
- I gruppi riporteranno le misure trovate sulla seguente scheda composta con le foto del banco e della sedia della classe.







Gli studenti devono condividere con gli altri compagni le misure trovate. Domande per la discussione in classe:

- Come sono le misure dei tuoi compagni?
- Perché credi sia accaduto questo?
- Come si potrebbe risolvere?

A partire dalla pagina di wiki sul Sistema Internazionale di Unità di Misura fai una ricerca di approfondimento su questo tema.

2.3 Moltiplicazione e Divisioni per 10,100 e 1000

Consideriamo il numero 1,2495 e moltiplichiamolo per una potenza positiva di 10, ad esempio 10^3:

$$1{,}2495\cdot 10^3 = 1{,}2495\cdot 1000 = 1249{,}5$$

La virgola si sposta a destra di 3 posti, cioè di un numero di posti uguale all'esponente del 10.

Che cosa succede se moltiplichiamo per una potenza con esponente negativo?

Consideriamo il prodotto:

$$7{,}5\cdot 10^{-3}$$

Sostituiamo 10^{-3} con:

$$\frac{1}{10^3}$$

$$7{,}5\cdot 10^{-3} = 7{,}5\cdot\frac{1}{10^3} = \frac{7{,}5}{1000} = 0{,}0075$$

Il risultato dell'operazione è che la virgola si sposta di 3 posti a sinistra; 3 è anche l'esponente, senza segno, di 10.

Riassumiamo:

Quando si moltiplica un numero per 10^z *la virgola si sposta a destra se z è positivo, si sposta a sinistra se z è negativo, di un numero di posti uguale all'esponente del 10 considerato senza segno.*

2.4 Grammo e Metro - Le Equivalenze

Multipli del grammo

× 10 →

T	Q	Mg	kg	hg	dag	g

← :10

Un kg (chilogrammo) equivale a dieci hg (ettogrammi): 1 kg = 10 hg

Un hg (ettogrammo) equivale a dieci dag (decagrammi): 1 hg = 10 dag

Un dag (decagrammo) equivale a dieci g (grammi): 1 dag = 10 g

Una T (tonnellata) equivale a mille kg (chilogrammo): 1 T = 1000 kg

Risolvi le seguenti equivalenze:

a. kg 5 = hg …..
b. g 1.200 = hg …..
c. dag 40 = hg …..
d. kg 4 = dag …..
e. g 70 = dag …..
f. kg13.000 = Mg …..
g. g 500 = hg …..
h. g 7.500 = dag …..
i. g 5.000 = kg …..
j. hg 120 = g …..
k. hg 80 = dag …..
l. Tg 2 = hg……….

Risolvi i seguenti problemi:

1) Per preparare la pasta per la pizza per 4 persone occorrono: 5 hg di farina, 15 g di lievito, 130 g di acqua tiepida e 5 g di sale. Quanti dag pesa in tutto la pasta?

2) Carlo porta uno zaino di 85 hg e Luca uno zaino di 9 kg: qual è il più pesante?

3) Francesco pesa 72 kg e ha la tonsillite: il medico prescrive 1 g di antibiotico ogni 12 kg di peso: quanti grammi di antibiotico dovrà assumere?

4) Fabio deve trasportare 14 casse di elementi in acciaio per rubinetti che pesano 250 hg ciascuna con un camioncino che può portare 500 kg: potrà trasportare il carico con un solo viaggio?

Calcola le seguenti addizioni:

a. 2kg + 65dag = ……dag
b. 80g + 3dag= …….dag
c. 1kg + 5g = ……..g
d. 5hg + 12dag =…….. g
e. 600hg + 3000dag = …….kg
f. 1kg+2hg + 3dag = …….g
g. 3000g + 500dag − 40hg=…….. kg
h. 60hg + 4700dag − 4000g =…….. hg

Sottomultipli del grammo

× 10 →

g	dg	cg	mg

← :10

Un g (grammo) equivale a dieci dg (decigrammi): 1g = 10 dg

Un dg (decigrammo) equivale a dieci cg (centigrammi): 1 dg = 10 cg

Un cg (centigrammo) equivale a dieci mg (milligrammi): 1 cg = 10 mg

Completa le seguenti equivalenze:

a. g 25 = dg …..
b. g 1·200 = dg …..
c. dg 40 = cg …..
d. mg 4 = dg …..
e. cg 70 = dg …..
f. mg 7·000 = g .....
g. cg 50 = g …..
h. g 75 = dg …..
i. mg 2·000 = g …..
j. dg 20 = mg …..
k. g 80 = dg …..
l. g 2 = mg..........

Risolvi i seguenti problemi:

1) Se un grammo d'oro costa 9 €, quanto costa un dg? e 235 cg?

2) Una compressa di un certo medicinale pesa 5 dg e contiene 0,4 g di principio attivo, 24 mg di acido ascorbico e una certa quantità di eccipienti: qual è il peso degli eccipienti per ogni compressa?

3) Se la confezione del problema precedente contiene 15 compresse, qual è il peso totale del principio attivo misurato in grammi?

4) Se ogni compressa di un certo medicinale pesa 220 mg, quanti grammi pesano 12 compresse?

Calcola le seguenti addizioni:

a. 2g + 15dg = ……dg
b. 8g + 3dg = …….g
c. 12dg + 5cg = ……..dg
d. 5mg + 85dg =…….. g
e. 60mg + 120dg = …….g
f. 1g + 2dg + 3cg = …….cg
g. 3000mg + 500cg − 40dg=…….. dg
h. 60dg + 2300mg − 50cg =…….. g

I multipli del metro

Un km (chilometro) equivale a dieci hm (ettometri): 1 km = 10 hm

Un hm (ettometro) equivale a dieci dam (decametri): 1 hm = 10 dam

Un dam (decametro) equivale a dieci m (metri): 1 dam = 10 m

Completa le seguenti equivalenza:

a. km 2 = hm …..
b. m 300 = hm …..
c. dam 40 = hm …..
d. km 4 = dam …..
e. m 30 = dam …..
f. m 500 = hm …..
g. m 1000 = hm …..
h. m 5000 = km …..
i. hm 120 = m …..
j. hm 80 = dam …..

Risolvi i seguenti problemi:

1) Una strada è fatta di due tratti: il primo tratto misura 230 hm e il secondo tratto misura 7400 dam. Quanti km in tutto?

2) Carlo ha un pezzo di corda lunga 40 dam e Luca uno di 380 m: chi ha il pezzo più lungo?

3) Il tratto di autostrada Milano-Firenze è lungo 30000 dam mentre quello Firenze-Napoli è lungo 4900 hm: quanti km è lungo il tratto Milano-Napoli?

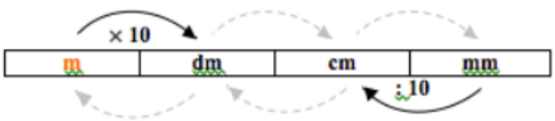
4) Antonio vuole recintare un terreno rettangolare lungo 15 m e largo 2 dam: quanti metri di rete metallica dovrà acquistare?

5) Salvatore deve recarsi prima a Busto Arsizio e poi a Gallarate partendo da S. Macario: percorre quindi 550 dam, poi 85 hm e infine 7 km. Quanti km ha percorso in tutto?

Calcola le seguenti addizioni:

a. 3km + 45dam = ……dam
b. 30m + 4dam = …….dam
c. 3km + 45m = ……...m
d. 6hm + 5dam =…….. hm
e. 600hm + 3000dam = ……. hm = …… km
f. 1km +2hm + 3dam = …….m
g. 3000m + 500dam − 40hm =…….. km
h. 60hm + 4700dam − 4000m =…….. hm = ……. km
i. 300dam + 500m + 40hm =…….. hm
j. 600dam + 30hm + 2m = …………m
k. 35km + 600dam + 25hm = ………..hm

I sottomultipli del metro



Un m (metro) equivale a dieci dm (decimetri): 1 m = 10 dm

Un dm (decimetro) equivale a dieci cm (centimetri): 1 dm = 10 cm

Un cm (centimetro) equivale a dieci mm (millimetri): 1 cm = 10 mm

Completa le seguenti equivalenze:

a. m 20 = dm
b. dm 4 = m
c. cm 4 = dm
d. cm 45 = m
e. mm 600 = dm
f. 4 dm = mm

g. 4,8dm = m
h. 0,5cm = dm

Calcola le seguenti somme e differenze di grandezze lineari:

a. m 3,5 + m 2 = cm
b. dm 3,5 − dm 2,8 = dm
c. cm 0,4 + cm 12,8 = cm
d. mm 60 − cm 4,5 = cm

Risolvi i seguenti problemi:

1) Un sarto acquista due tipi di stoffa: 10,5 m del primo tipo e 70 cm del secondo tipo. Quanti metri di stoffa ha acquistato in tutto?

2) Un idraulico deve saldare tre tubi per completare l'impianto. Il primo tubo è lungo 4,8 m, il secondo 5,6 m e il terzo 85 cm: qual è la loro lunghezza totale?

3) Un bicchiere di cristallo è alto 7,8 cm e il suo interno è alto 6,5 cm: quanti millimetri misura lo spessore della base?

4) Per fare il piano di un tavolo, un falegname sovrappone tre tipi di legno di diverso spessore: il primo di 1,4 cm, il secondo di 3,5 cm e il terzo di

4 mm. Di quanti centimetri è lo spessore finale del piano?

2.5 Mettiti alla prova - Le equivalenze

Svolgi il *Formative Assessment* sulle equivalenze per sapere quanto sei abile con il trasformare le diverse unità di misura e nel risolvere problemi che contengono diverse unità:

Test Equivalenze

2.6 L'arrotondamento di un numero decimale

Molto spesso capita di dover arrotondare dei numeri (per esempio i risultati che vengono fuori eseguendo una radice quadrata). Facciamo degli esempi e poi diamo la regola per gli arrotondamenti.

- Approssimiamo il numero 3,74621 a **tre** cifre decimali. Per approssimare a **tre** decimali, si guarda la **quarta** cifra, in questo caso il 2. Poiché **2 è minore di 5** si scrive il numero **eliminando le cifre che seguono la terza.** Il numero approssimato è 3,746.
- Arrotondiamo il numero 2,4187 a **due** decimali. Si guarda sempre la cifra **successiva** a quella da arrotondare, in questo caso 8. Poiché **8 è maggiore di 5,** la cifra 8 viene **eliminata** assieme a quelle che seguono e quella che la precede viene **aumentata di 1.** Il numero arrotondato a due decimali è 2,42.
- Approssimiamo il numero 6,35 a 1 cifra decimale. Si guarda la cifra decimale, cioè il 5. Per arrotondar, **si elimina il 5 aumentando di 1 la cifra che lo precede:** in tal caso il numero arrotondato è 6,4.

Regola

Per arrotondare un numero a ***n*** *decimali si guarda la cifra* ***successiva*** *alla n-esima:*

se essa è minore di 5, la cifra viene eliminata assieme a quelle che la seguono e la precedente rimane identica;

se è maggiore o uguale a 5, la cifra viene eliminata e la precedente si aumenti di 1.

2.7 Esercizi Approssimazione

1) Le affermazioni che seguono di riferiscono al numero 2,67845. Accanto a ognuna scrivi se è vera o falsa:

- Arrotondato a tre decimali il numero diventa 2,678 V F
- Arrotondato a due decimali diventa 2,67 V F
- Arrotondato a un solo decimale diventa 2,7 V F
- Arrotondato al valore intero il numero diventa 3 V F

2) La luce viaggia alla velocità di 300000 km/s. La distanza Terra - Sole è circa 149 milioni di km. Con questi dati si può calcolare il tempo che la luce del Sole impiega per arrivare sulla Terra:

$$tempo = \frac{distanza}{velocita'}$$

Calcola il tempo ed esprimilo con due cifre decimali.

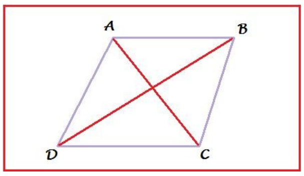
3) La somma delle altezze degli 11 giocatori di una squadra di calcio è 19,31 m. Calcola l'altezza media ed esprimila con due cifre decimali, poi con una cifra.

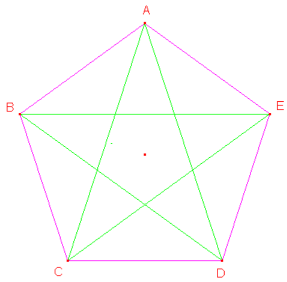
2.8 I Poligoni

Si dice **poligono** la parte di piano racchiusa da una linea chiusa. I poligoni si possono classificare in base al numero dei loro lati, che è sempre uguale al numero dei loro angoli. Un poligono si dice regolare quando è equilatero, cioè tutti i lati sono uguali, ed anche equiangolo, tutti gli angoli sono uguali. In tutti gli altri casi il poligono è detto **irregolare**.
Il perimetro di un poligono è la misura del suo contorno e si indica con il simbolo *p*.
La **diagonale** di un poligono congiunge due vertici non consecutivi (cioè non connessi da uno stesso lato) del poligono. Il numero delle diagonali varia secondo il numero dei lati:

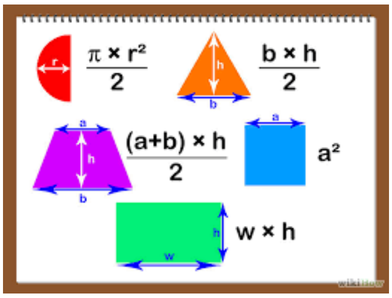
$$diagonali = \frac{n(n-3)}{2}$$

dove n è il numero dei lati del poligono.





L'**area** è la misura dell'estensione di regione di un piano racchiusa dai lati del poligono.

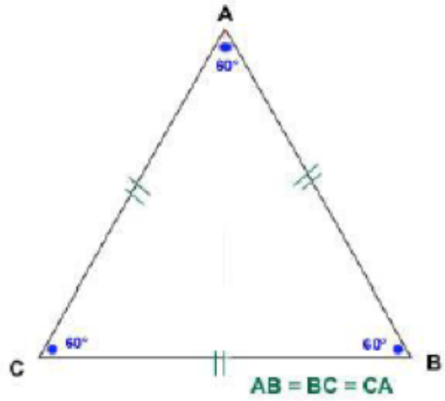


2.9 I Triangoli

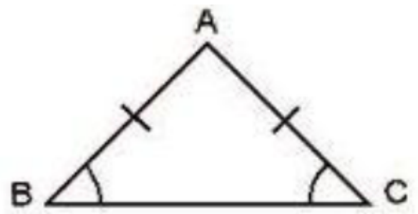
Si dice **triangolo** ogni poligono con tre lati. Il triangolo è il poligono avente il minor numero di lati. La somma degli angoli interni di un triangolo è 180°.

Considerando i lati è possibile classificare i triangoli in:

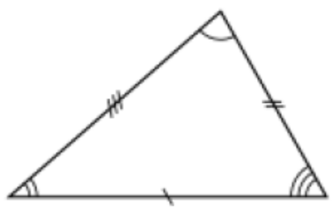
- **equilatero,** se tutti i lati del triangolo sono uguali, conseguentemente avrà anche tutti gli angoli di uguale ampiezza pari a 60°



- **isoscele,** se il triangolo ha due lati uguali, conseguentemente avrà anche due angoli uguali

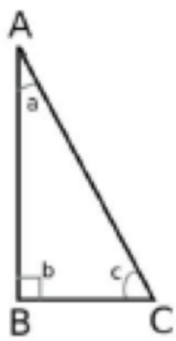


- **scaleno,** se tutti i lati e gli angoli del triangolo sono diversi

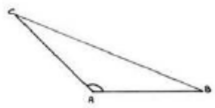


È possibile effettuare una diversa classificazione dei triangoli considerando gli angoli; in questo caso i triangoli si dividono in:

- **rettangolo,** se il triangolo ha un angolo retto e quindi due acuti

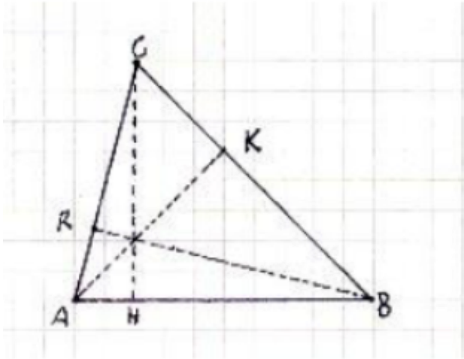


- **ottusangolo,** se il triangolo ha un angolo ottuso, cioè con ampiezza maggiore di 90°, e quindi due acuti

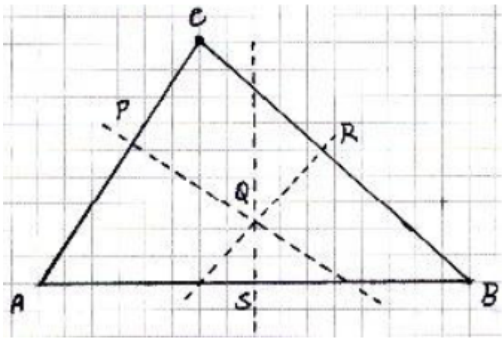


- **acutangolo,** se il triangolo ha tutti gli angoli acuti cioè con ampiezza minore di 90°.

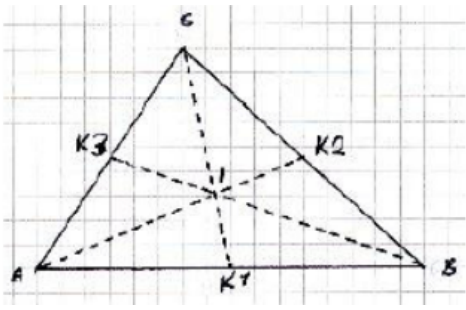
In un triangolo si dice **altezza,** relativa ad un lato, il segmento perpendicolare (cioè che forma due angoli retti) tracciato dal vertice opposto al lato considerato. Le altezza di un triangolo sono tre e si incontrano, loro o il loro prolungamento, in un unico punto detto **ortocentro.**



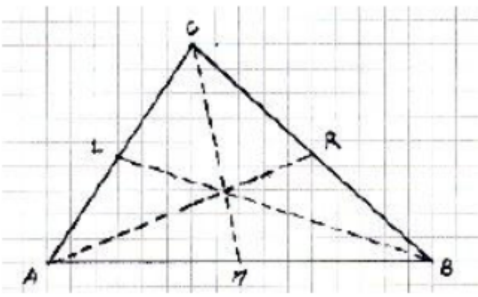
L'**asse di un lato** è la retta perpendicolare al lato passante per il suo punto medio. Gli assi del triangolo sono tre e passano tutti per un unico punto detto **circocentro.**



La **bisettrice** di un triangolo, relativa ad un angolo, è la semiretta che divide in due parti uguali l'angolo considerato. Le bisettrici di un triangolo si incontrano in un unico punto detto **incentro.**



La **mediana** di un triangolo, relativa ad un lato, è il segmento che unisce il vertice opposto con il punto medio del lato. Le mediane in un triangolo sono tre e si incontrano tutte in un unico punto detto **baricentro.**



2.10 Il Perimetro e l'Area del Triangolo

Il perimetro ***p*** di ogni triangolo si ottiene moltiplicando le misure dei tre lati.

L'area ***A*** di un triangolo si ottiene moltiplicando il valore del lato di base ***b*** per l'altezza ***h*** del triangolo ed il tutto diviso 2:

$$A = \frac{b*h}{2}$$

Se si considera un triangolo rettangolo è possibile calcolare l'area conoscendo i due cateti:

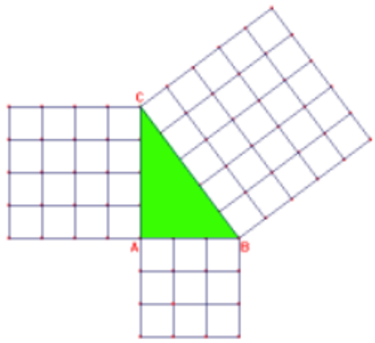
$$A = \frac{C_1*C_2}{2}.$$

2.11 Il Teorema di Pitagora

Il teorema di Pitagora è un teorema della geometria che stabilisce una relazione fondamentale tra i lati di un triangolo **rettangolo.**

Il teorema dice:

In ogni triangolo rettangolo, l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.



Indicando con i l'ipotenusa del triangolo rettangolo e con c_1 *e* c_2 i suoi cateti, il teorema di Pitagora può essere espresso dalla seguente equazione:

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2$$

Da questa relazione è possibile ricavare:

- l'ipotenusa conoscendo i due cateti:

$$i = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

- un cateto conoscendo l'ipotenusa e l'altro cateto:

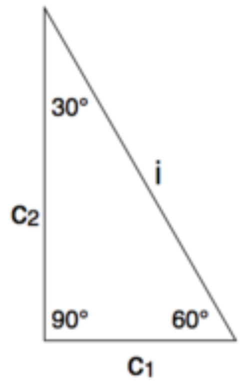
$$c_1 = \sqrt{i^2 - c_2^2}$$

oppure

$$c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2}.$$

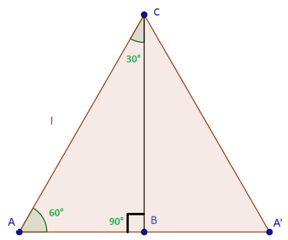
2.12 Triangolo Rettangolo con angoli di 30° e 60°

Analizziamo il primo di due triangoli rettangoli particolari.



Supponiamo di conoscere l'ipotenusa (*i*) e voler determinare i due cateti c_1 *e* c_2. Dal Teorema di Pitagora sappiamo che per possiamo determinare la misura di uno dei lati del triangolo rettangolo solo se conosciamo gli altri due. La particolarità di questo è del successivo triangolo è che è sufficiente conoscere solo uno dei lati. Risolviamo considerando nota l'ipotenusa.

Per poter determinare il c_1 specchiamo il triangolo rispetto al c_2, ottenendo la seguente figura:



Possiamo notare che l'angolo BCA' è uguale all'angolo BCA per costruzione da ciò segue che l'angolo ACA' è un triangolo equilatero avendo tutti gli angoli uguali a 60°, allora anche tutti i lati sono uguali in particolare:

$$AA' = 2c_1 = CA = i$$

Da cui possiamo ricavare c_1:

$$c_1 = \frac{i}{2}$$

Conoscendo un cateto e l'ipotenusa possiamo determinare c_2:

$$c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2}$$

Sostituiamo il risultato trovato per c_1:

$$c_2 = \sqrt{i^2 - \left(\frac{i}{2}\right)^2}$$

$$c_2 = \sqrt{i^2 - \frac{i^2}{4}}$$

Svolgiamo la sottrazione sotto radice:

$$c_2 = \sqrt{\frac{4i^2 - i^2}{4}}$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{3i^2}{4}}$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Come vediamo anche il cateto c_2 dipende solo dall'ipotenusa. Ricapitolando abbiamo trovato le seguenti espressioni per i due cateti in funzione dell'ipotenusa:

$$c_1 = \frac{i}{2}$$

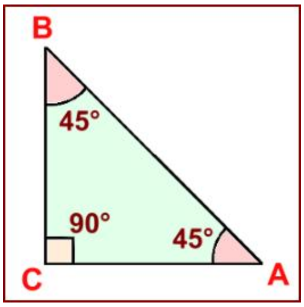
$$c_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Dove con c_1 abbiamo indicato il cateto opposto all'angolo di 30° e con c_2 il cateto opposto all'angolo di 60°.

NB. Le formule trovate valgono solo per il triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60°.

2.13 Triangolo Rettangolo Isoscele

Il secondo triangolo rettangolo particolare è il triangolo rettangolo isoscele la sua caratteristica è di avere i due cateti uguali, conseguenza di ciò arriveremo ad una formula particolare per il calcolo dell'ipotenusa:



Essendo isoscele i due cateti sono uguali quindi:

$$AC = BC = c$$

Dove C sta per cateto. Applichiamo il teorema di Pitagora per calcolare l'ipotenusa(*i*):

$$i = \sqrt{c^2 + c^2}$$

$$i = \sqrt{2c^2}$$

$$i = \sqrt{2}c$$

Da qui ricaviamo la formula inversa nel caso in cui conosciamo l'ipotenusa ma non il cateto:

$$c = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

Per togliere la radice dal denominatore moltiplichiamo e dividiamo per radice di 2 (questa operazione si chiama razionalizzazione):

$$c = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$c = \frac{\sqrt{2}}{2} i$$

Quindi abbiamo trovato anche la formula inversa.

NB. Le formule trovate valgono solo per il triangolo rettangolo isoscele.

2.14 I Teoremi di Euclide

Primo teorema di Euclide

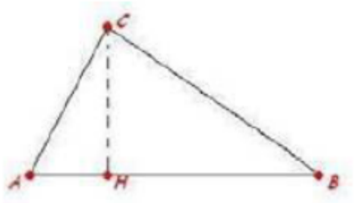
Il primo teorema di Euclide afferma che:

In un ogni triangolo rettangolo il cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto stesso sull'ipotenusa.

In altre parole, il teorema può essere riformulato nel modo seguente:

L'ipotenusa sta al cateto come il cateto sta alla sua proiezione sull'ipotenusa.

In formule il teorema può essere espresso come:



$$AB: AC = AC: AH$$

oppure

$$AB: CB = CB: BH$$

Secondo teorema di Euclide

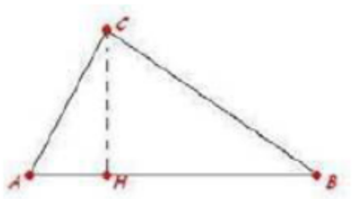
Il secondo teorema di Euclide afferma che:

In ogni triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa è medio proporzionale tra le proiezioni dei due cateti sull'ipotenusa.

In altre parole, il teorema può essere riformulato nel modo seguente:

La proiezione sull'ipotenusa di un cateto sta all'altezza relativa all'ipotenusa come l'altezza relativa all'ipotenusa sta alla proiezione sull'ipotenusa dell'altro cateto.

In formule il teorema può essere espresso come:



$$AH: CH = CH: HB$$

2.15 Esercizi sui Triangoli

1) Determina il perimetro di un triangolo isoscele avente base lunga 10 m e lato 4 m.

2) Il lato maggiore di un triangolo è 40 cm, il secondo è il doppio del primo e il terzo è la metà del primo. Calcola il perimetro del triangolo.

3) Il perimetro di un triangolo equilatero è 108 cm, calcola la lunghezza di ogni lato.

4) Completa la seguente tabella utilizzando il teorema di Pitagora:

Ipotenusa	Cateto 1	Cateto 2	Perimetro
	12 cm	9 cm	
9,7 km	7,2 km		
30 m		24 m	
	2,4 cm	4,5 cm	
345 m		110 m	

5) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo che i cateti lunghi rispettivamente 18 m e 24 m.

6) Calcola il perimetro di un triangolo rettangolo che ha i cateti lunghi rispettivamente 5 m e 12 m,

7) Calcola l'area ed il perimetro di un triangolo rettangolo che ha il cateto minore e l'ipotenusa lunghi rispettivamente 27 dm e 45 dm.

8) Calcola l'area ed il perimetro di un triangolo rettangolo che un cateto e l'ipotenusa lunghi rispettivamente 7 dm e 25 dm.

9) Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa di misura 7 cm e la proiezione di uno dei cateti su di essa di misura pari a 2,5 cm. Trovare la lunghezza dei cateti.

10) In un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 5 cm e 12 cm. Calcolare l'area del triangolo.

11) Un triangolo rettangolo ha l'area di 546 cm^2 e un cateto misura 84 cm. Calcola la lunghezza del perimetro del triangolo.

12) Calcola l'area e il perimetro di un triangolo rettangolo i cui cateti misurano rispettivamente 15 cm e 36 cm.

13) L'area di un triangolo rettangolo è di 4374 cm^2 ed un suo cateto misura 108 cm. Calcola il perimetro del triangolo e l'altezza relativa all'ipotenusa.

14) L'altezza di un triangolo è i 4/5 della diagonale che misura 40 cm. Calcola il perimetro e l'area del rettangolo dato.

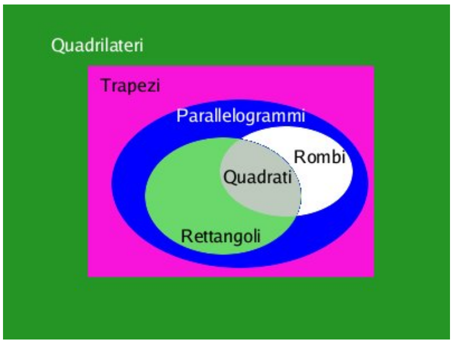
15) In un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 9 cm e 16 cm. Calcolare le misure dell'altezza relativa all'ipotenusa, del perimetro e dell'area.

16) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 20 cm. e la proiezione del cateto minore sull'ipotenusa 7,2 cm. Calcolare la misura del perimetro del triangolo e quella dell'altezza relativa all'ipotenusa.

17) In un triangolo rettangolo un cateto misura 12 cm e la lunghezza dell'ipotenusa supera di 8 cm quella dell'altro cateto. Calcolare la misura del lato incognito.

2.16 I Quadrilateri

Il quadrilatero è un particolare poligono con quattro angoli e quattro lati:

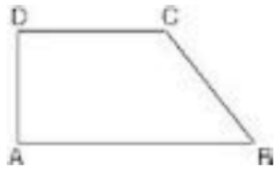


2.17 I Trapezi

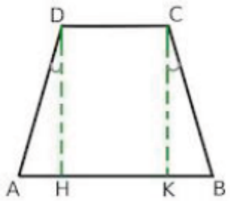
Il trapezio è un quadrilatero che ha due lati opposti (che si chiamano basi del trapezio) opposti e paralleli.

I trapezi si distinguono in:

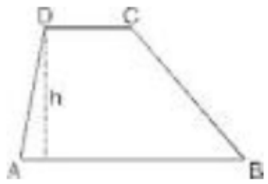
- trapezio **rettangolo,** che hanno uno dei lati non paralleli perpendicolari alle basi, e quindi con due angoli congruenti con ampiezza pari a 90°



- trapezio **isoscele,** che hanno i due lati obliqui uguali



- trapezio **scaleno,** i lati obliqui hanno lunghezze diverse.



Il trapezio **isoscele** gode di alcune proprietà:

- gli angoli adiacenti a ciascuna base sono uguali;
- le diagonali sono uguali;
- gli angoli opposti sono supplementari (cioè la loro somma è 180°).

Il perimetro del trapezio si calcola moltiplicando il valore dell'altezza per la somma delle due basi, il tutto diviso 2:

$$A = \frac{h*(b_{mag} + b_{min})}{2}.$$

2.18 Il Parallelogramma

Il parallelogramma è un quadrilatero che ha i lati opposti congruenti e paralleli e gli angoli opposti congruenti. L'altezza di un parallelogramma è la distanza fra le due basi.

Ogni parallelogramma gode delle seguenti proprietà:

- ogni diagonale divide il parallelogramma in due triangoli congruenti;
- gli angoli adiacenti a ciascun lato sono supplementari;
- le diagonali si incontrano nel loro punto medio.

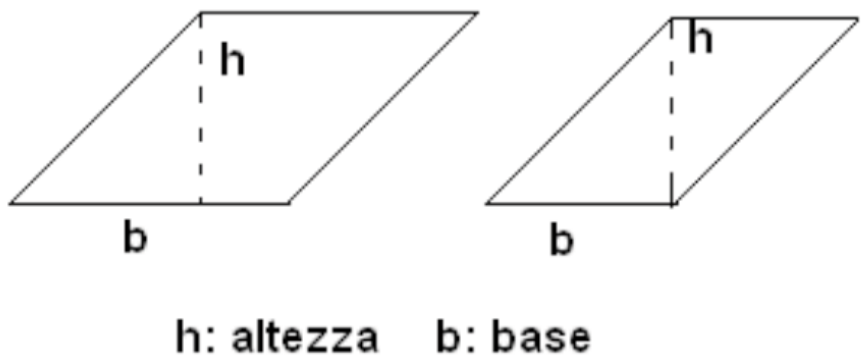
Il perimetro si calcola così:

$$p = 2(b + l)$$

dove *b* indica la lunghezza della base e *l* la lunghezza del lato obliquo.

L'area del parallelogramma si calcola moltiplicando la base per l'altezza del parallelogramma:

$$A = b * h$$



2.19 Il Rettangolo

Il rettangolo è un parallelogramma che ha tutti gli angoli retti. Il perimetro del rettangolo, avendo coppie di lati uguali, si calcola in questo modo:

$$P = 2(b+h)$$

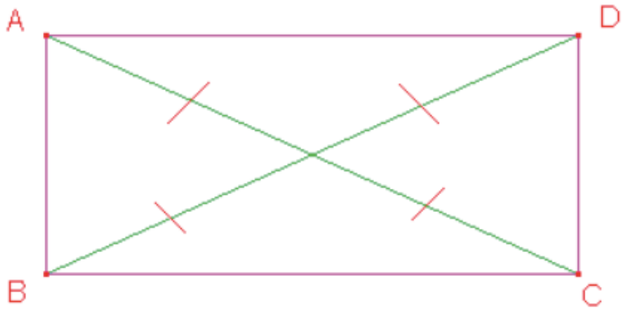
dove b e h sono rispettivamente la lunghezza della base e dell'altezza del rettangolo.

L'area del rettangolo si calcola moltiplicando la base per l'altezza del rettangolo:

$$A = b * h$$

Ogni rettangolo gode delle seguenti proprietà:

- le due diagonali sono congruenti e si incontrano nel loro punto medio;
- ogni diagonale divido il rettangolo in due triangoli rettangoli congruenti.



2.20 Il Rombo

Il rombo è un parallelogramma che ha i quattro lati congruenti e gli angoli opposti congruenti, non aventi tutti e quattro gli angoli uguali, in generale, non è un poligono regolare, un rombo regolare è il quadrato. Ogni rombo, che non sia un quadrato, possiede due angoli acuti e due angoli ottusi.

Il rombo gode di tutte le proprietà dei parallelogrammi, inoltre le diagonali del rombo sono perpendicolari tra loro e bisettrici degli angoli.

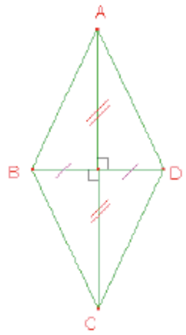
Il perimetro del rombo, avendo tutti i lati uguali, si calcola così:

$$p = 4 * l$$

dove *l* è la lunghezza del lato.

L'area del rombo si calcola moltiplicando il valore della diagonale minore ed il tutto diviso 2:

$$A = \frac{Dmag * d_{min}}{2}$$



2.21 Il Quadrato

Il quadrato è il quadrilatero regolare, quindi è equilatero ed equiangolo come richiesto dalla definizione di poligono regolare.

Il perimetro è la somma dei lati, quindi avendo tutti i lati uguali, si calcola così:

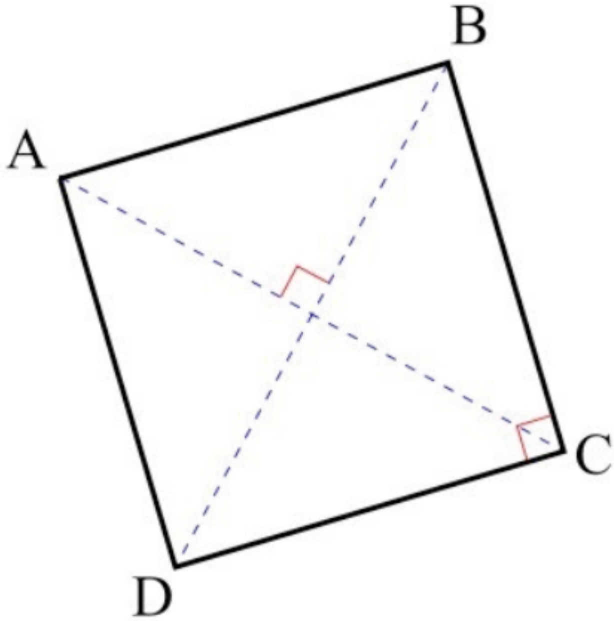
$$p = 4 * l$$

dove *l* è la lunghezza del lato.

L'area del quadrato si calcola considerando la misura del lato elevato alla seconda:

$$A = l * l = l^2.$$

Ogni quadrato ha due diagonali che sono congruenti, perpendicolari tra loro, si incontrano nel loro punto medio e sono anche bisettrici degli angoli del quadrato. Da queste proprietà si capisce che il quadrato eredita tutte le proprietà del rettangolo e del rombo.



2.22 Esercizi sui Quadrilateri

1) Calcola l'area di un quadrato sapendo che il suo perimetro misura 48 cm.

2) Un quadrato ha l'area di 1.296 dm^2, calcola il perimetro.

3) Il perimetro di un quadrato è uguale a quello di un rettangolo avente l'area di 7,35 m^2 e la base di 3,5 m. Calcola l'area del quadrato.

4) Le dimensioni di un rettangolo sono uguali rispettivamente ai lati di due quadrati, l'uno avente l'area di 7.396 dm^2 e l'altro 2.209 dm^2. Calcola il perimetro e l'area del rettangolo.

5) Calcola l'area di un rettangolo avente le dimensioni lunghe rispettivamente 4,5 cm e 3,8 cm.

6) L'area di un rettangolo è 600 cm^2, la base misura 24 cm. Calcola il perimetro del rettangolo.

7) Un rettangolo ha l'area di 336 cm^2 e l'altezza di 12 cm. Calcola il perimetro di un secondo rettangolo che ha l'altezza doppia di quella del primo e la base uguale.

8) Un parallelogramma ha la base di 40 cm e l'altezza di 38 cm. Trova la sua area.

9) In un parallelogramma la base misura 24 cm e l'ara è di 360 cm^2. Calcola l'altezza del parallelogramma.

10) In un parallelogramma l'altezza misura 2,25 m e l'area è di 5,31 m^2. Calcola la misura della base del parallelogramma.

11) Un parallelogramma ha la base di 4 mm e l'altezza di 3 mm. Sapendo che i lati obliqui misurano 3,61 mm, trova il suo perimetro e la sua area.

12) Le diagonali di un rombo misurano rispettivamente 13 cm e 4,9 cm. Calcola l'area del rombo.

13) L'area di un rombo è 640,5 cm^2, la diagonale maggiore misura 36,6 cm. Calcola la misura della diagonale minore.

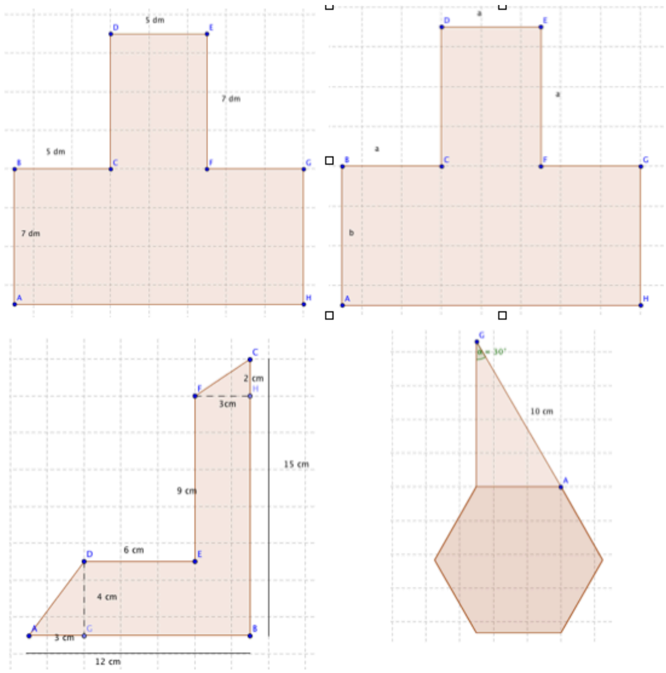
Test di Autovalutazione

Quadrilateri e Triangoli

Triangoli, Quadrilateri e Teorema di Pitagora

2.23 Figure Scomponibili

Determina il perimetro e l'area di queste figure e poi disegnale su GeoGebra:



Scrivi i risultati in questo test

Scrivi una relazione sul procedimento che hai seguito e consegnala in questo compito.

2.24 Compito su Triangoli e Quadrilateri

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori

Elementi di Competenza	INDICATORI	LIVELLI -Non raggiunto (0-60)	LIVELLI -Base C (61-70)	LIVELLI -Intermedio (B) (71-90)	LIVELLI -Avanzato (A) (91-100)
Riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con linguaggio naturale	Risoluzione problemi (Calcolo, fasi del procedimento, risultato)	Calcoli totalmente errati, ordine sequenziale del procedimento errato.	Calcoli parzialmente corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto.	Calcoli corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto, risultato determinato correttamente.	Calcoli corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto, risultato determinato correttamente.
Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete	Riconoscimento figure semplici e scomposizione figure complesse	Figure semplici non riconosciute	Figure semplici riconosciute, figure complesse non scomposte	Figure semplici riconosciute, figure complesse parzialmente scomposte	Figure semplici riconosciute, figure complesse scomposte correttamente
In casi reali di facile leggibilità risolvere problemi di tipo geometrico, e ripercorrerne le proceudre di soluzione	Determinazione area e perimetro (Calcolo, teorema di Pitagora, risultato)	Calcoli totalmente errati, teorema di Pitagora non applicato	Calcoli parzialmente corretti, teorema di Pitagora applicato	Calcoli corretti, teorema di Pitagora applicato , risultato determinato correttamente.	
Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e Pitagora.					

Prima parte

1) Completa la seguente tabella, riporta sul foglio protocollo i calcoli effettuati (18 punti):

Ipotenusa	Cateto 1	Cateto 2	Perimetro	Area
	10 cm	5 cm		
20 dm		7 dm		
25 mm	15 mm			

2) In un rombo le diagonali misurano rispettivamente 12 cm e 6 cm. Calcola l'area e il perimetro del rombo. (10 punti)

3) In un triangolo rettangolo con angoli di 45°, l'ipotenusa misura 10 cm. Determina la lunghezza dei cateti. (7 punti)

4) In un triangolo rettangolo con angoli d i30° e 60°, l'ipotenusa misura 18 cm. Determina la lunghezza dei cateti. (7 punti)

5) Un trapezio isoscele ha la base minore lunga 18 cm, la base maggiore lunga 30 cm e l'altezza lunga 5 cm. Calcola il perimetro e l'area del trapezio. (10 punti)

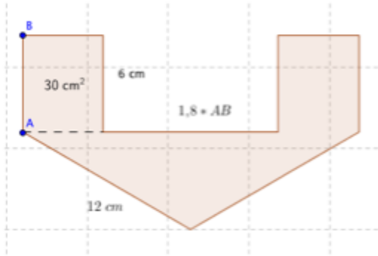
6) Calcola l'area e il perimetro di un triangolo isoscele sapendo che la base misura 30 dm e i lati obliqui misurano il doppio della base. (8 punti)

Seconda parte

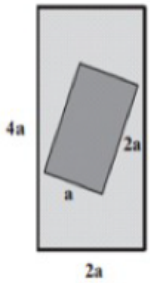
7) Sapendo che il lato è lungo 8 cm, calcola l'area dei singoli settori di questa tessera, determina le coordinate dei vertici e del centro del triangolo. Disegna la tessera su GeoGebra (5 + 5 punti)

8) La figura mostra la vista laterale di una piscina lunga 20 metri. La profondità va da un minimo di 1 metro a un massimo di 3,6 metri. Trova la lunghezza del fondo obliquo della piscina. (5 punti)

9) Determina il perimetro e l'area di questa figura e disegnala su GeoGebra (per GeoGebra puoi anche girare la figura) (5+5 punti).

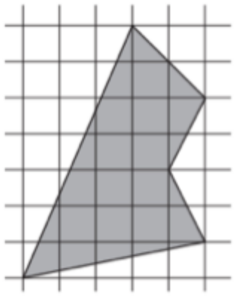


10) In un prato (rettangolo più grande) è stata costruita una piscina (rettangolo più piccolo) come vedi in figura. Determina la superficie del prato. (5 punti)

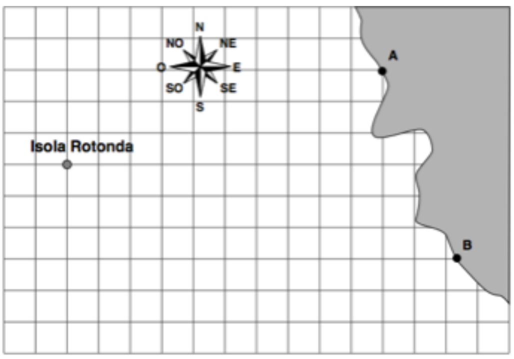


Terza Parte

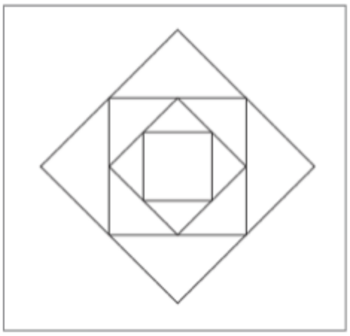
11) Osserva la figura. Se il lato di ogni quadretto della griglia corrisponde a 1 m, allora quanto vale la superficie del poligono? (3 punti)



12) Se il lato di ogni quadretto della mappa corrisponde a 1 miglio nautico, qual è la distanza del faro A dall'isola Rotonda? (3 punti)



13) Si è costruita la figura che vedi inserendo nel quadrato più grande un secondo quadrato i cui vertici sono i punti medi dei lati del primo. Si è ripetuta la stessa procedura, inserendo altri due quadrati. Se la superficie del quadrato più grande misura 64 cm^2, quanto misura il lato del quadrato più piccolo? (4 punti)



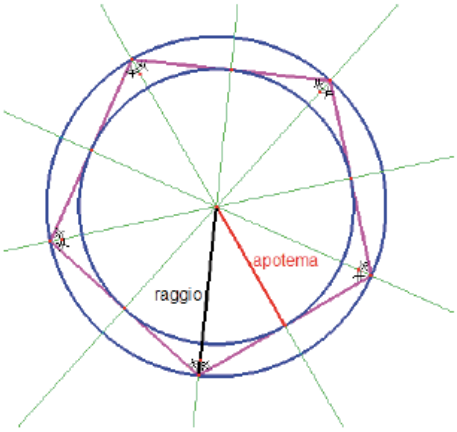
2.25 I Poligoni Regolari

Un poligono si dice regolare se è sia equilatero che equiangolo. Proprietà di tutti i poligoni regolari è che essi sono sia inscrivibili che circoscrivibili ad una circonferenza. In particolare consideriamo un poligono circoscritto ad una circonferenza:

il raggio della circonferenza è detto **apotema** del poligono ed è pari alla distanza di ogni lato dal centro.

Per i poligoni regolari esiste una relazione tra **il lato del poligono e l'apotema,** il rapporto tra l'apotema e il lato del poligono è costante ed è chiamato **numero fisso n_f:**

$$n_f = \frac{\alpha}{l}.$$



Il numero fisso è caratteristico di ogni tipo di poligono regolare, come mostrato in tabella:

Numero di lati	Nome del poligono regolare	Numero Fisso
3	Triangolo Equilatero	0,28867
4	Quadrato	0,5
5	Pentagono	0,68819
6	Esagono	0,86602
7	Ettagono	1,0383
8	Ottagono	1,2071
9	Ennagono	1,3737
10	Decagono	1,5388

Il perimetro di qualunque poligono regolare si calcola moltiplicando la misura del lato per il numero di lati del poligono:

$$p = n * l.$$

Conoscendo l'apotema del poligono regolare, l'area di un poligono regolare si trova moltiplicando la lunghezza del perimetro (p) per quella dell'apotema (α) e dividendo il prodotto per 2:

$$A = \frac{p * \alpha}{2} = \frac{n * l * \alpha}{2}.$$

2.26 Esercizi sui Poligoni Regolari

1) Calcola l'area e il perimetro di un pentagono regolare avente lato di 12 cm.

2) Il perimetro di un esagono è 60 cm, calcolane l'area.

3) Calcola l'area di un esagono avente apotema di 12,99 cm.

4) Un pentagono regolare ha il perimetro di 45 cm. Calcola la sua area.

5) Un quadrato avente il lato di 15 cm ha lo stesso perimetro di un esagono regolare. Calcola l'area dell'esagono.

6) L'area di un ottagono regolare è 482,8 cm^2. Calcola l'area del pentagono regolare avente lo stesso perimetro.

7) Svolgi il seguente *formative assessment:* poligoni regolari

2.27 Esercitazione di Riepilogo

1) Determinare l'area di un triangolo in cui la base misura 10 cm e l'altezza misura 7 cm.

2) Determinare l'ipotenusa, perimetro e area di un triangolo rettangolo avente il cateto maggiore e minore che misurano rispettivamente 10 cm e 30 cm.

3) Determinare il perimetro e l'area di un rettangolo avente la base che misura 15 cm e l'altezza che misura il triplo della base.

4) Determinare l'area di un trapezio isoscele sapendo che la base maggiore misura 10 cm, la base minore 7 cm e il lato obliquo 5 cm.

5) Determinare il perimetro e l'area di un ettagono sapendo che il suo lato misura 9 cm. (nf = 1,04)

6) Determinare il perimetro e l'area di un ennagono sapendo che il suo apotema misura 12 cm. (nf = 1,37)

7) Risolvere i seguenti esercizi sulle equivalenze:

2 km = hm

5000 m = km

5,6 l = dl

1,2 ml = dl

5,4 T = Mg

32,5 g = hg

2 g + 15 dg = dg

8 g + 3 dg = g

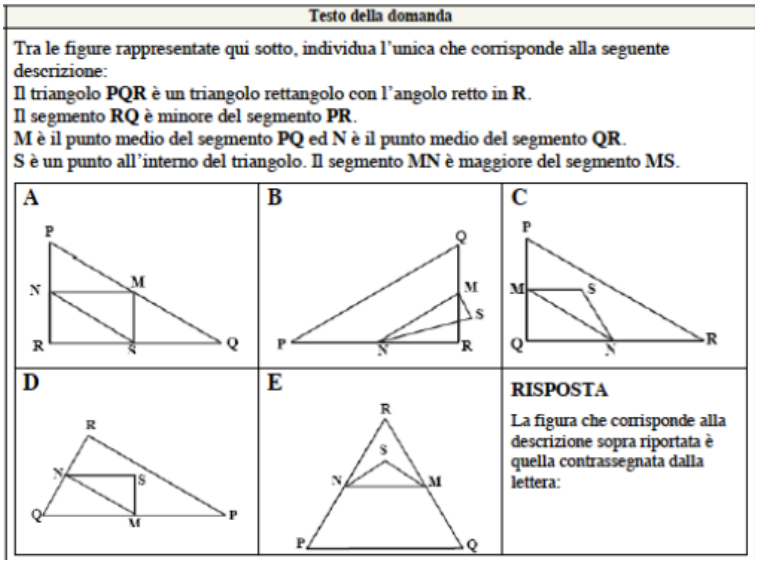
12 dg + 5 cg = dg

5 mg + 85 dg = g

3000 mg + 500 cg - 40 dg = dg

8) Determinare l'apotema e il lato di un pentagono sapendo che l'area misura 22,42 cm^2 e il perimetro è 65 cm.

9)


Testo della domanda

Tra le figure rappresentate qui sotto, individua l'unica che corrisponde alla seguente descrizione:
Il triangolo **PQR** è un triangolo rettangolo con l'angolo retto in **R**.
Il segmento **RQ** è minore del segmento **PR**.
M è il punto medio del segmento **PQ** ed **N** è il punto medio del segmento **QR**.
S è un punto all'interno del triangolo. Il segmento **MN** è maggiore del segmento **MS**.

10) Un palo fissato perpendicolarmente nel terreno proietta un'ombra di 5 m. Il raggio luminoso che congiunge l'estremo superiore del palo e l'estremità dell'ombra è inclinato di 60° rispetto all'orizzontale. Schematizza la situazione descritta e calcola l'altezza h del palo.

2.28 Compito di Geometria Piana

Scheda di Valutazione

Elementi di Competenza	INDICATORI	LIVELLI -Non raggiunto (0-60)	LIVELLI -Base C (61-70)	LIVELLI -Intermedio (B) (71-90)	LIVELLI -Avanzato (A) (91-100)
Riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con linguaggio naturale	Risoluzione problemi (Calcolo, fasi del procedimento, risultato)	Calcoli totalmente errati, ordine sequenziale del procedimento errato.	Calcoli parzialmente corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto.	Calcoli corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto, risultato determinato correttamente.	Calcoli corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto, risultato determinato correttamente.
Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete	Riconoscimento figure semplici e scomposizione figure complesse	Figure semplici non riconosciute	Figure semplici riconosciute, figure complesse non scomposte	Figure semplici riconosciute, figure complesse parzialmente scomposte	Figure semplici riconosciute, figure complesse scomposte correttamente
In casi reali di facile leggibilità risolvere problemi di tipo geometrico, e ripercorrerne le proceudre di soluzione	Determinazione area e perimetro (Calcolo, teorema di Pitagora, risultato)	Calcoli totalmente errati, teorema di Pitagora non applicato	Calcoli parzialmente corretti, teorema di Pitagora applicato	Calcoli corretti, teorema di Pitagora applicato , risultato determinato correttamente.	
Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e Pitagora.					

Voto sintetico:____________/100

Firma docente:________________

Prima Parte

1) Calcolare l'area di un triangolo in cui la base misura 20 cm e l'altezza 12 cm. (10 punti)

2) Calcolare l'ipotenusa, il perimetro e l'area di un triangolo rettangolo avente il cateto maggiore e minore che misurano rispettivamente 17 dm e 15 dm. (10 punti)

3) Calcolare il perimetro e l'area di un triangolo avente la base che misura 54 cm e l'altezza che misura un terzo della base. (10 punti)

4) Calcolare il perimetro e l'area di un ettagono sapendo che il suo lato misura 12 cm. (nf = 1,04) (10 punti)

5) Calcolare il perimetro e l'area di un ennagono sapendo che il suo apotema misura 15 dm. (nf = 1,37) (10 punti)

6) Risolvere i seguenti esercizi sulle equivalenze: (10 punti = 1 punto per ogni equivalenza)

5 km = hm

3000 m = km

6,5 l = dl

2,3 ml = dl

4,9 T = Mg

5 g + 12 dg = dg

10 g + 2 dg = g

12 dg + 7 cg = dg

3 mg + 97 dg = g

2500 mg + 300 cg - 60 dg = dg

Seconda Parte

7) Calcolare l'apotema e il lato di un pentagono sapendo che l'area misura 500 cm^2 e il perimetro 85,13 cm. (8 punti)

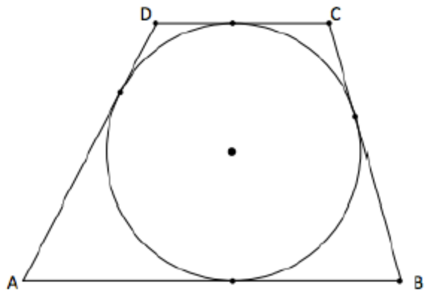
8) Un palo fissato perpendicolarmente nel terreno proietta un'ombra di 5 m, il raggio luminoso che congiunge l'estremo superiore del palo e l'estremità dell'ombra è inclinato di 60° rispetto all'orizzontale. Schematizza la situazione descritta e calcola l'altezza h del palo. (8 punti)

9) A parità di perimetro, l'area dell'esagono regolare è maggiore di quella del quadrato. Verificalo nel caso in cui il perimetro sia 36 cm. (apotema esagono = 5,19 cm) (7 punti)

10) Nel piano cartesiano, i punti A(-2; -1), B(10; -1), C(6;4) sono tre vertici di un trapezio isoscele. Individua le coordinate del quarto vertice. (7 punti)

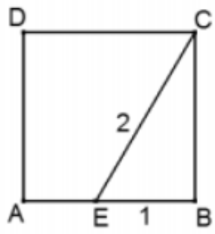
Terza Parte

11) Il trapezio *ABCD*, circoscritto a un cerchio di raggio 5 cm, ha l'area di 120 cm^2.



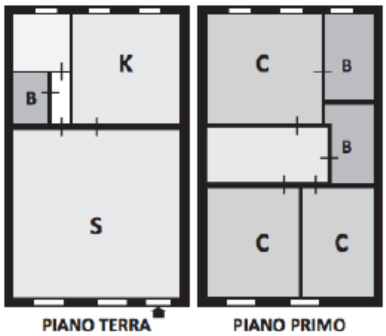
Quanto misura la somma delle basi *AB* e *DC*? (3 punti)

12) *ABCD* è un quadrato, il segmento *EC* è lungo 2 dm e il segmento *EB* è lungo 1 dm.



Determina la superficie del quadrato *ABCD*. (3 punti)

13) In figura è rappresentata la pianta in scala di un appartamento su due livelli. Il soggiorno (S) e la cucina (K) sono al piano terra. Entrambi i locali sono di forma quadrata e misurano rispettivamente 36 m^2 e 16 m^2.



Quanto misura la superficie dell'intero appartamento? (4 punti)

3 Attività con Geogebra

Geogebra è un software per l'apprendimento e l'insegnamento della matematica che fornisce strumenti per lo studio della geometria, dell'algebra e dell'analisi.

Scaricate l'app Geogebra o da PlayStore o da AppStore.

3.1 Costruzione dei punti geometrici di un triangolo

Obiettivo: costruire l'ortocentro, l'incentro, il circocentro e il baricentro utilizzando Geogebra.

Salvate ogni esercizio dandogli il nome dell'esercizio.

1) Costruzione di un triangolo:

Fare un nuovo punto (A).

Disegnare un segmento di lato 7 con il comando:

Segmento[A,7]

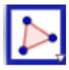
Disegnare una circonferenza di centro B e raggio 5:

Circonferenza[B,5]

Disegnare una circonferenza di centro A e raggio 6:

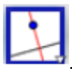
Circonferenza[A,6]

Selezionando il comando intersezione  selezionare le due circonferenze, questo farà comparire i punti d'intersezione delle due circonferenze.

Scegliere il comando  e cliccare sui punti A, B, D e di nuovo in A.

In questo modo abbiamo costruito un triangolo con i lati lunghi 7, 5 e 6.

2) Costruzione ortocentro:

Dopo aver costruito il triangolo, usando il comando perpendicolare ad una retta , tracciare le tre perpendicolari, una per ogni vertice del triangolo, le tre perpendicolari si incontreranno nel punto detto ortocentro.

3) Costruzione incentro:

Dopo aver costruito il triangolo, ricordiamo che l'incentro è il punto d'incontro delle bisettrici, costruiamo la bisettrice con il seguente comando:

Bisettrice[B,A,D] (Bisettrice dell'angolo in A)

Bisettrice[B,D,A] (Bisettrice dell'angolo in D)

Bisettrice[A,B,D] (Bisettrice dell'angolo in B)

Le tre bisettrici si incontreranno in un punto detto incentro.

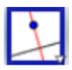
4) Costruzione Circocentro:

Dopo aver costruito il triangolo, per costruire gli assi del segmento di ogni lato, bisogna determinare i punti medi di ogni lato:

PuntoMedio[A,B] (Punto medio del segmento AB, questo comando genererà il punto E)

PuntoMedio[B,D] (Punto medio del segmento BBD, questo comando genererà il punto F)

PuntoMedio[A,D] (Punto medio del segmento AD, questo comando genererà il punto G)

Adesso bisogna costruire le perpendicolari ad ogni lato passanti per il punto medio, utilizziamo il comando  e selezioniamo prima il segmento e poi il punto medio dello stesso segmento, ripetiamo la procedura per i tre lati. Le tre perpendicolari si incontreranno nel circocentro.

5) Costruzione Baricentro

Dopo aver costruito il triangolo, per costruire la mediana, bisogna di nuovo determinare i punti medi di ogni lato:

PuntoMedio[A,B] (Punto medio del segmento AB, questo comando genererà il punto E)

PuntoMedio[B,D] (Punto medio del segmento BBD, questo comando genererà il punto F)

PuntoMedio[A,D] (Punto medio del segmento AD, questo comando genererà il punto G)

Adesso bisogna costruire le mediane, cioè il segmento che collega un vertice al punto medio del lato opposto:

Segmento[D,E]

Segmento[B,G]

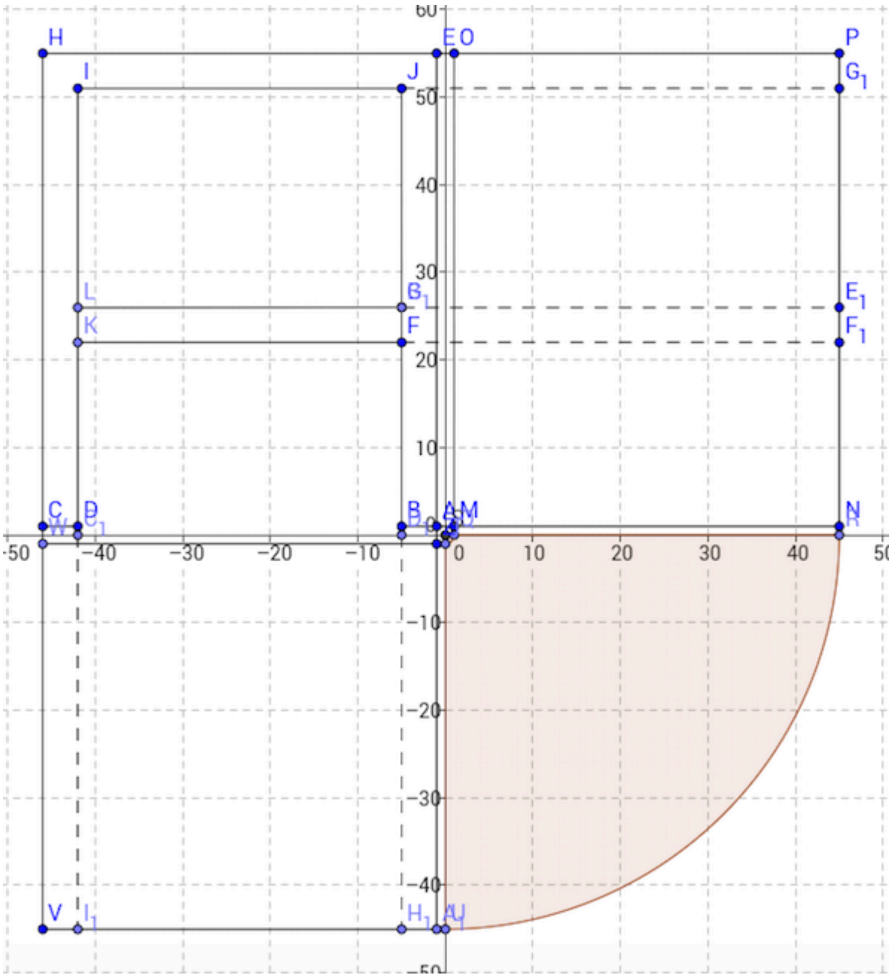
Segmento[A,F]

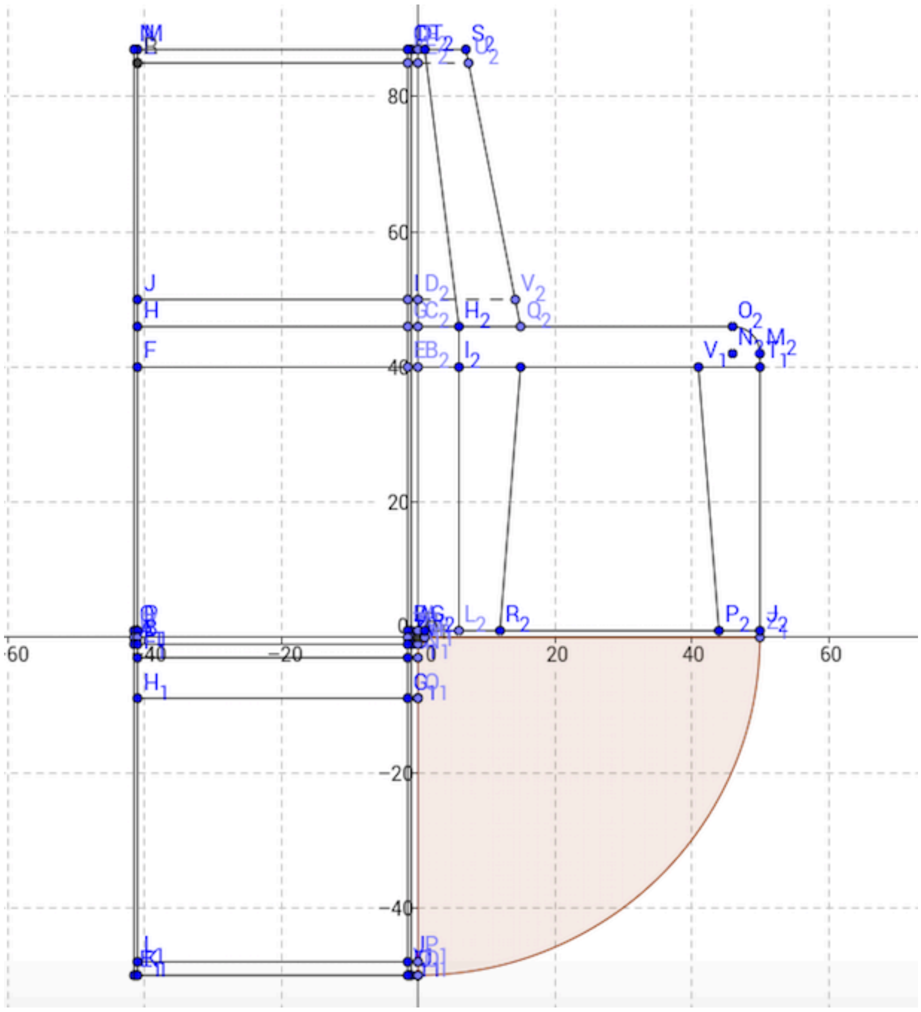
I tre segmenti si incontreranno nel baricentro.

6) Provate a divertirvi, usate la vostra fantasia...

3.2 Proiezioni Ortogonali con GeoGebra

Alcuni esempi di proiezioni ortogonali fatte con GeoGebra di un comodino e della sedia della classe:




80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-40
-20
0
20
40
60
S2
U2
J
H
F
D2
C2
B2
H2
I2
V2
Q2
O2
M2
V1
T1
L2
R2
P2
H1

4 I Numeri

In questo capitolo verranno sviluppati i seguenti elementi di competenza:

Competenza

M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica

Abilità

MA1.1: Comprendere il significato logico-operativo di numeri appartenenti ai diversi sistemi numerici. Utilizzare le diverse notazioni e saper convertire da una all'altra (da frazioni a decimali, da frazioni apparenti ad interi, da percentuali a frazioni...);

MA1.2: Comprendere il significato di potenza; calcolare potenze e applicarne le proprietà;

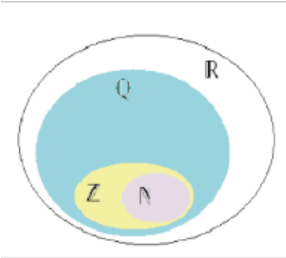
MA1.3: Risolvere brevi espressioni nei diversi insiemi numerici: rappresentare la soluzione di un problema con un'espressione e calcolarne il valore anche utilizzando una calcolatrice;

Conoscenze

MC1.1: Gli insiemi numerici N, Z, Q, R; rappresentazioni, operazioni, ordinamento;

MC1.2: I sistemi di numerazione.

4.1 Introduzione ai Numeri



Tutti i numeri sono uguali?

Quali tipi di numeri avete visto alle medie?

Proviamo a dare dei nomi ai numeri:

$$1$$
$$2{,}2$$
$$5{,}\overline{3}$$
$$\frac{1}{3}$$
$$\pi = 3{,}141592.....$$
$$5$$
$$-3$$
$$-4$$

Quindi non tutti i numeri sono dello stesso tipo!!!

4.2 I Numeri Naturali

Tutti i numeri che indicano quantità intere e positive formano un insieme che chiamiamo N:

N={0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,...}

Preso un numero naturale anche molto grande, posso sempre trovare il numero successivo aggiungendogli 1: possiamo essere sicuri che i numeri naturali non finiscono mai, sono infiniti. Come possiamo indicare qualsiasi numero che appartiene all'insieme N dei numeri naturali?

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,... ? ...

Se chiamiamo il generico numero naturale: *n,* quale sarà il successivo di *n*?....

e il precedente di n?...

Il **precedente** di un numero naturale qualsiasi n è $n-1$

Il **successivo** di un numero naturale qualsiasi n è $n+1$

Il **doppio** di un numero qualsiasi n è $2n$

Il **quadrato** di un numero naturale qualsiasi n è n^2

Ripassa le operazioni in colonna, prova a svolgere i seguenti calcoli:

54+27=

54-27=

54*27=

216:9=

Un altro modo per eseguire la moltiplicazione e la divisione è **La Tavola Pitagorica:**

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Utilizzando la tavola pitagorica, svolgi le seguenti moltiplicazioni:

a. 6 × 7 = 4 × 8 =
b. 5 × 7 = 6 × 9 =
c. 3 × 6 = 2 × 9 =
d. 7 × 7 = 8 × 5 =
e. 9 × 5 = 7 × 8 =
f. 4 × 5 = 3 × 7 =
g. 5 × 8 = 8 × 2 =
h. 2 × 9 = 4 × 9 =
i. 5 × 7 = 6 × 4 =
j. 7 × 8 = 8 × 9 =
k. 6 × 7 = 10 x 2 =

Calcola le seguenti divisioni utilizzando la tavola pitagorica:

a. 6 : 2 =	8 : 4 =
b. 10 : 5 =	10 : 2 =
c. 9 : 3 =	6 : 3 =
d. 50 : 5 =	36 : 9 =
e. 56 : 8 =	35 : 5 =

4.3 Le Espressioni Aritmetiche

Che cos'è un'espressione aritmetica?

Un'espressione aritmetica è un insieme di due o più numeri separati da simboli di operazione e da opportune parentesi. L'espressioni aritmetiche devono essere risolte rispettando opportune regole di precedenza.

Le 5 regole per svolgere correttamente un'espressione

Espressione senza parentesi:

1. Si eseguono prima le moltiplicazioni e le divisioni, una dopo l'altra nell'ordine in cui sono scritte.
2. Si eseguono infine le addizioni e le sottrazioni, una dopo l'altra nell'ordine in cui sono scritte.

Espressioni con parentesi {[()]}:

1. Si eseguono prima le operazioni dentro le parentesi tonde (...), rispettando le regole enunciate per le espressioni senza parentesi.
2. Si eseguono poi le operazioni dentro le parentesi quadre [...], rispettando le regole enunciate per le espressioni senza parentesi.
3. Si eseguono infine le operazioni dentro le parentesi graffe {...}, rispettando le regole enunciate per le espressioni senza parentesi.

Una volta eseguite tutte le operazioni all'interno di una parentesi, questa dev'essere eliminata.

Facciamo due esempi:

Le sottolineature forniscono in ogni passaggio un riferimento sulle operazioni da svolgere per prime. Potrebbe esserti utile usare la stessa tecnica per le espressioni che farai, prima scegli e poi calcoli:

Esempio 1:

$(\underline{25 \times 2} + \underline{10 \times 5}) + 9 \times 8 : \{56 + 3 \times [5 + 6 \times (\underline{3 \times 4} - 10) - 17] - 5 \times 4\} =$

$=(\underline{50 + 50}) + 9 \times 8 : \{56 + 3 \times [5 + 6 \times (\underline{12 - 10}) - 17] - 5 \times 4\} =$

$=100 + 9 \times 8 : \{56 + 3 \times [5 + \underline{6 \times 2} - 17] - 20\} =$

$=100 + 9 \times 8 : \{56 + 3 \times [\underline{5 + 12 - 17}] - 20\} =$

$=100 + 9 \times 8 : \{56 + \underline{3 \times 0} - 20\} =$

$=100 + 9 \times 8 : \{\underline{56 - 20}\} =$

$=100 + \underline{9 \times 8} : 36 =$

$=100 + \underline{72 : 36} =$

$=\underline{100 + 2} = [\ 102\ ]$

Esempio 2:

$51 : \{12 + 3 \times [2 \times 18 - 9 \times (\underline{24 : 6} - 2) : 6] - 60\} + 7 =$

$=51 : \{12 + 3 \times [36 - 9 \times (\underline{4 - 2}) : 6] - 60\} + 7 =$

$=51 : \{12 + 3 \times [36 - \underline{9 \times 2} : 6] - 60\} + 7 =$

$=51 : \{12 + 3 \times [36 - \underline{18 : 6}] - 60\} + 7 =$

$=51 : \{12 + 3 \times [\underline{36 - 3}] - 60\} + 7 =$

$=51 : \{12 + \underline{3 \times 33} - 60\} + 7 =$

$=51 : \{\underline{12 + 99} - 60\} + 7 =$

$=51 : \{\underline{111 - 60}\} + 7 =$

$=\underline{51 : 51} + 7 =$

$=\underline{1 + 7} = [\ 8\ ]$

4.4 Introduzione alle Potenze

Problem Solving

In una coltura i batteri si moltiplicano assai velocemente: ogni mezz'ora si ha la scissione di un batterio in due nuovi batteri. Ci chiediamo: quanti batteri hanno avuto origine da un batterio in due ore? Provate a rappresentare con un disegno il problema e la soluzione.

Ipotizziamo che due insetti vengano chiusi il lunedì in un vasetto di vetro. Il martedì il numero degli insetti è raddoppiato, e così pure ogni giorno successivo. Quanti saranno gli insetti domenica?

In una biblioteca ci sono 10 sezioni, ogni sezione ha 10 armadi, ogni armadio ha 10 scaffali e ogni scaffale ha 10 libri: quanti libri possiede quella biblioteca? Se in media ogni libro è costato 10 €, qual è il capitale investito in quella biblioteca?

In un orto botanico è stata trovata una nuova varietà di pianta, che ha prodotto il primo giorno un rametto e tre foglie, e ogni giorno successivo, da ogni foglia, un rametto e tre foglie. Quante foglie avrà prodotto in tre giorni? E in quattro giorni? In un certo giorno si contano 2187 foglie: quanti giorni ha la pianta?

4.5 Le Potenze

La potenza è un simbolo compatto per indicare la moltiplicazione di tanti fattori uguali che altrimenti (come abbiamo visto nei problemi introduttivi) sarebbe molto lunga da scrivere:

$$\boxed{2^5} \quad \textbf{significa} \quad \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\textbf{5 volte}}$$

2 si chiama base

5 si chiama esponente

Quali sono le proprietà delle potenze?

1) Moltiplicazione tra potenze con la stessa base: [$a^x * a^y = a^{x+y}$]

$$2^5 * 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12}$$

2) Divisione tra potenze con la stessa base: [$a^x : a^y = a^{x-y}$]

$$3^9 : 3^5 = 3^{9-5} = 3^4$$

3) Potenza di potenza: [$(a^x)^y = a^{x*y}$]

$$(5^3)^4 = 5^{3*4} = 5^{12}$$

4) Prodotto di potenze con basi diverse e con lo stesso esponente: [$a^x * b^x = (a * b)^x$]

$$6^3 * 8^3 = (6 * 8)^3 = 48^3$$

5) Divisione di potenze con basi diverse e con lo stesso esponente: [$a^x : b^x = (a : b)^x$]

$$10^4 : 5^4 = (10 : 5)^4 = 2^4$$

4.6 Introduzione al MCD e mcm

Problem Solving

Il proprietario di un consorzio compra all'ingrosso orzo, mais e mangime: l'orzo è venduto in sacchi da 108 kg ciascuno, il mais in sacchi da 60 kg e il mangime in sacchi da 120 kg. Il negoziante confeziona sacchi più piccoli, tutti dello stesso peso, per venderli al pubblico: prova a usare sacchi da 10 kg ma avanzano 8 kg di orzo. I sacchetti da 2 o 4 kg sono troppo piccoli, come trovare la misura giusta per non avere avanzi?

Tre insegne luminose si accendono la prima ogni 3 secondi, la seconda ogni 4, la terza ogni 6. Quando si accenderanno di nuovo insieme, se sono in funzione contemporaneamente alle ore 20?

4.7 MCD e mcm

Massimo Comun Divisore (MCD) tra due o più numeri naturali è il più grande tra i divisori comuni ai numeri dati.

Minimo comune multiplo (mcm) di due o più numeri naturali è il più piccolo dei multipli comuni ai numeri dati.

Ma operativamente come facciamo a calcolarlo? Dobbiamo introdurre il concetto di divisibilità e numero primo.

La Divisibilità

I **numeri primi** sono i numeri naturali, maggiori di 1, divisibili solo per se stessi e per 1.

Ora ditemi quali di questi sono numeri primi:

1; 2;	3;	5;	7;	9;	11;	13;	15;	17;	19;
21;	23;	25;	27;	29;	31;	33;	35;	37;	39;
41;	43;	45;	47;	49;	51;	53;	55;	57;	59;
61;	63;	65;	67;	69;	71;	73;	75;	77;	79;
81;	83;	85;	87;	89;	91;	93;	95;	97;	99;

Se un numero non è primo, ha divisioni non banali, cioè diversi da se stesso e dall'unità.

Per esempio, vediamo che 330 è multiplo di 10 e 33 scrivendo 330 = 33 * 10. Se vogliamo sottolineare che è multiplo di 3 possiamo scriverlo così 330 = 110 * 3. Abbiamo scomposto 330 in fattori in due modi diversi, perché in ciascuna delle due scomposizioni c'è almeno un numero che non è primo. Invece, se lo scomponiamo in fattori primi, otteniamo una sola scrittura:

$$330 = 2 * 3 * 5 * 11$$

Per capire, se un numero è scomponibile per un determinato numero primo, senza dover eseguire la divisione, ci vengono in aiuto alcuni criteri di divisibilità:

- per **due:** un numero è divisibile per 2 se e solo se la sua ultima cifra è 0, 2, 4, 6, o 8, cioè se è un numero pari;
- per **tre:** un numero è divisibile per 3 se e solo se la somma delle sue cifre è multiplo di 3;
- per **cinque:** un numero è divisibile per 5 se e solo se la sua ultima cifra è 0 o 5;
- per **undici:** un numero è divisibile per 11 se e solo se la differenza tra la somma delle cifre di posto pari e la somma di quelle di posto dispari è divisibile per 11.

Prova a scomporre il numero 1848:

Adesso scomponi in fattori primi i seguenti numeri:

a. 48 =	72 =
b. 80 =	108 =
c. 153 =	225 =

Se due numeri non hanno fattori comuni, escluso 1, si dicono numeri primi tra loro.

Calcolo MCD e mcm

Adesso che sappiamo come scomporre i numeri in fattori primi e che cosa sono il MCD e il mcm vediamo come possiamo calcolarli.

Il MCD tra due o più numeri scomposti in fattori primi, è il prodotto dei fattori comuni col minimo esponente

Facciamo un esempio:

MCD(48, 60) =

1) Scomponiamo i due numeri in fattori primi:

$$48 = 2^4 * 3 \qquad 60 = 2^2 * 3 * 5$$

2) Selezioniamo i fattori comuni con il minimo esponente:

I fattori comuni sono il 2 e il 3, dobbiamo prenderli con il minimo esponente, quindi consideriamo $2^2 * 3$.

Quindi il MCD(48, 60) = $2^2 * 3 = 12$.

Il mcm tra due o più numeri scomposti in fattori primi, è il prodotto dei fattori comuni e non comuni con il massimo esponente.

Facciamo un esempio:

mcm(48, 60) =

1) Scomponiamo i due numeri in fattori primi:

$$48 = 2^4 * 3 \qquad 60 = 2^2 * 3 * 5$$

2) Fattori comuni e non comuni con il massimo esponente:

I fattori comuni sono il 2 e il 3, dobbiamo prenderli con il massimo esponente, quindi consideriamo $2^4 * 3$, il fattore non comune è il 5.

Quindi il mcm(48, 60) = $2^4 * 3 * 5 = 240$.

4.8 I Numeri Relativi

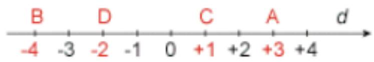
Quanto fa 10 - 8? E 8 - 10?

I numeri relativi segnalano la posizione di un punto relativamente a un altro punto fissato, lo zero.

Esempi reali di utilizzo dei numeri relativi sono:

- Asse storico
- Temperatura
- Altitudine
- Bilanci

Convenzionalmente, i numeri identificati dal segno "+" sono detti **positivi**, quelli identificati dal segno "-" sono detti **negativi.**



Due numeri interi relativi che hanno lo stesso segno si dicono **concordi,** si dicono, invece, **discordi** due numeri che hanno segno diverso. Due numeri si dicono **opposti** se hanno lo stesso valore assoluto (il numero privato del segno) e segno diverso (per esempio +4 e -4).

Somma Algebrica

Se due numeri sono concordi la loro somma algebrica è data dalla somma dei due numeri preceduta dal segno dei due addendi:

$$+ 2 + 5 = +(2 + 5) = +7 \qquad - 3 - 6 = - (3 + 6) = -9$$

Esegui le seguenti addizioni algebriche tra numeri concordi:

$$- 5 - 6 = \qquad + 4 + 16 =$$

Se due numeri sono discordi la loro somma algebrica è la differenza tra il valore assoluto maggiore e il valore assoluto minore, con il segno del maggiore:

$$- 7 + 4 = - (7 - 4) = -3 \qquad - 8 + 12 = + (12 - 8) = +4$$

Esegui le seguenti somme algebriche tra numeri discordi:

$$+ 16 - 9 = \qquad - 7 + 12 =$$

Problema

Un bruco sale su un palo lungo 12 m:

- il 1° giorno sale di 3 m ma durante la notte scende di 1 m;
- il 2° giorno sale di 5 m ma durante la notte scende di 3 m;
- il 3° giorno sale di 6 m ma durante la notte scende di 2 m;
- il 4° giorno sale di 4 m ma durante la notte scende di 1 m.

Scrivi un'espressione in cui compaiono tutte le variazioni compiute dal bruco. Quanti metri dovrà ancora salire per arrivare in cima al palo?

Moltiplicazioni e Divisioni in Z

- Il **prodotto** di due numeri **concordi** è sempre **positivo**;
- il **prodotto** di due numeri **discordi** è sempre **negativo**;
- il **quoziente** di due numeri **concordi** è sempre **positivo**;
- il **quoziente** di due numeri **discordi** è sempre **negativo**.

$+ \bullet + = +$

$- \bullet - = +$ regola

dei

$+ \bullet - = -$ segni

$- \bullet + = -$

Esempi:

$$- 3 * (- 2) = + 6$$

$$+ 14 : (- 7) = -2$$

Calcola i seguenti prodotti:

(- 3) * (+ 4) = (- 6) * (- 7) =

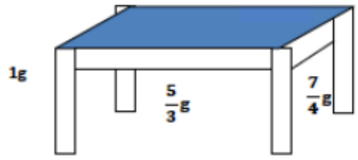
Calcola le seguenti divisioni:

(- 64) : (- 8) = + 200 : (- 25) =

4.9 Le Frazioni

Vogliamo risolvere il seguente problema:

La falegnameria Riva 1920 ha progettato una linea di mobili formata da un poggiapiedi, un tavolino ed un tavolo. Costruiti con una struttura di listelli di legno ed un piano di vetro. La particolarità di questa linea è che con un unico progetto è possibile rappresentare tutti e tre i prodotti:



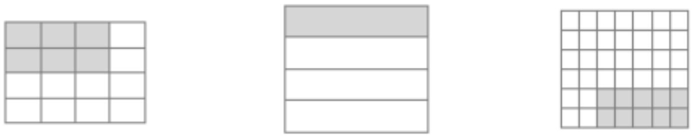
Dove **g** indica la lunghezza della gamba del tavolo. Si vuole determinare quanti centimetri di listelli di legno servono per produrre un poggiapiedi, un tavolino ed un tavolo, sapendo che la gamba misura rispettivamente 20 cm, 50 cm e 80 cm.

La frazione è un modo particolare di scrivere la divisione:

$$a:b=\frac{a}{b}$$

dove il numero *a* è detto **numeratore** e il numero *b* **denominatore.**

Il denominatore indica le parti in cui è stato diviso l'intero, il numeratore le parti considerate.



Se il numeratore di una frazione è minore del denominatore, la frazione si dice **propria.**

Se il numeratore di una frazione è maggiore del denominatore, la frazione si dice **impropria.**

Se il numeratore di una frazione è uguale o multiplo del denominatore, la frazione si dice **apparente.**

Due frazioni si dicono **equivalente** se hanno lo stesso valore, cioè se la divisione produce lo stesso valore.

Svolgi questi semplici quesiti:

1. Scrivi una frazione che abbia denominatore 6 e numeratore il doppio del denominatore.
2. Scrivi una frazione che abbia numeratore 14 e denominatore il suo consecutivo.
3. Scrivi una frazione che abbia numeratore e denominatore dispari.
4. Scrivi una frazione che indichi la metà di una torta divisa in 12 fette.

Le Operazioni con le Frazioni

Addizione e sottrazione

Se due frazioni hanno lo stesso denominatore, la frazione somma ha lo stesso denominatore e come numeratore la somma dei numeratori:

$$\frac{3}{5}+\frac{9}{5}=\frac{3+9}{5}=\frac{12}{5}$$

Se due frazioni hanno denominatore diversi, si cerca il minimo comune multipli dei denominatori e si trasformano le frazioni date in frazioni equivalenti che abbiano quel denominatore:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{3+8}{12}=\frac{11}{12}$$

Moltiplicazione

Il prodotto tra due frazioni si ottiene moltiplicando i due numeratori e i due denominatori:

$$\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{7}=\frac{10}{21}$$

Se le frazioni hanno fattori comuni, si può semplificare in "croce":

$$\frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}_{1}}\cdot\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{10}_{5}}=\frac{6}{5}$$

Due frazioni si dicono **inverse** o **reciproche** se il numeratore della prima è uguale al denominatore della seconda e il denominatore della prima è uguale al numeratore della seconda. In altre parole, il loro prodotto deve essere uguale ad 1. Ad esempio, $\frac{11}{4}$ e $\frac{4}{11}$ sono frazioni inverse (reciproche),

infatti:

$$\frac{11}{4}\cdot\frac{4}{11}=1$$

Divisione

Per eseguire la divisione tra due frazioni, si esegue la moltiplicazione tra la prima frazione e la reciproca della seconda frazione:

$$\frac{4}{3}:\frac{5}{7}=\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{5}=\frac{28}{15}$$

Elevamento a Potenza

La potenza di una frazione si ottiene elevando a potenza il numeratore e il denominatore:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{2^2}{5^2}=\frac{4}{25}$$

Dalle Frazioni ai Numeri Decimali

Frazione decimale

Una frazione si dice **decimale** se il denominatore è una potenza di 10:

$$\frac{3}{10} \qquad \frac{9}{100} \qquad \frac{41}{1000}$$

Se si divide il numeratore per il denominatore, si ottengono sempre dei numeri decimali **finiti** (cioè con un numero limitato di cifre decimali) **:**

$$\frac{3}{10}=3:10=0{,}3 \qquad \frac{9}{100}=9:100=0{,}09 \qquad \frac{41}{1000}=41:1000=0{,}041$$

Frazioni ordinarie

Se le frazioni non sono decimali, si possono suddividere in tre categorie:

1) se il denominatore, scomposto in fattori primi, contiene solo i fattori 2 e 5 allora la frazione genera un numero decimale **finito:**

$$\frac{41}{50}=\frac{82}{100}=0{,}82$$

2) se il denominatore, scomposto in fattori primi, non contiene il fattore 2 né il fattore 5 allora la frazione genera un numero decimale **periodico semplice:**

$$\frac{19}{11}=1{,}\overline{72}$$

3) se il denominatore, scomposto in fattori primi, contiene i fattori 2 e/o 5 insieme ad altri fattori, allora la frazione genera un numero decimale **periodico misto:**

$$\frac{17}{12}=1{,}41\overline{6}$$

Dai Numeri Decimali alle Frazioni

Nel caso di un numero decimale finito, la frazione generatrice è la frazione decimale che ha per numeratore il numero scritto senza virgola e per denominatore l'1 seguito da tanti 0 quante sono le cifre decimali:

$$6,75=\frac{675}{100} \qquad 0,372=\frac{372}{1000}$$

Nel caso di un numero decimale periodico semplice o misto si segue questo procedimento:

- al numeratore si scrive la differenza tra il numero senza la virgola e il numero formato da tutte le cifre che precedono il periodo;
- al denominatore si scrive il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo:

$$0,\overline{43}=\frac{43-0}{99}=\frac{43}{99} \qquad 0,81\overline{7}=\frac{817-81}{900}=\frac{736}{900}$$

4.10 Esercizi Numeri, Potenze e Frazioni

1) Spiegare le motivazioni che hanno condotto dai numeri naturali ai numeri reali, spiegando i passaggi che hanno portato dai numeri naturali ai relativi, dai relativi ai razionali e dai razionali ai reali.

2) Associare ogni numero al suo insieme di appartenenza:

0,5   10   2,34567.....   -15   5/4

3) Trasformare i seguenti numeri decimali in frazioni:

$$2{,}3 \qquad 5{,}\overline{6} \qquad 4{,}\overline{358} \qquad 9{,}8\overline{32}$$

4) Trasforma le seguenti frazioni in numeri:

$$\frac{2}{3} \qquad -\frac{5}{4} \qquad \frac{10}{2} \qquad -\frac{9}{3} \qquad \frac{20}{30}$$

5) Trasformare in frazione le seguenti percentuali:

5%   15%   40%   75%   90%

Espressioni numeriche

$$108:[18-(35:7+14:2):2]:3$$
$$[13\bullet 2+120:(7-3)]:[7+6\bullet(15-12):18]$$
$$3+2\bullet 5:\{21-[(2\bullet 4-3+1)\bullet 6-16\bullet 2]\bullet 5+(3\bullet 4-10)\bullet 2\}$$

Espressioni con le potenze

$$\left[\left(1^2+5^1:5-2\right)^2\bullet\left(2^2\bullet 2^2\right)^2+2\bullet\left(2\bullet 2^3\right):2^3\right]^2:\left(1^2\bullet 2^2\right)$$
$$\left[\left(2^3\right)^3:4^2:2^3\right]\bullet\left(2^2\bullet 2^3\right)$$
$$\left[3\bullet\left(3^3\right)^3:3^2:3^3\right]:\left(9^2:3^3\right)$$
$$\left\{\left[\left(2^3\right)^3:4^2:2^3\right]\bullet\left(2^2\bullet 2^3\right)\right\}:\left(2^2\bullet 2^3\right)$$

Espressioni con le frazioni

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\right)+\frac{4}{9}+\frac{10}{18}$$
$$\frac{12}{4}-\frac{1}{2}-\frac{3}{6}-\frac{3}{2}-\frac{12}{6}+\left(3-\frac{6}{9}\right)$$
$$\frac{3}{4}:\left(\frac{8}{9}\bullet\frac{3}{2}+\frac{6}{9}\right)\bullet\frac{8}{6}-\frac{5}{11}\bullet\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right)-1$$
$$\frac{3}{4}:\left(\frac{4}{9}\bullet\frac{3}{2}+\frac{6}{9}\right)\bullet\frac{4}{3}-\frac{3}{6}+\frac{5}{9}\bullet\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right):\frac{10}{9}-1$$

Formative assessment su [Espressioni con Frazioni e Potenze]

Problemi

1) La temperatura del 23 settembre registrata al mattino ore 8.00 era di +18 °C. Nel corso della giornata è salita di 6° ma è scesa durante la notte di 11°. Calcolare quanti gradi c'erano di notte.

2) Alla fine di una settimana, a Paola rimangono 10 €. Calcolare quanto denaro aveva all'inizio della settimana, sapendo che per 5 giorni a pranzo ha speso 5 € per un panino, che ha acquistato un libro al prezzo di 13 €, e poi che, facendo alla sera la baby-sitter, per 3 volte ha guadagnato 15 € per sera.

3) Un asilo è frequentato da 96 bambini: le femmine ne costituiscono un terzo. Ieri erano assenti un quarto delle femmine e un ottavo dei maschi. Quanti bambini erano assenti in tutto?

Formative assessment su [Problemi con le Frazioni]

Approfondimenti: Sistemi di Numerazione

Prepara una presentazione power point con le proprietà di ogni insieme numerico, con le loro rappresentazioni su una retta orientata, spiega quali operazioni possono essere svolte all'interno di ogni insieme ed spiega le proprietà di ordinamento di ogni insieme.

1) Svolgi una ricerca sul sistema di numerazione romano e su quello binario.

2) Trasforma in numeri romani e binari i seguenti numeri scritti nel sistema decimale:

5 8 17 30 40 530 1986

4.11 Compito su Potenze e Frazioni

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA1.1: Comprendere il significato logico-operativo di numeri appartenenti ai diversi sistemi numerici e saper convertire da uno all'altro. **MC1.2:** I sistemi di numerazione.	Proprietà potenze e frazioni.	Non applica le proprietà in modo corretto. Non distingue tra potenze e frazioni.	Individua le potenze e le frazioni ma sa applicare solo alcune proprietà.	Individua sempre in modo corretto le frazioni e le potenze e sa utilizzare tutte le proprietà nel calcolare il risultato di un'espressione.	
MA1.2: Comprendere il significato di potenza; calcolare potenze e applicarne proprietà.	Espressioni con le potenze.	Calcoli totalemente errate.	Risolve correttamente l'espressioni più semplici.	Risolve correttamente tutte le espressioni.	
MC1.1: Gli insiemi numerici N, Z, Q, R; rappresentazioni, operazioni, ordinamento.	Risoluzione di espressioni e problemi.	Calcoli totalmente errati.	Risolve correttamente tutte le espressioni.	Risolve tutte le espressioni e i problemi.	

Valutazione Sintetica:____________

Prima Parte

1) Completa la seguente tabella (5 punti)

n (numero)	n - 1 (precedente)	n + 1 (successivo)
x	x - 1	x + 1
x - 1	x - 2	
3x - 3		
x + 3		
4x+1		
4x + 6		

2) Nell'ultima riga della tabella precedente sostituisce ad x il valore 2, quali sono i tre risultati ottenuti? (5 punti)

3) Scomporre i seguenti numeri in fattori primi: (5 punti)

280 =

44 =

500 =

156 =

1224 =

999 =

4) Determina il MCD e il mcm di queste coppie di numeri: (50; 120) (90; 75). (5 punti)

5) $6\cdot(4\cdot6:3+5\cdot7):[2+2\cdot4+3\cdot(20:4+2)]-(3\cdot5:3)=$ (10 punti)

6) $\left\{(15^3)^5:\left[(15^2)^4:(15^4\cdot15^3)\right]^8\right\}^2:\left[15^{10}\cdot(15^2\cdot15^5):(15^4)^4\right]^{13}=$ (10 punti)

7) $\left[9^2\cdot(9\cdot9^3)^2:9^6\right]^2:(9^3\cdot9^2):\left\{\left[3^7:(3^8:3^5)^2\right]^{10}:3^7\right\}\cdot\left\{\left[(3^3\cdot3^2\cdot3)^3:3^8\right]^3:(9^3)^5\right\}=$ (10 punti)

8) $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{6}\right)+\frac{4}{9}+\frac{10}{18}$ (10 punti)

Seconda Parte

9) $\frac{3}{4}:\left(\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}+\frac{6}{9}\right)\cdot\frac{4}{3}-\frac{3}{6}+\frac{5}{9}\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{9}-\frac{1}{9}\right):\frac{10}{9}-1=$ (10 punti)

10) Mario ha i 3/10 dei soldi di suo fratello Gianni. Se Gianni ha 40 €, quanti soldi ha Mario? (3 punti)

11) Luca ha letto 40 pagine di un libro costituito da 240 pagine. Qual è la frazione che esprime il numero di pagine lette da Luca? (2 punti)

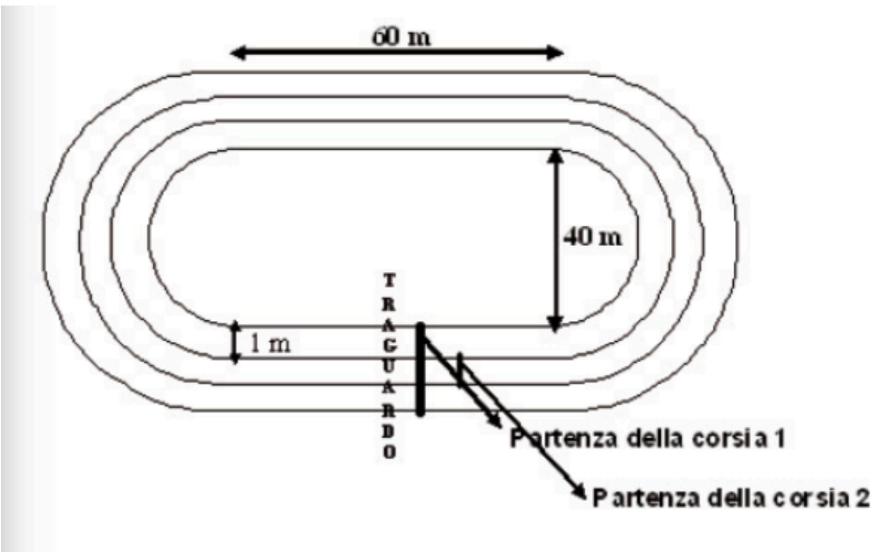
12) In una classe ci sono 30 alunni. La maestra li divide in 5 squadre di 6 alunni e poi organizza una gara a squadre. Alla fine della gara distribuisce caramelle a tutti gli alunni, facendo in modo che ogni componente dell'unica squadra vincitrice riceva il doppio delle caramelle rispetto agli alunni delle rimanenti squadre. Sapendo che in tutto la maestra distribuisce 540 caramelle, quante caramelle riceve ogni vincitore? (5 punti)

13) In una classe di 30 allievi, i 2/5 sono maschi ed 1/3 di essi porta gli occhiali. Quanti maschi ci sono nella classe? Quanti portano gli occhiali? A quale frazione della classe corrispondono le femmine? Quante portano gli occhiali? A quale frazione dell'intero corrispondono gli alunni che portano gli occhiali? (5 punti)

14) Mario spende 1/4 del suo stipendio per l'affitto, e 2/5 del rimanente per il vitto. Riesce così ad avere ancora 2160 € a sua disposizione. A quanto ammonta lo stipendio di Mario? (5 punti)

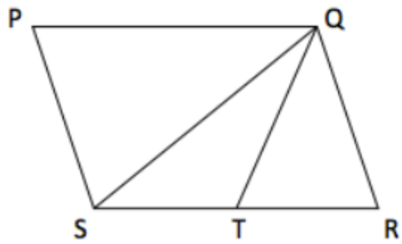
Terza Parte

15) Nel centro sportivo della scuola è stata realizzata una pista di atletica. Sotto è riportato un modello matematico della pista con alcune misure:



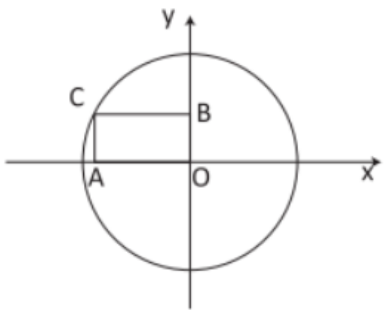
Se si corre al centro della prima corsia (cioè nella corsia più interna), qual è la lunghezza di un giro di pista? (5 punti)

16) *PQRS* è un parallelogramma e *T* è il punto medio di *SR*.



Qual è il rapporto tra l'area del triangolo *QST* e l'area del parallelogramma? Scrivi come hai fatto a trovare la risposta e poi riporta il risultato. (2 punti)

17) La circonferenza disegnata qui sotto ha come centro l'origine *O* degli assi cartesiane e *C* è un suo punto. *A* e *B* sono le proiezioni sugli assi cartesiani di *C*. Il diametro della circonferenza è 12 cm.



Qual è la lunghezza del segmento *AB*? Scrivi come hai fatto a trovare la risposta e poi riporta il risultato. (3 punti)

5 Le Proporzioni e le Percentuali

In questo capitolo verranno sviluppati i seguenti elementi di competenza:

Competenza

M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica

Abilità

MA1.5: Comprendere il significato logico-operativo di rapporto e grandezza derivata; impostare uguaglianze di rapporti per risolvere problemi di proporzionalità e percentuale; risolvere semplici problemi diretti e inversi.

Competenza

M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi

Conoscenze

MC3.3: Tecniche risolutive di un problema che utilizzano frazioni, proporzioni, percentuali, formule geometriche, equazioni e disequazioni di 1° grado.

5.1 Le Proporzioni

Si dice **proporzione** l'uguaglianza di due rapporti.

Alcuni esempi:

$$6 : 3 = 8 : 4$$

che si legge 6 sta a 3 come 8 sta a 4;

$$5 : 15 = 4 : 12$$

che si legge 5 sta a 15 come 4 sta a 12.

I numeri che compongono una proporzione sono così definiti:

$$20 : 10 = 4 : 2$$

- 20 e 4 si dicono **antecedenti;**
- 10 e 2 si dicono **conseguenti;**
- 20 e 2 si dicono **estremi;**
- 10 e 4 si dicono **medi.**

Se una proporzione ha i **medi uguali,** la proporzione si dice **continua** o con **medio proporzionale.** Ad esempio:

$$12 : 6 = 6 : 3$$

dove 6 è il **medio proporzionale** tra 12 e 3 e 3 è detto **terzo proporzionale.**

Le proporzioni godono di una proprietà fondamentale:

in una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.

Ad esempio nella proporzione 6 : 2 = 12 : 4

il prodotto dei medi: 2 * 12 = 24

il prodotto degli estremi: 6 * 4 = 24.

Da questa proprietà si ricava la regola necessaria per calcolare il valore di un termine incognito:

- se il termine incognito è un **medio,** si calcola dividendo il prodotto degli estremi per il medio noto:

$$3 : x = 12 : 36 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3 \bullet 36}{12} = 9$$

- se il termine incognito è un **estremo,** si calcola dividendo il prodotto dei medi per l'estremo noto:

$$8 : 5 = 12 : x \quad \rightarrow \quad x = \frac{5 \bullet 12}{8} = \frac{15}{2}$$

se il termine incognito è il **medio proporzionale** (in una proporzione continua), si determina il suo valore calcolando la radice quadrata del prodotto dei due numeri noti:

$$9 : x = x : 16 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{9 \bullet 16} = \sqrt{144} = 12$$

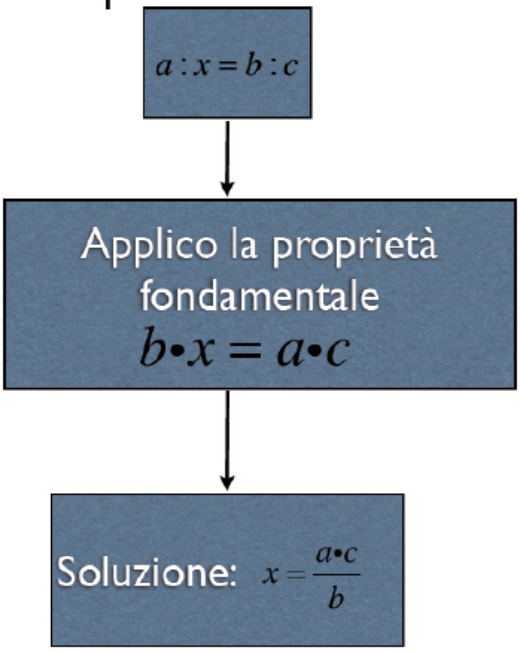
Proprietà

Le proporzioni godono delle seguenti proprietà:

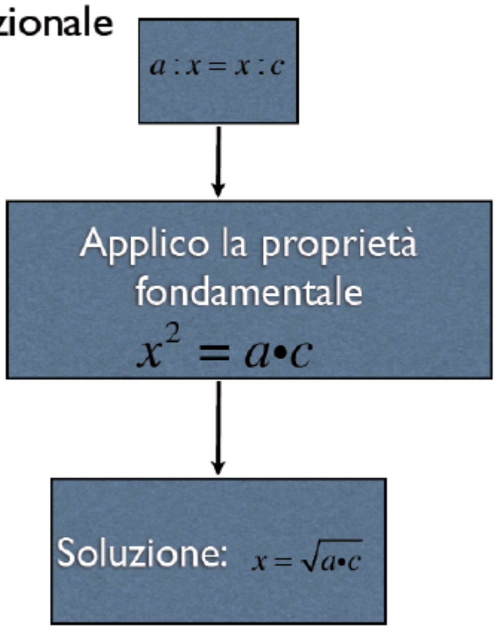
- **proprietà del permutare**: se si scambiano fra loro i medi o gli estremi, si ottiene ancora una proporzione;
- **proprietà dell'invertire**: se si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente, si ottiene ancora una proporzione;
- **proprietà del comporre**: la somma del primo antecedente con il primo conseguente sta al primo antecedente (o conseguente) come la somma del secondo antecedente con il secondo conseguente sta al secondo antecedente (o conseguente);
- **proprietà dello scomporre**: la differenza tra il maggiore ed il minore dei primi due termini sta al primo termine (o al secondo) come la differenza tra il maggiore e il minore degli altri due termini sta al terzo (o al quarto).

Sintesi

Proporzione semplice



Proporzione con medio proporzionale



5.2 Le Percentuali

Le frazioni (o rapporti) il cui denominatore è 100 si dicono **percentuali:**

$$\frac{5}{100} \quad \frac{958}{100} \quad \frac{92}{100}$$

Il simbolo di percentuale % indica una frazione con denominatore 100. La percentuale 43% è quindi uguale alla frazione $\frac{43}{100}$.

Calcolare una certa percentuale di un dato valore significa quindi moltiplicare il dato valore per la frazione percentuale corrispondente alla percentuale. Ad esempio, calcoliamo il 25% di 24:

$$24 \cdot \frac{25}{100} = 6$$

Alcuni Esempi

1) Calcolare la quantità, conoscendo il totale e la percentuale:

In un concerto ci sono 3500 spettatori. Di essi il 15% ha pagato il biglietto ridotto. Quanti gli spettatori che hanno pagato il biglietto intero e quanti quelli che hanno pagato il biglietto ridotto?

SVOLGIMENTO

Spettatori: 35000 $\longrightarrow$ 100%

Ridotti: x $\longrightarrow$ 15%

Leggendo lo schema dei dati, la proporzione risolutiva può essere scritta in questo modo:

35000 : 100 = x : 15

oppure in modo equivalente

35000 : x = 100 : 15,

applicando le proprietà delle proporzioni si dimostra facilmente che le due scritture sono equivalenti. Adesso possiamo ricavare la formula risolutiva per la x:

$$x = \frac{35000 \cdot 15}{100} = 5250$$

Quindi 5250 sono quelli che hanno pagato il biglietto ridotto, per sapere quelli che hanno pagato il biglietto intero basterà eseguire la seguente sottrazione:

B_intero = Spettatori - Ridotti = 35000 - 5250 = 29750

2) Ricavare la percentuale, conoscendo il totale e la quantità:

In una classe di 20 alunni, 15 sono stati promossi a Giugno. Qual è la percentuale di alunni promossi?

SVOLGIMENTO

Alunni classe: 20 $\longrightarrow$ 100%

Ridotti: 15 $\longrightarrow$ x

Leggendo lo schema dei dati, la proporzione risolutiva può essere scritta in questo modo:

20 : 100 = 15 : x

oppure in modo equivalente

20 : 15 = 100 : x

applicando le proprietà delle proporzioni si dimostra facilmente che le due scritture sono equivalenti. Adesso possiamo ricavare la formula risolutiva per la x:

$$x = \frac{100 \cdot 15}{20} = 75\%$$

Quindi 75% è la percentuale di alunni promossi a Giugno.

Adesso prova tu

3) Calcolare il totale, conoscendo la quantità e la percentuale:

In un'azienda ci sono 20 operaie che costituiscono il 40% del totale degli operai. Calcola il numero complessivo degli operai.

4) Calcolare l'incremento o il decremento tra due quantità, differenza:

Mario l'anno scorso ha venduto 200 macchine, quest'anno ne ha vendute 250. Qual è stato l'incremento percentuale rispetto all'anno scorso?

5) Calcolare l'aumento o la diminuzione di una certa percentuale:

I prezzi delle zucchine sono aumentati del 10% in una settimana. Se la settimana scorsa un chilo l'ho pagato 2,30 €, quanto dovrò pagarlo oggi?

5.3 Esercizi su Proporzioni e Percentuali

Esercizi

1) Se ingrandisco una foto nel rapporto 1:4 e la foto originale è lunga 5,4 cm, quanto è lungo il suo ingrandimento?

2) Su una carta geografica, la distanza tra due città è 5 cm. La distanza reale è 50 km. Qual è la scala adottata dalla carta geografica?

3) Una somma *s* viene suddivisa in due parti che stanno tra loro nel rapporto 3/7. Di' qual è il rapporto tra la parte più piccola e l'intera somma *s*.

4) Due cubi hanno gli spigoli lunghi rispettivamente 2 cm e 4 cm. Qual è il rapporto tra i loro volumi?

5) Giovanni compra dei libri per un valore complessivo di 75 €, pagando però 69 €. Quale sconto gli ha fatto il libraio?

6) Il prezzo di listino di una mountain-bike è 250 €. Ora sul biglietto è scritto: sconto del 15%. Quanto costa ora?

7) Il prezzo di un computer, IVA inclusa, è 1500 €. Qual è il prezzo IVA esclusa? (IVA 22%)

8) Determina il totale sapendo che il suo 18% è uguale a 417600.

9) In due centri commerciali A e B viene praticata la seguente promozione:

- A) Lettore CD (125 €): sconto 5%. Compact disc (14 €): sconto 10%.
- B) Lettore CD (125 €): sconto 4%. Compact disc (14 €): sconto 15%.

In quale centro commerciale mi conviene acquistare un lettore CD e sei compact disc?

Formative assessment sulle Proporzioni

6 Il Linguaggio della Matematica

In questo capitolo saranno sviluppati i seguenti elementi di competenza:

Competenza

M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica

Conoscenze

MC1.3: Espressioni algebriche; principali operazioni.

Competenza

M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi

Abilità

MA3.4: Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa.

6.1 Frase Criptata

Sostituisci ogni numero con una lettera e otterrai un aforisma.

La parola che va inserita nelle caselle colorate di giallo corrisponde alla seguente definizione:

"Si ottengono con ... degli scatti"

19	4	8	4	10	18	9	19	1	12

1	2		3	4	5	6	4		7	8	9		10
1	11	5	10	12	5	6	4		9		11	5	
13	11	5	8	4		1	5		14	11	1		14
15	1	11	5	16	11	12		9	17	18	9		4
5		2	1	5	12		6	12	2	2	12		19
4	8	4	10	18	9	19	1	12		1	3	20	9
18	9	21	21	9	5	8	1		6	1		7	12
	7	8	12	7	7	4		16	11	12	7	8	4
	12		9		8	11	8	8	1		10	2	1
	12	19	19	12	8	8	1		13	18	9	8	1
14	1		11	10	11	9	2	12		9	6		11
5		3	4	5	6	4		1	5		14	11	1
	5	12	7	7	11	5	4		2	4		19	9

6.2 Introduzione al Calcolo Letterale

In matematica vengono usate molto spesso le **lettere** al posto dei numeri, soprattutto per esprimere in forma generale relazioni e regole. Ad esempio, per calcolare l'area del rettangolo la formula è:

$$A = b * h$$

dove vengono utilizzate le lettere *b* e *h* al posto delle misure della base e dell'altezza.

Per indicare le operazioni fondamentali con le lettere si utilizzano gli stessi simboli delle operazioni con i numeri:

$$a+b \qquad a-b \qquad a \cdot b \qquad a:b \qquad \frac{a}{b} \qquad a^n$$

Le espressioni come (dove è stato sottinteso il per):

$$4ab \qquad -25xy+z \qquad y^2+2y+3$$

che indicano operazioni da eseguire fra lettere e numeri si dicono **espressioni letterali.** Nella stessa espressione letterale, lettere uguali rappresentano lo stesso numero.

Proviamo a studiare questa espressione letterale a*(a - 5) attraverso uno **schema a blocchi:**

$$a \xrightarrow{-5} \boxed{a-5} \xrightarrow{\cdot a} \boxed{a \cdot (a-5)}$$

Consideriamo ora a = 7:

$$7 \xrightarrow{-5} \boxed{7-5=2} \xrightarrow{\cdot 7} \boxed{2 \cdot 7 = 14}$$

6.3 I Monomi

Si dice **monomio** un'espressione letterale in cui compaiono solo moltiplicazioni e elevamenti a potenza con esponente positivo. Ad esempio sono monomi:

$$3a \qquad -5ab \qquad +38z^2$$

Il numero presente all'inizio del monomio (con il proprio segno) è detto *coefficiente numerico del monomio* mentre l'insieme dei fattori letterali è detta *parte letterale.*

I coefficienti +1 e -1 possono essere omessi, quindi non si scrivono:

$$-b \qquad x^3y \qquad -ab^2x^4$$

I monomi che sono formati da un solo fattore numerico e da potenze letterali con basi diverse (cioè ogni lettera compare solo una volta) si dicono in **forma normale:**

$$2a \cdot 3b \cdot 4 = (2 \cdot 3 \cdot 4)(a \cdot b) = 12ab$$

Si definisce **grado** di un monomio **rispetto ad una lettera** l'esponente della lettera stessa quando il monomio è scritto in forma normale. Se l'esponente non è espresso, è sottinteso l'esponente 1. Ogni monomio è di grado 0 rispetto a qualsiasi lettera che non compare nella sua parte letterale.

Si definisce **grado complessivo** di un monomio la somma degli esponenti di tutti i fattori della parte letterale del monomio.

Ad esempio il monomio $3ax^3y^2$ è:

- di 1° grado rispetto alla lettera a
- di 3° grado rispetto alla lettera x
- di 2° grado rispetto alla lettera y
- il grado complessivo è 1 + 3 + 2 = 6.

Due monomi si dicono **monomi simili** se hanno la stessa parte letterale con gli stessi esponenti:

$$3ab \qquad -15ab \qquad -\frac{43}{3}ab$$

Due monomi si dicono monomi opposti se hanno la stessa parte letterale (cioè sono monomi simili) ma con coefficienti numerici opposti:

$$-15axy \qquad +15axy$$

6.4 Le Operazioni con i Monomi

Addizione e Sottrazione

La somma tra monomi può essere eseguita solo nel caso in cui i monomi siano simili:

- La somma di due monomi o più monomi simili è un monomio simile ad essi che ha per coefficiente numerico la somma algebrica dei coefficienti numerici degli addendi:

$$6xy+3xy-9xy-xy=(6+3-9-1)xy=-1xy$$
$$3x+5x-2x-9x=(3+5-2-9)x=-3x$$

- La somma di due monomi non simili non si può calcolare, si lascia indicata e si ottiene un **polinomio:**

$$3a+5b-7cy$$
$$12xy-5$$

- La somma di monomi simili e non simili si calcola riducendo (cioè sommando) solo i termini simili:

$$8ax+3ay+\frac{1}{2}ax-2ay+bx=\left(8+\frac{1}{2}\right)ax+(3-2)ay+bx=\frac{17}{2}ax+ay+bx$$

Moltiplicazion

Il prodotto di due o più monomi è un monomio che ha per coefficiente numerico il prodotto dei coefficienti numerici e per parte letterale il prodotto delle parti letterali dei fattori.

Ricorda: il prodotto tra le parti letterali si esegue sommando gli esponenti di ogni fattore letterale uguale, perché si applica la proprietà del *prodotto tra potenze con la stessa base.*

$$(2ab)\cdot(4ab^2)=(2\cdot4)a\cdot a\cdot b\cdot b^2=8a^2b^3$$

Divisione

Il quoziente tra due monomi è un monomio che ha per coefficiente numerico il quoziente tra i coefficienti numerici e per parte letterale il quoziente tra le loro parti letterali.

Ricorda: il quoziente tra le parti letterali si esegue sottraendo gli esponenti di ogni fattore letterale uguale, perché si applica la proprietà della *divisione tra potenze con la stessa base.*

$$12a^4b^3:(-3ab^2)=12\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(a^4:a)\cdot(b^3:b^2)=-4a^3b$$
$$9x^3y:(6x^2y)=9x^3y\cdot\frac{1}{6x^2y}=\frac{9}{6}x=\frac{3}{2}x$$

Elevamento a Potenza

La potenza di un monomio è un monomio che ha per coefficiente numerico la potenza del coefficiente numerico e per parte letterale la potenza di ciascun fattore letterale del monomio.

Ricorda: la potenza della parte letterale del monomio si esegue moltiplicando gli esponenti di ciascun fattore letterale per l'esponente a cui è elevato il monomio, perché si applica la proprietà della *potenza di potenza.*

$$(-2ab^2x^3)^2=4a^2b^4x^6$$

6.5 Esercizi Calcolo Letterale

Espressioni letterali

$$-xy \cdot (3x) - x^7y^2 : (2x^5y)$$

$$\left(x^4 - \frac{1}{7}x^4 + \frac{8}{7}x^4\right) \cdot (8x - 3x) : \left(-\frac{5}{4}x^2\right)$$

$$\left[\left(-\frac{1}{5}a^2b^2 + a^2b^2\right) - \frac{1}{3}a^2b^2\right] : (ab)$$

$$\left[\left(\frac{1}{4}a^3y\right)^3\right]^3 : \left[\left(-\frac{1}{2}a^2y\right)^3\right]^2$$

$$\frac{4}{3}x^3y^4 : (2xy)^2 + \left(-2 + \frac{6}{5}\right)x(-5y)^2 - \frac{4}{3}xy^2$$

$$\left[5x^2 - (5x^3)^2 : \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2\right]^0 \cdot \left[-2x + \frac{1}{2}x - (-3x)\right]^3$$

$$\left[\left(-\frac{1}{2}x^4y - x^4y\right) + 3x^4y - 6x^4y\right] : \left(4x^4y - \frac{5}{2}x^4y\right) \cdot x$$

$$\left(-\frac{1}{3}a^2b^3\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}ab^2\right)\left(\frac{1}{3}a^3b^4\right) - \left(-\frac{1}{2}ab^2\right)^3 \cdot a$$

Problemi

1) In una gara ciclistica è previsto per il primo giorno un percorso di x km, il secondo y km e il terzo giorno il doppio del primo. Individua l'espressione algebrica che descrive il percorso della gara.

2) Il conto in banca del signor Rossi ammonta a x euro. Per far fronte ad una spesa il signor Rossi preleva prima un terzo della somma e poi y euro. Qual è l'espressione letterale che indica il saldo finale?

Formative assessment sul Calcolo letterale

Quanto pendi di sapere sul calcolo letterale? Rispondi alle domande di questo *feedback.*

6.6 Compito sul Calcolo Letterale

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA1.5: Comprendere il significato logico-operativo di rapporto e grandezza derivata; impostare uguaglianze di rapporti per risolvere problemi di proporzionalità e percentuale; risolvere semplici problemi diretti e inversi.	Risoluzione di problemi impostando delle proporzioni.	Non risolve i problemi.	Risolve solo i problemi che richiedono una singola operazione.	Risolve tutti i problemi impostando correttamente tutte le proporzioni necessarie.	
MC1.3: Espressioni algebriche; principali operazioni.	Espressioni algebriche e risoluzione problemi.	Non risolve le espressioni o risolve solo quelle in cui è presente una singola operazione.	Risolve le espressioni algebriche sia quelle in cui presente una singola operazione, sia quelle più complesse.	Risolve le espressioni e nei problemi scrive l'espressione algebrica risolutiva correttamente ma non la risolve.	Risolve le espressioni e i problemi.

Valutazione Sintetica:__________

Prima Parte

1) Esegui le seguenti addizioni di monomi: (5 punti ciascuna)

$$3a+5a-4=$$

$$a^2b^2+\frac{1}{3}a^2b^2+\frac{1}{6}a^2b^2-\frac{1}{2}a^2b^2-\frac{1}{12}a^2b^2=$$

2) Esegui le seguenti moltiplicazioni: (5 punti ciascuna)

$$\frac{2}{3}a^2x^3\cdot\left(-\frac{3}{5}ax^4\right)=$$

$$-\frac{7}{9}ab^2c\cdot(-6ab^2c)\cdot\left(-\frac{3}{8}abc^2\right)=$$

3) Esegui le seguenti divisioni tra monomi: (5 punti ciascuna)

$$\left(-\frac{3}{2}x^5y^7\right):\left(-\frac{15}{4}x^5y^5\right)=$$

$$\left(-\frac{1}{3}a^2b\right):\left(-\frac{1}{9}a\right)=$$

4) Esegui le potenze di monomi: (5 punti ciascuna)

$$\left[\left(-\frac{3}{2}ab^2c^3\right)^2\right]^2=$$

$$\left[\left(-\frac{1}{3}a^2b^3\right)^3\right]^2=$$

5) Esegui le espressioni con i monomi: (15 punti ciascuna)

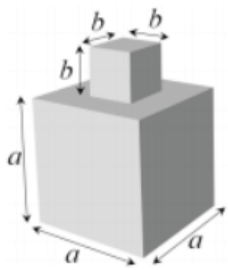
$$(a^3b^2)^2\cdot(-ab^3)^3:\left[(-2a^2b^3)^2\right]^2+(2a^2b^3)^2:(-2ab)^3:(-b)^2=$$

$$\left[(-x^3y)^2\cdot\left(-\frac{1}{4}xy^2\right)+\frac{3}{2}x^3y^2\cdot\left(-\frac{1}{3}x^2y\right)^2\right]:\left[\frac{1}{4}xy\cdot(-x^3y)^2\right]=$$

Seconda Parte

6) Considera un quadrato di lato a. Se si aumenti il lato a del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato b. Determina l'espressione che rappresenta la misura di b. Di quanto aumenti in percentuale l'area del quadrato di lato b rispetto all'area del quadrato di lato a? (10 punti)

7) Un solido S è ottenuto incollando uno sopra l'altro due cubi come mostra la seguente figura:



Determina l'espressione che esprime l'area della superficie totale del solido S? (10 punti)

8) Un gruppo di biologi, per stimare quante trote ci sono in un lago, ne pesca 200 e, dopo averle marcate, le rigetta nel lago. Dopo qualche giorno, utilizzando la stessa rete, vengono pescate 720 trote e solo 12 di esse sono marcate. In base a queste informazioni, quante trote possiamo pensare che ci siano all'incirca nel lago? (10 punti)

7 Le Equazioni di Primo Grado

In questo capitolo saranno sviluppati i seguenti elementi di competenza:

Competenza

M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica

Abilità

MA1.6: Risolvere equazioni di primo grado e verificare la correttezza dei procedimenti utilizzati.

Conoscenze

MC1.4: Equazioni e disequazioni di primo grado.

Competenza

M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi

Abilità

MA3.4: Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa.

Conoscenze

MC3.3: Tecniche risolutive di un problema che utilizzano frazioni, proporzioni, percentuali, formule geometriche, equazioni e disequazioni di 1° grado.

7.1 Introduzione alle Equazioni

Problem Solving

1) Matteo ha ricevuto una mancia di 10 €, così, con la somma che già possedeva, ha potuto sostenere una spesa di 26 €. Poiché gli sono rimasti 3 , quanto possedeva inizialmente?

2) In un recinto ci sono più pecore che capre: le pecore sono cinque volte le capre. Se in tutto ci sono 42 animali, quante capre ci sono nel recinto?

3) Avendo sistemato 11 libri su ogni scaffale della libreria, sono avanzati 8 libri. Allora distribuisco 9 libri su ogni scaffale: in questo modo uso quattro scaffali in più e non avanzano libri. Su quanti scaffali avevo disposto i libri la prima volta?

7.2 Le Equazioni

Un'**equazione** è un'uguaglianza tra due espressioni letterali che risulta verificata solo per particolari valori assegnati all'incognita:

$2x - 3 = 5$ viene verificata per $x = 4$.

I valori che verificano l'uguaglianza si dicono **soluzioni** o **radici** dell'equazione.

Il **grado** di un'equazione è definito come l'esponente massimo dell'incognita che vi compare:

- $3x^2 - 2 + x = 0$ è un'equazione di secondo grado;
- $3 + t^3 - 5t = 0$ è un'equazione di terzo grado;
- $-2k = 2$ è un'equazione di primo grado;
- $5b^4 - 3b^2 = 2 + 7b^5$ è un'equazione di quinto grado.

Un'equazione di primo grado è detta anche **lineare.** Il numero massimo di soluzioni appartenenti ai numeri reali che può avere un'equazione in un'incognita è pari al suo grado.

Due equazioni nella stessa incognita si dicono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Le equazioni $x - 1 = 5$ e $2x - 1 = 11$ hanno come soluzione $x = 6$, quindi sono equazioni **equivalenti.**

7.3 I Principi di Equivalenza

Primo Principio di Equivalenza

Aggiungendo o sottraendo lo stesso numero o la stessa espressione algebrica a entrambi i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Le conseguenze del primo principio di equivalenza delle equazioni sono:

- **regola del trasporto:** è possibile trasportare un termine o un'espressione algebrica da un membro all'altro dell'equazioni cambiandogli di segno;
- in un'equazione è possibile eliminare un termine o un'espressione algebrica che compare identica in entrambi i membri dell'equazione.

Secondo Principio di Equivalenza

Moltiplicando o dividendo entrambi i membri di un'equazione per uno stesso numero o un'espressione diversa da zero, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Le conseguenze del secondo principio di equivalenza delle equazioni sono:

- se si cambiano i segni di tutti i termini di un'equazione, possibile moltiplicando per -1, si ottiene un'equazione equivalente a quella data:

  $-x^3 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$ si può trasformare in $x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = 0$

  in cui entrambi i membri dell'equazione sono stati moltiplicati per -1;

- se nell'equazione compaiono numeri frazionari, si possono ridurre i due membri dell'equazione allo stesso denominatore e successivamente eliminare i denominatori. Data l'equazione:

$$\frac{x-1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3x-7}{8}$$

riducendo entrambi i termini allo stesso denominatore e moltiplicando per il denominatore si ottiene:

$$\cancel{8}\cdot\frac{4(x-1)+2}{\cancel{8}}=\frac{3x-7}{\cancel{8}}\cdot\cancel{8} \quad \rightarrow \quad 4(x-1)+2=3x-7$$

equazione equivalente, cioè con le stesse soluzioni, a quella data.

7.4 Equazioni di Primo Grado o Lineari

Tutte le equazioni di primo grado possono essere espresse in una particolare forma, detta **forma normale:**

$$ax = b$$

dove si ha un unico termine con l'incognita, il cui coefficiente è a e un unico termine noto b.

Quindi i passaggi per poter risolvere una data equazione sono i seguenti. Considera la seguente equazione:

$$7(x - 2) + 3(4 + 2x) = 5(x+6)$$

- se ci sono, risolvere le parentesi:

$$7x - 14 + 12 + 6x = 5x + 30$$

- se ci sono dei coefficienti frazionari si riducono i due membri dell'equazione alle stesso denominatore per poi eliminarlo;
- applicando il 1° principio, si trasportano in uno dei due membri tutti i termini che contengono l'incognita e nell'altro membro tutti i termini noti:

$$7x + 6x - 5x = 14 - 12 + 30$$

- si sommano i termini simili, scrivendo così l'equazione nella sua forma normale:

$$8x = 32 \rightarrow \frac{\cancel{8}^1}{\cancel{8}^1}x = \frac{\cancel{32}^4}{\cancel{8}^1} \rightarrow x = 4$$

Dall'esempio precedente, si è visto che se il coefficiente a (cioè il coefficiente dell'incognita) della forma normale è diverso da zero, allora per il secondo principio di equivalenza si ottiene la soluzione dell'equazione dividendo entrambi i membri per il coefficiente a:

$$\frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}} = \frac{b}{a} \quad \rightarrow \quad x = \frac{b}{a}$$

A seconda dei valori di a e b, le equazioni lineari possono essere suddivise in tre differenti categorie:

se $a \neq 0$, la soluzione è data da $x = \frac{b}{a}$ e l'equazione è detta **determinata**;

se $a = 0$ e $b \neq 0$, la forma normale dell'equazione è $0x = b$: l'equazione non ha alcuna soluzione e quindi è detta **impossibile;**

se $a = 0$ e $b = 0$, la forma normale dell'equazione è $0x = 0$: l'equazione ha infinite soluzioni e quindi è detta **indeterminata.**

7.5 Sviluppo degli Elementi di Competenza (Equazioni di Primo Grado)

Esercizi

Risolvi le seguenti equazioni facendo anche la verifica:

$$5x - 8 = 72$$

$$2a - 7 = 6 + a$$

$$4n + 5n = 8n$$

$$10b + 3 = 8b + 3$$

$$5x - 2x - 8 = 35$$

$$16 = 3(t - 1) - (t - 7)$$

$$2(3q - 4q) - 6 = 5q - 6$$

$$9y - 3(6 - 5y) = y - 2(3y + 9)$$

$$20 - \frac{x}{3} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{x+3}{2} = \frac{2}{3} + \frac{x-5}{4}$$

$$\frac{x-1}{3} + 3 = \frac{x+8}{3}$$

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{x-5}{6} = \frac{x-3}{4}$$

$$\frac{x-2}{4} + \frac{2x-1}{3} + 1 = x + \frac{2}{3}$$

$$\frac{1+x}{6} - \frac{1-x}{3} - \frac{5x}{9} = 0$$

$$2x + 4\left(\frac{1-x}{6}\right) = 5 - 3x$$

Risolvi i seguenti problemi

1) Se a un numero si aggiunge 20 e dalla somma ottenuta si sottrae 1/5 di essa, si ottiene il quadruplo del numero dato. Trova il numero.

2) Un numero naturale è tale che la somma tra la sua metà e la sua terza parte è 19. Determina il numero.

3) In un teatro vi sono 650 spettatori. La seconda galleria ne contiene il doppio della prima, mentre in platea vi sono 200 spettatori in più della somma degli spettatori delle due gallerie. Calcola il numero degli spettatori di ciascuna categoria.

4) Una persona ha 38 anni e suo figlio ne ha 12. Tra quanti anni l'età di quella persona sarà il doppio di quella del figlio?

5) Una persona ha acquistato una casa. Per ristrutturarla ha speso 38000 €. Successivamente ha rivenduto la casa a 570000 € guadagnando così una cifra pari ai 2/5 del prezzo d'acquisto. Quanto era stata pagata quella casa?

8 Proporzionalità

In questo capitolo saranno sviluppati i seguenti elementi di competenza:

Competenza

M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi

Abilità

MA3.2: Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici.

Conoscenze

MC3.3: Tecniche risolutive di un problema che utilizzano frazioni, proporzioni, percentuali, formule geometriche, equazioni e disequazioni di 1° grado

Competenza

M4: Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Abilità

MA4.3: Leggere e interpretare tabelle e grafici in termini di corrispondenza fra elementi di due insiemi.

MA4.4: Riconoscere una relazione tra variabili, in termini di proporzionalità diretta o inversa e formalizzarla attraverso una funzione matematica.

MA4.5: Rappresentare sul piano cartesiano il grafico di una funzione.

Conoscenze

MC4.2: Il piano cartesiano e il concetto di funzione

MC4.3: Funzioni di proporzionalità diretta, inversa e relativi grafici, funzione lineare.

8.1 Introduzione alla proporzionalità

Problem Solving

1) In una segheria per la produzione di un listello lungo 1 m si impiegano 15 minuti. Quanti minuti ci vogliono per produrre un listello di 4 m? Quanto sarà lungo il listello prodotto in 90 minuti? Rappresenta i punti trovati su un piano cartesiano. Prova a scrivere la funzione che lega la lunghezza del listello ai tempi di produzione.

2) Se per la produzione dei diversi listelli dell'esercizio precedente aggiungiamo 10 minuti per la preparazione della macchina, come cambierà la disposizione dei diversi punti sul piano cartesiano? Disegna i nuovi punti.

3) Per la verniciatura di un muro un imbianchino chiede 18 €/m^2. Quanto costa verniciare i seguenti muri di forma quadrata aventi lati lunghi rispettivamente 2 m, 3,5 m, 4 m e 7m? Rappresenta i punti trovati su un piano cartesiano. Prova a scrivere la funzione che lega il costo della vernice alla lunghezza del lato del muro.

4) Se per la verniciatura dei muri aggiungiamo 15 € per il trasporto dei materiali, come cambierà la disposizione dei diversi punti sul piano cartesiano? Disegna i nuovi punti.

5) Per eseguire un lavoro occorrono 12 ore se viene eseguito solo da una persona. Quante ore ci vorranno se il lavoro venisse eseguito da 3 persone? E da 5? E da 6? E da 12?

6) Se per il lavoro aggiungiamo 2 ore affinché gli operai arrivino sul posto di lavoro, come cambierà la disposizione dei diversi punti sul piano cartesiano? Disegna i nuovi punti.

8.2 Proporzionalità diretta e Funzioni lineari

La proporzionalità diretta tra due grandezze è una funzione rappresentata da una rette passante per l'origine degli assi, e ha equazione:

$$y = kx$$

dove *k* è un numero reale diverso da zero e rappresenta il coefficiente angolare della retta medesima.

Conoscendo una generica coppia ordinata di valori (x; y), diversi da zero, e sapendo che la funzione varia secondo la proporzionalità diretta, possiamo ricavare, dall'equazione della retta che la individua, la **costante di proporzionalità**:

$$k = \frac{y}{x}$$

Diciamo anche che y è direttamente proporzionale a x e che k è la costante di proporzionalità diretta.

Il valore della costante di proporzionalità può anche essere un numero negativo.

Pensiamo, ad esempio, a un titolo di borsa che in un giorno ha perso il 6%. Chi ha investito 1000 € ha perso 60 €, chi ha investito 2000 € ha perso il doppio e via di seguito.

Esempio:

Sapendo che y è direttamente proporzionale a x e che y = 8 quando x = 2, trova:

- la costante di proporzionalità;
- l'equazione e il grafico della retta che rappresenta tale variazione;
- il valore di y per x = 1

Possiamo determinare la costante di proporzionalità con riferimento alla formula:

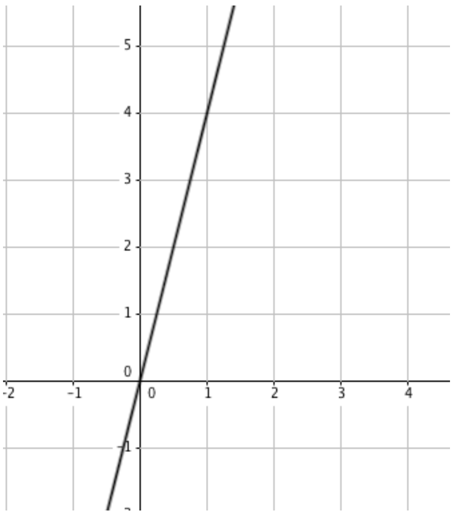
$$k = \frac{y}{x}$$

e otteniamo:

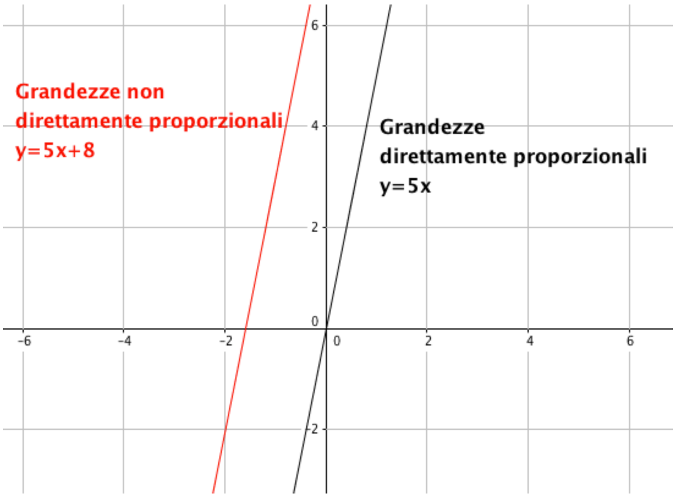
$$k = \frac{8}{2} = 4$$

L'equazione della retta è y = 4x.

Il valore di y per x = 1 è y = 4



Il grafico di una retta non passante per l'origine degli assi non corrisponde a coppie di valori tra loro direttamente proporzionali.



Esaminando il grafico di una retta risulta pertanto molto semplice stabilire se i dati che la rappresentano corrispondono o no a una proporzionalità diretta tra due grandezze.

8.3 Proporzionalità quadratica

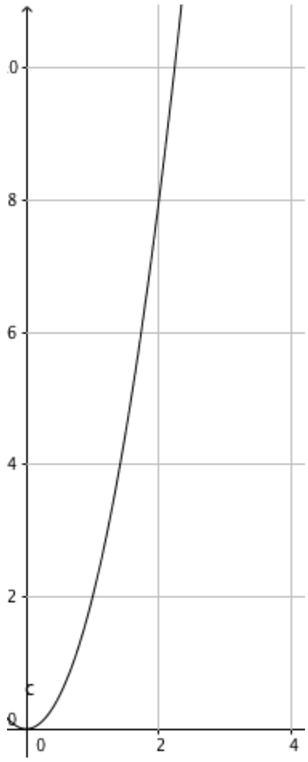
Si ha una **proporzionalità quadratica** tra due grandezze x e y quando la grandezza variabile y è direttamente proporzionale al quadrato di una grandezza x, ovvero se le due grandezze sono collegate da una relazione funzionale della forma:

$$\frac{y}{x^2} = k$$

Più semplicemente diciamo che:

- quando x raddoppia, y diventa quattro volte più grande;
- quando x triplica, y diventa nove volte più grande;
- più in generale quando x viene moltiplicata m volte, y diventa m^2 volte maggiore.

Il grafico cartesiano di una variabile dipendente y direttamente proporzionale al quadrato di una variabile dipendente x è un **arco di parabola:**

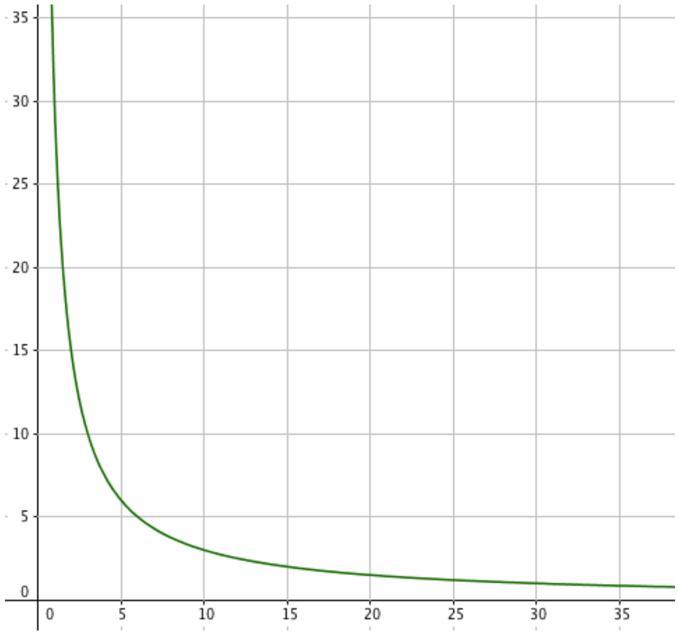


In geometria troviamo molti esempi di questa relazione tra grandezze. L'area di un quadrato cresce proporzionalmente al quadrato del suo lato. L'area di un cerchio è proporzionale al quadrato del suo raggio. L'area di un poligono regolare cresce come il quadrato di un suo lato o del suo apotema. La superficie di una un cubo cresce come il quadrato del suo spigolo. La superficie di una sfera è proporzionale al quadrato del suo raggio.

8.4 Proporzionalità inversa

La seguente tabella e il relativo grafico mostrano le velocità medie necessarie per percorrere un tratto di 120 km in differenti intervalli di tempo, espressi in ore:

h	1	2	3	4	5	6
km/h	30	15	10	7,5	6	5



Osserviamo che all'aumentare delle ore di percorrenza le rispettive velocità diminuiscono, in modo tale che, ad esempio, quando si raddoppia il tempo la velocità si dimezza e viceversa, oppure quando si triplica il tempo la velocità si riduce a un terzo ecc.

Riscontriamo anche che il prodotto del tempo t per la corrispondente velocità v è costante e individua la relazione:

$$vt = 30$$

Il problema individua la proporzionalità inversa che intercorre tra il tempo e la corrispondente velocità.

La rappresentazione grafica sul piano cartesiano è un ramo di curva detta **iperbole equilatera.**

La **proporzionalità inversa** tra due grandezze, non nulle, è una funzione rappresentata da una iperbole equilatera e ha equazione:

$$xy = k$$

dove k è un numero reale diverso da zero.

Conoscendo una generica coppia ordinata di valori (x; y), diversi da zero, e sapendo che la funzione varia secondo la proporzionalità inversa, possiamo ricavare, dall'equazione di proporzionalità, il valore di y in funzione di x:

$$y = \frac{k}{x}$$

Esempio:

Per eseguire un lavoro occorrono 12 ore. Determina graficamente la variazione delle ore giornaliere lavorate rispetto al numero di giorni impiegati.

Il problema caratterizza una proporzionalità inversa tra le due grandezze. Infatti lavorando per 4 ore al giorno occorrono 12 giorni, lavorando 8 ore al giorno bastano 3 giorni.

Costruiamo una tabella nella quale assegniamo alla variabile x il numero di ore giornaliere lavorate e alla variabile y i corrispondenti giorni che occorrono per completare il lavoro:

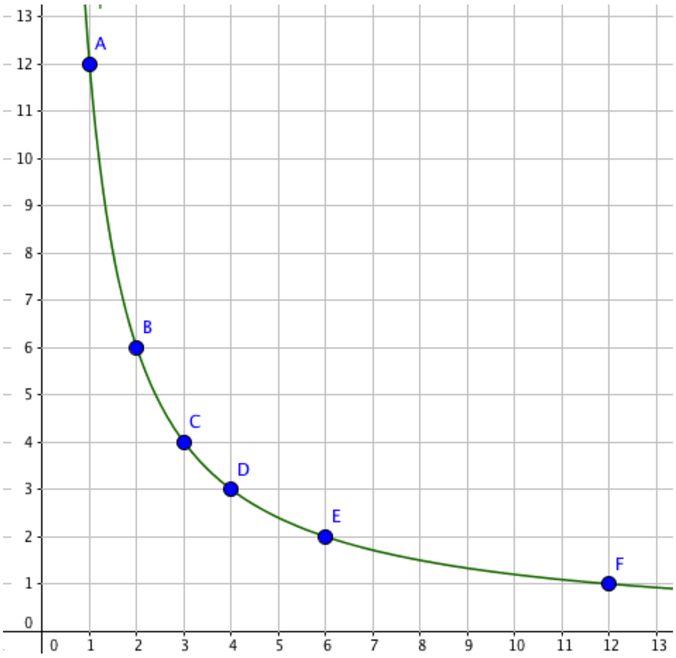
x	1	2	3	4	6	12
y	12	6	4	3	2	2

Rappresentiamo sul piano cartesiano alcuni punti corrispondenti ai dati della tabella.

Essi appartengono alla curva di equazione xy = 12 oppure:

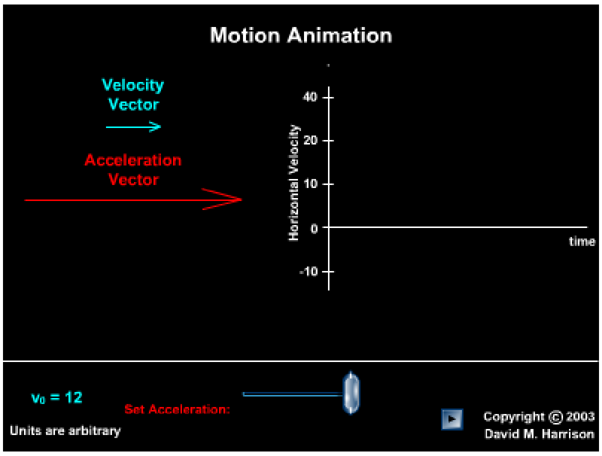
$$y = \frac{12}{x}$$

che è un'iperbole equilatera.



8.5 Applet Java - Proporzionalità

Risparmio energia di Safari
Fai clic per avviare il plugin Flash

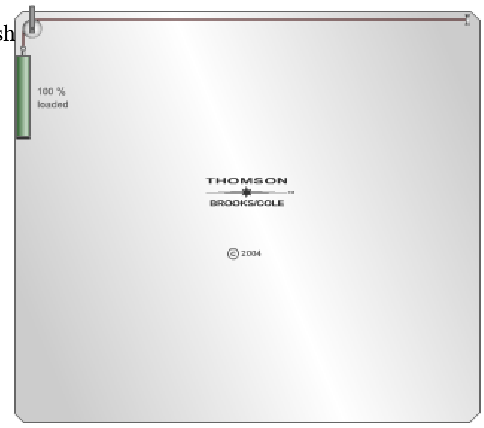


1) Proporzionalità diretta e dipendenza lineare:

Risparmio energia di Safari
Fai clic per avviare il plugin Flash

2) Proporzionalità quadratica:

Risparmio energia di Safari
Fai clic per avviare il plugin Flash



3) Proporzionalità inversa:

8.6 Domande da porsi per risolvere un problema con le funzioni

- Quali sono le grandezze in gioco? (Suggerimento: attenzione non sono numeri)
- Qual è la variabile indipendente? (Suggerimento: qual è la grandezza a cui posso assegnare i valori che voglio)
- Qual è la variabile dipendente? (Suggerimento: qual è la grandezza di cui non posso scegliere il valore)
- Ci sono quantità fisse? (Suggerimento: non dipendono dalle due grandezze)
- Che tipi di relazione lega le due grandezze?
- Crescono nella stessa direzione?
- Se una raddoppia l'altra cosa fa? Raddoppia? Quadruplica? Si dimezza?

A questo punto dovresti essere in grado di scrivere la tua funzione.

8.7 Problemi sulla proporzionalità e le funzioni

1) Cosa abbiamo capito della proporzionalità diretta? (*formative assessment*)

2) Sintesi proporzionalità (*formative assessment*)

3)Indica con x la lunghezza del lato di un triangolo equilatero e con y il suo perimetro. Esprimi la funzione che lega y a x e disegna il grafico.

4) Supponiamo che il noleggio di una macchina costi 50 € di quota fissa più 2 € per ogni chilometro percorso. Esprimi il costo quotidiano del noleggio in funzione dei chilometri percorsi e rappresenta poi graficamente la formula scritta.

5) Un tassista chiede a un cliente 5 € alla partenza come quota fissa, più 2 € per ogni chilometro percorso:

- Esprimi la spesa in funzione dei chilometri percorsi.
- Rappresenta in un piano cartesiano la funzione ottenuta (presupponi un percorso non superiore a 10 km).

Un secondo tassista richiede 3 € al chilometro (senza spesa iniziale):

- Esprimi anche in questo caso la spesa in funzione dei chilometri percorsi.
- Rappresenta la nuova funzione nello stesso piano cartesiano in cui hai rappresentato la precedente.
- Determina quale delle due proposte è più vantaggiosa per il cliente.

6) Indica la misura delle dimensioni di un rettangolo con x e y. Sapendo che l'area della superficie è 84 cm^2, esprimi la funzione che lega y e x e disegna il grafico di tale funzione. Stabilisci di quale curva si tratta e determina dal grafico il perimetro del rettangolo che ha un lato lungo 28 cm.

7) In un rettangolo abbiamo la base tripla dell'altezza. Se indichiamo con x al misura di quest'ultima:

- qual è il valore dell'area A del rettangolo?
- Come varia A al variare di x?
- Rappresenta graficamente questa relazione.
- Che tipo di proporzione intercorre tra A e x?
- Qual è la costante di proporzionalità?
- Come si chiama il grafico della relazione rappresentata?
- Se il valore di x raddoppia, triplica, quadruplica,... che ne è del valore di A?

8) Traccia in un piano cartesiano il grafico corrispondente alla seguente tabella, nella quale sono riportati i numeri dei colpi giunti a segno di un tiratore che per 10 giorni consecutivi si allena sparando 50 colpi al giorno:

Giorno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Colpi giunti a segno	30	28	35	39	45	42	45	45	48	49

9) In un rettangolo un lato è doppio dell'altro indica con x la lunghezza del lato minore e con y il perimetro del rettangolo. Esprimi la funzione che lega y a x e disegna il grafico. Determina dal grafico la misura dei lati del rettangolo quando il perimetro è 18 cm, dopo aver posto uguale a un centimetro l'unità di misura delle lunghezze.

10) Una grandezza y è direttamente proporzionale al quadrato di un'altra grandezza x e il coefficiente di proporzionalità è 5/2. Rappresenta graficamente la funzione.

11) In un pistone la pressione e il volume sono due grandezze inversamente proporzionali, sapendo che in una certa posizione la pressione vale 20 e il volume 15, determina la costante di proporzionalità, scrivi la funzione considerando la pressione come variabile dipendente, disegnala su un piano cartesiano e calcola il valore del volume quando la pressione è 40.

12) Una compagnia telefonica fa la seguente offerta 1 € di scatto alla risposta e 0,10 €/min. Che tipo di relazione descrive la tariffa? Scrivi la relazione e riportala su un piano cartesiano. Quanto spende per 10 minuti di conversazione?

13) In un moto uniformemente accelerato il tempo e lo spazio variano in questo modo:

t	0	2	4
s	0	12	48

Che tipo di relazione descrive il moto? Scrivi la relazione e riportala su un piano cartesiano. Quanto spazio avrà percorso dopo 10 secondi?

14) Per un esame universitario una studentessa deve studiare 1000 pagine e vuole farsi un piano di studio. Se studiasse 20 pagine al giorno, quanti giorni sono necessari per finire il libro? E se studiasse 25 pagine al giorno? Che tipo di relazione descrive la problematica? Scrivi la relazione e riportala su un piano cartesiano.

15) Disegna sul piano cartesiano la sequenza di punti riportati in tabella:

x	10	12	8	14	6	4
y	30	25	40	40	20	30

8.8 Problemi sulla proporzionalità estratti dai quesiti d'esame

Domanda 3 **M010651**

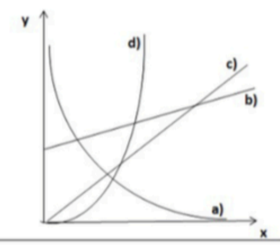
	Associa ad ogni situazione il grafico velocità/tempo corrispondente	Grafico
1	il corridore parte da fermo e inizia ad aumentare la velocità	
2	il corridore continua a partire, fermarsi e ripartire	
3	il corridore si stanca e rallenta	
4	il corridore vede che sta terminando la corsa, aumenta la velocità e taglia il traguardo	

A	B	C	D

Domanda 14 **M010638**

	Fra due grandezze ci possono essere relazioni di vario tipo	Grafico
1	proporzionalità diretta	
2	proporzionalità inversa	
3	proporzionalità quadratica	
4	relazione lineare	

Associa ad ogni relazione la sua rappresentazione grafica



Domanda 12 **M9005-00**

L'area di un quadrato è proporzionale al quadrato del lato.

Rispondi alle seguente richieste

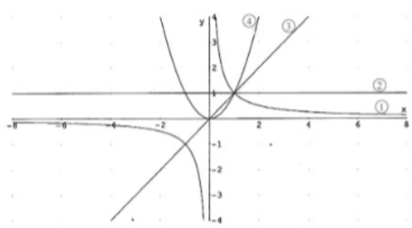
Punto	
1	Scrivi la relazione che lega l'area A e il lato L ___________
2	Come diventa l'area se il lato dimezza? ____________

Domanda 17 **M010426**

A parità di costo del biglietto di due lotterie L1 e L2, è più probabile vincere con L1 che mette in palio 15 premi su 500 biglietti, o con L2 che assegna 25 premi su 700 biglietti venduti?

Indica i calcoli da eseguire per dare la risposta.

Domanda 16 **M010443**



Le linee rappresentate nel piano cartesiano si intersecano tutte nel punto di coordinate (1,1).

Associa ad ognuna di esse la sua equazione scelta fra le seguenti:

a) $y = x$
b) $y = x^2$
c) $y = 1/x$
d) $y = 1$

Risposta

Linea 1	Linea 2	Linea 3	Linea 4
Equazione:	Equazione:	Equazione:	Equazione:

Domanda 18 **M010525**

Simone vuole stimare il numero di cervi in una foresta. Prende 60 cervi e mette un segno giallo su ognuno di essi. Poi li rilascia nel bosco. Una settimana dopo prende 30 cervi e trova che 9 di loro hanno il marchio giallo.

Quale è il numero possibile di cervi nella foresta?

- ☐ **A** 90
- ☐ **B** 900
- ☐ **C** 200
- ☐ **D** 2000

Domanda 11 M010530

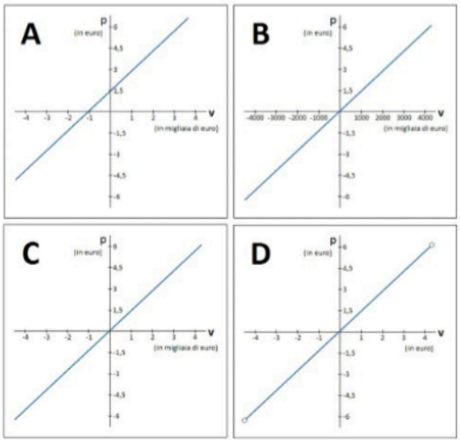
Una società assicurativa applica le seguenti tariffe per assicurare le abitazioni e il loro contenuto.

Premio annuale per ogni 1.000 € assicurati	ABITAZIONI	CONTENUTO
	€ 1,50	€ 5

Quanto deve pagare complessivamente il signor Franco per assicurare il suo appartamento del valore di 120.000 euro ed il suo contenuto (mobili, quadri, oggetti di valore) valutato 18.000 euro?

Domanda 12 M010531

Con la stessa assicurazione, il signor Gianni, invece, vuole assicurare solo l'appartamento, per cui la relazione fra il premio annuale da pagare **p** e il valore della casa **v** è data dalla seguente equazione: **p** = 1,5•**v**/1000. Individua, fra i seguenti, quale è il grafico corrispondente all'equazione



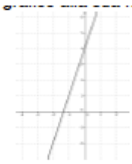
Scegli la risposta corretta

- ☐ **A** Grafico A)
- ☐ **B** Grafico B)
- ☐ **C** Grafico C)
- ☐ **D** Grafico D)

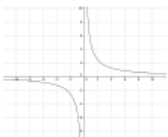
8.9 Compito in classe sui diversi tipi di proporzionalità

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	Indicatori	LIVELLO - Non raggiunto (0-60)	LIVELLO - Base (C) (61-70)	LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)	LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)
MA1.4: Tradurre brevi istruzioni in sequenze simboliche (anche con tabelle); risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici. **MA3.2:** Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici. **MA3.4:** Tradurre dal linguaggio algebrico e viceversa.	Risoluzione problemi di proporzionalità e dipendenza funzionale.	Non risolve i problemi.	Risolve solo i problemi che richiedono la proporzionalità diretta o la dipendenza lineare.	Risolve i problemi riguardanti gli altri tipi di proporzionalità e dipendenza lineare.	Riconosce le diverse dipendenze anche in problemi con contesti più complessi e di natura non algebrica.
MC2.6: Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.	Piano cartesiano	Non sa interpretare i grafici sul piano cartesiano e non sa costruirne uno da una lista di coordinate di punti.	Interpreta correttamente i grafici rappresentati sui piani cartesiani. Riporta correttamente una tabella sul piano cartesiano.	Oltre al livello base costruisce i grafici delle funzioni richieste.	Oltre al livello intermedio risolve problemi rappresentandoli graficamentete in modo totalmente corretto e appropriato.

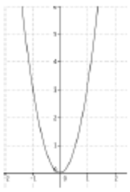
1) Associa ogni grafico alla sua funzione: (12 punti)



$y=\frac{5}{x}$

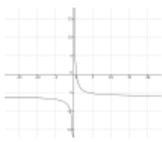


$y = 3x + 4$



$y = -3x$

$y=\frac{4}{x}-6$



$y = 3x^2$

2) Associa ogni funzione a ciò che rappresenta: (10 punti)

$$y=\frac{5}{x} \quad y=3x+4 \quad y=-3x \quad y=\frac{4}{x}-6 \quad y=3x^2$$

Proporzionalità diretta   Dipendenza fratta

Proporzionalità inversa   Dipendenza lineare   Proporzionalità quadratica

3) Disegna su tre piani cartesiani diversi le seguenti funzioni: (14 punti)

$$y=2x-3$$

$$y=x^2+1$$

$$y=\frac{8}{x}$$

4) Disegna sul piano cartesiano la sequenza di punti riportati in tabella: (12 punti)

x	15	18	7	10	22	12
y	25	20	35	40	15	15

5) Vengono pesati blocchetti di ferro di volume diverso e la tabella che segue mostra i valori del peso al variare del volume:

Volume (cm^3)	1	2	3	4	5	6
Peso (g)	7,8	15,6	23,4	31,2	39,0	46,8

Costruisci il grafico cartesiano relativo ai dati della tabella, riportando sull'asse orizzontale i valori del Volume V e sull'asse verticale quelli del Peso P. Che relazione sussiste fra P e V? (12 punti)

6) Immagina di voler costruire un rettangolo con area A = 24 cm^2. A tal scopo assegni valori arbitrari alla base b e determina i corrispondenti valori che deve assumere l'altezza h:

Base b (cm)	1	2	3	4	6	8	12	24
Altezza h (cm)	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..	…..

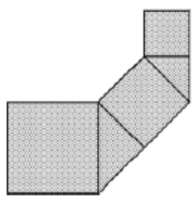
Che tipo di relazione lega la base b e l'altezza h? Costruisci il grafico cartesiano relativo ai dati della tabella riportando sull'asse orizzontale i valori della base b e sull'asse verticale quelli dell'altezza h. (15 punti)

7) (10 punti)

Domanda 12	M9005-00
L'area di un quadrato è proporzionale al quadrato del lato.	
Rispondi alle seguente richieste	
Punto	
1	Scrivi la relazione che lega l'area A e il lato L ___________
2	Come diventa l'area se il lato dimezza? ___________

8) (15 punti)

La seguente figura è formata da 3 quadrati e 2 triangoli rettangoli isosceli. Quanto vale la sua area se il lato del quadrato più grande misura 2 cm?



9 Funzioni lineari

In questo capitolo saranno sviluppati i seguenti elementi di competenza:

Competenza

M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica

Abilità

MA1.4: Tradurre brevi istruzioni in sequenze simboliche (anche con tabelle); risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici.

MA1.6: Risolvere equazioni di primo grado e verificare al correttezza dei procedimenti utilizzati.

MA1.7: Rappresentare graficamente equazioni di primo grado; comprendere il concetto di equazione e quello di funzione.

MA1.8: Risolvere sistemi di equazioni di primo grado seguendo istruzioni e verificare la correttezza dei risultati.

Conoscenze

MC1.4: Equazioni e disequazioni di primo grado.

MC1.5: Sistemi di equazioni e disequazioni di primo grado.

Competenza

M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni

Abilità

MA2.4: Applicare le principali formule relative alla retta e alle figure geometriche sul piano Cartesiano.

Conoscenze

MC2.6: Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.

MC2.7: Interpretazione geometrica di sistemi di equazioni.

Competenza

M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi

Abilità

MA3.2: Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici.

MA3.4: Tradurre dal linguaggio naturale ala linguaggio algebrico e viceversa.

Conoscenze

MC3.2: Principali rappresentazioni di un oggetto matematico.

MC3.3: Tecniche risolutive di un problema che utilizzano frazione, proporzioni, percentuali, formule geometriche, equazioni e disequazioni di 1° grado.

Competenza

M4: Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Abilità

MA4.5: Rappresentare sul piano cartesiano il grafico di una funzione.

Conoscenza

MC4.2: Il piano cartesiano e il concetto di funzione.

MC4.3: Funzioni di proporzionalità diretta, inversa e relativi grafici, funzione lineare.

9.1 Introduzione alle funzioni lineari

Problem Solving

1) Una segheria vende legno di Abete a 500 € al m^3. Se voglio acquistare 3,5 m^3 quanto dovrò pagare?

2) Sfortunatamente questa segheria si trova a Bormio e si fa pagare 70 € di trasporto, quanto sarà il conto totale?

3) Riassumendo la tariffa della segheria di Bormio, essa si fa pagare 70 € di trasporto più 500 € al m^3, è possibile rappresentare su un piano cartesiano la retta che rappresenta la tariffa della segheria? Che cosa possiamo considerare essere la variabile indipendente e cosa quella dipendente?

4) Una seconda segheria per lo stesso tipo di legno ha la seguente tariffa: 150 € per il trasporto e 485 € al m^3 per il legname. Determina a parità di legno comprato quando le due tariffe sono uguali.

5) Dopo quanti metri cubi di legno è più conveniente la seconda tariffa?

6) Per pubblicare un'inserzione di lavoro, posso scegliere tra due giornali con le seguenti tariffe:

- primo giornale: 10 € di fisso più 0,50 € a parola;
- secondo giornale: 1,20 € a parola.

Oltre quante parole è più conveniente la tariffa del primo giornale?

9.2 Funzioni lineari

In generale una funzione lineare in due incognite è rappresentata graficamente da una retta e quando è in forma esplicita (forma implicita: ax+by+c=0, di solito avremmo a che fare con la forma esplicita) si esprime nel seguente modo:

$$f(x)=ax+b$$

oppure

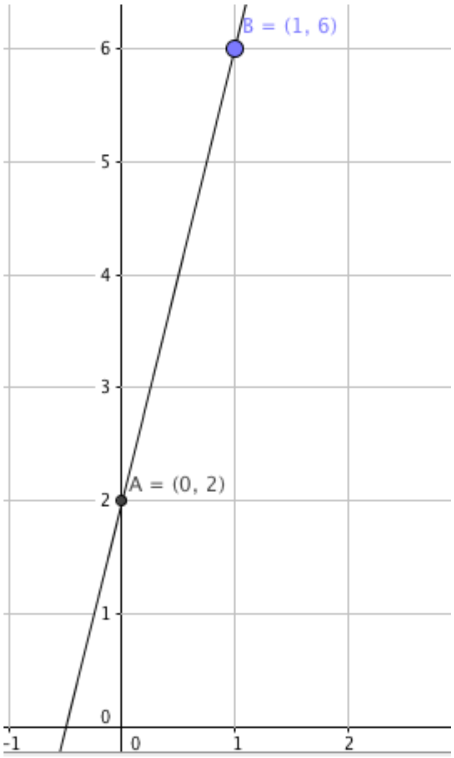
$$y=ax+b$$

dove il coefficiente *a* è chiamato coefficiente angolare ed è la pendenza della retta, più questo numero è grande, maggiore sarà la pendenza della retta.

Il coefficiente *b* ci dà l'informazione su dove la retta incontra l'asse delle y.

Facciamo un esempio, facendo il grafico della retta:

$$y=4x+2$$



Coefficiente b

Possiamo subito notare che questa retta incontra l'asse delle y nel punto di coordinate:

$$A(0;2)$$

cioè in generale nel punto di coordinate:

$$A(0;b)$$

Infatti in questo caso b è uguale propio a 2

Coefficiente a:

Per definire la pendenza di una retta non possiamo considerare un solo punto ma ne dobbiamo considerare due:

$$A(x_1;y_1)$$

$$B(x_2;y_2)$$

Dati due punti definiamo la pendenza come il rapporto tra la variazione lungo y e la variazione lungo y:

$$pendenza = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Applichiamo questa formula al caso della nostra retta, considerando i punti A(0; 2) e B(1; 6):

$$pendenza = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{1-0} = 4$$

Possiamo notare che il risultato trovato è proprio uguale al coefficiente *a* della nostra retta, questa conferma quanto avevamo detto prima, che il coefficiente *a* rappresenta la pendenza della nostra retta, quindi:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Determinare il coefficiente *a* e *b* dal grafico è uno dei metodi per determinare l'equazione della retta a partire dal grafico. Successivamente mostreremo un secondo metodo più generale.

9.3 Intersezione di una retta con gli assi cartesiani e grafico

Intersezione retta asse x:

Data una retta:

$$y=3x+2$$

per determinare la sua intersezione con l'asse delle x, bisogna risolvere l'equazione associata:

$$3x+2=0$$

Questo perché l'asse delle x ha equazione y=0, cioè tutti i punti che si trovano sull'asse delle x hanno ordinata uguale a 0. Quindi l'equazione considerata ci permette di individuare, tra i punti appartenenti alla retta, quello che ha ordinata uguale a zero:

$$3x=-2$$

$$x=-\frac{2}{3}$$

La nostra retta incontrerà l'asse x nel punto di coordinate:

$$\left(-\frac{2}{3};0\right)$$

Intersezione retta asse y:

Al contrario dell'asse x, l'asse y ha equazione x = 0, cioè tutti i punti appartenente all'asse y hanno ascissa uguale a zero. Quindi sostituendo all'interno dell'equazione della retta x = 0, troveremo quell'unico punto appartenente alla retta avente ascissa uguale a zero:

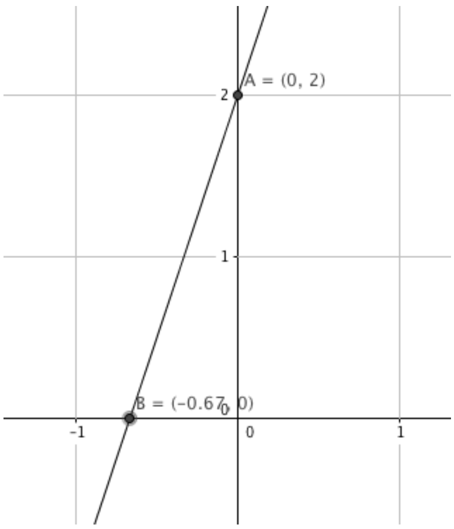
$$y=3\cdot 0+2=2$$

La nostra retta incontrerà l'asse delle y nel punto di coordinate:

$$(0;2)$$

Grafico di una retta:

Per le retta che incontrano sia l'asse x, sia l'asse y, le informazioni appena trovate sono sufficienti per disegnare il grafico della retta stessa, in quanto per due punti passa una e una sola retta:



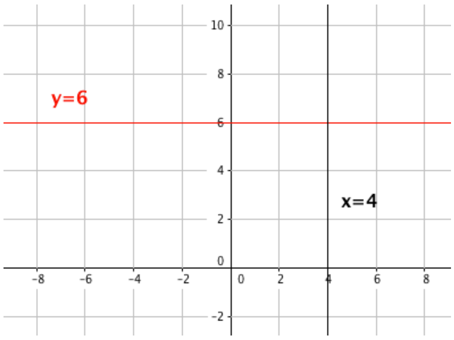
Casi Particolari:

Il ragionamento presentato per disegnare il grafico di una retta non è valido per le rette del tipo:

$$x=k$$

$$y=k$$

le prime sono rette parallele all'asse y e le seconde sono rette parallele all'asse x, come mostra l'esempio:



9.4 Esercizi intersezioni con gli assi e grafico

Disegna il grafico e determina le intersezioni con gli assi cartesiani delle seguenti rette:

1. $y = 4x + 2$
2. $y = 5x - 2$
3. $y = -3x + 4$
4. $y = -2x - 3$
5. $y = 8$
6. $x = -2$

9.5 Intersezione tra due rette e Sistemi Lineari

In molti problemi può capitare di dover determinare il punto di incontro tra due rette che all'interno del contesto di un problema possono rappresentare, per esempio, tariffe o funzioni di costo e ricavo. Quando ci troviamo in questa problematica per riuscire a risolverla dobbiamo utilizzare i sistemi lineari.

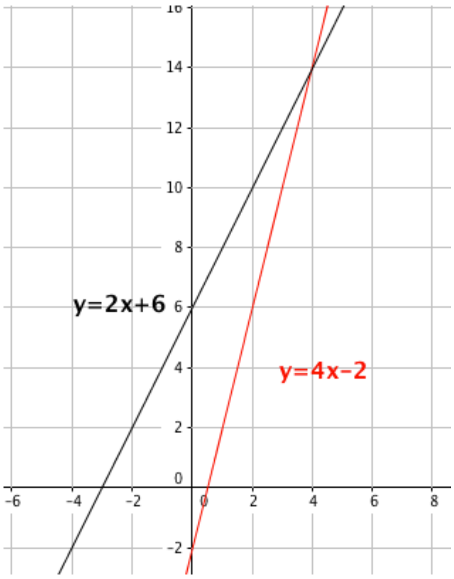
Facciamo un'esempio:

Vogliamo determinare il punto d'intersezione di queste due rette:

$$y=4x-2$$

$$y=2x+6$$

Disegnatore su uno stesso piano cartesiano:



Dal grafico vediamo che le due rette si incontrano in un punto, questo fatto è valido per tutte le coppie di rette a meno che esse non siano parallele o non siano coincidenti.

Per determinare le coordinate del loro punto d'incontro bisogna risolvere un sistema lineare:

$$\begin{cases} y=4x-2 \\ y=2x+6 \end{cases}$$

Quando entrambe le funzioni sono scritte in modo **esplicito,** cioè nella forma y = ..., il metodo che si usa per risolvere il sistema è il **metodo del confronto.**

Col sistema noi stiamo cercando il punto, quindi la coppia di coordinate (x;y), che appartenga ad entrambe le rette, quindi poniamo in uguaglianza i sue secondi membri:

$$4x-2=2x+6$$

Risolvendo questa equazione di primo grado, troveremo l'ascissa del punto d'intersezione delle due rette:

$$4x-2x=6+2$$

$$2x=8$$

$$\frac{\cancel{2}^1 x}{\cancel{2}^1}=\frac{\cancel{8}^4}{\cancel{2}^1}$$

$$x=4$$

Sostituendo il valore trovato per *x* alle due equazioni delle retta troveremo lo stesso valore di *y* a confermo che le due funzioni per x = 4 assumono lo stesso valore:

$$\begin{cases} y=4x-2 \\ y=2x+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=4\cdot 4-2 \\ y=2\cdot 4+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=16-2 \\ y=8+6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=14 \\ y=14 \end{cases}$$

Possiamo quindi dire che le due rette si incontrano nel punto di coordinate:

$$(4;14)$$

Metodo di sostituzione

Supponiamo di voler risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x+4y=1 \end{cases}$$

In questo caso le due funzioni **non** sono scritte in modo **esplicito**. Ho due possibili strade:

1. la prima è renderle esplicite e usare il metodo appena spiegato;
2. la seconda è ricavare da una delle due equazioni una delle due variabili e sostituirla nella seconda.

Scegliendo la seconda strategia si introduce il metodo di sostituzione. Studiando la struttura del nostro sistema possiamo notare che dalla prima equazione non presenta alcuna difficoltà ricavare la *y*:

$$\begin{cases} y=3-3x \\ 2x+4y=1 \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione di *y,* ricavate dalla prima equazione, nella seconda:

$$2x+4(3-3x)=1$$

In questo modo, ho trasformato la seconda equazione in una equazione di primo grado in un'incognita, risolvendola troveremo il valore di *x* cercato:

$$2x+12-12x=1$$

$$-10x=1-12$$

$$-10x=-11$$

$$\frac{-\cancel{10}^{1}x}{-\cancel{10}^{1}}=\frac{-11}{-10}$$

$$x=\frac{11}{10}$$

Trovato il valore di *x* lo sostituiamo all'interno dell'espressione che avevamo trovato per *y:*

$$y=3-3x=3-3\cdot\frac{11}{10}=$$

$$=3-\frac{33}{10}=\frac{30-33}{10}=-\frac{3}{10}$$

$$y=-\frac{3}{10}$$

Quindi la soluzione del nostro sistema è:

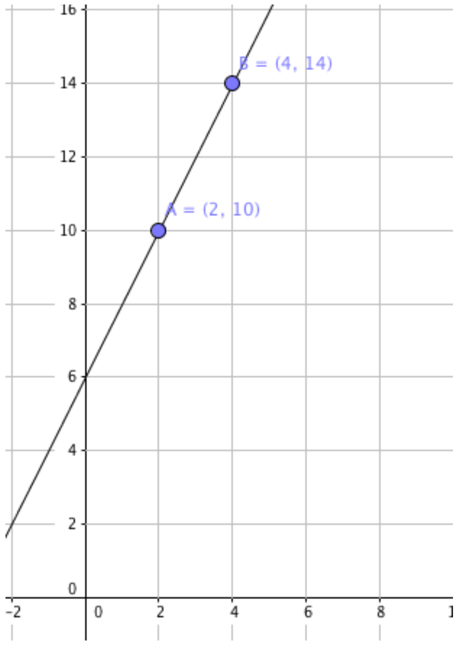
$$x=\frac{11}{10}$$

$$y=-\frac{3}{10}$$

9.6 Dal Grafico alla Retta

Abbiamo già presentato un metodo per determinare l'equazione di una retta dal suo grafico, ma il metodo che presenteremo adesso è più generale.

Partiamo dal grafico di una retta:



Di questa retta sappiamo soltanto che passa per i due punti:

$$A(2;10) \;\; e \;\; B(4;14)$$

Come sappiamo da due punti passa una e una sola retta, questo vuol dire che la conoscenza di questi due punti dev'essere sufficiente per determinare l'equazione corrispondente al grafico.

Le coordinate dei due punti dovranno soddisfare l'equazione della stessa retta, quindi per determinarla partiamo dall'equazione generica di una retta:

$$y = ax + b$$

Se sostituiamo all'interno di questa espressione prima le coordinate del punto A e poi del punto B, troviamo queste due equazioni in a e b:

$$A(2;10) \Rightarrow 10 = 2a + b$$

$$B(4;14) \Rightarrow 14 = 4a + b$$

Queste due equazioni insieme ci conducono a dover risolvere un sistema in a e b che ci permetterà di determinare i valori dei coefficienti della nostra retta:

$$\begin{cases} 10 = 2a + b \\ 14 = 4a + b \end{cases}$$

Ricaviamo dalla prima la b:

$$-b = 2a - 10$$

$$b = -2a + 10$$

Il nostro sistema è diventato:

$$\begin{cases} b = -2a + 10 \\ 14 = 4a + b \end{cases}$$

Sostituiamo l'espressione trovata per b nella seconda equazione:

$$14=4a+b$$
$$14=4a-2a+10$$

Risolvendo questa equazione in *a* troviamo il valore del primo coefficiente della retta:

$$14=2a+10$$
$$-2a=-14+10$$
$$-2a=-4$$
$$\frac{\cancel{-2}^{1}a}{\cancel{-2}^{1}}=\frac{\cancel{-4}^{2}}{\cancel{-2}^{1}}$$
$$a=2$$

Trovato il valore di *a* andiamo a sostituirlo all'interno dell'espressione per *b* ricavate dalla prima equazione:

$$b=-2a+10=-2\cdot2+10=-4+10$$
$$b=6$$

Quindi l'equazione della nostra retta è:

$$y=2x+6$$

Dove agli *a* e *b* iniziali abbiamo sostituito i valori trovati per i due coefficienti.

9.7 Esercitazioni sulla retta

Svolgi il *formative assessment* sulla retta: link

Correzione e ripasso: link

Dopo aver svolto il ripasso e fatto la correzione, compila questa seconda esercitazione sui temi trattati: link

9.8 Compito in classe sulla retta

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	Indicatori	LIVELLO - Non raggiunto (0-60)	LIVELLO - Base (C) (61-70)	LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)	LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)
MA1.7: Rappresentare graficamente equazioni di primo grado; comprendere il concetto di equazione e quello di funzione. MA1.8: Risolvere sistemi di equazioni di primo grado verificando la correttezza dei risultati. MC1.5: Sistemi di equazioni e disequazioni di primo grado.	Funzioni lineari	Non applica le proprietà in modo corretto. Non riconosce quando utilizzare i diversi strumenti matematici.	Utilizza sistemi lineari e equazioni in modo corretto e adeguato.		
MA2.4: Applicare le principali formule relative alla retta e alle figure geometriche del piano cartesiano. MC2.7: Interpretazione geometrica dei sistemi d equazioni.	Retta	Non utilizza le proprietà delle rette e non sa applicare le relative formule.	Determina le intersezioni della retta con gli assi coordinati e dimostra l'appartenenza di un punto alla retta o meno.	Oltre al livello base sa determinare la formula algebrica di una retta a partire dal suo grafico.	
MA3.2: Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici. MA3.4: Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa.	Costruzione modelli lineari	Non risolve né i problemi proposti né i quesiti.	Risolve solo i quesiti proposti.	Risolve i problemi in cui è richiesto di costruire e studiare solo un modello.	Oltre all'intermedio risolve anche problemi di scelta in cui bisogna ottimizzare un risultato.

1) Risolvi i seguenti sistemi lineari (10 punti per ogni sistema):

$$a)\begin{cases} y=3x+6 \\ y=2x+10 \end{cases}$$

$$b)\begin{cases} y=5x-3 \\ y=3x-7 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} y=-6x+8 \\ y=-3x-19 \end{cases}$$

2) Determina l'intersezione con l'asse x e l'asse y delle seguenti rette e disegna il relativo grafico (8 punti per ogni retta):

$$d)\ y=6x+10$$

$$e)\ y = -4x + 5$$

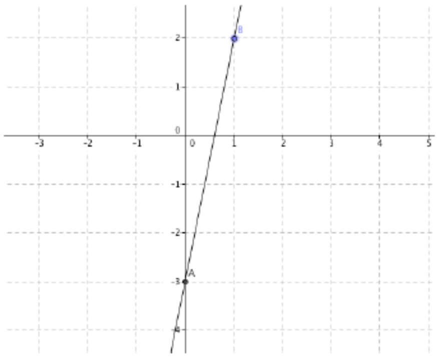
3) Determinare se i punti appartengono alla retta (6 punti per ogni retta):

$$f)\ y = 3x + 8 \quad A(-5;7)$$

$$g)\ y = -5x + 3 \quad A\left(-\frac{4}{5};7\right)$$

$$h)\ y = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{2} \quad A\left(\frac{21}{4};0\right)$$

4) Determinare l'equazione della retta rappresentata nel seguente grafico (11 punti):



5) Un fornitore di legname vende l'abete a 650 €/m^3 e per il trasporto si fa pagare 120 €. Scrivere la funzione che descrive la tariffa. Disegnare il grafico e determinare quanto costerà alla "Contrada degli Artigiani" comprare e farsi consegnare 10 m^3 di abete. (9 punti)

6) Un'azienda che vende sottopiatti di legno ha la sua funzione guadagno descritta dalla seguente retta: y = 20x - 180 e una produzione massima di 150 sottopiatti. Quanti sono i sottopiatti che devono essere venduti per non essere in perdita? Calcola il massimo guadagno. (8 punti)

7) Due compagnie telefoniche hanno le seguenti tariffe:

1. 1 € di scatto alla risposta e 0,5 € al minuto;
2. 1,5 € di scatto alla risposta e 0,4 € al minuto.

Quanti minuti devo parlare perché le due tariffe siano equivalenti? (7 punti)

9.9 Esercizi e Problemi Disequazioni di Primo Grado

Esercizi:

1) $5x + 3 > 2x - 3$

2) $6x - 4 < 2x + 8$

3) $10x + 4(3 - x) > 8x + 5$

Problemi

1) La pasticceria della bottega del gusto necessita di ricavare più di 200 € dalla vendita delle torte. Se ogni torta è venduta a 10 €, quante torte dovrebbero essere vendute per raggiungere l'obiettivo?

2) Un lavoratore guadagna 75 € al giorno e 15 € all'ora, per guadagnare almeno 700 € a settimana (5 giorni lavorativi), quante ore dovrà lavorare?

3) Hai ricevuto un buono da 25 € per acquisti su iTunes, se ogni canzone costa 0,75 €, quante canzoni al massimo potrai comprare?

4) Un taxi ha la seguente tariffa: 1,5 € alla partenza e 0,6 € al chilometro. Se Lisa ha 10 €, quanti chilometri può percorrere al massimo?

5) Un camion autoarticolato si ferma ad una stazione del controllo del peso, prima di passare un ponte. Il peso limite è 30 tonnellate. La testa del camion pesa 10 tonnellate e il retro 8 tonnellate quando è vuoto. In tonnellate, quanto carico può essere portato dal camion per permettergli di passare il ponte?

6) Rebecca ha trovato tre paia di scarpe che le piacciono, costano: 150 €, 159 € e 179 €. Lei ha già 31 € e ha un lavoro dove guadagna 8,50 € l'ora. Quante ore dovrà lavorare per permettersi ciascuna di queste scarpe?

7) Due aziende che affittano camion hanno le seguenti tariffe:

1. 50 € al giorno e 3,50 € al chilometro;
2. 80 € al giorno e 2 € al chilometro.

Dopo quanti chilometri è più conveniente la seconda tariffa?

8) Per noleggiare un'auto due società S1 e S2 applicano le seguenti tariffe: S1 chiede una spesa fissa di 12 euro più 20 euro per ogni giorno di noleggio; S2 chiede 20 euro più 18 euro per ogni giorno di noleggio. Per quanti giorni bisogna noleggiare la macchina perché sia più conveniente S2?

9) Due segherie di Bormio hanno le seguenti tariffe per la vendita dell'abete:

- 140 € di trasporto più 500 € al metro cubo;
- 60 € di trasporto più 520 € al metro cubo.

Quando è più conveniente la seconda tariffa?

10) Due segherie di Bormio hanno le seguenti tariffe per la vendita dell'abete:

- 300 € di trasporto compresi due metri cubi più 400 € per i metri cubi successivi.
- 400 € di trasporto compresi tre metri cubi più 500 € per i metri cubi successivi.

Quando è più conveniente la prima tariffa?

10 Funzioni quadratiche

In questo capitolo saranno sviluppati i seguenti elementi di competenza:

Competenza

M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica

Abilità

MA1.4: Tradurre brevi istruzioni in sequenze simboliche (anche con tabelle); risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici.

Competenza

M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni

Conoscenze

MC2.6: Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.

MC2.7: Interpretazione geometrica di sistemi di equazioni.

Competenza

M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi

Abilità

MA3.2: Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici.

MA3.4: Tradurre dal linguaggio naturale ala linguaggio algebrico e viceversa.

Conoscenze

MC3.2: Principali rappresentazioni di un oggetto matematico.

Competenza

M4: Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Abilità

MA4.5: Rappresentare sul piano cartesiano il grafico di una funzione.

Conoscenza

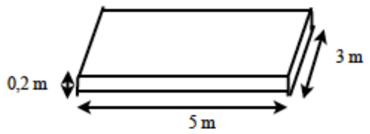
MC4.2: Il piano cartesiano e il concetto di funzione.

MC4.3: Funzioni di proporzionalità diretta, inversa e relativi grafici, funzione lineare.

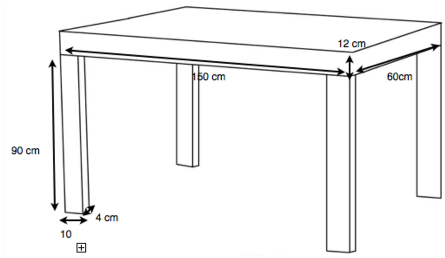
10.1 Introduzione alle funzioni quadratiche

Problem Solving - Introduzione Equazioni di Secondo Grado Pure

1) Un'azienda di falegnameria ha la necessità di impiallacciare un pannello con le seguenti dimensioni: 3 m, 5 m e 0,2 m. Qual è la superficie del foglio che bisognerà utilizzare per impiallacciare il pannello?



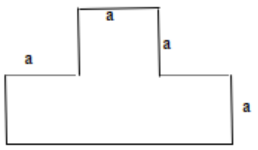
2) Lo stesso lavoro la falegnameria deve farlo per un tavolo il cui progetto è riportato in figura. Bisogna di nuovo determinare la superficie del foglio che si deve utilizzare per impiallacciare il pannello.



3) Calcolare l'area di un quadrato sapendo che il suo lato misura *a*.

4) Calcolare l'area del rettangolo sapendo che la base e l'altezza misurano rispettivamente *l* e *m*.

5) Calcola l'area e il perimetro di questa figura:



6) Se l'area totale dell'esercizio precedente è 64 metri quadrati quanto dovrà valere *a*?

10.2 Introduzione equazioni spurie

Equazioni riconducibili ad equazioni di primo grado

In matematica, per risolvere un'equazione si intende la ricerca dei numeri che sostituiti all'incognita soddisfino l'uguaglianza.

Nei casi che seguono questo implica trovare i valori che rendono nulli i prodotti o il primo membro dell'uguaglianza.

Suggerimento: ripassa la legge di annullamento del prodotto.

$$x-9=0$$

$$5x+10=0$$

$$(x-9)(x+10)=0$$

$$(2x+8)(5x-4)=0$$

$$x^2-9=0$$

$$3x^2-75=0$$

$$x(5x-8)=0$$

$$x^2-8x=0$$

$$2x^2+15=0$$

10.3 Equazioni di Secondo Grado

Le equazioni di secondo grado sono tutte le equazioni in cui l'incognita compare con grado massimo uguale a 2.

Di equazioni di secondo grado ne esistono di 3 tipi:

Equazione di secondo grado pura: $3x^2 - 27 = 0$

Equazione di secondo grado spuria: $5x^2 - 4x = 0$

Equazione di secondo grado completa: $2x^2 - 5x - 3 = 0$

I tre tipi di equazioni di secondo grado hanno tre modi di essere risolte diversi.

10.4 Equazione di Secondo Grado Pura

Risolviamo l'equazione di secondo grado pura:

$$3x^2 - 27 = 0$$

1) I primi passaggi sono uguali al quelli della risoluzione di un'equazione di primo grado, cioè bisogna trasportare i numeri senza x^2 dall'altra parte dell'uguale, cambiandogli il segno, dopo bisogna dividere per il numero che moltiplica la x^2:

$$3x^2 = 27$$

$$\frac{\cancel{3}^1 x^2}{\cancel{3}^1} = \frac{\cancel{27}^9}{\cancel{3}^1}$$

$$x^2 = 9$$

SE IL NUMERO DOPO L'UGUALE È MAGGIORE DI ZERO ALLORA L'EQUAZIONE AMMETTE DUE SOLUZIONI OPPOSTE. SE È NEGATIVO L'EQUAZIONE È IMPOSSIBILE, CIOÈ NON AMMETTE NESSUNA SOLUZIONE.

2) Nel caso in cui il numero fosse maggiore di zero, allora per trovare le soluzioni dell'equazione devo eseguire la radice quadrata:

$$x = \pm\sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = +3$$

10.5 Equazione di Secondo Grado Spuria

Risolviamo un'equazione di secondo grado spuria:

$$5x^2 - 4x = 0$$

1) Nelle equazioni di secondo grado spurie il primo passaggio è quello di mettere in evidenza la x, visto che compare in entrambi i termini:

$$x(5x - 4) = 0$$

2) Adesso, applicando la legge di annullamento del prodotto, dividiamo l'equazione in due parti la x e (5x - 4), ponendo entrami i fattori uguali a zero, troviamo le due soluzioni:

$$x = 0$$
$$5x - 4 = 0$$

3) La prima soluzione è banale, il secondo fattore è diventato un'equazione di primo grado:

$$5x = 4$$
$$\frac{\cancel{5}^1 x}{\cancel{5}^1} = \frac{4}{5}$$
$$x_1 = \frac{4}{5}$$
$$x_2 = 0$$

NOTIAMO CHE NELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO SPURIE UNA DELLE DUE SOLUZIONI È SEMPRE ZERO.

INOLTRE, NELLE EQUAZIONI DI SECONDO GRADO SPURIE CI SONO SEMPRE DUE SOLUZIONI!!!

10.6 Equazione di Secondo Grado Completa

Risolviamo una equazione di secondo grado completa:

$$2x^2-5x-3=0$$

Per risolvere l'equazione di secondo grado completa ci sono 3 passaggi:

1) Confrontare l'equazione da risolvere con l'equazione di secondo grado completa generica:

$$ax^2+bx+c=0$$

In modo tale da identificare a, b e c a chi corrispondono nel nostro caso particolare:

$$a=2$$
$$b=-5$$
$$c=-3$$

3) Il secondo passaggio consiste nel calcolare il discriminante:

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)=$$
$$=25-8\cdot(-3)=25+24=49$$
$$\Delta=49$$

ESSENDO IL DISCRIMINANTE MAGGIORE DI ZERO POSSO CONTINUARE CON LA FORMULA RISOLUTIVA.

NEL CASO IN CUI IL DISCRIMINANTE FOSSE NEGATIVO L'EQUAZIONE SAREBBE IMPOSSIBILE, QUINDI SENZA SOLUZIONI.

NEL CASO IN CUI IL DISCRIMINATE FOSSE UGUALE A ZERO, CI SAREBBE UNA SOLA SOLUZIONE:

$$x=-\frac{b}{2a}$$

NEL NOSTRO CASO IL DISCRIMINANTE È POSITIVO, QUINDI POSSIAMO CONTINUARE CON LA FORMULA RISOLUTIVA:

3) la formula risolutiva, quando il discriminante è maggiore di zero, è:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sostituendo i numeri del nostro esempio, troviamo le due soluzioni:

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{49}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 7}{4}$$

Essendoci un $\pm$ la formula risolutiva si divide in due, questo ci farà trovare le due soluzioni:

$$x_1=\frac{5-7}{4}=-\frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{4}^{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$x_2=\frac{5+7}{4}=\frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{4}^{1}}=3$$

Quindi le due soluzioni sono:

$$x_1=-\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 3$$

10.7 Specchietto Riassuntivo

Equazione di secondo grado completa

$$ax^2+bx+c=0$$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$se\ \ \Delta>0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$se\ \ \Delta=0 \Rightarrow x=-\frac{b}{2a}$$

$$se\ \ \Delta<0 \Rightarrow Nessuna\ \ Soluzione$$

Equazione di secondo grado pura (b=0)

$$ax^2+c=0$$

$$se\ \ -\frac{c}{a}>0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$se\ \ -\frac{c}{a}<0 \Rightarrow Nessuna\ \ Soluzione$$

Equazione di secondo grado spuria (c=0)

$$ax^2+bx=0$$

$$x(ax+b)=0$$

$$x_1=0$$

$$x_2=-\frac{b}{a}$$

10.8 Esercitazione Equazioni di secondo grado

1) $2x^2-3x=0 \quad \left[0,\frac{3}{2}\right]$

2) $3x^2-x=0 \quad \left[0,\frac{1}{3}\right]$

3) $2x^2+\frac{8}{3}x=0 \quad \left[0,-\frac{4}{3}\right]$

4) $2x^2-8=0 \quad [\pm 2]$

5) $x^2+9=0 \quad [Impossibile]$

6) $12x^2-\frac{1}{2}=0 \quad \left[\pm\sqrt{\frac{1}{24}}\right]$

7) $\frac{2x+1}{3}-\frac{4x-1}{2}=\frac{2x(x-2)}{4}-\frac{x}{3} \quad \left[\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right]$

8) $x^2-5x+6=0 \quad [2,3]$

9) $x^2+8x+18=0 \quad [Impossibile]$

10) $9x^2-6x+1=0 \quad \left[\frac{1}{3}\right]$

11) $3x^2-x-2=0 \quad \left[-\frac{2}{3},1\right]$

12) $6x^2+x-1=0 \quad \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$

13) $x(x-2)=15 \quad [5,-3]$

14) $\frac{x-1}{2}+\frac{x^2+1}{3}=1-\frac{1}{3} \quad \left[1,-\frac{5}{2}\right]$

10.9 Test sulle Equazioni

Esercizi sulle equazioni di secondo grado a questo link.

10.10 Il Poster

Durante un viaggio a Parigi hai scattato una bella fotografia che vuoi trasformare in un poster gigante da appendere nella tua camera. Decidi che il taglio migliore della foro è dato da un rettangolo un po' schiacciato, con un lato z di lunghezza tripla rispetto all'altro lato x. Il tuo intento è quello di ingrandire la fotografia e corredarla di un vetro e di una cornice. Per valutare la spesa ti rechi dal fotografo, dal vetraio e dal falegname. Nella tabella sono riportati, per ciascun prodotto, i costi forniti dai vari artigiani, comprendenti una quota fissa a cui va sommata una quota che varia con le dimensioni dell'opera realizzata.

Prodotto	Quota Fissa (€)	Quota Variabile
Ingrandimento fotografico	9	0,02 €/cm²
Vetro	7	0,01 €/cm²
Cornice	5	0,02 €/cm

1) Considerando il lato x del poster come variabile indipendente, quale delle seguenti funzioni di x sono lineari e quali quadratiche? (Una funzione è quadratica quando è esprimibile mediante un polinomio di secondo grado nella variabile indipendente.) Completa la tabella ponendo una crocetta in ogni riga:

Prodotto	Funzione Lineare	Funzione Quadratica
Ingrandimento fotografico		
Vetro		
Cornice		

2) Scrivi in funzione del lato x del poster le espressioni in euro del costo y_i dell'ingrandimento, del costo y_v del vetro, del costo y_c per la cornice. Infine, considerando tutte le spese, scrivi la formula più sintetica che esprima il costo totale y di realizzazione del tuo poster.

3) Rappresenta, mediante un grafico nel piano cartesiano la funzione del costo totale per valori di x compresi fra 0 e 50 centimetri, corredando gli assi delle tacche, del nome delle variabili e delle loro unità di misura.

4) Se disponi di € 70, qual è all'incirca il valore della dimensione x del poster, con vetro e cornice, che puoi realizzare con questa cifra?

5) Desiderando un poster più grande, decidi di ingrandire solo la fotografia e di rinunciare a vetro e cornice. Qual è approssimativamente il valore di x che puoi ottenere spendendo lo stesso importo di € 70?

10.11 La Parabola

In generale una parabola è una funzione matematica che si esprime con

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

oppure

$$y=ax^2+bx+c$$

Tutti i punti della parabola hanno sempre il loro simmetrico tranne uno, chiamiamo questo punto vertice.

Il vertice si indica con $V=(x_v; y_v)$, dove:

$$x_v=-\frac{b}{2a} \text{ e } y_v=a(x_v)^2+bx_v+c$$

y_v posso calcolarla anche in questo modo:

$$y_v=-\frac{\Delta}{4a}$$

Se **a>0** il vertice è il **minimo della parabola** (cioè il punto più basso), in questo punto la parabola passa dall'essere **decrescente** ad essere **crescente.**

Se **a<0** il vertice è il **massimo della parabola** (cioè il punto più alto), in questo punto la parabola passa dall'essere **crescente** ad essere **decrescente.**

Per poter disegnare una parabola, devo scegliere almeno cinque punti, una scelta possibile è determinare come primo punto il vertice e poi scegliere due coppie di punti simmetrici ad esso, per esempio:

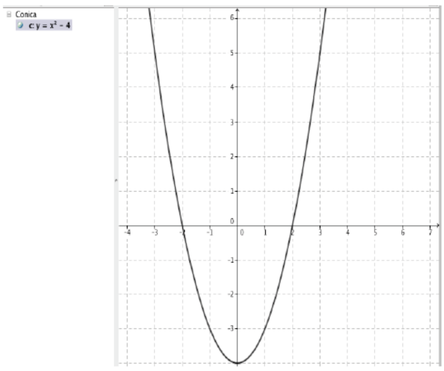
X	Y
x_v	y_v
x_v+1	$y_{v+1}=a(x_{v+1})^2+bx_{v+1}+c$
x_v+2	$y_{v+2}=a(x_{v+2})^2+bx_{v+2}+c$
x_v-1	$y_{v-1}=y_{v+1}$
x_v-2	$y_{v-2}=y_{v+2}$

In questo modo non sarà necessario svolgere calcoli per gli ultimi punti, in quanto sono simmetrici rispetto al vertice e quindi con la y uguali rispettivamente a quelle del secondo e del terzo punto.

Come per le equazioni di secondo grado, possiamo individuare tre tipi di parabole che ci condurranno alle tre equazioni già viste.

Parabola Tipo I

Esempio 1



Intersezione asse delle x

Questo tipo di parabola, se volessimo determinare l'intersezione con l'asse x, ci condurrebbe alla seguente equazione pura:

$$x^2 - 4 = 0$$

Che ammette 2 soluzioni come due sono le intersezioni con l'asse delle x.

Calcolo del vertice

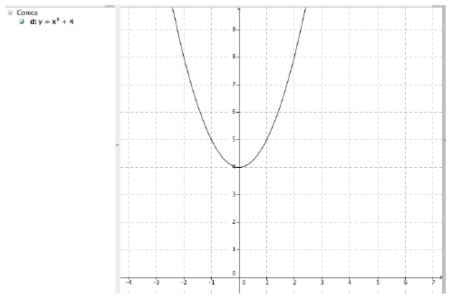
La caratteristica di questo tipo di parabole, che hanno la b = 0, è che il vertice sarà sempre sull'asse delle y, avendo ascissa uguale a zero:

$$b = 0 \Rightarrow x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2a} = 0$$

In questo caso i punti più adatti da scegliere, per poter disegnare la parabola, saranno:

X	Y
0	4
1	-3
2	0
-1	-3
-2	0

Esempio 2



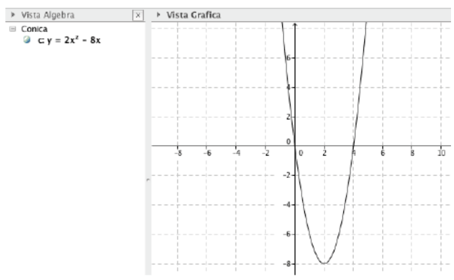
Intersezione asse delle x

Questo tipo di parabola, se volessimo determinare l'intersezione con l'asse x, ci condurrebbe alla seguente equazione pura:

$$x^2 + 4 = 0$$

che è impossibile, cioè non ammette soluzioni, questo lo possiamo notare anche graficamente, infatti non ci sono intersezione tra l'asse x e la parabola.

Parabola Tipo II



Intersezione asse delle x

Questo tipo di parabola, se volessimo determinare l'intersezione con l'asse x, ci condurrebbe alla seguente equazione spuria:

$$2x^2 - 8x = 0$$

Ricordiamo che un'equazione spuria ammette sempre due soluzioni, quindi questo tipo di parabola avrà sempre due intersezioni con l'asse delle x. Una delle due intersezioni sarà sempre (0; 0), cioè questa parabola passerà sempre dall'origine degli assi cartesiani.

Calcolo del vertice

Il vertice, differentemente dal caso precedente, non ha particolari proprietà, in questo caso ha le seguenti coordinate:

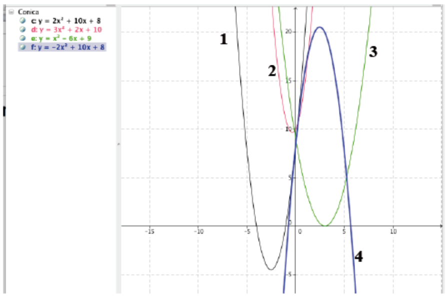
$$x_v = -\frac{-8}{2 \cdot 2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$y_v = 2(2)^2 - 8 \cdot 2 = 8 - 16 = -8$$

$$V = (2; -8)$$

Per il ragionamento fatto precedentemente per disegnare la parabola, converrà scegliere i punti x = 3, x = 4, x = 1, x = 0, dove x = 3 e x = 1, assumeranno lo stesso valore in y e analogamente anche i punti x = 4 e x = 0, saranno uguali tra di loro.

Parabola Tipo III



Intersezione asse x

Come era intuibile, il terzo caso sono le parabole che ci conducono ad equazioni complete, quando vogliamo determinare l'intersezione con l'asse delle x, abbiamo fatto tre esempi:

$$1)\ y = 2x^2 + 10x + 4$$

$$2)\ y = 3x^2 + 2x + 10$$

$$3)\ y = x^2 - 6x + 9$$

$$4)\ y = -2x^2 + 10x + 8$$

1) La prima è una parabola che interseca due volte l'asse delle x, quindi la corrispondente equazione di secondo grado completa avrà il $\Delta > 0$.

2) La seconda è una parabola che non interseca l'asse delle x, quindi la corrispondente equazione di secondo grado completa avrà il $\Delta < 0$.

3) La seconda è una parabola che tocca solo una volta l'asse delle x, quindi la corrispondente equazione di secondo grado completa avrà il $\Delta = 0$.

Calcola il vertice

Calcoliamo il vertice per le quattro parabole:

$$1)\ x_v = -\frac{10}{2 \cdot 2} = -\frac{5}{2}$$

$$y_v = 2\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 10 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) + 4 = 4$$

$$V = \left(-\frac{5}{2}; 4\right)$$

$$2)\ x_v = -\frac{2}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{3}$$

$y_v = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 10 = \frac{29}{3}$

$V = \left(-\frac{1}{3}; \frac{29}{3}\right)$

3) $x_v = -\frac{-6}{2\cdot 1} = 3$

$y_v = 3^2 - 6\cdot 3 + 9 = 0$

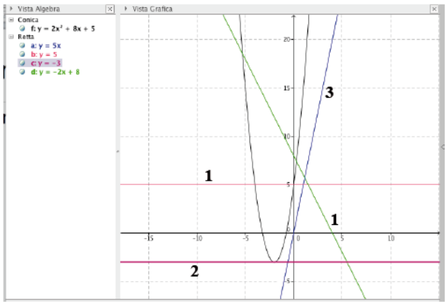
$V = (3;0)$

4) $x_v = -\frac{10}{2\cdot(-2)} = \frac{5}{2}$

$y_v = -2\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 10\cdot\frac{5}{2} + 8 = \frac{41}{2}$

$V = \left(\frac{5}{2}; \frac{41}{2}\right)$

10.12 Intersezioni Rette-Parabole



Una retta rispetto ad una parabola può essere:

1) Secante cioè retta e parabola hanno due punti d'intersezione.

1') Secante ma con solo un punto d'intersezione, questo accade quando la retta è parallela all'asse di simmetria della parabola.

2) Tangente cioè retta e parabola hanno un punto in cui si toccano (in modo più tecnico si dice che retta e parabola si toccano in due punti coincidenti).

3) Esterna cioè la retta è esterna alla parabola, quindi non ci sono punti in comune.

Per determinare i punti d'intersezione dovremmo risolvere un sistema tra la parabola e la retta:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = dx + e \end{cases}$$

Le due funzioni sono già scritte in modo da poter passare direttamente alla risoluzione del sistema:

$$ax^2 + bx + c = dx + e$$

Risolta l'equazione, troverò:

1) due soluzioni nel caso in cui la retta sia secante alla parabola (tranne nel caso 1');

2) una soluzione nel caso in cui la retta sia tangente alla parabola;

3) nessuna soluzione nel caso in cui la retta sia esterna alla parabola.

Determinate le x, il valore trovato dovrà essere sostituito dentro l'espressione della retta, in modo da trovare anche l'ordinata del punto.

10.13 Esercitazione Equazioni e Parabole

1) Risolvi le seguenti equazioni:

$$5x^2 - 100 = 0$$

$$10x^2 + 20 = 0$$

$$-6x^2 + 8 = 0$$

$$5x^2 = 3x^2 + 15$$

$$3x^2 + 10x = 0$$

$$2(x^2 - 5x) + x(10x + 4) = 3x$$

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$-2x^2 + 3x - 5 = 0$$

2) Determina il vertice e disegna la seguente parabola:

$$y = 2x^2 - 8$$

- Determina le intersezioni della parabola con l'asse delle x.
- Determina le intersezioni con le seguenti retta $y = 4$, $y = -12$ e $y = 3x + 5$.

3) Determina il vertice e disegna la seguente parabola:

$$y = -x^2 + 4x + 5$$

- Determina le intersezioni della parabola con l'asse delle x.
- Determina le intersezioni con le seguenti rette $y = 10$, $y = -1$, $y = 2x - 3$.

Esercizi estratti dai quesiti d'esame:

Domanda 12		**M010642**
Il vertice della parabola $y = 3x^2 + 6x - 1$ è nel punto di coordinate		
Scegli la risposta corretta		
☐	**A**	(1, 8)
☐	**B**	(-1, -4)
☐	**C**	(-3, 8)
☐	**D**	(3, 44)

Domanda 13		**M010628**
Data la parabola $y = 2x^2 - 6x$		
Quale delle seguenti affermazioni è falsa?		
☐	**A**	La parabola è rivolta verso l'alto
☐	**B**	La parabola ha il vertice sull'asse y
☐	**C**	La parabola passa per O
☐	**D**	La parabola interseca l'asse x in due punti

Domanda 15		M010631
Quale fra le seguenti equazioni di secondo grado è impossibile nell'insieme dei numeri reali?		
Scegli la risposta corretta		
☐	**A**	$x^2 - 5x + 6 = 0$
☐	**B**	$x^2 - 5x = 0$
☐	**C**	$5 + x^2 = 0$
☐	**D**	$5 - x^2 = 0$

10.14 Disequazioni di secondo grado

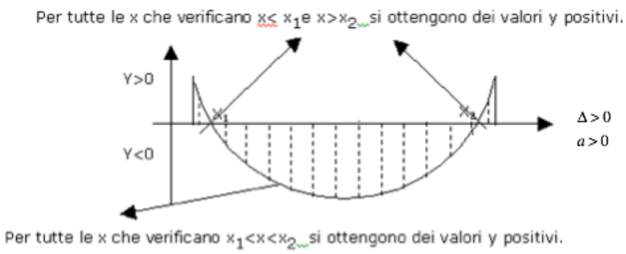
Risolvere una disequazione di secondo grado vuol dire determinare il segno del trinomio di secondo grado:

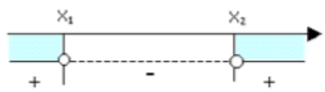
$$ax^2+bc+c$$

il segno di questa espressione dipende dalla positività o meno del coefficiente della x^2 (a) e se l'equazione associata ammette o meno soluzione, graficamente questo vuol dire che la funzione abbia o non abbia intersezione con l'asse delle x.

Primo caso:

$$a>0$$
$$\Delta>0$$

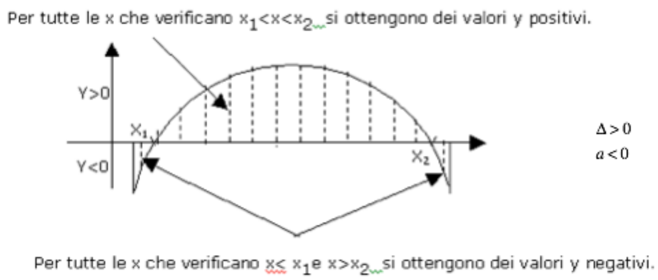




In questo caso vediamo come la parabola risulti positiva per valori esteri e negativa per valori interni alle soluzioni della corrispondente equazione associata.

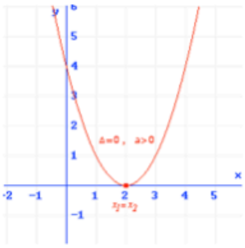
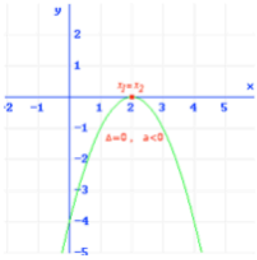
Secondo caso:

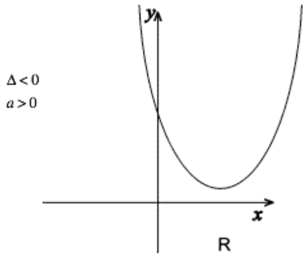
$$a<0$$
$$\Delta>0$$

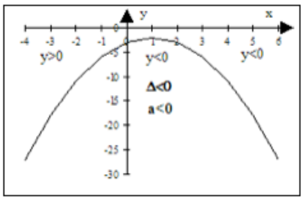


Notiamo come a causa del fatto che il coefficiente della x^2 sia negativo, la situazione si sia ribaltata: adesso la funzione è positiva per valori interni alle due soluzioni dell'equazione associata e negativa per valori esterni.

Questi sono i due casi principali, lascio allo studente l'analisi dei casi particolari:





Esempio svolto

$$2x^2+3x-2>0$$

Equazione associata:

$$2x^2+3x-2=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=$$

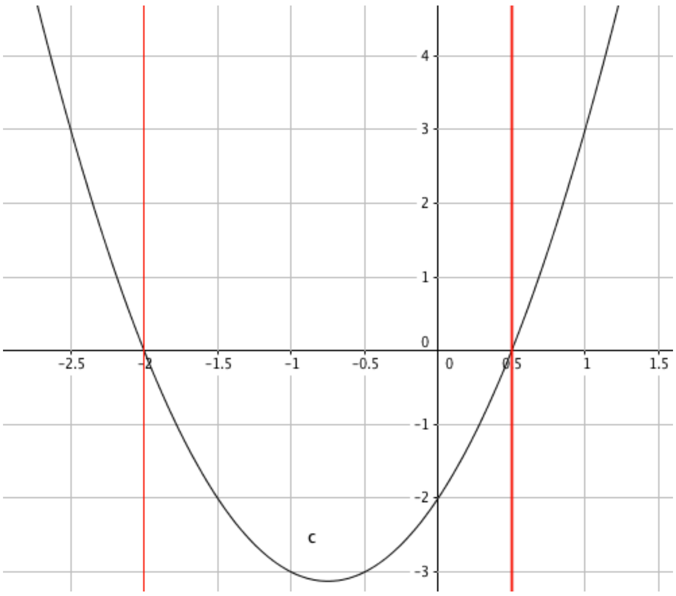
$$=3^2-4\cdot 2\cdot(-2)=9+16=25$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=$$

$$=\frac{-3\pm 5}{4}$$

$$x_1=\frac{-3-5}{4}=-2$$

$$x_2=\frac{-3+5}{4}=\frac{1}{2}$$



Notiamo che per valori della x a sinistra di - 2 e a destra di 1/2 la parabola si trova al di sopra dell'asse delle x e quindi è positiva, mentre per valori compresi la funzione si trova al di sotto dell'asse delle x e quindi è negativa.

Poiché volevamo risolvere la seguente disequazione:

$$2x^2+3x-2>0$$

La **soluzione** sarà:

$$x<-2;x>\frac{1}{2}$$

10.15 Esercizi Disequazioni di secondo grado

Risolvi le seguenti disequazioni:

1) $4x^2-100>0$

2) $3x^2+12x<0$

3) $-6x^2+5x-1\geq 0$

4) $-3x^2+7x-2\leq 0$

5) $3x^2+10x>0$

6) $5x^2+10x>3x^2-20$

7) $-2(x^2+4x)-30>5x$

8) $\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{2}x\leq\frac{3}{4}$

9) $6x^2+x+2<0$

10) $2x^2+4x+2\leq 0$

10.16 Quesiti d'Esame su funzioni di 2° grado

Svolgi il test a questo link

10.17 Compito in classe su parabole, disequazioni e modelli algebrici

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica.	Risoluzione di equazioni e disequazioni, e utilizzo dei sistemi per la risoluzione di problemi geometrici.	Non risolve gli esercizi	Risolve correttamente le disequazioni.	Risolve correttamente le disequazioni, riconosce l'errore in un'equazione svolta e usa correttamente i sistemi per determinare le intersezioni. Calcoli corretti.	
M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.	Piano cartesiano. Parabole. Rappresentazione grafica di un problema.	Non disegna la parabola correttamente.	Determina correttamente tutte le informazioni richieste per costruire il grafico di una parabola e ne determina l'intersezione con altre curve.	Oltre al livello base, utilizza la rappresentazione grafica per risolvere problemi.	
M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.	Problemi. Modelli algebrici.	Non risolve i problemi.	Risolve quasi correttamente i problemi in cui il modello matematico è già esplicitato.	Risolve correttamente i problemi in cui il modello matematico è già esplicitato e costruisce correttamente i modelli matematici negli altri problemi. Non interpreta correttamente le soluzioni.	Oltre al livello intermedio, interpreta correttamente le soluzioni. Risolve problemi che non sono stati esplicitamente trattati in aula.
M0T0: Padroneggiare concetti matematici e scientifici fondamentali, semplici procedure di calcolo e di analisi per descrivere e interpretare sistemi, processi, fenomeni e per risolvere situazioni problematiche di vario tipo legate al proprio contesto di vita quotidiano e professionale.	Utilizzo delle strategie risolutive	Non risolve gli esercizi e i problemi.	Risolve solo i quesiti più semplici, non scegliendo la procedura più adatta.	Risolve i quesiti più semplici, individuando la strategia risolutiva ottimale.	Risolve tutti i quesiti in modo corretto e scegliendo per ogni situazione la strategia risolutiva più adeguata.

Risolvi le seguenti disequazioni (10 punti a esercizio):

1) $2x^2+80>0$

2) $3x^2-507\langle 0$

3) $-6x^2+384\geq 0$

4) $-x^2+10x\leq 0$

5) $4x^2-12x+9>0$

6) $x^2+8x+7\langle 0$

7) Disegna la seguente parabola (10 punti):

$$y=-x^2+10x-9$$

- Determina il vertice
- Determina le intersezioni con l'asse x
- Determina le intersezioni con l'asse y
- Determina le intersezioni con la retta y = 2x +3 (disegna la retta sullo stesso piano cartesiano)

8) Nel risolvere l'equazione è stato come un errore:

1. -10x - 2 + 4x - 4 = 0
2. -10x + 4x = 2 + 4
3. 6x = 6
4. x = 1

In quale passaggio è stato commesso l'errore? (5 punti)

9) Quanti sono i punti di intersezione dei grafici delle funzioni: (5 punti)

$$y=-\frac{1}{2}x^2 \ e \ y=-2x^2$$

10) Per produrre una certa qualità di birra si possono utilizzare tre diversi impianti, i cui costi variano secondo la quantità di litri prodotta:

A) C(x) = 0,9x + 300;

B) C(x) = 0,75x + 600;

C) C(x) = 0,6x + 1200

Determina la scelta che permette la minor spesa in funzione dei litri di birra prodotti. (3 punti)

11) Il costo totale e il ricavo di un prodotto sono espressi rispettivamente dalle seguenti funzioni:

$$C(x)=40.000+150x \quad R(x)=600x-0{,}03x^2$$

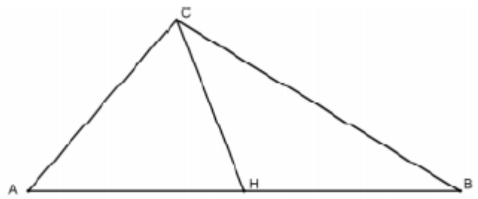
Determina la funzione guadagno, la quantità da produrre e vendere per realizzare il massimo guadagno e il relativo valore. (3 punti)

12) Un'azienda, per produrre un certo bene, sostiene un costo fisso settimanale di € 1.200 più un costo pari a € 0,4 per ogni unità prodotta; inoltre, per pubblicizzare il bene, sono previste spese pari allo 0,01% del quadrato delle unità prodotte. Il bene è rivenduto al prezzo unitario di € 1,7. Determina:

- le funzioni costo totale e ricavo rappresentale sul medesimo piano cartesiano;
- i limiti di produzione entro i quali l'azienda non è in perdita;
- la funzione utile e rappresentala graficamente;
- il livello di produzione per il quale l'azienda realizza il massimo utile e il relativo importo. (4 punti)

13) La stampante laser L in un minuto stampa il triplo delle pagine della stampante deskjet D. Quando L e D lavorano contemporaneamente stampano in tutto 24 pagine al minuto. Se D viene sostituita con una stampante laser identica a L, quante pagine potranno essere stampate complessivamente in un minuto? (2 punti)

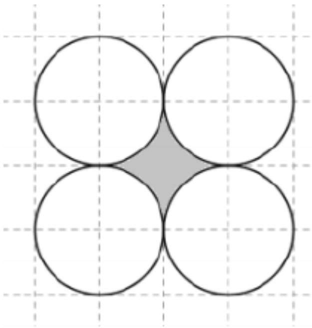
14) H è il punto medio del lato AB del triangolo ABC.



I triangoli AHC e HBC hanno la stessa area? Perché? (2 punti)

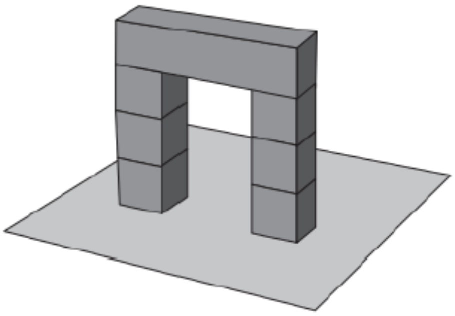
15) Ricorda che la lunghezza di una circonferenza si calcola moltiplicando il suo diametro per pi greco e che l'area di un cerchio si ottiene moltiplicando il quadrato del suo raggio per pi greco.

Quattro circonferenze, ciascuna con diametro di 10 cm, sono tangenti a due a due come mostrato nella seguente figura:



- Quanto misura il perimetro della regione evidenziata in grigio in centimetri? (2 punti)
- Quanto misura la superficie della regione evidenziata in grigio in centimetri quadri? (2 punti)

16) L'arco mostrato in figura è formato da sei cubi di lato L e da un parallelepipedo di dimensioni L, L, 4L:



Si vuole dipingere l'arco; quanto misura la superficie da colorare? (2 punti)

11 Probabilità e statistica

In questo capitolo saranno sviluppati i seguenti elementi di competenza:

Competenza

M4: Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.

Abilità

MA4.1: Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati.

MA4.2: Rappresentare classi di dati mediate istogrammi e diagrammi a torta.

MA4.3: Leggere e interpretare tabelle e grafici in termini di corrispondenze fra elementi di due insiemi.

Conoscenze

MC4.1: Significato di analisi e organizzazione di dati numerici.

11.1 UBD 5: Probabilità e statistica per la comprensione del mondo

Titolo: Probabilità e statistica per la comprensione del mondo.	
Step 1: Risultati desiderati	
Comprensione di lunga durata (Enduring understanding)	
Gli studenti comprenderanno come leggere diversi tipi di diagrammi e valutare la convenienza di una scelta o di un'altra.	
Domande essenziali	**Competenze, abilità e conoscenze**
• Come la probabilità e la statistica ci aiutano a comprendere meglio il mondo attorno a noi?	**M4:** Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico. **MA4.1:** Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati. **MA4.2:** Rappresentare classi di dati mediante istogrammi e diagrammi a torta. **MC4.1:** Significato di analisi e organizzazione di dati numerici.
Step 2: Prove di valutazione	
Gli studenti devono mostrare di saper leggere diversi diagrammi, ricavando da essi le informazioni richieste per la soluzione di un problema.	
Sommario delle prove per competenze	**Griglia di valutazione**
• Analisi del contesto • Interpretazione di diagrammi	• Costruzione diagrammi • Tabelle • Diagrammi • Interpretazione problemi
Auto-valutazioni	**Altre prove**
Formative assessment	Nessuna altra prova
Step 3: Attività di apprendimento	
Totale ore: 10	
Obiettivo	**Attività**
1-2) Introduzione alla probabilità	Lezione dialogata sul concetto di probabilità
3) Esercitazione	Risoluzione in coppia di problemi
4) Introduzione alla statistica	Presentazione delle principali grandezze statistiche.
5) *Formative assessment*	Esercitazione
6) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati del *formative assessment*)	
7-8) Preparazione al compito	Risoluzione in coppia di esercizi e problemi
9) Valutazione	Compito di fine UBD di analisi e risoluzione di diversi tipi di problemi.
10) Consegna verifiche e conclusione	Correzione e conclusioni.

11.2 La Probabilità

Probabilità classica

La probabilità di un evento è il quoziente fra il numero dei risultati favoreggi e il numero dei risultati possibili:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

- *m è il numero dei risultati favorevoli;*
- *n è il numero dei risultati possibili.*

p = 0 evento impossibile;

0 < p < 1 evento aleatorio;

p = 1 evento certo.

1) Considera i seguenti eventi:

- da una mazzo di 40 carte estraggo un dodici di fiori;
- da un mazzo di 40 carte estraggo una carta rossa o nera;
- da una mazzo di 40 carte estraggo un fante di cuori.

Ora completa:

L'evento aleatorio è l'evento.........

l'evento certo è l'evento........

l'evento impossibile è l'evento........

2) Considera il lancio di un dado ed elenca i casi possibili.

ora calcola la probabilità che:

- esca il numero 6;
- esca un numero pari;
- esca un numero dispari;
- esca un numero minore di 5.

Probabilità che si verifichi ***l'evento A o l'evento B****:*

- *p(AUB)=p(A)+p(B) se gli eventi A e B sono incompatibili.*
- *p(AUB)=p(A)+p(B)-p(A∩B) se gli eventi A e B sono incompatibili.*

Gli esempi che vedremo saranno di eventi incompatibili.

3) Vengono lanciati contemporaneamente, una moneta e un dado. Determina per mezzo di un diagramma la probabilità che escano, contemporaneamente, croce e il numero 3.

Segui la traccia.

Completa.

Quanti sono i casi possibili?

Qual è la probabilità che si verifichi l'evento indicato?

4) Se un ragazzo ha nel portamonete 2 monete da 1 euro, 4 monete da 2 euro, 8 monete da 0,50 euro e 2 monete da 0,20 euro, quale probabilità ha di estrarre:

- **una moneta da € 2?**
- **una moneta da € 0,20?**
- **o una moneta da € 1 o una da 0,50 €?**

11.3 Probabilità nelle prove d'esame

Un'urna contiene 40 palline, di cui 8 rosse, 12 gialle, 4 verdi e 16 blu.

Quale delle seguenti affermazioni è FALSA?		
☐	**A**	La probabilità di estrarre un pallina rossa o gialla è 0,5
☐	**B**	La probabilità di estrarre un pallina verde è 0,1
☐	**C**	La probabilità di estrarre un pallina blu o gialla è 0,7
☐	**D**	La probabilità di estrarre un pallina rossa o blu è 0,4

In una scatola ci sono 210 vecchie monete, lire italiane, franchi francesi, fiorini olandesi.
La probabilità che si prenda a caso una moneta italiana è 2/7. Le monete francesi sono 50.

Qual è la probabilità che si prenda a caso una moneta olandese?		
☐	**A**	$\frac{5}{21}$
☐	**B**	$\frac{5}{7}$
☐	**C**	$\frac{10}{21}$
☐	**D**	$\frac{60}{210}$

Francesca ha un sacchetto di caramelle: ci sono 4 caramelle al limone, 5 all'arancia, 8 alla fragola e 3 alla menta.

Quale delle seguenti affermazioni è falsa?		
☐	**A**	La probabilità di scegliere una caramella al limone è il 20%
☐	**B**	La probabilità di scegliere una caramella all'arancia è 0,4
☐	**C**	La probabilità di scegliere una caramella né alla fragola né al limone è del 40%
☐	**D**	La probabilità di scegliere una caramella al limone o alla fragola è 0,6

In un cappello ci sono 12 palline numerate dal numero 43 al numero 54; qual è la probabilità che Francesca estragga una pallina che contenga almeno un 3 o un 4?

Scegli la risposta corretta		
☐	**A**	1/12
☐	**B**	1/6
☐	**C**	3/4
☐	**D**	2/3

Un'urna contiene 30 palline: 6 blu, 9 gialle e 15 rosse.
Quanto vale il rapporto fra la probabilità di estrarre una pallina blu o gialla e la probabilità di estrarre una pallina gialla o rossa?

Scegli la risposta corretta		
☐	**A**	$\frac{1}{2}$
☐	**B**	$\frac{5}{8}$
☐	**C**	1
☐	**D**	2

Simone vuole stimare il numero di cervi in una foresta. Prende 60 cervi e mette un segno giallo su ognuno di essi. Poi li rilascia nel bosco. Una settimana dopo prende 30 cervi e trova che 9 di loro hanno il marchio giallo.

Quale è il numero possibile di cervi nella foresta?		
☐	**A**	90
☐	**B**	900
☐	**C**	200
☐	**D**	2000

Un astuccio contiene 4 penne rosse e 6 penne blu; Franco prende dall'astuccio a caso due penne, una di seguito all'altra, senza guardare.

La probabilità che entrambe le penne siano dello stesso colore è:		
☐	**A**	2/15
☐	**B**	1/3
☐	**C**	7/15
☐	**D**	18/10

Ci sono due parti in un esame di guida: la prima parte è un test di teoria, la seconda è una prova pratica di guida.
Per fare la prova pratica bisogna superare il test di teoria.
Francesca vuole fare l'esame di guida; la probabilità che passi la prova di teoria è 0,8; la probabilità che passi la prova pratica è 0,6.

Calcola la probabilità che Francesca superi l'esame di guida.

11.4 Esercizi probabilità

1) È più probabile pescare una figura da un mazzo di 40 carte oppure una carta di fiori?

2) Lanciando in aria 3 monete contemporaneamente, qual è la probabilità di ottenere 2 Testa e 1 Croce?

3) Calcola la probabilità che lanciando il dado una sola volta esca 3 o un numero pari.

4) Lanciando due dadi contemporaneamente qual è la probabilità che la somma dei valori ottenuti sia 6?

5) Estraendo un numero della tombola calcola la probabilità che contenga la cifra 7 o 5.

6) In un sacchetto ci sono 5 palline nere, 9 bianche e 6 rosse.

1. Qual è la probabilità di estrarre tre palline nere di seguito, immaginando di rimettere la pallina nel sacchetto dopo ogni estrazione?
2. Qual è invece la probabilità di pescare tre palline nere di fila nel caso in cui le palline estratte non vengano più rimesse nel sacchetto?

11.5 L'Indagine statistica

*Le **fasi** di una **indagine statistica** sono:*

- *scelta del **fenomeno**;*
- *individuazione della **popolazione**;*
- ***raccolta** dei dati;*
- ***classificazione** e **tabulazione** dei dati.*

*Si dice **frequenza assoluta** il numero che indica quante volte una **modalità** del carattere si presenta.*

Considera, con attenzione, la seguente indagine a cui si farà riferimento nel corso della esercitazione:

In una scuola è stata svolta un'indagine fra i 120 alunni delle terze classi per individuare le preferenze dei ragazzi nei confronti delle attività di laboratorio proposte dalla scuola.

Le risposte sono state le seguenti:

Laboratorio fotografico	Laboratorio scientifico	Laboratorio teatrale	Laboratorio di pittura	Laboratorio di informatica
XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX	XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX X	XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXX	XXXXXXXXXX XXXXX	XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX XXXXXXXXXX

1) Fai riferimento all'indagine e rispondi.

- Quale "fenomeno" è stato preso in considerazione?
- A quale "popolazione" è stata rivolta l'indagine?
- Cosa indicano le crocette (X) segnate nella tabella?

2) Sistema nella tabella i dati raccolti nell'indagine.

Completa.

I colonna	II colonna
Attività di laboratorio	n. alunni di ogni laboratorio
Laboratorio	......
....	......
....	......
....	......
....	......

- Il totale degli alunni che frequentano i laboratori è:
- La frequenza assoluta della modalità "laboratorio di informatica" è rappresentata da:
- Quale altra modalità corrisponde allo stesso valore?
- 21 è la frequenza assoluta della modalità.........
- Quindi la frequenza assoluta di ogni modalità è il numero dei partecipanti oppure l'attività proposta di ogni laboratorio?

*Per completare l'analisi dei dati raccolti, oltre alla **frequenza assoluta** è opportuno stabilire:*

- *la **frequenza relativa;***
- *la **frequenza percentuale.***

I dati statistici possono essere rappresentati graficamente per mezzo di:

a) ideogramma; b) cartogramma; c) ortografia; d) istogramma; e) areogramma; f) diagramma cartesiano,

3) Considera, di nuovo l'indagine iniziale e la tabella che hai completato nel precedente esercizio. Leggi con attenzione le seguenti definizioni e completa la seguente tabella (nella seconda colonna scrivi i valori che hai trovato nell'esercizio 3).

- **Frequenza relativa:** è il quoziente tra la frequenza assoluta e il numero totale degli alunni di terza;
- **frequenza percentuale:** è il prodotto della frequenza relativa per 100.

I colonna	II colonna	III colonna	IV colonna
Attività di laboratorio (modalità del carattere)	n. alunni di ogni laboratorio (frequenza assoluta)	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
Laboratorio fotografico	30	$\frac{30}{120}$ = 30 : 120 = 0,25	(0,25 × 100) 25%
Laboratorio scientifico	21	$\frac{21}{120}$ = 21 : 120 = 0,175	(0,175 × 100) 17,5%
Laboratorio teatrale	....	$\frac{\ldots}{120}$ = ... : ... = ...	(... × 100) ....
Laboratorio di pittura	....	$\frac{\ldots}{120}$ = ... : ... = ...	(... × 100) ....
Laboratorio di informatica	....	$\frac{30}{120}$ = ... : ... = ...	(... × 100) ....

4) Osserva i grafici della figura e scrivi il nome sotto ciascuno di essi:

*I dati di un'indagine statistica possono essere espressi da **indicatori** dette **medie statistiche.** In particolare:*

- *la **media aritmetica,** il quoziente fra la somma di tutti i valori e il numero totale dei valori stessi;*
- *la **moda,** il valore di frequenza massimo;*
- *la **mediana,** il valore centrale o la media dei due valori centrali (considerando i valori disposti in ordine crescente).*

5) Sono dati i seguenti valori:

9, 14, 16, 20, 10, 16, 11, 16

Scrivili in ordine crescente:

Ora collega ciascuno dei seguenti termini al valore corretto:

media aritmetica moda mediana

16, 15, 14

11.6 Esercitazione Probabilità e Statistica

1) Svolgi il seguente *formative assessment:* link

2) I 25 alunni di una classe hanno ottenuto i voti riportati nella tabella seguente in una certa prova scritta:

7	8	5	7	4	6	5	7	8	7	6	5	4	5	6	7	7	8	6	6	4	6	7	7	6

Il voto, espresso con valori che vanno da 1 a 10 secondo le normative scolastiche, rappresenta il carattere mentre la modalità del carattere è il valore, per cui 6 è una modalità del carattere, 8 è un'altra modalità e cosi via.

2a) Completa la seguente tabella:

Modalità (voto)	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

2b) Individua la media dei voti della classe per la verifica in oggetto, la mediana e la moda dei voti.

2c) Nell'ipotesi in cui i ragazzi fossero stati 24 con i voti riportati di seguito come varierebbero i valori della media, moda e mediana?

7	8	5	7	4	6	5	7	8	7	6	5	4	5	6	7	7	8	6	6	4	6	7	7

3) Si abbia la tabella che segue in cui sono riportate le altezze in metri di 18 ragazzi di una classe del primo anno di scuola superiore.

Ragazzi	Altezze
A	1,74
B	1,68
C	1,68
D	1,69
E	1,71
F	1,63
G	1,68
H	1,71
I	1,65
L	1,74
M	1,78
N	1,72
O	1,71
P	1,71
Q	1,65
R	1,61
S	1,71
T	1,72

3a) Completa la seguente tabella

altezze	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
1,61			
1,63			
1,65			
1,68			
1,69			
1,71			
1,72			
1,74			
1,78			

3b) Individua la media delle altezze dei ragazzi della classe, la mediana e la moda.

3c) Rappresenta i dati raccolti all'interno di un istogramma.

4) I generi cinematografici preferiti da un gruppo di persone intervistate sono: comico, fantascienza, avventura, comico, thriller, fantascienza, comico, romantico, avventura, avventura, comico, avventura, romantico, thriller, comico, avventura, avventura, thriller.

4a) Completa la seguente tabella

Generi cinematografici	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale

4b) Rappresenta i dati raccolti all'interno di un istogramma, ortogramma, aerogramma, ideogramma e diagramma cartesiano.

5) Un negozio di calzature ha rilevato le seguenti misure di paia di scarpe da uomo vendute in una settimana: 43, 42, 43, 40, 39, 42, 45, 44, 42, 45, 40, 42, 42, 46, 44, 42.

5a) Completa la seguente tabella

Misure scarpe	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale

5b) Individua la media delle misure di scarpe da uomo, la mediana e la moda.

5c) Rappresenta i dati raccolti all'interno di un istogramma.

11.7 Compito in classe su statistica e probabilità

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA 4.1: Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati. **MC 4.1:** Significato di analisi e organizzazione di dati numerici.	Tabelle Diagrammi Interpretazione e problemi	Interpretazione e dati e tabelle errata.	Riesce a dedurre informazioni solo se i dati sono già organizzati in tabelle.	Lettura tabelle e diagrammi corretta e adeguata giustificazione delle risposte date.	Risolve problemi e determina informazioni statistiche anche nei casi in cui i dati non sono organizzati in tabelle o grafici.
MA 4.2: Rappresentare classi di dati mediante istogrammi e diagrammi a torta.	Costruzione diagrammi	Non costruisce i diagrammi richiesti	Costruisce i diagrammi richiesti in modo adeguato.		

1) Nella tabella che vedi sono riportati i dati relativi alla distribuzione di alunni e insegnanti nella scuola secondaria di primo grado in Italia.

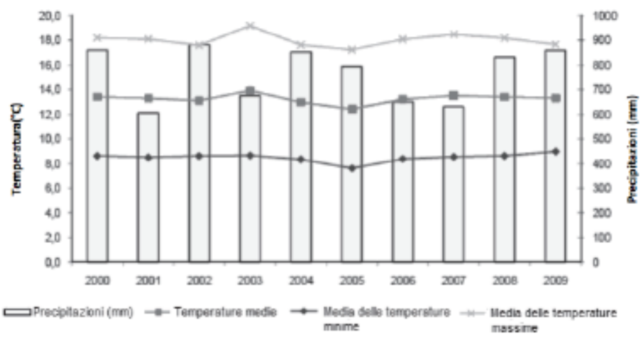
Aree geografiche	Scuole	Classi	Alunni (compresi i ripetenti)		Ripetenti		Insegnanti
			Maschi e femmine	Femmine	Maschi e femmine	Femmine	
ITALIA	7 939	82 446	1 727 339	826 869	51 407	16 199	212 041
Nord	3 381	33 131	711 292	339 508	19 615	5 679	86 312
Centro	1 358	14 656	312 700	150 098	8 066	2 508	36 570
Sud	3 200	34 659	703 347	337 263	23 726	8 012	89 159

Sulla base dei dati in tabella, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

		Vero	Falso
a.	Nel Nord gli alunni maschi sono meno delle femmine	☐	☐
b.	In Italia il rapporto insegnanti/classi è inferiore a 3	☐	☐
c.	Nel Sud ci sono mediamente più di 10 classi per scuola	☐	☐

2) Osserva il seguente grafico che rappresenta l'andamento delle temperature (scala a sinistra) e delle precipitazioni piovose (scala a destra) in Italia negli ultimi anni.

Figura 1. Media annua della temperatura media, massima e minima giornaliera e precipitazioni totali annue in Italia. Anni 2000-2009 (*temperatura in gradi Celsius e precipitazioni in millimetri*)



Indica per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa o se non si può ricavare dal grafico (metti una crocetta per ciascuna riga).

		Vero	Falso	Non si può ricavare
a.	Nel decennio 2000-2009 la temperatura media annua è risultata più alta di 0,8 gradi rispetto al periodo 1971-2000	☐	☐	☐
b.	L'anno 2003 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature massime	☐	☐	☐
c.	L'anno 2005 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature minime	☐	☐	☐
d.	L'anno in cui la media delle temperature massime è stata più alta è anche quello in cui le precipitazioni sono state minori	☐	☐	☐
e.	L'anno 2005 è quello in cui c'è stato il giorno più freddo	☐	☐	☐
f.	Il 2004 è stato l'anno più piovoso	☐	☐	☐

3) L'insegnante di inglese dà ai suoi studenti un test formato da 25 domande e spiega che il punteggio totale *p* è calcolato assegnando 4 punti per ogni risposta esatta e togliendo 2 punti per ogni risposta sbagliata o mancante.

- Il punteggio massimo possibile è...........
- Scrivi la formula che fornisce il punteggio *p* complessivo, indicando con *n* il numero di risposte esatte.

p =.....................................

- Se la sufficienza si ottiene con più di 60 punti, qual è il numero minimo di domande al quale occorre rispondere correttamente per avere la sufficienza?

Risposta:........

4) La seguente tabella riporta il peso alla nascita, suddiviso in 4 classi, di 30 neonati:

Classi di peso (in kg)	Numero neonati
Da 1 kg e fino a 2 kg	7
Più di 2 kg e fino a 3 kg	8
Più di 3 kg e fino a 4 kg	12
Più di 4 kg e fino a 5 kg	3

Quale delle seguenti espressioni devi usare per trovare il peso medio dei 30 neonati?

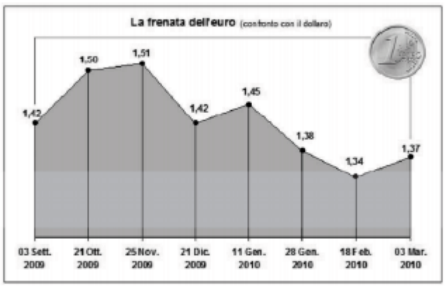
$A.\ \frac{1{,}5+2{,}5+3{,}5+4{,}5}{30}$

$B.\ \frac{7+8+12+3}{4}$

$C.\ \frac{1{,}5\cdot 7+2{,}5\cdot 8+3{,}5\cdot 12+4{,}5\cdot 3}{30}$

$D.\ \frac{1{,}5\cdot 7+2{,}5\cdot 8+3{,}5\cdot 12+4{,}5\cdot 3}{4}$

5) Il grafico rappresenta l'andamento del cambio euro-dollaro nel periodo 3 settembre 2009 - 3 marzo 2010.



5a) In base al grafico in quale periodo mi sarebbe convenuto cambiare i miei euro in dollari per andare negli Stati Uniti? Perché

5c) Se Maria il 18 febbraio 2010 cambia 1000 euro in dollari, quanti dollari riceve in cambio?

5d) Sempre lo stesso giorno (18 febbraio), quanti euro deve cambiare Maria per avere 1000 dollari?

6) Per l'acquisto di un computer sono stati spesi 300 euro. Il prezzo è composto dal costo base più l'IVA, pari al 20% del costo base. Quanto è stato pagato di IVA?

7) Nelle prime due colonne di un foglio elettronico sono state calcolate alcune coppie di valori (x, y) di una funzione.

	A x	B y	C
1	1	0	
2	2	1	
3	5	2	
4	10	3	
5	17	4	
6	26	5	
7	37	6	
8			
9			
10			
11			

Quale fra le seguenti è la funzione di cui sono stati calcolati i valori (x, y)?

$A)\quad y=\sqrt{x}-1$

$B)\quad y=\sqrt{x+1}$

$C)\quad y=\sqrt{x-1}$

$D)\quad y=1+\sqrt{x}$

8) Si abbia la tabella che segue in cui sono riportate le altezze in metri di 18 ragazzi di una classe del primo anno di scuola superiore.

Ragazzi	Altezze
A	1,74
B	1,68
C	1,68
D	1,69
E	1,71
F	1,63
G	1,68
H	1,71
I	1,65
L	1,74
M	1,78
N	1,72
O	1,71
P	1,71
Q	1,65
R	1,61
S	1,71
T	1,72

8a) Completa la seguente tabella

altezze	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
1,61			
1,63			
1,65			
1,68			
1,69			
1,71			
1,72			
1,74			
1,78			

8b) Individua la media delle altezze dei ragazzi della classe, la mediana e la moda.

8c) Rappresenta i dati raccolti all'interno di un istogramma.

12 Preparazione esami

In questa pagina potete trovare i test d'esame di matematica degli anni precedenti dell'esame di qualifica:

Esame 2008-2009

Esame 2009-2010

Esame 2010-2011

Esame 2011-2012

Esame 2012-2013

Esame 2013-2014

Esame 2014-2015