Scuola Internazionale di Dottorato

Formazione della persona e mercato del lavoro

\- Ciclo XXVIII -

DAL FARE AL SAPERE:
IL PONTE DELLA MATEMATICA

Tutor scientifico:

Chiar.mo Prof. Giuseppe Bertagna

Dottorando

Giuseppe SINATRA

Matricola n. 1027226

Ai miei nonni,

in particolare a mio nonno "Pippo",

ai miei genitori e alle mie sorelle

che mi hanno sempre sostenuto e

incoraggiato.

Indice

Introduzione

Il lavoro di ricerca presentato in questa tesi nasce all'interno del dottorato internazionale di "Formazione della persona e mercato del lavoro" presso l'Università di Bergamo e in collaborazione con centro di formazione professionale Oliver Twist - Cometa Formazione scs.

In Cometa insegno da cinque anni matematica negli indirizzi di "operatore del legno - manutenzione di immobili" e "tecnico del legno", è presso questa scuola, nel terzo anno di dottorato, che è stata svolta la sperimentazione frutto delle ricerche e delle riflessioni fatte nei due anni precedenti. La domanda a cui ho provato a rispondere è se sia possibile creare un *curriculum* di matematica che possa permettere a studenti con difficoltà di acquisire gli strumenti matematici necessari per la loro professionalità e per lo sviluppo di capacità di pensiero e di analisi critica di un contesto o di una situazione problematica. Gli studenti che arrivano presso il centro dopo le scuole medie solitamente credono che non potranno mai avere successo nelle competenze matematiche. Spesso questo è legato al fatto che essi non ne riconoscono il senso e, di conseguenza, hanno difficoltà ad aderire ad una proposta didattica.

Il primo problema con cui mi sono imbattuto è come poter recuperare questo senso per studenti che non avrebbero continuato la loro formazione con studi universitari ma che sarebbero andati a lavorare. Per trovare una soluzione efficace mi sono servito del metodo dell'alternanza formativa, come presentato nel primo capitolo, che teorizza e formalizza una metodologia in cui ci sia continuamente un rapporto di "dialogo" tra le materie professionalizzanti e le discipline più teoriche. In questo paradigma, le materie che sostengono lo sviluppo professionale degli studenti e le materie di base servono per scoprire le implicazioni culturali del lavoro e per risolvere in modo ottimale e più efficiente problematiche lavorative. Questo continuo scambio aiuta gli studenti a recuperare il significato di ciò che stanno facendo nel loro percorso di formazione.

Una volta recuperato il motivo per cui è necessario affrontare la fatica delle materie più teoriche, il secondo problema è quale didattica della matematica sia più congeniale per sviluppare le competenze richieste dal mondo del lavoro e dagli *standard* formativi. Analizzando diversi autori che hanno affrontato questo tema, il metodo scelto è un approccio per problemi piuttosto che da una spiegazione teorica rimandando solo alla fine del modulo formativo l'applicazione delle regole studiate. Questo metodo parte da una domanda, dal desiderio di risolvere un problema e la conoscenza, la regola matematica, sono ricercate per poter rispondere ad una difficoltà. In questo modo gli studenti possono scoprire, fin dall'inizio, che "potenza" risolutiva in più ci darà quel particolare strumento che è quanto sviluppato nel secondo capitolo.

Il rapporto tra i due capitoli è essenziale perché l'uno risulterebbe tronco senza l'altro, in quanto in una progettazione didattica interdisciplinare che mette in relazione l'ambito professionale e quello delle materie di base, non è possibile per gli studenti sviluppare la capacità di trovare le connessioni tra i diversi ambiti e di usare quanto studiato come strumento personale di indagine e di ricerca, se le discipline mantengono una metodologia sostanzialmente frontale, dove tutta la parte teorica viene presentata prima delle applicazioni o della sua possibilità di risolvere problemi.

Al contrario, una didattica della matematica per problemi all'interno di una scuola con un'impostazione sostanzialmente tradizionale dove i diversi ambiti disciplinari di base e professionali sono ben distinti, renderebbe vano il tentativo di educare gli studenti a porsi in modo critico davanti ad una situazione problematica cercandone simmetrie, relazioni e possibili soluzioni, cioè in modo attivo anziché passivo, in quanto limitato solo al monte ore della materia in oggetto.

Quando presenti, i due aspetti si fortificano a vicenda educando lo studente ad essere un moderno "investigatore" che si pone davanti alla realtà in modo positivo, usando tutte le sue competenze o mettendo in moto strategie di ricerca al fine di accrescere le proprie competenze.

Nell'ultimo capitolo è riportata la sperimentazione svolta nell'anno scolastico 2014/2015 nella prima, seconda e terza del settore "operatore del legno - manutenzione di immobili", in cui è stata utilizzata la metodologia sintetizzabile dai primi due capitoli con il contributo fondamentale dell'utilizzo delle nuove tecnologie che mi hanno permesso di monitorare, quasi quotidianamente, il percorso fatto dagli studenti, apportando adeguati correttivi per fare una proposta adeguata ai diversi metodi di apprendimento di ciascuno di loro.

In aggiunta a questo lavoro, il percorso di dottorato e la sperimentazione svolta hanno portato alla redazione di un *ebook* in cui sono raccolti i materiali didattici usati, strutturati nella presentazione di un percorso di matematica triennale finalizzato al raggiungimento della qualifica professionale, che, come suggerito da quanto scritto, parta dalla realtà professionale degli studenti per scoprire i vari temi matematici.

Capitolo 1: Il metodo dell'alternanza formativa
Riflessioni teoriche, principi pedagogici e strategie metodologico-didattiche

In Italia la visione più diffusa, almeno nella prassi del lavoro quotidiano in classe, su che cosa sia lo "studente" è simile a quella di un vaso vuoto che vada riempito via via con i contenuti di tutti i programmi mono disciplinari, indipendentemente dalla storia e dalle inclinazioni del singolo. Il mondo dello studente rimane fuori dalla porta della scuola, quasi in una sospensione spazio-temporale (stessa scuola in ogni luogo e in ogni tempo)[1].

Ciò è in contraddizione con quanto dice l'art. 1, secondo comma, del DPR 275/1999:

> L'autonomia delle istituzioni scolastiche […] si sostanzia nella progettazione e nella realizzazione di interventi di educazione, formazione e istruzione mirati allo sviluppo della persona umana, adeguati ai diversi contesti, alla domanda delle famiglie e alle caratteristiche specifiche dei soggetti coinvolti, al fine di garantire loro il successo formativo, coerentemente con le finalità e gli obiettivi generali del sistema di istruzione e con l'esigenza di migliorare l'efficacia del processo di insegnamento e di apprendimento.[2]

Sembra evidente dall'articolo citato che per sviluppo della persona umana si intenda l'essere umano concreto che ogni giorno entra in classe e non l'astratto "vaso-studente". Si nota, quindi, una contraddizione tra la spinta del legislatore e la realtà complessa che studenti e docenti vivono quotidianamente. Nello sviluppo di questa tesi cercheremo di evidenziare come sia possibile, invece, mettere in atto una metodologia didattica che abbia come fine lo *sviluppo della persona umana* partendo dall'esperienza in atto presso il centro di formazione professionale *Oliver Twist* di *Cometa formazione s.c.s*.

Un punto da cui poter partire per evitare che la scuola sia al di fuori delle coordinate spazio-temporali è recuperare il concetto di *noosfera* così come è proposto da D'amore:

> […] l'insegnante deve tenere conto del sistema didattico e dell'ambiente sociale e culturale, cioè della *noosfera* in cui si trova ad agire.
> Per noosfera si può intendere il luogo (in senso astratto) dei dibattiti di idee significative sull'insegnamento; per esempio: sulle finalità della scuola, gli scopi, della formazione, le attese della società per quanto attiene scuola e cultura (per esempio i programmi ministeriali o le attese

[1] P. Roncalli, *Organizzazione e professionalità docente. La sfida del campus,* a cura di G. Bertagna e C. Xodo, *Le competenze dell'insegnare. Studi e ricerche sulle competenze attese, dichiarate e percepite,* Rubettino Università, Bergamo 2011, p.430.

[2] Art 1, secondo comma del DPR 275/1999.

> delle associazioni varie, per esempio gli industriali). La noosfera è l'intermediario tra il sistema scolastico (e le scelte dell'insegnante) e l'ambiente sociale più esteso (esterno alla scuola).[3]

La scuola/l'insegnante non deve dimenticare che deve formare studenti che devono vivere e lavorare in questo mondo e in questo momento storico. Non può mancare, per esempio, il dialogo con i soggetti economici del paese in cui ci troviamo a fare scuola.

1.1 Un nuovo paradigma di scuola

Negli ultimi vent'anni il mondo ha subito un esponenziale processo di cambiamento con un tasso di variabilità che non accenna a diminuire, questo fenomeno rende sempre più evidente che il restare fermi implicherebbe andare indietro. Tuttavia il cambiamento stenta a entrare nel mondo della scuola, in cui il binomio disciplina-lezione frontale sempre meno incontra gli interessi degli studenti, veri soggetti del nostro fare scuola. Nel mondo reale, quello fuori dalla scuola, l'adolescente riceve sollecitazioni che non sono mono-disciplinari ma che nella loro complessità coinvolgono diverse branche del sapere. Moltissimi giochi delle più famose *console* mettono insieme strategia, storia, logica, interazione e capacità linguistica; sempre più diffusi sono i giochi *multiplayer* in cui i ragazzi sono connessi e comunicano con adolescenti di tutto il mondo[4], un altro esempio è una tipica ricerca su *google* in cui gli studenti, dopo pochi *click,* si possono ritrovare in ambiti apparentemente opposti ma legati a quello da cui si è partiti. Quanto detto può essere una risorsa in quanto i problemi o le situazioni che gli studenti si troveranno ad affrontare da adulti saranno di carattere interdisciplinare, coinvolgendo tutte le conoscenze e le competenze che avranno acquisito nel corso della vita. Acquisire durante gli anni scolastici la capacità di trovare le connessioni e di usare gli strumenti dei diversi ambiti disciplinari, è qualcosa che renderà gli studenti più pronti per il mondo del lavoro. Sembra evidente che l'interconnessione e l'interdisciplinarità diventano essenziali per educare i nostri ragazzi a giudicare il mondo e le sollecitazioni a cui sono sottoposti. Come espresso da Bertagna:

> Maturano sempre di più, ad ogni livello, infatti, le esigenze formative dell'integrazione tra vicino e lontano, alto e basso, uguale e diverso, generale e particolare, giovane e vecchio, pensiero e azione, umanesimo e scienze, arte e tecnica, studio e lavoro, cultura e professione.
> Integrazione, di conseguenza, tra i momenti di scuola/università e di famiglia, società, ambiente, impresa; dentro la scuola/università, integrazione tra i diversi momenti di lavoro dei docenti, tra le discipline di insegnamento, tra le aule, tra le classi di età, tra gli orari, tra i generi e le appartenenze

---

[3] B. D'Amore, *Il triangolo: insegnante, allievo, sapere. Trasposizione didattica. Teoria delle situazioni didattiche,* in B. D'Amore, *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora Editrice Bologna, Bologna 1999, p. 221.

[4] Non pochi studenti sviluppano competenze linguistiche, anche avanzate, attraverso questi giochi.

di status sociale; nei processi di apprendimento, integrazione tra mano e mente, tra cuore e logica, tra progettazione ed esecuzione, tra lezione e laboratorio, tra teoria e pratica, tra tutte le diverse componenti di una persona (psichica, espressiva, comunicativa, sociale, cognitiva, manuale, etica, religiosa).[5]

Potremmo dire che lo studente insistentemente chiede le ragioni della fatica che gli viene assegnata. Infatti, gli studenti di oggi non sono, come spesso si dice, incapaci di faticare ma hanno bisogno di saperne il senso, probabilmente sono meno disponibili allo sforzo motivato solo dalla fiducia nell'adulto.

Urge, quindi, mettere in campo un metodo che, prendendosi carico della crescita sia culturale che professionale della persona, ne sviluppi la capacità di giudizio e la responsabilità sociale[6]. Per sostenere questo cambiamento è utile che la società entri nella scuola e la strada da percorrere perché questo accada è il metodo dell'Alternanza formativa[7]:

> L'alternanza formativa, infatti, si riferisce all'intreccio pedagogico-didattico strutturale che esiste tra teoria e azione, tra cognitivi e manualità, tra esperienza formativa intenzionale (insegnamento) e funzionale (apprendimento), tra le discipline adoperate come mezzi per il lavoro e per la vita e le discipline considerate fini culturali da apprendere a partire dal lavoro e dalla vita, tra compiti scolastici astratti e formalizzati e compiti sociali concreti e autentici, tra cultura in senso sia classico sia antropologico e qualità della vita personale che faccia sintesi di tutte le esperienze e i pensieri di ciascuno.[8]

Questa metodologia permette agli studenti di recuperare il senso di quello che fanno, in quanto mostra come le discipline nascano da situazioni reali e questo, inoltre, permette di acquisire gli strumenti per poter comprendere i motivi che portano ad una procedura professionale o che conducono ad una certa scoperta scientifica[9], come sottolineato da Roncalli:

> La conseguenza logica delle riflessioni fin qui svolte porta alla seguente conclusione: quanto più un percorso formativo è articolato in azioni formative rivolte agli apprendimenti del "come" e del "perché" delle cose della vita, lavorativa e extra lavorativa, quanto più esso potrà conseguire risultati effettivamente orientativi, sarà cioè in grado di offrire agli allievi opportunità di scoprire sé stessi in rapporto alla scoperta delle cose della vita.[10]

---

[5] G. Bertagna, *Scuola e lavoro tra formazione e impresa, nodi critici e (im?)possibili soluzioni,* in G. Bertagna (ed.) *Fare laboratorio. Scenari culturali ed esperienze di ricerca nelle scuole del secondo ciclo,* La Scuola editrice, Brescia 2012, pp. 68-69.

[6] *Ivi,* p. 76.

[7] Roncalli 2011, cit. p. 449.

[8] Bertagna 2012, cit. p. 110.

[9] Bertagna 2012, cit. p. 109.

[10] P. Roncalli, *Analisi dei processi di lavoro e progettazione di esperienze di alternanza,* in G. Bertagna (ed.), *Fare laboratorio. Scenari culturali ed esperienze di ricerca nelle scuole del secondo ciclo,* La scuola editrice. Brescia 2012, p. 243.

Concretamente questo vuol dire un cambiamento anche nella progettazione didattica della scuola, col passaggio dai programmi mono-disciplinari all'utilizzo delle UDA (Unità Didattiche di Apprendimento) dove il termine Unità indica l'idea che la vita stessa deve diventare oggetto di studio e con Apprendimento si sottolinea che è solo la persona in apprendimento che scopre la realtà e quindi può scoprire se stessa[11]. La persona si scopre come impatto e relazione con la realtà che, oltre ad essere oggetto di apprendimento, è anche mezzo per "apprendere" se stessi. Esplicitiamo con Roncalli gli scopi delle UDA:

> Il metodo dell'Unità di apprendimento è teso a realizzare un rapporto di alternanza tra scuola e società fin dal primo giorno di scuola; un rapporto nel quale la persona nell'imparare le cose della vita e nell'applicare ciò che via via apprende, è messo nelle condizioni di realizzare la sua personale "promozione sociale".[12]

Questo è un cambiamento d'impostazione sostanziale in quanto al centro viene messo lo studente per cui l'obiettivo del Consiglio di Classe è trovare una strada che possa rendere ciascuno di loro protagonista consapevole del proprio processo di apprendimento[13]. Si passa dal progettare e programmare per una classe astratta con 25 banchi a farlo per quella classe particolare con 25 persone con storie, passioni e attitudini diverse.

Portare la società e l'azienda dentro la scuola ha anche un'altra conseguenza: *la riscoperta del valore da attribuire alla conoscenza pratica*[14]. Il che implicherebbe ricostituire il corretto legame che esiste tra realtà e conoscenze, infatti è l'impatto con una problematica reale, con un'esperienza, che fa nascere il desiderio della conoscenza e della speculazione intellettuale. Il contrario sarebbe come dire, paradossalmente, che si può imparare a camminare da un libro di fisica.

1.1.1 Discipline e Interdisciplinarità

L'organizzazione mono-disciplinare ordinata e in parallelo di tutti gli ambiti formativi ha dotato ogni materia, resa *oggetto di studio,* di un estremo *potere di autoreferenzialità.* Ma ciò che apparentemente sembra dar valore alle materie, in realtà le rende *saperi non pertinenti*, in quanto vengono espropriate del loro come e perché, cioè della loro potenza applicativa. Al contrario, la metodologia del sapere unitario, mettendo al centro la risoluzione di un problema che richiede il

---

[11] Roncalli 2011, cit p. 437.

[12] *Ivi,* p. 438.

[13] *Ivi,* p. 453

[14] Bertagna 2012, cit. pp. 68-69.

concorso sinergico e contemporaneo di più saperi disciplinari, permette allo studente di far esperienza di quelle che saranno le problematiche in cui si imbatterà nella vita, che avranno sempre una natura interdisciplinare[15]:

> Il procedimento interdisciplinare chiama invece i diversi saperi disciplinari a esprimere i loro contributi in moto eterogeneo e mutevole, in relazione alla complessità del fine da conseguire o del problema da risolvere; è la finalità da conseguire o il problema da risolvere che genera la variabilità dei livelli di saperi teorici e di saperi pratici da richiedere ai diversi ambiti disciplinati, concepiti, nel procedimento interdisciplinare, non come fini a sé, ma come messi discreti e indispensabili al quotidiano svolgersi dei rapporti di cooperazione sociale. […] Sono disposti secondo una relazione di mutuo adattamento.[16]

Con questa impostazione le discipline vedono incrementata la loro importanza trovando la loro valorizzazione nell'essere mezzi per affrontare problemi di carattere generale con un chiaro riferimento agli ambiti della vita sociale (l'alternanza scuola-società)[17]. Gli strumenti sviluppati durante il percorso diventeranno risorse personali dello studente che, avendoli appresi da un contesto più ricco di quello della disciplina di riferimento, eviterà quelle scene "imbarazzanti" in cui dimostra di essere in grado di risolvere un determinato problema durante la lezione di matematica ma se lo incontra, per esempio, nello studio della biologia non riconoscerà quali strumenti sono necessari per affrontarlo.

Se quanto appreso entra a far parte del patrimonio culturale dello studente potremmo parlare realmente di competenza[18] e di studente competente:

> […] competente è, in sintesi, chi risolve al meglio un problema, un compito o un progetto, mobilitando tutte le componenti della sua persona, valorizzando le "giuste" collaborazioni con gli altri, tenendo conto della complessità teoretica, tecnica e pratico-morale della situazione da affrontare nel contesto dato, nonché, infine, del giudizio esperto di chi è già stato riconosciuto competente nello stesso campo di azione[19].[20]

Tale tipo di dinamica in cui lo studente riesce ad analizzare un problema, un compito o un progetto in tutti i suoi aspetti non può essere il frutto del classico apprendimento per compartimenti

---

[15] Roncalli 2011, cit. pp. 434-435.

[16] *Ivi,* pp. 435-436.

[17] *Ivi,* p. 469.

[18] Nel *Quadro europeo delle qualifiche per l'apprendimento permanente* (EQF) la competenza è definita così: «Comprovata capacità di utilizzare conoscenze, abilità e capacità personali, sociali e/o metodologiche, in situazioni di lavoro o di studio e nello sviluppo professionale e personale. Nel contesto dell'EQF le competenze sono descritte in termini di responsabilità e autonomia».

[19] G. Bertagna, *Valutare tutti, valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica,* La Scuola editrice, Brescia 2004.

[20] G. Sandrone, *Competenza,* in G. Bertagna, P. Triani (eds), *Dizionario di didattica. Concetti e dimensioni operative,* La Scuola editrice, Torino 2013, p. 82.

stagni ma più verosimilmente di una progettazione per UDA*,* in cui lo studente fa esperienza di una situazione complessa analizzabile da diversi punti di vista (le discipline).

Questo pone anche il problema di che tipo di valutazione sia più adeguata per certificare il raggiungimento o meno degli obiettivi di apprendimento dichiarati in sede di progettazione della UDA. Essendo essa per sua natura interdisciplinare e volendo favorire l'inter-relazione tra le diverse aree del sapere, sarà necessario pensare, progettare e somministrare una prova che mantenga queste caratteristiche, cioè che permetta allo studente di mostrare di aver sviluppato e acquisito la capacità di utilizzare gli strumenti più adeguati in funzione della caratteristiche del problema da affrontare. Quindi insieme alle prove disciplinari, utili durante lo svolgimento dell'unità di apprendimento per sapere se gli studenti stiano sviluppando le competenze specifiche, dovranno essere somministrate anche prove che permettano di valutare come il ragazzo si pone di fronte ad un problema complesso che richiede di mobilitare risorse che vengono da diverse aree disciplinari; questi sono i così detti "compiti autentici[21]", "prove esperte" o, nel caso di *Cometa Formazione* "esami di fine quadrimestre". Queste tre sono tutte tipi di prove in cui, partendo da una problematica reale o dalla realizzazione di un prodotto o dallo sviluppo di un progetto, allo studente viene chiesto di essere "competente[22]" e "esperto", in quanto non dovrà solo svolgere il compito ma mostrare di essere consapevole delle scelte che dovrà compiere per ottenere il miglior risultato.

1.1.2 Lezioni e workshop (partire da un programma o partire dalla realtà)

Perché queste suggestioni non siano solo formali è necessario osservare attentamente anche l'ora di lezione e come viene progettato un percorso didattico. Seguendo il pensiero di Bertagna, constatiamo che sia a scuola che nelle università si mette in atto la "teoria dei due tempi": prima tutta la teoria e poi la pratica. Se spesso nelle università si riesce ad arrivare al "secondo tempo" con incubatori per *start up* o brevetti, a scuola è invece più irraggiungibile della "pentola d'oro alla fine di un arcobaleno". La scuola è così bloccata con l'idea di dover gettare le "basi" per un ipotetico futuro che non ritiene possibile dotarsi di un *know how* che possa dare agli studenti delle basi per un lavoro[23] immediato che diventi orizzonte di senso per il loro apprendimento, come suggerito nel concetto di *laboratorium*:

---

[21] D. Bardi, *La valutazione,* in D. Bardi, *La Classe Scomposta. La didattica per competenze nelle tecnologie,* Nuova Multimedia Editore in collaborazione con RCS-Education, 2014, p. 59.

[22] Secondo la definizione che abbiamo dato precedentemente di studente competente.

[23] Bertagna 2012, cit. p. 89.

> Il *laboratorium,* al contrario, è, invece, un luogo di apprendimento non topologico, ma sociale e cooperativo, senza soluzione di continuità logistiche, nel quale si "fa l'esperienza" di progettare operativamente in comune, ancorché in maniera protetta, quindi reversibile, imparando anche dagli errori che si commettono, la concretizzazione di idee e di teorie; oppure, alternativamente, nel quale si "fa l'esperienza" di enucleare in comune, riconoscendole, le idee e le teorie incorporate nei processi lavorativi reali esistenti, siano essi di natura sociale o industriale, spesso purtroppo eseguiti in maniera automatica, senza riflessività e senza la consapevolezza delle loro "ragioni" scientifiche, tecnologiche, culturali.[24]

Il *laboratorium* è il luogo dove poter progettare insieme (studenti e docenti), dove poter imparare dai propri errori e dove poter veder concretizzarsi idee e teorie o, viceversa, dove dal processo di lavoro si estrapolano le idee e le teorie implicate per rendere ragione delle operazioni fatte. Questo approccio permette di esaltare anche le cosiddette attività laboratoriali (sia di materie come fisica sia quelli di carattere professionale) spesso eseguite senza alcuna riflessività e consapevolezza del patrimonio culturale implicato in esse. Possiamo dire che il *laboratorium* è il luogo formativo in cui si usano le conoscenze e le abilità per impadronirsi delle competenze personali nell'ottica di risolvere problemi esistenziali e professionali. Competenze maturate con la guida del maestro che, mettendo sotto analisi critica i processi e le attività, accompagna lo studente nell'enucleare le conoscenze e abilità che giustificano processi e attività sul piano razionale-scientifico[25]. Anche Ellerani sostiene la stessa idea di Bertagna:

> Un laboratorio, luogo della *sperimentalità,* dunque, anche di un "fare scuola" accompagnato da un "essere" in apprendimento, in continua ricerca e confronto. In esso è possibile sperimentare anche modi di essere, di condurre, di relazionarsi che divengono motore di successive applicazioni in ambienti differenti. In questo modo il laboratorio si configura come "palestra" tra pari che sostengono, aiutano, suggeriscono, per realizzare apprendimento.
>
> […] È nella natura del laboratorio generare richieste di approfondimento e di formazione, in quanto i problemi posti in essere richiedono quote conoscitive, esponenziali, progettuali che non sono già compiute. Nel laboratorio si generano istanza alle quali occorre rispondere in modo specifico costruendo una comunità che riflette, che si forma in modo continuo intorno alle soluzioni di problemi.[26]

---

[24] *Ivi,* p. 189.

[25] *Ivi,* p. 111-112.

[26] P. Ellerani, *La sfida della didattica: trasformare le classi in contesti di apprendimento continuo,* in a cura di G. Bolondi, M. I. Fandiño Pinilla, *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica,* EdiSES, Pozzuoli (Na) 2012, p. 159.

1.1.3 La personalizzazione e l'individualizzazione

La nuova idea di scuola che vogliamo proporre ci conduce a mettere al centro i concetti di individualizzazione e personalizzazione come metodologie preferenziali per sostenere lo studente nello sviluppare le sue abilità e conoscere se stesso nell'impatto col mondo.

Con *individualizzazione* intendiamo attività di insegnamento comuni ad un gruppo classe ma diversificate per alcuni aspetti a partire dai diversi metodi di apprendimento degli studenti. Questo vuol dire che essa non modifica gli obiettivi di apprendimento ma permette una caratterizzazione del percorso da fare per raggiungerli[27].

La *personalizzazione,* invece, implica un'organizzazione delle azioni di insegnamento e di apprendimento che, valorizzando la centralità della persona umana, promuovano lo sviluppo di tutte le sue qualità, nella consapevolezza che l'insegnamento non ha come fine la trasmissione dei contenuti ma l'impiego di questi contenuti come mezzi fecondi e privilegiati per mettere alla prova e esaltare le qualità di ogni persona. Questo significa rispettare i processi di apprendimento degli studenti[28] e introdurre degli spazi di flessibilità e facoltativi, pur all'interno di vincoli comuni, per favorire lo sviluppo della persona nella sua totalità.[29]

Per analizzare l'importanza di questi due fattori partiamo da una considerazione di Bagioni:

> Per l'acquisto delle cognizioni scolastiche il primo punto sul quale bisogna fissarsi è questo: la libertà di maniera. Se mi dite, maestri carissimi, che ognuno dei vostri allievi deve imparare le medesime cognizioni, sono con voi; ma se mi dite che ognuno deve imparare al medesimo modo (e nel medesimo tempo) vi rispondo che questo è assurdo, è contro natura, è inumano.[30]

Questo presupposto è giustificato dalle considerazioni fatte da Bertagna il quale, sottolineando *l'unicità e l'irripetibilità delle storie esistenziali di ciascuno,* sostiene che, fatto salvo un nucleo comune, non tutti apprenderanno le stesse cose e allo stesso modo, considerando anche le grandi differenze familiari e sociali presenti tra pari. Quindi il modo di apprendere e di comportarsi è sempre legato alla "storia" di ciascuno. È essenziale non trascurare questi fattori all'interno degli interventi formativi che, se posti uguali tra disuguali, risultano essere inadeguati a favorire la

---

[27] G. Sandrone, *Individualizzazione,* in G. Bertagna, P. Triani (eds), *Dizionario di didattica. Concetti e dimensioni operative,* La Scuola editrice, Torino 2013, pp. 209-210.

[28] A. Giunti, *La scuola come centro di ricerca,* La Scuola editrice, Brescia 2012.

[29] G. Sandrone, *Personalizzazione,* in G. Bertagna, P. Triani (eds), *Dizionario di didattica. Concetti e dimensioni operative,* La Scuola editrice, Torino 2013, pp. 289-290.

[30] E. Biagioni, *Maria Boschetti Alberti e l'attivismo svizzero*, Ciranna, Palermo 1972, p. 24.

promozione sociale di ciascuno[31]. Questo concetto è sintetizzato nella seguente immagine (Fig. 1)

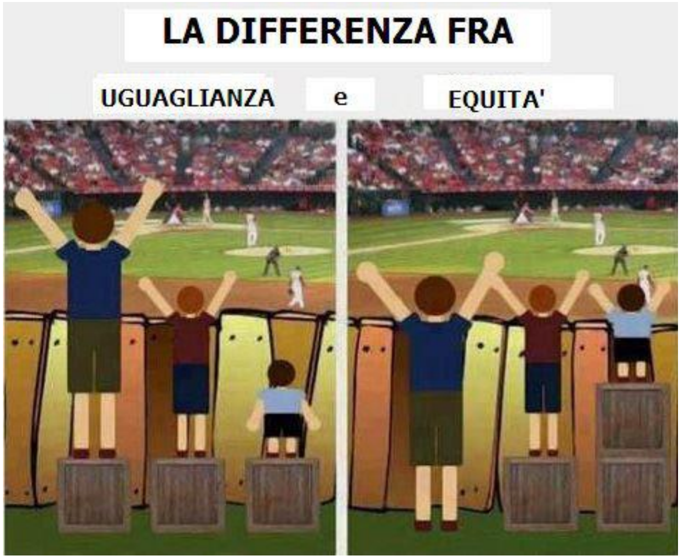


Fig. 1: La differenza tra uguaglianza e equità.

che pone l'accento sulla differenza tra uguaglianza e equità:

Analogamente, un concetto abbastanza simile è espresso nella Fig. 2, per quanto riguarda le

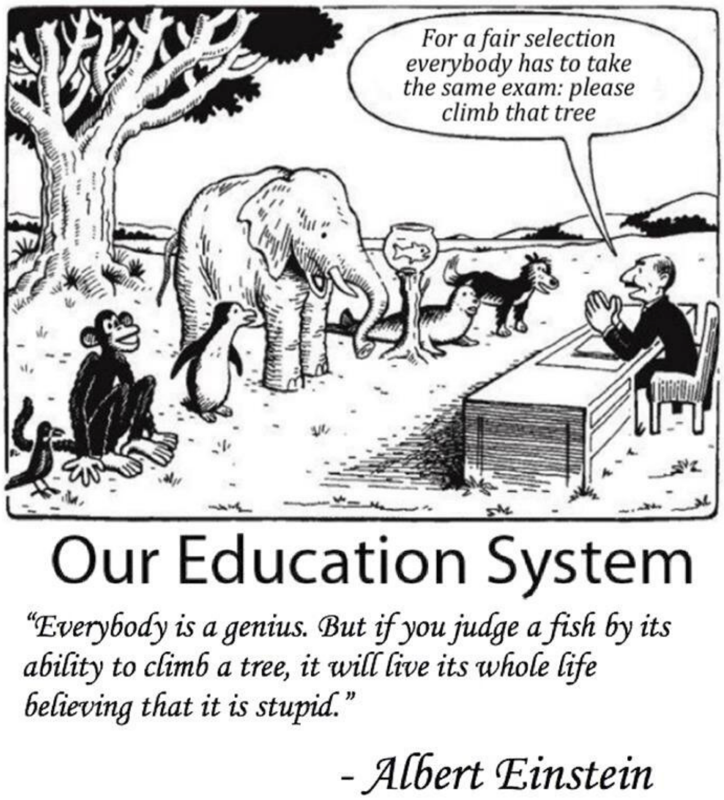


Fig. 2: Prove di valutazione.

prove di valutazione, esso trova la sua giustificazione partendo dal presupposto che ogni persona è

[31] Bertagna 2012, cit. pp. 84-85.

intelligente e creativa, ma potrà dimostrarlo solo se posta nelle condizioni organizzative e nelle situazioni disposizionali di poterlo dimostrare[32]. La mancanza di attenzione nella individualizzazione e nella personalizzazione anche nel momento della valutazione, rischia di rendere reale ciò che lo stesso Einstein esprimeva: *"Ognuno è un genio. Ma se giudichi un pesce dalla sua abilità nell'arrampicarsi su un albero, lui vivrà tutta la sua vita credendo di essere stupido".*

Questo vuol dire che, almeno intenzionalmente, il Consiglio di Classe dovrebbe avere un progetto educativo per ciascuno studente con al centro la sua crescita e il suo pieno sviluppo. Non sarebbe a questo punto lo studente a doversi adattare ai dispositivi esistenti ma i docenti che, utilizzando gli strumenti a loro disposizione, devono trovare i modi di formare la persona studente al massimo livello possibile e in tutta l'estensione delle sue caratteristiche[33]. Questa attenzione a ciascun allievo ha come scopo la realizzazione di sé, accompagnato dalla guida del maestro che predispone ambiente, luogo e strumenti al fine di favorire la crescita e l'educazione di ogni singolo alunno[34], quindi *qualcuno che prima era considerato uno qualunque diventa il punto focale dei riferimenti personalizzanti*[35].

Sembra evidente come in questo paradigma non ci sia più al centro l'ordinamento o l'organizzazione *a priori* ma il singolo studente con le sue capacità e le sue competenze, questo implica che anche l'insegnante non deve più concepirsi come un funzionario che deve rispondere allo svolgimento di un programma ma deve recuperare la sua dimensione di "educatore" e "formatore", ponendosi al servizio della crescita globale dello studente., in grado di fare sintesi tra gli apprendimenti acquisiti nei contesti più vari[36].

Il mettere in atto quanto esposto, un insegnamento per ogni studente, avrebbe come sfida di superare la correlazione, quasi sempre presente nelle nostre classi, tra l'attitudine iniziale dello studente e il suo profitto finale[37]. Il fatto che chi è "scarso" rimane "scarso" è un segno che la scuola non favorisce la crescita del soggetto. La personalizzazione e l'individualizzazione hanno la pretesa di scardinare questa dinamica.

---

[32] *Ivi,* p. 80.

[33] *Ivi,* p. 123.

[34] *Ivi,* pp. 126-127.

[35] W.G. Hoz, *L'educazione personalizzata* (trad. it.), La Scuola, Brescia 2005, p.27.

[36] Bertagna 2012, cit. pp. 125-126.

[37] G. Sandrone Boscarino, *Personalizzare l'educazione. Ritrosia e necessità di un cambiamento,* Rubettino Università, Bergamo 2008, p.152.

Possiamo concludere questo paragrafo citando Sandrone:

> È evidente il tentativo di spostare l'attenzione didattica dai processi di insegnamento, preordinati dal docente, a quelli di apprendimento che non possono ignorare la necessità di partire dalle modalità di conoscenza dell'alunno e dai suoi tempi di apprendimento con l'evidente obbligo di tenerli in debito conto. […] il successo dell'apprendimento degli allievi è dato dalla capacità didattico-organizzativa del docente che, attraverso la definizione modulata di obiettivi, la valorizzazione delle diverse disposizioni degli allievi, la pianificazione delle attività, la razionalizzazione dei tempi e degli strumenti, le corrette procedure di valutazione, realizza la propria opera demiurgica e tecnicamente organizzata nei confronti di un allievo comunque bisognoso di essere condotto dall'esterno all'apprendimento.[38]

1.2 Mindset

Un ultimo aspetto che voglio considerare come caratteristica della nuova scuola è la teoria del *mindset* formalizzata dalla professoressa statunitense Carol Dweck[39]. Il *mindset,* che in italiano è traducibile con mentalità o atteggiamento mentale, sarebbe il modo in cui la persona si pone davanti a problemi o a sfide nuove. Sono individuati due caratteri: *fix* o *growth mindset* (fig. 3).

Il carattere *fix mindset*[40] si caratterizza per la preoccupazione di voler apparire intelligente, quindi tende ad evitare le sfide e vede gli eventuali sforzi che bisogna compiere per imparare qualcosa o per risolvere un problema come un segno della sua inadeguatezza e mancanza di talento. Inoltre, percepisce con frustrazione qualunque critica gli venga mossa e vive il successo degli altri come un'ingiustizia verso di sé. La conseguenza di ciò è che tende a non esplorare aree della conoscenza dove teme di risultare inadeguato e questo lo porta a raggiungere meno di quello che è effettivamente il suo potenziale.

Il carattere *growth mindset*[41], al contrario, si muove a partire dal desiderio di imparare, quindi tende ad affrontare le sfide persistendo finché non raggiunge un risultato. Crede che fare fatica sia parte della strada per diventare esperti in qualcosa. Accetta le critiche come possibilità per migliorare le proprie qualità, vive le storie di successo degli altri come un'inspirazione per sé. Conseguenza di ciò, è che tende a raggiungere alti risultati, sviluppando al meglio il suo potenziale.

In altre parole, il carattere *growth* concepisce le sue capacità e abilità come qualcosa in divenire che possono essere allenate e che si sviluppano affrontando sfide sempre più complesse. Il

---

[38] *Ibidem.*

[39] C. Dweck, *Mindset: how you can fulfill your potential,* Robinson, London 2012.

[40] *Ivi,* p. 15.

[41] *Ivi,* p. 6.

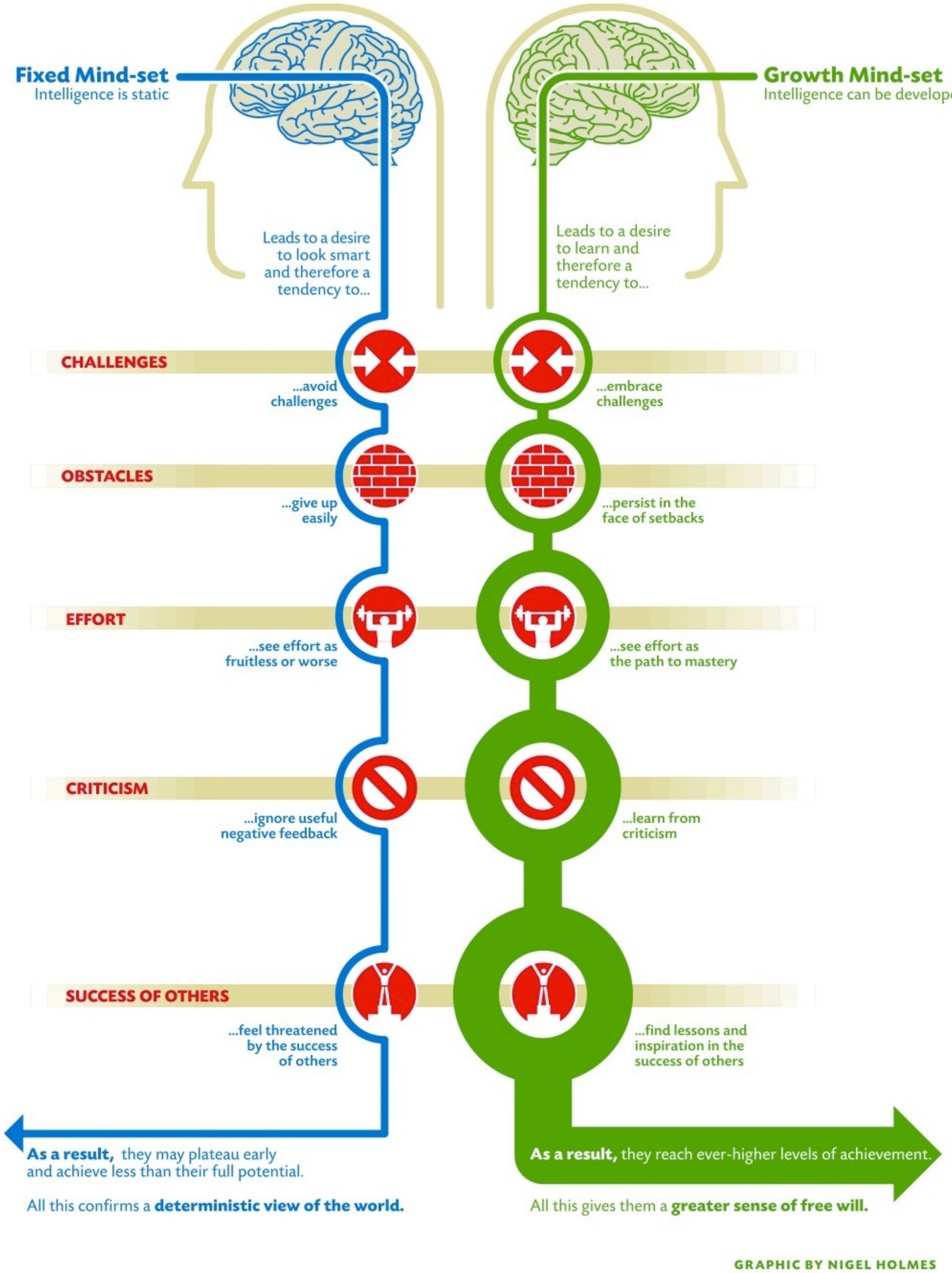


Fig. 3: Differenza tra *fix-mindset* e *growth-mindset.*

carattere *fix* è totalmente opposto, è così desideroso di apparire intelligente che vede il successo come conseguenza del proprio talento innato e quindi la fatica è qualcosa da eliminare in quanto segno di una propria incapacità[42].

Credo che il secondo carattere (*growth*) sia quello più adeguato per affrontare le sfide di una società in mutamento costante in cui probabilmente lo studente non farà ciò per cui ha studiato. Inoltre, anche per chi lavorasse nel suo campo di studi la tecnologia avrà trasformato e reso obsolete molte delle conoscenze acquisite durante la formazione scolastica[43]. Tale considerazione dà la responsabilità alla scuola di favorire questo tipo di attitudine, il che è possibile facendo attenzione ad alcuni aspetti:

- nella fase dell'apprendimento allo studente dovrebbe essere lasciata la possibilità di sperimentare, di sbagliare e di scoprire con la guida dell'insegnante;
- l'errore, in questa fase, è realmente un modo per conoscere in quanto il comprenderlo in profondità permette allo studente di scoprire qual è stato l'errore logico commesso;
- questo è un lavoro educativo che il docente deve fare perché di solito gli studenti arrivano a scuola con l'idea che l'errore è il male. Le gravi conseguenze di ciò sono che se il docente chiede agli studenti di fare ipotesi su come risolvere un problema, essi non rischiano per paura di sbagliare, mostrando come si stia sviluppando in loro una mentalità *fix;*
- altro momento essenziale è quello della valutazione: non dev'essere un momento di giudizio sulle capacità dello studente ma sul lavoro fatto, indicando sempre la strada e dando dei consigli su come lavorare in futuro per migliorare i risultati. Si potrebbero introdurre anche dei momenti valutativi dell'impegno profuso da parte dello studente più che del risultato in sé.

Questi aspetti si coniugano perfettamente con quanto detto sul metodo dell'alternanza formativa che si concretizza nel concetto di *laboratorium* ed anche con quanto detto a proposito di personalizzazione e individualizzazione.

Queste attenzioni permetterebbero allo studente di vivere in un ambiente "problematico" risolvibile solo mettendo in gioco le proprie risorse e quindi accrescendo sempre di più le proprie abilità. Termino riportando una citazione tratta dal libro di Dweck dal titolo *Mindset: how you can fulfill your potential,* che esprime l'importanza dell'atteggiamento del docente davanti agli alunni per potere sviluppare il *growth mindset:*

> *Alcuni insegnanti si focalizzano sull'idea che tutti i bambini possono sviluppare le loro abilità, e nella loro classe una strana cosa accade. Non è un problema degli studenti iniziare l'anno nel gruppo delle alte o basse abilità. Entrambi i gruppi alla fine dell'anno saranno più alti. È una*

---

[42] *Ivi,* p. 25.

[43] https://www.youtube.com/watch?v=F9WDtQ4Ujn8

esperienza forte vedere queste scoperte. Le differenze tra i gruppi sono semplicemente scomparse sotto la guida di insegnanti che insegnavano per lo sviluppo, questi insegnanti hanno trovato un modo per raggiungere gli studenti con basse-abilità.[44]

Ciò che è stato esposto in questo capitolo sono alcuni dei pilastri su cui mi sono basato per formulare la progettazione didattica proposta agli studenti del corso di "operatore del legno - manutenzione di immobili", ciò che segue nel capitolo successivo espone quale tipo di didattica della matematica meglio si sposi con un "nuovo paradigma di scuola" che promuova il *growth mindset* negli studenti.

[44] *Ivi,* p. 66.

Capitolo 2: Dai problemi didattici alle formazioni teorico-sistematiche.

Le domande che dobbiamo porci quando parliamo di matematica sono: perché i nostri studenti dovrebbero fare la fatica di imparare la matematica? Perché noi dovremmo chiedere loro questo sforzo? Cosa rappresenta la matematica nella storia dell'umanità? Cosa rappresenta per l'uomo moderno? Che ruolo gioca la matematica nella formazione di un "giovane-adulto"?

Queste sono probabilmente le domande che, più o meno implicitamente, ogni studente, ogni genitore e ogni famiglia hanno verso una materia come la matematica che spesso genera difficoltà nei discenti.

Per tentare di dare un'idea di risposta, certamente non esaustiva, lasciamoci guidare dall'opera di Stewart che, in *Domare l'infinito: Storia della matematica dagli inizi alla teoria del caos*, evidenzia quali siano i punti che rendono la matematica così importante e come questi si siano chiariti nel corso della storia dell'umanità.

Il più grande valore che possiamo dare alla matematica è la sua capacità di darci una chiave per comprendere le leggi fondamentali della natura grazie ad un processo che è iniziato con i pitagorici[45] e che, soprattutto dopo la rivoluzione scientifica di Galileo, ha sempre di più legato la matematica allo sviluppo tecnologico dell'uomo. Questo è possibile grazie alla "sua capacità di adattare idee e trasferirle da un'area scientifica ad un'altra in quanto la matematica è il massimo se si tratta di trasferire tecnologia. È questa connessione incrociata, rivelata negli ultimi 4000 anni, che rende la matematica una materia unica e unificata"[46]. Questo è anche vero per quei concetti matematici che non sembrano avere dirette connessioni con il mondo, infatti la storia ci dà molti esempi di congetture matematiche che si sono rivelate solo successivamente come modelli necessari per risolvere un qualche tipo di problema che sia di fisica, biologia, tecnologia o di altro campo[47], come ricorda Melzi nel suo saggio *Perché la matematica*:

> Del resto nel mondo dell'infinitamente piccolo della fisica, le scoperte sperimentali che si susseguono quasi quotidianamente non sarebbero neppure pensabili se non se ne conoscesse prima per via matematica la regia: certe particelle <<devono esistere>> solo per fare quadrare le formule! […] E non parliamo poi dell'impiego massiccio della matematica nella preparazione di modelli matematici di complessi sistemi biologici, l'evoluzione dei quali non potrebbe essere prevista in

[45] I. Stewart, *Domare l'infinito. Storia della matematica dagli inizi alla teoria del caos*, Bollati Borighieri, Torino 2011, pos. 245.

[46] *Ivi*, pos. 1079.

[47] *Ivi*, pos. 54.

> altro modo che quello matematico a causa dell'enorme complessità dei vari fattori del fenomeno e delle loro interazioni.[48]

I due autori citati ci aiutano a comprendere quale valore abbia la matematica per la società e come la conoscenza matematica sia direttamente connessa con lo sviluppo della civiltà in termini di tecnologia e conoscenza del mondo Manara nell'opera *La matematica e la realtà* ci aiuta a comprendere come la matematica concorra allo sviluppo della persona. In particolare, evidenzia come, sotto la guida degli adulti, i giovani possano diventare capaci di passare dal sogno al progetto e, quindi, di sviluppare quella razionalità che è "la capacità di un giudizio globale su un progetto"[49]. L'importanza di questo messaggio sta nel sottolineare come la matematica aiuti a sviluppare competenze spendibili in campi molto diversi da quello in cui sono nate, tra queste ci sono: la capacità di trovare relazioni e simmetrie in una situazione problematica e la capacità di progettare un percorso per poter raggiungere un obiettivo. Emerge, infatti, nella citazione successiva come l'autrice, nel parlare della competenza di progettazione che la matematica aiuta a sviluppare, sottolinei come questo sia applicabile a qualunque campo e, di conseguenza, questa competenza risulta trasferibile e spendibile in un contesto più ampio:

> L'azione del progettare è l'orizzonte nel quale si colloca lo stimolo psicologico e intellettuale a risolvere problemi. La realizzazione di un progetto, infatti, consiste nel superare gli ostacoli che via via si incontrano, nel risolvere un ampio ventaglio di problemi. All'interno di una progettazione, in qualunque campo, si affronta una situazione complessa che non può essere dominata in modo frammentario, pezzo per pezzo, ma chiede che i particolari si inseriscano entro un'ipotesi globale. Un progetto non è la somma delle sue parti, ma un'inscindibile unità di analisi e sintesi. Per saper progettare, oltre alla fantasia che concepisce l'idea generale, è necessaria duttilità e adattabilità: un progetto "vive", si modifica e si plasma secondo le necessità.[50]

La duttilità della matematica e la capacità di carpire i segreti delle più varie branche della conoscenza, pongono essa come centrale nello sviluppo delle facoltà di una persona, in quanto nasce dal desiderio tutto umano di comprendere sempre più in profondità la realtà che ci circonda. Potremmo dire che la matematica, come spinta alla conoscenza, è nata nel momento stesso in cui l'uomo si è stupito di quello che vedeva:

> La più sensata spiegazione della matematica sembra essere una tensione infinita alla conoscenza ammirata. Che la si voglia chiamare in un modo o nell'altro, che si preferisca parlarne subito o tacere rimandando il giudizio a qualche dopo, più o meno remoto, questa silenziosa tensione che anima la matematica è *tensione religiosa*. Chiamarla aspirazione alla conoscenza dell'assoluto, alla comunione con il mondo o con gli uomini sarebbe solo cambiarne le parole.[51]

---

[48] G. Melzi, *Perché la matematica,* La Scuola editrice, Brescia 1978, p. 108-109.

[49] R. Manara, *La matematica e la realtà. Linee di metodo*, Marietti 1820, Perugia 2008, p. 137.

[50] *Ivi*, p. 138

[51] Melzi, *cit.* p. 151.

Chiarito che valore ha la matematica per l'umanità in generale e per lo sviluppo dei singoli alunni in particolare, sorgono alcune domande: su quali presupposti dovrebbe basarsi l'insegnamento della matematica? Quale metodologia didattica può favorire l'apprendimento della stessa?

2.1 Insegnare la matematica

L'insegnamento della matematica in Italia è quasi totalmente caratterizzato dall'alternarsi di spiegazioni frontali da parte del docente, esercizi da svolgere a casa e verifiche sugli argomenti trattati con una netta separazione tra teoria e pratica[52] e tra matematica pura e applicata. Questo dualismo[53], aggiunto al fatto che gli argomenti vengono trattati senza alcun riferimento alla realtà vissuta dagli studenti, porta a non concepire un'unità intrinseca all'interno della matematica ma a considerarla come una successione di temi non molto legati tra di loro.

Tutto ciò può avere conseguenze molto gravi nello sviluppo dello studente che, dovendo solo studiare ed applicare, non potenzia le capacità di ragionamento e intuizione che negli anni scolari si dovrebbero formare. In Freudenthal troviamo esplicitati i danni e i problemi che questa situazione comporta:

> Ciò che è cruciale è:
> - il blocco dell'intuizione
>
> che è gravemente rallentata dall'esercizio, cioè
> - l'esercizio prematuro
> - l'eccesso di esercizio
> - l'esercitazione fine a se stessa.
>
> Il problema è:
> - come tenere aperte le fonti dell'intuizione durante l'esercitazione,
> - come stimolare la conservazione dell'intuizione, in particolare nel processo di schematizzazione e formalizzazione.
>
> Come ottenere questo risultato? la soluzione da me proposta è:
> - condurre l'allievo a riflettere sui propri processi di apprendimento.[54]

Polya, approfondendo quanto espresso da Freudenthal, dice che il compito di un insegnante di matematica non è solo impartire informazioni (emblema di una scuola trasmissiva) ma aiutare gli studenti a essere abili nell'usarle in modo creativo. Di conseguenza, primo obiettivo della scuola

[52] Bertagna 2012, cit. p. 89.

[53] H. Freudenthal, *Ripensando l'educazione matematica*, a cura di C. F. Manara, Editrice La Scuola, Brescia 1994, pp. 116-117.

[54] *Ivi*, p. 148.

dovrebbe essere quello di "insegnare a pensare" e ad intuire[55]. Concordando con quanto espresso dal metodo dell'alternanza formativa, anche Polya e Freudenthal sottolineano la necessità di pensare ad una scuola che rimetta al centro lo studente con il suo vissuto e le sue esperienze. Per identificare gli elementi che dovrebbero caratterizzare la nuova didattica, partiamo da questo brano di Freudenthal:

> Nello stesso tempo lo sviluppo del concetto di numero è diretto dalla dinamica del discente, che si manifesta in una attività linguistica costruttiva. Il discente reinventa, in modo più o meno cosciente, la sequenza dei numeri, e questa attività di reinvenzione si estende anche alle operazioni aritmetiche. È ben noto che alcuni bambini reinventano per conto loro l'aritmetica, e lo fanno in vario grado, in dipendenza dal carattere del bambino e dell'ambiente. È allora esagerato pensare che, con qualche aiuto, ogni bambino normale sia capace di reinventare tanta matematica quanta gli sarà necessaria nella vita quotidiana futura? Nei fatti ciò non avviene. […] Una delle ragioni per cui la matematica è diversa è fornita dalla storia; è possibile che il processo storico di apprendimento vissuto dall'umanità possa essere ripetuto dal singolo scolaro? Ho detto che un ragazzo intelligente può reinventare per conto suo un bel po' di matematica. E allora perché anche quelli meno intelligenti non possono fare lo stesso, sotto la guida di altri, siano essi adulti o coetanei? Perché non debbono essere capaci di proseguire sulla strada che hanno iniziato?
> […] Anzitutto le conoscenze e le abilità, quando sono acquisite con l'attività personale, si dimenticano meno facilmente e vengono utilizzate con maggiore facilità e prontezza di quelle che sono state imposte dagli altri. In secondo luogo, la scoperta può dare soddisfazione, e quindi l'imparare con la reinvenzione può essere fondato sulle motivazioni personali. In terzo luogo questo atteggiamento incoraggia l'attività di esperimentare la matematica come un'attività umana.[56]

Estrapoliamo, parafrasando, i punti essenziali di questo brano che ci aiuteranno a individuare quali pratiche sostengono lo sviluppo del giovane:

- lo studente reinventa nella sua vita in modo più o meno cosciente i numeri e le operazioni aritmetiche;
- con qualche aiuto ogni bambino può reinventare tutta la matematica necessaria per la vita quotidiana;
- la scuola non dà occasioni per approfondire questa dinamica, perché non dovrebbe favorirla?
- si ha maggiore consapevolezza di tutto ciò che si impara con attività personale;

[55] G. Polya, *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere problemi*, Feltrinelli, Milano 1979, pp. 359-360

[56] Freudenthal, cit. pp. 73-74.

- la scoperta è di per sé motivante[57].

Sicuramente dobbiamo considerare questi punti nell'individuare una metodologia didattica che permetta lo sviluppo dello studente in tutti i suoi aspetti. Bisogna recuperare il suo vissuto ,cioè le esperienze e le convinzioni che il fanciullo si forma durante la sua crescita e bisogna partire dalle idee del senso comune[58], che non è altro che il primo contesto in cui si affrontano problemi e da cui nascono la matematica e le altre scienze della natura[59]. Questo aspetto è corroborato dallo sviluppo storico della matematica: nata da problemi e solo successivamente formalizzata[60]. Nell'approccio scolastico sembra che questo ordine si sia perso, quindi il problema o l'applicazione è l'ultimo elemento che lo studente incontra nello sviluppo di una conoscenza matematica, è come se la motivazione e l'utilità fosse svelata solo alla fine e questo può diventare molto frustrante. Al contrario, la scuola dovrebbe riuscire a stimolare il più possibile l'immaginazione, la fantasia[61] e l'intuizione[62].

Questi temi[63] iniziano a delineare alcuni spunti di metodo[64]. Infatti, partire dal senso comune vuol dire partire sempre da dove si trovano gli studenti nel loro percorso di crescita, cercando il riferimento che quell'argomento ha con il mondo in cui gli studenti vivono. Come sostenuto da Fandiño Pinilla, l'utilizzo di situazioni a-didattiche può essere la chiave per favorire un apprendimento più profondo:

> Quello che si riesce a mettere sotto forma di situazioni a-didattica risulta vincente nell'apprendimento. In effetti, pur essendo una situazione di apprendimento più lenta, permette un apprendimento consapevole e profondo; è attraverso una costruzione di situazioni a-didattiche in aula che si arriva ad una vera e propria conoscenza, capace anche di *transfer cognitivi*. Non è necessario affrontare tutti gli argomenti nuovi attraverso la costruzione di situazioni a-didattiche, ma è bene, in fase di progettazione e programmazione, individuare a priori i *nuclei fondanti* della

---

57 Gli studenti persistono nel loro coinvolgimento - non si demotivano e non disinvestono nella scuola - quando le proposte degli insegnanti sono varie e stimolanti, quanto è richiesto loro di essere partecipanti attivi nel processo di ricerca e di scoperta; quando i docenti strutturano attività che richiedono l'uso di strumenti e risorse per padroneggiare i contenuti e realizzare compiti e prodotti complessi. (Ellerani, cit. p. 148)

58 *Ivi*, p. 27.

59 Manara, cit. p. 35.

60 Stewart, cit. pos. 638.

61 Manara, cit. p. 104.

62 Stewart, cit. pos. 233.

63 Bertagna, cit. pp. 68-69.

64 *Ivi,* p. 189.

> disciplina che si vogliono far costruire agli studenti. Almeno quelli dovrebbero essere costruiti attraverso situazioni a-didattiche.[65]

Inoltre, ciò che gli studenti hanno appreso va usato successivamente per risolvere nuovi problemi o per affrontare in modo più semplice problemi vecchi[66]. Questo permette allo studente di percepire una continuità non solo all'interno della matematica (cosa comunque normalmente assente) ma anche tra la sua vita e la scuola (metodo dell'alternanza formativa); inoltre, nel tentare e nel paragonarsi con nuovi problemi lo studente, mettendo in gioco tutte le sue risorse, ha l'opportunità di riconoscere l'insufficienza delle sue abilità. Questo lo motiva a cercare di apprendere per colmare una mancanza[67] riconosciuta.

Questo processo implica che il docente debba riuscire a trovare dei contesti di senso che colgano l'interesse delle studente permettendo, nello stesso tempo, di sviluppare i temi proposti. Il contesto è fortemente dipendente dalle caratteristiche dei componenti della classe affidata al docente[68]. Di conseguenza, è necessario che il docente entri nella realtà dei suoi studenti per condurli alla scoperta di ciò che sta proponendo loro:

> Se l'allievo si rende conto, avverte che nell'*ambiente di apprendimento* della matematica l'oggetto di conoscenza è in relazione con contesti che considera egli stesso significativi, sarà più facilmente in grado di raggiungere una competenza dato che: lo stare all'interno di un contesto significativo lo porta a *voler* affrontare la situazione, mettendo in moto azioni, anche e soprattutto, personali di ricerca.[69]

Questo processo, che ha in sé il confronto dialettico e guidato con gli studenti, viene chiamato da Freudenthal, e ripreso da Manara, "reinvenzione guidata"[70]:

> Ha senso pensare l'apprendimento come *reinvenzione guidata* […]. Questo binomio sintetizza mirabilmente un rapporto dinamico tra due soggetti umani, uno dei quali deve reinventare, cioè dare inizio a un processo mentale creativo, personale, che avviene solo sotto la propria responsabilità. Ma non può farlo senza la presenza di un altro, di una guida, qualcuno che non solo indichi la strada da percorrere, ma si metta anche in cammino standogli davanti.
> […] Tuttavia sottolineare la funzione di guida pone l'accento su una precisa responsabilità: il maestro è chi aiuta a tirar fuori ciò che si è, chi valorizza le potenzialità dell'altro per come è, chi provoca la libera iniziativa della persona altrui a giocarsi nel rischio del conoscere.

---

[65] M. I. Fandiño Pinilla, *Elementi di didattica della matematica,* in a cura di G. Bolondi, M. I. Fandiño Pinilla, *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica,* EdiSES, Pozzuoli (Na) 2012a, p. 63.

[66] Polya, cit. p. 400.

[67] D'Amore, cit. p. 225.

[68] *Ivi,* p. 224.

[69] M. Fandiño Pimilla, *Insegnare la matematica, apprendere la matematica,* in a cura di G. Bolondi, *Perché studiare la matematica,* Pearson, Orio Litta (Lo) 2012b, p. 170.

[70] Freudenthal, cit. p. 72.

> Per diventare maestri occorre aver incontrato maestri.[71]

Quindi l'apprendimento può avvenire solo dentro un rapporto tra docente e studente, in cui però il docente deve permettere allo studente di percorrere la sua strada e di osare usando creatività, fantasia e intuizione. Sarà poi dalla riflessione sulle soluzioni trovate o non trovate che insieme studenti e docente arriveranno alla conoscenza, che adesso sarà il risultato di un'esperienza fatta dagli studenti e non la notazione passiva e a-critica di ciò che è scritto alla lavagna:

> L'insegnante deve avere il coraggio, come abbiamo detto, di scendere dalla cattedra e lavorare fianco a fianco agli studenti, abbandonando dogmi e giaculatorie.[72]

L'educazione è, dunque, un rapporto e il docente è un "maestro"[73] che ha a cuore la crescita di chi gli è affidato. Come il docente può diventare maestro? Quali caratteristiche e attenzioni dovrà avere?

Una base pratica utile per il percorso da fare è in ciò che ha scritto Polya nei suoi dieci comandamenti dell'insegnante:

> I dieci comandamenti dell'insegnante:
> 1) Abbi interesse per la tua materia.
> 2) Conosci la tua materia.
> 3) Conosci i modi secondo i quali si impara: il miglior modo per imparare qualsiasi cosa è di scoprirla da soli.
> 4) Cerca di leggere sul viso degli studenti, cerca di capire le loro aspettative e le loro difficoltà; mettiti al loro posto.
> 5) Dai loro non soltanto informazioni, ma anche "saper-come", attitudini mentali, abitudine al lavoro metodico.
> 6) Fai loro imparare ad indovinare.
> 7) Fai loro imparare a dimostrare.
> 8) Cerca quegli aspetti del problema in questione che possono essere utili per i problemi futuri - cerca di mettere in evidenza lo schema generale che sta dietro la situazione concreta presente.
> 9) Non rivelare subito tutto il segreto - fallo indovinare dagli studenti prima di dirlo - fa loro scoprire da soli quanto è possibile.
> 10) Suggeriscilo, non forzarlo.[74]

Quanto più noi docenti riusciremo ad avere in mente queste indicazioni tanto più aiuteremo gli studenti a fare una vera esperienza e a crescere nelle loro competenze matematiche e non.

---

[71] Manara, cit. p. 14.

[72] F. Peiretti, *Matematica come e per chi,* in a cura di G. Bolondi, *Perché studiare la matematica,* Pearson, Orio Litta (Lo) 2012, p. 32.

[73] Manara, cit. p. 14.

[74] Polya, cit. p. 377.

Lo studente deve avere la possibilità di confrontarsi con problemi riferiti al suo mondo, in modo più o meno diretto, e da questi deve nascere la motivazione[75] per migliorare le proprie conoscenze, abilità e competenze. Si rende quindi necessario rimettere al centro della didattica i problemi e la loro risoluzione.

2.2 Scoprire la matematica

In quest'ultimo paragrafo approfondiremo come e perché i problemi possono essere utili nel migliorare il coinvolgimento degli studenti e nel far crescere le loro competenze. Specifichiamo, prima di tutto, cosa intendiamo con *competenza in matematica* e *competenza di matematica* secondo la distinzione di Fandiño Pinilla:

> La *competenza in matematica* si centra nella disciplina matematica, riconosciuta come scienza costituita, come oggetto proprio, specifico di conoscenza. L'allievo entra in contatto con saperi specifici, saperi che la società ha inglobato nelle conoscenze riconosciute come base per un dignitoso ingresso al suo interno. […]
>
> La *competenza di matematica* si riconosce quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in un senso matematico. L'atteggiamento analitico o sintetico, con il quale alcune persone affrontano situazioni problematiche, è un esempio di questo tipo di competenza. […] Il gusto e la valorizzazione della matematica sono alcuni degli aspetti utili per orientare il raggiungimento della matematica.[76]

Il secondo tipo di competenza è sicuramente quella che può risultare più interessante sia per gli studenti, sia per l'istituzione scolastica in quanto mira a sviluppare la capacità di guardare il mondo in modo matematico. Questo obiettivo dovrebbe essere al centro della progettazione didattico in modo tale che le diverse UDA mirino allo sviluppo di questa attitudine[77]. Ciò viene sostenuto anche da Polya che parlando dei problemi "enunciati a parole" cioè problemi reali, si esprimeva così:

> *Perché problemi enunciati a parole?* Spero che scandalizzerò poche persone asserendo che il più importante compito dell'istruzione matematica nelle scuole secondarie è di insegnare l'impostazione delle equazioni per risolvere problemi enunciati a parole. Ma vi è un forte argomento a favore di questa opinione.
>
> Risolvendo un problema enunciato a parole con l'impostare equazioni, lo studente *traduce* una situazione reale in termini matematici: egli ha una opportunità di sperimentare che i concetti matematici possono essere riferiti alla realtà, ma che i riferimenti devono essere accuratamente

[75] P. Canetta, *Premessa all'edizione italiana,* in G. Polya, *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi,* Feltrinelli, Milano 1979, p. VIII.

[76] Fandiño Pinilla 2012b, cit. p. 164.

[77] *Ivi,* p. 165.

elaborati. Questa è la prima opportunità offerta dal curriculum per questa esperienza basilare. Questa prima opportunità può anche essere l'ultima per uno studente che non userà la matematica nella propria professione.[78]

Quindi ciò che ultimamente sembra uscito dal panorama della scuola italiana (solo dall'anno scolastico 2014/2015 sembra che stia iniziando un'inversione di tendenza con l'introduzione di problemi reali nella seconda prova dell'esame di maturità del liceo scientifico e delle scienze applicate), viene posto dall'autore come l'obiettivo principale dell'istituzione scolastica.

L'importanza che viene riconosciuta al problema è legata anche al fatto che le dinamiche di apprendimento informali e non formali sono sempre legate alla risoluzione di problemi. Fin dall'infanzia i bambini cercano un senso, una motivazione in ciò che vedono, in quanto siamo naturalmente portati a cercare i nessi e le relazioni di causa-effetto[79]. Infatti, il nostro obiettivo come essere umani non è conoscere le regole di calcolo e le regole geometriche, ma risolvere problemi; a questo scopo acquista senso conoscere le regole di calcolo e le regole geometriche, dimenticare questo sarebbe come perdere il senso di ciò che proponiamo agli studenti. Per favorire il recupero del senso della matematica come strumento per risolvere problemi, al docente si chiede la volontà e la capacità di spiegare il mondo da un punto di vista matematico in modo tale che la matematica appaia naturalmente e non in modo forzato[80].

Per questo motivo possiamo dire che la risoluzione di problemi è la strada maestra per la comprensione della matematica e ne è l'essenza come ben descritto da Manara:

> L'attività di risoluzione di problemi è la strada maestra per comprendere che in matematica è necessario saper guardare i propri oggetti con le domande "giuste", con il punto di vista che essi richiedono. Infatti è inerente alla matematica, assai più dei calcoli e delle formule, l'attitudine mentale a saper stare di fronte alla realtà come problema, attitudine che richiede quella forma di "osservazione", intesa in un senso più profondo e più astratto, che è veramente caratteristico della matematica: "guardare" e "vedere" con gli occhi della mente, giungere con la ragione a cose che gli occhi fisicamente non vedono.[81]

Inoltre, poiché un problema è per sua natura qualcosa che ci pone nella posizione di cercare un'azione appropriata per raggiungere un obiettivo che non è immediatamente ottenibile[82], esso pone lo studente nella zona di "sviluppo prossimale"[83] dove deve utilizzare le proprie capacità per

---

[78] Polya, cit. pp. 66-67.

[79] Manara, cit. p. 17.

[80] Fandiño Pinilla 2012b, cit. p. 168.

[81] Manara, cit. p. 50.

[82] Polya, cit. p. 131.

[83] L. Vygotsky, *Pensiero e linguaggio*, Giunti, Firenze 1966, p. 129.

scoprire qualcosa che non ha ancora scoperto ma che ha tutti gli strumenti per scoprire e comprendere. Un'esperienza del genere convincerebbe il ragazzo che è alla sua portata uscire dal conosciuto per addentrarsi in ciò che non è ancora noto[84], il che permetterebbe allo studente di sviluppare una modalità di approccio al non noto tipico del *growth mindset*.

Il docente dovrà guidare e sostenere il ragazzo che si troverà di fronte a problemi nuovi in cui cercherà di mettere in campo tutte le sue risorse al fin di arrivare ad una soluzione. All'inizio, probabilmente, lo studente andrà per tentativi e per approssimazioni, questo non va scoraggiato ma favorito in quanto lo studente per proporre una soluzione avrà fatto un lavoro di analisi e sintesi della problematica. Ruolo del docente sarà mostrare e giustificare come, invece, l'impostazione formale del problema e la risoluzione di equazioni permetta di arrivare ad una soluzione in modo più efficace[85] all'interno di una dialettica con gli studenti e non come una soluzione imposta che riporterebbe al vecchio paradigma.

Apparentemente questo metodo sembrerebbe più lungo, ma il permettere agli studenti di fare un'esperienza e di mettersi in gioco consente loro di afferrare più saldamente i temi proposti e questo si traduce in un'ottimizzazione dei tempi nel momento in cui sarà necessario formalizzare quanto appreso. Al contrario, perdere il senso di ciò che si fa rende sicuramente più ardua e meno profonda[86] la comprensione.

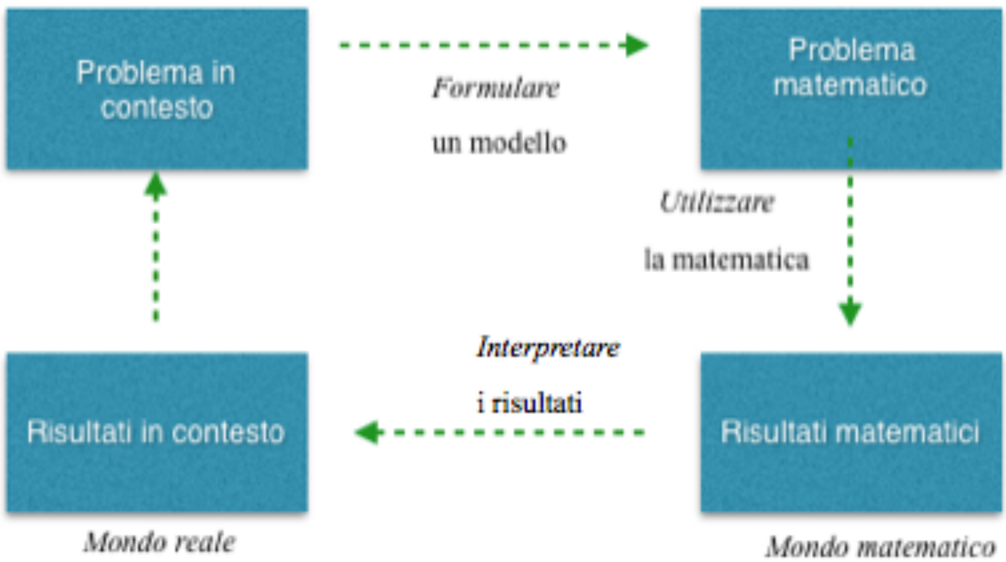


Fig. 4: Ciclo per la risoluzione di un problema.

[84] Manara, cit. p. 149.

[85] Polya, cit. pp. 28-29.

[86] Manara, cit. p. 106.

Per le motivazione suddette credo che una didattica che segua questo ciclo (sintetizzabile nello schema di fig. 4[87]):

- partire da una problematica reale;
- analizzarla e modellizzarla usando gli strumenti matematici;
- risolvere le equazioni del modello;
- confrontare la soluzione trovata con i vincoli del problema iniziale;
- giudicare se abbiamo trovato una soluzione e in caso contrario modificare il modello;

possa riuscire a cambiare il modo che i ragazzi hanno di vedere la matematica e questo avrebbe una ricaduta anche sui risultati scolastici che oggi, confrontati con gli standard europei risultano deficitari (nel prossimo capitolo mostrerò un curriculum triennale progettato, erogato e valutato partendo da questi presupposti):

> […] Per la matematica, emerge un dato molto significativo, che "fotografa" in maniera sintetica lo stile di insegnamento e le caratteristiche dell'apprendimento delle nostre scuole: gli studenti italiani riescono a reggere il confronto con i loro coetanei (posizionandosi sulle medie OCSE) se si guarda il processo dell'*utilizzare*[88], mentre sono drammaticamente più scarsi per i processi di matematizzazione orizzontale. in altre parole, la nostra scuola raggiunge risultati discreti (nella media) quando si tratta di fare matematica in contesto matematico, ma non riesce a mettere in grado i ragazzi di utilizzare la matematica come strumento per comprendere il mondo, descriverlo, operare su di esso.[89]

Questo dato, oltre alle osservazioni su che cosa può rendere l'apprendimento significativo per gli studenti, sostiene la necessità di ripensare il *curriculum* matematico riportando al centro problemi che partano da contesti reali di cui il discente possa fare esperienza, scardinando una didattica che ultimamente è incentrata solo sull'*utilizzare* la matematica, dando poco spazio alle altre operazioni tipiche del fare matematica. Occorre, però, intendersi su che cosa indichiamo quando parliamo di esercizio e quando parliamo di problemi, per fare questo, seguo le definizioni date da D'Amore:

> Si fa di solito ormai una distinzione sensata, che è entrata anche nella pratica didattica, tra *esercizio* e *problema*.
>
> - Si ha un *esercizio* quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se ancora in corso di consolidamento. Gli esercizi dunque rientrano nella categoria delle prove a scopo di verifica immediata o di rafforzamento.

---

[87] G. Bolondi, *Le valutazioni nazionali e internazionali,* in a cura di G. Bolondi, M. I. Fandiño Pinilla, *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica,* EdiSES, Pozzuoli (Na) 2012, p. 194.

[88] *Utilizzare la matematica* - vuol dire risolvere le equazioni di un modello algebrico precedentemente costruito o risolvere un esercizio di matematico.

[89] Bolondi, cit. p. 196.

- Si ha invece un *problema* quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore; alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione; a volte è la successione stessa delle operazioni risolventi a richiedere un atto creativo da parte del risolutore.[90]

In conclusione del capitolo riportiamo una frase di Anatole France:

> Non cercate di soddisfare la vostra vanità insegnando loro troppe cose. Risvegliate la loro curiosità. È sufficiente aprire la mente, non sovraccaricarla. Mettetevi soltanto una scintilla. Se c'è della buona materia infiammabile prenderà fuoco[91]

Per ricordarci che scopo dell'insegnamento è l'apprendimento e la crescita dello studente, questa finalità dobbiamo averla sempre presente sia nella preparazione delle lezioni sia quando siamo in aula davanti ai nostri allievi. Credo che il metodo per problemi, quindi un'impostazione meno rigida, possa aiutare ad attivare la razionalità complessiva della persona, rendendola più desiderosa di scoprire la realtà e di conoscere[92].

Nel prossimo capitolo dopo aver visto quali sono le caratteristiche dell'insegnante di Cometa presenterò il percorso didattico nato dalla sintesi di quanto discusso in questi due capitoli.

---

[90] D'Amore, cit. p. 284.

[91] A. France, *Le jardin d'Epissure,* Calman-Lévy, Paris 1923,, p. 200.

[92] Manara, cit. p. 183.

Capitolo 3: L'e-book per il percorso triennale per l'acquisizione delle competenze

La sperimentazione oggetto della tesi si è svolta presso il centro di *Istruzione e Formazione Professionale* (in seguito IeFP) di *Cometa Formazione s.c.s* nelle classi del triennio di "Operatore del legno - manutenzione di immobili" in cui ho insegnato matematica nel corso degli ultimi cinque anni.

3.1 Dalla visione di Cometa all'esperienza dell'insegnante

> (…) chi si avvicina alla conoscenza come un esploratore si accinge a partire per un viaggio avventuroso e pieno di imprevisti, dove tutto e anche il contrario di tutto può ugualmente succedere, dove bussole e compassi sono strumenti certo utili ma dei quali non ci si può fidare, dove tutto quindi riposa sulle sue spalle e dove il senso del cammino non ha senso se non dopo averlo percorso.
> Questo rapporto con il sapere, che chiameremo (…)"epico", non si sente messo in pericolo dalla scoperta della complessità, anzi, ne è stimolato ed entusiasmato.[93]

Questa citazione descrive come in Cometa cerchiamo di vivere il lavoro e le sfide/ opportunità che quotidianamente ci vengono lanciate dai nostri studenti che generalmente hanno esperienze di bocciature e alle scuole medie venivano considerati gli "ultimi". La maggior parte di loro in terza media avrà sentito questa frase: "Tu non sai fare nulla, quindi vai in un professionale". Attenzione, da notare, non "non sai studiare ma hai delle capacità manuali", senza valorizzare alcuna potenzialità l'indicazione si limita a suggerire, in negativo, una scelta di ripiego per chi, apparentemente, non sa fare nulla.

Questo genera un quadro iniziale di studenti privi di autostima. La situazione, già grave in materie come italiano, inglese, storia e scienze, diventa drammatica per la matematica che dagli studenti è percepita come difficile, astratta e inutile.

In questo scenario è necessario un tipo di intervento che consideri ciò che è descritto nel seguente passo:

> L'una e l'altra cosa sono tenute dalla scuola in minimo conto. L'autostima dello studente è scambiata infatti per presunzione, l'autoaccettazione come un esplicito riconoscimento da parte dello studente di non valere un granché […]. Chi tra gli insegnanti è consapevole che gran parte dell'apprendimento dipende non tanto dalla buona volontà, quanto dall'autostima che innesca la

93 A. Munari, *Il sapere ritrovato,* Guerini e associati, Roma 1993.

> buona volontà? […] Chi ascolta uno studente con interesse riconoscendogli un minimo di personalità, su cui egli possa continuare a edificare invece che a demolire?[94]

In Cometa Formazione abbiamo avuto la possibilità di osservare questa dinamica, il che implica che all'inizio dell'anno scolastico il primo lavoro da compiere è iniziare a ricostruire l'autostima dello studente. Di conseguenza, il primo obiettivo è costituire delle vere relazioni[95] nel senso profondo del termine.

Per creare queste relazioni e questi nessi di significato, in cui lo studente possa sentirsi stimato e capace di fare qualcosa di utile, in Cometa abbiamo sviluppato una metodologia didattica detta "dal fare al sapere", con questa stiamo registrando notevoli miglioramenti sia nella considerazione che gli studenti hanno di loro stessi, sia nella costruzione di un contesto classe più stimolante per l'apprendimento.

Presento in breve come si articola il metodo:

Gli studenti, dopo la prima settimana di scuola, incontrano un cliente che assegna loro un tema su cui lavorare e, dopo circa un mese, assegna un prodotto da realizzare che dovrà essere studiato e sviluppato durante l'anno scolastico per poter essere venduto alla fine dell'anno.

Il lavoro durante l'anno scolastico è scandito dalle stesse fasi del processo produttivo di una qualunque azienda: ideare, progettare, realizzare, valutare. Queste fasi, che si ripetono nel primo e nel secondo quadrimestre insieme ad amministrare e promuovere, diventano le unità di apprendimento del nostro anno scolastico:

Ideare:

All'interno di questa fase gli studenti ricercano immagini, colori, poesie, musiche, ecc… relative al tema che è stato assegnato dal committente. Le immagini, i colori e i testi verranno applicati su un Pannello Tendenza, che è un pannello o un book dove vengono raccolte tutte le suggestioni relative al tema. Alla fine si questa fase, il committente verifica i lavori prodotti dai ragazzi e, dopo aver assegnato il prodotto da realizzare, sceglie dal Pannello Tendenza i colori e i temi che vorrà ritrovare sul prodotto (es. gioco tridomino, alzatine per dolci, scrittoio, comodino, letto, armadio).

Progettare:

94 U. Galimberti, *L'ospite inquietante. Il nichilismo e i giovani,* Feltrinelli, Milano, 2007.

95 Rel-azione da relatio-onis da re-ferre = riportare indietro, riportare "a sé" ma anche rispondere all'altro avendo ascoltato l'altro, avendo decodificato il suo bisogno/desiderio (assunzione di realtà realmente, contestualmente perseguibile). Ciò significa essere in relazione con (con-esserci); viceversa, l'esperienza di apprendimento risulta scollegata dal mondo e dall'esperienza degli studenti (demotivazione, noia, ecc…).

In questa fase gli studenti sviluppano un progetto del prodotto richiesto dal committente. Durante questa fase, oltre al disegno tecnico, si riproducono anche gli esecutivi, cioè i disegni eseguiti al computer con opportuni programmi. Contemporaneamente, in laboratorio si iniziano a sperimentare quali essenze e quali accoppiamenti di essenze legnose sono più opportune per il prodotto commissionato. Alla fine di questa fase il cliente sceglie il progetto o i progetti che desidera vengano prodotti.

Realizzare:

In questa fase abbiamo il momento della produzione del prototipo scelto dal cliente per presentargli, all'incontro successivo, un modello in scala reale. Nel caso in cui il cliente sia soddisfatto del prototipo, si passerà alla produzione.

Valutare:

Alla fine del primo quadrimestre, dopo la valutazione da parte del cliente del lavoro fatto, gli studenti svolgono una prova, detta Esame di Fine Quadrimestre, in cui devono mostrare di essere in grado di utilizzare in autonomia le lavorazioni, le competenze, le abilità e le conoscenze incontrate durante il quadrimestre. Inoltre, devono riuscire ad analizzare in modo critico il processo di lavoro effettuato per proporre dei punti di miglioramento per le lavorazioni successive.

Amministrare:

Questa unità di apprendimento dura per tutto l'anno scolastico, in essa sono coinvolte le discipline di economia, informatica, matematica e scienze. In questa UDA si sviluppano le competenze di queste materie che supportano lo sviluppo del processo produttivo, per esempio in matematica e economia si lavora molto sul calcolo del preventivo e sulla valutazione dei materiali necessari per realizzare il prodotto, e sulle conoscenze, abilità e competenze connesse. Quando il cliente entra in aula devono essere stati prodotti i seguenti documenti: book di progetto, presentazione avanzamento lavoro, preventivo, contratto.

Promuovere:

In questo ambito che, come Amministrare, si sviluppa per tutto l'anno scolastico, si trovano le materie di aria letteraria: italiano, storia, inglese e arte. Questa UDA si occupa delle ricerche storiche relative al prodotto e della redazione dei report del lavoro svolto sia in italiano che in inglese. Si procede anche alla ricerca di un metodo di promozione del prodotto stesso che sia appropriato ed accattivante.

Realizzare questo tipo di progettazione richiede un notevole lavoro collegiale, giustificato da almeno quattro punti positivi:

1) gli studenti già dalle prime settimane producono oggetti concreti, che un cliente esterno reputa avere un valore. Questo permette al ragazzo di rendersi conto di essere in grado di fare qualcosa di bello e di valore.

2) Nel realizzare questi prodotti e la documentazione necessaria, lo studente utilizza le competenze delle materie di base (inglese, italiano, matematica, storia), quindi anche queste materie, che alla fine della terza media sembravano astratte o in cui lo studente si sentiva assolutamente incapace, ora diventano un'esperienza perché utilizzabili per produrre un prodotto pensato da lui. Questo aumenta l'interesse per le materie e risana il rapporto del ragazzo con la conoscenza. L'importanza degli esami di fine quadrimestre è proprio di poter certificare il cammino che è stato compiuto.

3) Con questo metodo lo studente fa esperienza dell'unità del sapere, cioè che ogni materia concorre alla sua formazione personale e professionale. Per gli studenti intuire questo passaggio è fondamentale perché genera interesse per le varie attività che vengono proposte dalla scuola.

4) Alunni come i nostri si sentono provocati quando vedono degli adulti che si muovono nella stessa direzione. Si sentono sollevati e sostenuti dal fatto che un gruppo li sta guidando in una direzione ben precisa, invece che sentirsi disorientati da tanti individui che li guidano in direzioni diverse.

Il metodo è uno strumento che sarebbe insufficiente senza il coinvolgimento umano di tutto il corpo docente; quindi per creare un contesto positivo, oltre all'interesse degli studenti per ciò che viene proposto, è necessario anche l'interesse del docente per loro. Come chiedeva Manara[96], occorrono dei maestri.

Dalla necessità di un coinvolgimento personale deriva la necessità di esplicitare come cerco di pormi con i miei studenti e come imposto la mia didattica:

Tutto quello che propongo, sia come spiegazione sia come attività da far fare agli studenti, dev'essere utile, secondo uno dei due significati:

1) Nel senso di qualcosa che verrà utilizzato praticamente nell'ambito della nostra vita e del progetto che gli studenti stanno sviluppando in falegnameria[97].

2) Nel senso di qualcosa che aiuta la nostra formazione come persone e favorisca lo sviluppo delle nostre capacità di pensiero e di ragionamento.

---

[96] Manara, cit. p. 14.

[97] Roncalli 2012, cit. p. 243.

Per aiutare gli studenti a cogliere l'utilità e il senso di quello che di volta in volta viene presentato, le lezioni sono pensate con esempi a partire dalla loro esperienza e con una continua disponibilità al dialogo. In quest'avventura, in cui ognuno deve sviluppare le proprie abilità, l'esercizio, il compito e il problema sono un momento di "allenamento", per capire chi si sta attardando e quindi ha bisogno di un aiuto o di una presentazione diversa da quella che è andata bene per il resto della classe[98]. Quest'attenzione è indispensabile perché ognuno venga pensato per la sua unicità e non come parte di una massa. Ciò passa anche dal costruire un contesto d'apprendimento positivo, favorito da questi due ingredienti:

1) una programmazione interdisciplinare che parta dal prodotto che gli studenti stanno sviluppando in laboratorio. Questo permette loro di vedere in atto il significato e l'importanza di uno specifico elemento di conoscenza. Per i nostri studenti, che credevano di non avere la capacità di poter imparare, e di conseguenza avevano rifiutato lo studio, questo è un aspetto indispensabile che richiede tanto lavoro da parte dei docenti ma con risultati notevoli per quanto riguarda la rimessa in moto degli studenti[99];

2) un docente pronto ad accogliere le sollecitazioni e le emozioni che, in modo a volte piuttosto" brutale ", gli studenti comunicano. Disponibile ad andare a prendere gli studenti in quel punto in cui si sono bloccati, anche se questo potrebbe voler dire che il docente di matematica e di italiano debbano recarsi con gli studenti al laboratorio di falegnameria per lavorare insieme a loro. In breve, ci vuole un "maestro" per cui veramente la cosa più importante sia lo sviluppo personale globale dei suoi alunni e non soltanto che conoscano a perfezione la matematica. Questa affermazione potrebbe sembrare esulare dallo specifico del lavoro direttamente ma non è così perché uno studente che sviluppa la sua personalità, sviluppa anche le sue capacità critiche e di giudizio e quindi la sua capacità di comprensione e interpretazione della realtà e delle singole materie.

Questi due punti sviluppati in Cometa nascono dalla certezza che non può esistere un metodo didattico efficace senza essere nello stesso tempo metodo educativo. I risultati ottenuti sono veramente strabilianti: c'è la possibilità di osservare studenti che cambiano superando apatia e scetticismo perché ricominciano a fidarsi dell'adulto e si appassionano a quello che succede a scuola. Tutto ciò ha una ricaduta positiva nel rendimento scolastico ed ha migliorato anche i risultati didattici[100]. Infatti, grazie all'instaurarsi di un contesto positivo in aula, è possibile alzare il livello

[98] Sandrone 2013, cit. p. 209-210.

[99] Roncalli 2011, cit. pp. 435-436.

[100] Come mostrerò alla fine di questa tesi.

della proposta didattica perché questo non ha demoralizzato gli studenti che l'hanno colto come una sfida che insieme era possibile affrontare.

Questa impostazione, si può sintetizzare dicendo che cerco di essere un docente di tipo "epico" cioè pronto e "con gli occhi aperti" per lasciarsi interrogare da quello che succede in aula, desideroso di capire e di scoprire che cosa riesce ad appassionare ogni studente nella sua unicità e disposto a cambiare in diretta l'impostazione della lezione, se sollecitato in modo diretto o indiretto dai propri studenti in quanto affascinato dal non conosciuto e stimolato dal ricercare una modalità che vada bene per quella classe, in quella data precisa e con quello stato d'animo.

Tutto ciò è descritto nella seguente citazione:

> La narrazione ci stimola a essere più democratici, mette in gioco la dimensione dell'"umiltà", per cui se la parola "umile" rimanda etimologicamente al termine "humus", ossia terra[101], la pratica della narrazione è fertile "esperienza di discesa verso l'altro", che può trovarsi momentaneamente in una "posizione più in basso", in una situazione provvisoria di maggiore fragilità, di dipendenza, di minore competenza, sapere o esperienza, comunque di differenza da noi stessi, a volte, una diversità di punti di vista e di "opzioni di mondo", che ha ragioni molteplici e che, se accolta in modo pensato e valorizzato responsabilmente, può contribuire alla crescita e alla maturazioni di ognuno di noi.[102]

Credo che questo metodo sia adeguato per gli studenti di Cometa, che devono percepire il tuo essere lì per loro, non per una prestazione ma perché ognuno di loro ti interessa veramente. Credo che la modalità della narrazione, anche se per certi versi sembra possa far perdere il controllo totale della lezione, sia la più adeguata perché lascia spazio alle loro esperienze, cioè alla possibilità che loro ti raccontino il rapporto che hanno avuto in precedenza con quel tipo di conoscenza, nel mio caso la matematica. Loro stessi ti aiutano a sviluppare questa visione dell'insegnamento:

> Lungo questa direzione, l'insegnate narrativo è convinto che sia irrinunciabile la ricomposizione di insegnamento-apprendimento-formazione-educazione. Egli non è anacronistico e insensato rivoluzionario che vuole eliminare i "contenuti" apprenditivi, ma è attento alla "forma" con cui propone i saperi ai ragazzi, per cui, ancora una volta, è attento a "costruire" un'esperienza apprenditiva dentro un contesto narrativo e relazionale aperto a "una pluralità di prospettive". È un "esploratore di mondi possibili", e accompagna gli studenti ad essere tali.[103]

---

101 P. Mottana, *Miti d'oggi nell'educazione. E opportune contromisure,* Franco Angeli, Milano 2000, p. 89.

102 M. Castiglioni, *La narrazione nella relazione educativa: un percorso di senso e di metodo,* in a cura di C. Bargellini e S. Cantù, *Viaggi nelle storie. Frammenti di cinema per l'educazione interculturale e l'insegnamento dell'italiano a stranieri,* Libera Università dell'Autobiografia, 2011, p. 6.

103 *Ivi,* p. 16.

3.2 I pilastri del percorso triennale

Le classi in questione sono prevalentemente maschili: si contano soltanto due ragazze nelle tre classi in oggetto. Tranne se diversamente indicato, mi riferirò con L1, L2 e L3 rispettivamente alle classi prima, seconda e terza dell'anno scolastico 2014-2015.

Alla fine del terzo anno gli studenti devono sostenere un esame di qualifica professionale (III livello di qualifica europeo) che consta di una prova sulle materie di base inviata dall'ufficio regionale (inglese, italiano e matematica), una prova professionale redatta dalla scuola e un colloquio orale. L'esame ha come scopo valutare il raggiungimento delle competenze obiettivo formativo del percorso di qualifica. Le competenze, le abilità e le conoscenze matematiche che devono essere trattate sono di due tipi:

- 4 competenze, che fanno riferimento al quadro degli assi culturali degli OSA[104] di base validi per le prime e le seconde classi del d.m. 139/2007 Fioroni e devono essere erogate entro il secondo anno, che hanno un taglio più "disciplinare";
- 1 competenza regionale che fa riferimento agli OSA relativi ai percorsi di sperimentazione di istruzione e formazione professionale della regione Lombardia e tende a sottolineare i legami tra l'ambito scientifico in generale e l'ambito professionale, da erogare e valutare entro il terzo anno.

Riporto le tabelle con le competenze e la spiegazione dei codici utilizzati per riferirsi agli elementi di competenza nell'allegato A.

La metodologia utilizzata per il raggiungimento degli obiettivi formativi sarà la sintesi di quanto esposto nei due capitoli precedenti e si fonderà sui seguenti pilastri:

- utilizzo del contesto professionale come ambito in cui lo studente si imbatte in problemi[105];
- utilizzo del contesto reale per mostrare la generalità della modellizzazione matematica[106];
- personalizzazione e individualizzazione[107];

Quindi saranno favorite proposte didattiche che promuovano negli studenti il *growth mindset*[108], cioè il porsi in modo costruttivo davanti alle difficoltà e alle critiche, attraverso la

[104] Obblighi Specifici di Apprendimento

[105] Cfr paragrafo 1.1.2.

[106] Cfr paragrafo 2.1.

[107] Cfr. paragrafo 1.1.3.

[108] Cfr paragrafo 1.2.

prevalenza di una didattica impostata su problemi[109], sull'analisi guidata degli stessi e sulla scoperta di ciò che essi richiedono.

A supporto di questo impianto è stato essenziale l'utilizzo delle nuove tecnologie come strumenti per sorreggere l'apprendimento dello studente, in particolare sono stati usati:

- una piattaforma *Moodle* di *e-learning*;
- quiz digitali per la valutazione formativa (*formative assessment*);
- *app* specifiche per la didattica della matematica;
- *forum* per la condivisione di idee e come canale sempre aperto in cui gli studenti possono porre domande e confrontarsi tra loro.

Il materiale prodotto per la sperimentazione è andato a costituire un *e-book* che segue l'impostazione proposta: il punto di inizio è porre problemi di ambito reale che partano o dalla realtà professionale degli studenti o altrimenti da fenomeni connessi col mondo in generale, per risalire alle competenze necessarie al fine di trovare una soluzione. Pertanto, per poter visionare il materiale completo sarà necessario consultare l'*e-book* che accompagna questa tesi, lì sarà possibile consultare in modo completo le schede e i compiti proposti agli studenti..

Per la progettazione delle unità formative è stato utilizzato il *format* chiamato UBD[110] (*Understanding by Design*[111]) che mi è stato presentato durante il mio viaggio di formazione a Chicago presso l'Università De Paul.

---

[109] Cfr. 2.2.

[110] G. P. Wiggins, J. McTighe, *Understanding by design,* ASCD, Alexandria, Virginia USA 2005.

[111] La spiegazione del *format* in tutti i suoi aspetti si trova nell'allegato B.

3.3 La narrativa della sperimentazione svolta

La sperimentazione svolta è stata suddivida in 6 UBD:

Classe	Argomento della UBD
L1	Il computo metrico
L1	Il preventivo
L2	Modelli matematici per la gestione della bottega: proporzionalità e modelli di dipendenza lineare
L2	Il baricentro
L2	Probabilità e statistica
L3	Modelli matematici lineari e quadratici per la gestione della bottega

Tab. 1: UBD del percorso triennale.

Non tutti gli argomenti sono stati presentati col metodo delle UBD per problemi che si sono mostrati nel corso della sperimentazione legati ai tempi effettivamente a disposizione, è stata però tenuta in considerazione l'indicazione di Fandiño Pinilla riguardo all'importanza di individuare *i nuclei fondanti* della materia e presentare almeno questi con situazioni a-didattiche[112]. Alcuni temi sono assenti in quanto il lavoro di tesi ha coinvolto anche una riprogrammazione della presentazione dei diversi argomenti nei tre anni, il che ha avuto come conseguenza che alcuni argomenti non sono stati presentati nell'anno scolastico 2014/2015. Questo è il caso, per esempio, delle equazioni di primo grado che fino all'anno scolastico 2013/2014 venivano presentate in prima, ma a seguito della rivisitazione dei programmi sono state spostate all'inizio della seconda con la conseguenza che nell'anno scolastico in oggetto non sono state svolte in nessuna classe.

3.3.1 Prima legno: UBD 1 - Computo metrico (Settembre 2014 - Gennaio 2015)

In questo paragrafo tratteremo il percorso didattico sul computo metrico, sulla geometria piana e sugli accenni di geometria solida svolto nel primo quadrimestre dell'anno scolastico 2014/2015 in una classe costituita da 24 studenti maschi.

La scelta del tema come primo argomento è dovuta al fatto che, fin dal primo giorno di laboratorio, gli studenti si imbattono in problematiche relative alla geometria sia nel momento di

[112] Fandiño Pinilla 2012b, cit. p. 63.

progettazione che nella realizzazione dei primi manufatti. Alla fine della classe prima gli studenti dovranno essere in grado di redigere un preventivo partendo dal disegno esecutivo del prodotto.

Come mostrerò nella UBD (tab. 2) il tema trattato permette di lavorare contemporaneamente su diversi elementi di competenza:

<table>
<tr><td colspan="2">Titolo: Geometria e calcolo del materiale necessario per la realizzazione di un mobile</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Step 1: Risultati desiderati</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Comprensione di lunga durata (Enduring understanding)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gli studenti comprenderanno che la geometria è fondamentale per progettare la costruzione di un mobile.</td></tr>
<tr><td align="center">Domande essenziali</td><td align="center">Competenze, abilità e conoscenze</td></tr>
<tr><td>• Quali “strumenti” può darci la geometria per diventare un falegname?</td><td>M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.
MA2.1: Riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con il linguaggio naturale.
MA2.2: Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete.
MA2.5: In casi reali di facile leggibilità risolvere problemi di tipo geometrico, e ripercorrerne le procedure di soluzione.
MC2.4: Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Step 2: Prove di valutazione</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gli studenti devono mostrare come partendo da un progetto siano in grado di selezionare i dati e scomporre le figure al fine di calcolare la quantità di legno necessario per realizzare un mobile e disegnare il manufatto su GeoGebra.</td></tr>
<tr><td align="center">Sommario delle prove per competenze</td><td align="center">Griglia di valutazione</td></tr>
<tr><td>• Scheda con distinta del materiale necessario.
• Disegno del prodotto su GeoGebra.</td><td>• Risoluzione problemi (Calcolo, fasi del procedimento, risultato).
• Riconoscimento figure semplici e scomposizione figure complesse.
• Determinazione area e perimetro.</td></tr>
<tr><td align="center">Auto-valutazioni</td><td align="center">Altre prove</td></tr>
<tr><td>Formative assessment
Diario del processo (che cosa ho imparato? Che cosa ho imparato partendo dai miei errori? Su cosa devo lavorare di più?)</td><td>Compiti intermedi disciplinari.</td></tr>
</table>

Step 3: Attività di apprendimento	
Totale ore: 37	
Obiettivo	**Attività**
1) Valutare l’importanza della matematica nel loro lavoro.	Discussione: che cosa ne pensi della matematica nel tuo lavoro?
2-3) Valutazione del livello d’ingresso degli studenti.	Test d’ingresso
4) Definizione del concetto di area.	Discussione e lavoro in gruppo sul concetto di area.
5) Classificazione dei triangoli e enunciazione delle loro proprietà.	Rispondono alle domande in coppia.
6) Utilizzo del teorema di Pitagora.	Risoluzione problemi.
7) Descrizione dei trapezi e delle loro proprietà.	Rispondono alle domande in coppia.
8) Descrizione, parallelogrammi, rettangoli e loro proprietà.	Rispondono alle domande in coppia e risolvono problemi.
9) Descrizione rombo, quadrato, poligoni regolari e loro proprietà.	Ricerca (studio) in gruppo.
10) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati dei *formative assessment*).	
11) Valutazione.	Compito in classe (intermedio).
12) Spiegazione dei primi strumenti.	Introduzione di GeoGebra.
13) Costruzione geometrica dei triangoli.	Disegnare triangoli (GeoGebra).
14) Costruzione geometrica di quadrilateri e poligoni.	Disegnare quadrilateri (GeoGebra).
15) Costruzione geometrica di manufatti in legno “bidimensionali” (cornici, vassoi, ecc…).	Disegno di oggetti bidimensionali (GeoGebra).
16) Sintesi del percorso.	Diario del processo.
17) Valutazione.	Compito in classe (intermedio).
18) Definizione del concetto di volume.	Discussione e lavoro in gruppo sul concetto di volume.
19) Descrizione prismi e loro proprietà.	Rispondono alle domande in coppia.
20) Descrizione parallelepipedi, cubi e loro proprietà.	Rispondono alle domande in coppia.
21) Scomposizione figure complesse per la risoluzione di problemi.	Lavoro in gruppo.

22) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati dei *formative assessment*).	
23) Valutazione.	Compito in classe (intermedio).
24-27) Spiegazione dell'utilizzo delle proiezioni ortogonali per disegnare un oggetto tridimensionali.	Disegnare un mobile (GeoGebra).
28) Sintesi del processo.	Diario del processo.
29-30) Risolvere problemi dove gli studenti devono calcolare il legname necessario per la realizzazione di un mobile.	Risoluzione problemi in gruppo.
31) Valutare la comprensione da parte di tutti gli studenti.	*Formative assessment* completo di tutti i temi trattati.
32) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati del *formative assessment*).	
33) Sintesi del processo.	Diario del processo.
34-35) Valutazione	Esame di fine quadrimestre (calcolo del legno necessario per la realizzazione di un mobile, disegno in proiezione ortogonale su GeoGebra del mobile).
36-37) Sommario e sintesi dell'intera unità.	Correzione e conclusioni.

Tab. 2: UBD 1- Geometria e materiale necessario per la realizzazione di un mobile.

Gli argomenti trattati sono già stati incontrati dagli studenti nel corso della loro carriera scolastica, anche se l'approccio con cui erano stati affrontati era di tipo mnemonico. La geometria per loro era solo un ripetersi di formule senza entrare nei dettagli della loro formalizzazione e deduzione. Quindi, nel rivedere le diverse formule geometriche ho spronato gli studenti a cercare di trovare una motivazione che giustificasse le operazioni e le grandezze coinvolte in ogni espressione. La metodologia utilizzata consiste nel dare ad ogni coppia di studenti del tempo per riflettere sulla formula o per ricavarla loro stessi, osservando le simmetrie e le caratteristiche della figura considerata. Dopo questa fase, si procede alla discussione per trovare una motivazione comune.

Prima di svolgere l'UBD è stata fatta un'introduzione al fine di valutare il *mindset*[113] iniziale degli studenti[114], cioè la loro attitudine a porsi davanti ai problemi in modo più o meno costruttivo. I risultati ottenuti sono sintetizzati nella fig. 5. Più il risultato ottenuto è vicino a 60 più lo studente

[113] Dweck.

[114] Il test somministrato si trova nell'*e-book*

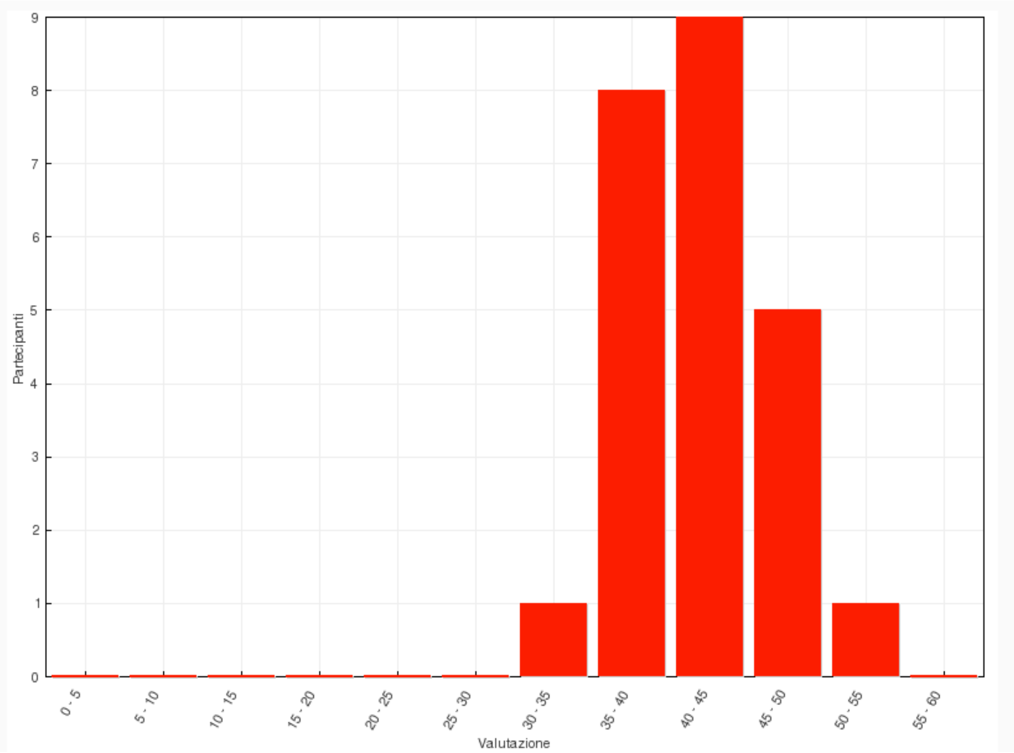


Fig. 5: *Mindset* L1 - 0 totalmente *fix,* 60 totalmente *growth.*

mostra un'attitudine al *growth mindset*, che è la capacità di porsi nella zona *prossimale*[115] della sua conoscenza investigando anche aspetti che lo mettono in difficoltà e che gli sono ignoti, più il punteggio è verso lo 0, più lo studente mostra un'attitudine al *fix mindset,* cercando di scappare da tutto ciò che è non noto o che gli genera fatica. Nella classe, che mostra una buona distribuzione, anche verbalmente ho cercato di costruire un clima d'aula che fosse orientato alla ricerca: lo studente è stato invitato a fare ipotesi e provare a verificarle senza che la correttezza o meno delle stesse servisse per giudicarlo. Questo è essenziale nel momento in cui si sta costruendo/scoprendo insieme la conoscenza.

Per spiegare agli studenti cosa fosse il *mindset* sono stati mostrati loro due video:

- il primo è il video che la *Nike* ha fatto per i mondiali in Brasile del 2014 dal titolo *Risk everything*[116];
- il secondo è il video che la *Khan Academy* ha fatto a favore della diffusione di un'atteggiamento di *growth mindet* e ha come titolo *#YouCanLearnAnything*[117].

[115] Vygotsky, cit. p. 129.

[116] https://www.youtube.com/watch?v=Iy1rumvo9xc

[117] https://www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=JC82Il2cjqA

Durante la visione di questi video gli studenti dovevano dire in quali personaggi, in quali scene o in quali frasi loro riconoscevano un "atteggiamento passivo" e in quali un "atteggiamento attivo". In ultimo, gli studenti hanno compilato un *feedback* sui video e su loro stessi:

1) Cosa pensi del video della Nike?

2) Cosa pensi del video della Khan Academy?

3) Quali aspetti ritieni comuni tra i due video?

4) Descrivi come ti senti quando ti trovi di fronte ad un ostacolo che non riesci a superare al primo tentativo in un gioco. Come ti comporti?

5) Descrivi come ti senti quando ti trovi di fronte ad un esercizio scolastico che non riesci a risolvere al primo tentativo. Come ti comporti?

6) Cosa pensi di questa lezione? È stata interessante? Cosa hai capito?

Le domande 4 e 5 sono state molto utili perché hanno messo in evidenza i diversi atteggiamenti che gli studenti hanno quando si tratta di un gioco e quando si tratta di un compito scolastico. Nel momento in cui il ragazzo, in un gioco, supera un trabocchetto che prima non riusciva a risolvere ha compiuto un'acquisizione di competenze.

Fatta questa premessa, abbiamo iniziato a lavorare sui primi problemi di natura professionale.

Il calcolo delle aree:

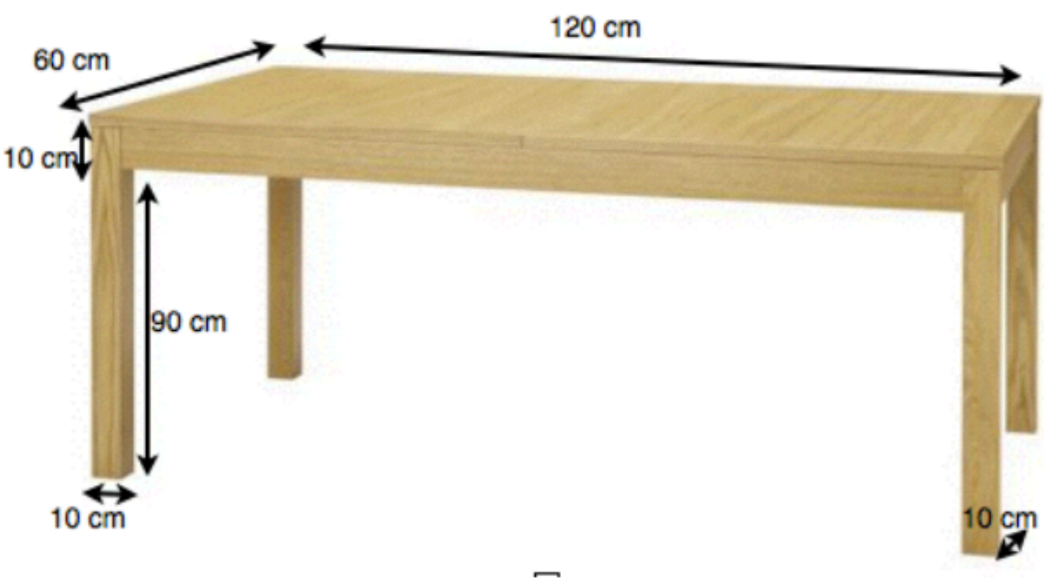


Fig. 6: Primo compito professionale.

Già dai primi giorni di scuola è stata proposta loro una scheda in cui gli studenti, dopo aver svolto alcune attività utili per riconoscere il loro grado di familiarità col concetto di area, si sono messi alla prova con il calcolo dell'area totale del tavolo di fig. 6 (informazione importante nel caso in cui si voglia impiallacciare o decorare in qualche modo).

Gli studenti hanno svolto questa attività in coppia e dopo hanno risposto alle domande del *formative assessment* che aveva come obiettivo verificare la conoscenza delle formule dell'area dei principali quadrilateri. Questo ha dato l'avvio ad un lavoro in cui gli studenti, assumendo per data la formula dell'area del rettangolo, hanno cercato di dimostrare la validità delle formule per il calcolo dell'area del triangolo, del trapezio e del rombo. Questo lavoro mira a sviluppare l'abilità di decomporre una figura complessa nei suoi componenti più semplici. L'importanza di questa abilità sta nel fatto che, poiché molti modelli di mobili non sono composti da figure geometriche semplici, gli studenti dovranno essere in grado di trovare le simmetrie che consentono di calcolare, inizialmente, un corretto computo metrico e poi un preventivo.

Quindi per il primo quadrimestre questo è stato il nostro problema:

C*alcolare il computo metrico e il costo dei materiali necessari per la realizzazione di un mobile. Tutti gli argomenti che tratteremo, tutte le domande che ci faremo, avranno come scopo la risposta a questo problema e l'acquisizione delle relative competenze.*

Dopo questa attività agli studenti sono stati proposti i primi problemi di geometria sul calcolo delle aree, in alcuni casi è stato necessario l'utilizzo di alcune formule inverse.

La seconda attività è stata svolta in gruppi eterogenei[118] di tre studenti formati a partire dai loro risultati sulla parte geometrica del test di ingresso. Data la tessera di un tridomino (in fig. 7 mostro la tessera e una foto dei gruppi durante questa attività), prodotto dai loro colleghi di terza quando erano in prima, ai gruppi è stata assegnata questa consegna:

Sapendo che la base del prisma è un triangolo equilatero con lato lungo 8 cm, calcolate l'area totale, l'area di ogni singolo settore e, ponendo la tessera su un piano cartesiano, determinate le coordinate dei vertici e del centro del triangolo.

Per risolvere questo compito i gruppi hanno dovuto utilizzare il teorema di Pitagora, tema che abbiamo ripassato con l'aiuto di un video[119].

---

[118] Cioè formati da studenti con livelli di partenza diversi.

[119] https://www.youtube.com/watch?v=sMVGvCb_9eQ

Fig. 7: Tessera del tridomino e gruppi al lavoro.

Tutti i gruppi hanno lavorato in modo serio e “vivo”, cercando per tutta l’ora possibili soluzioni, alcuni gruppi si sono distinti per la soluzione trovata.

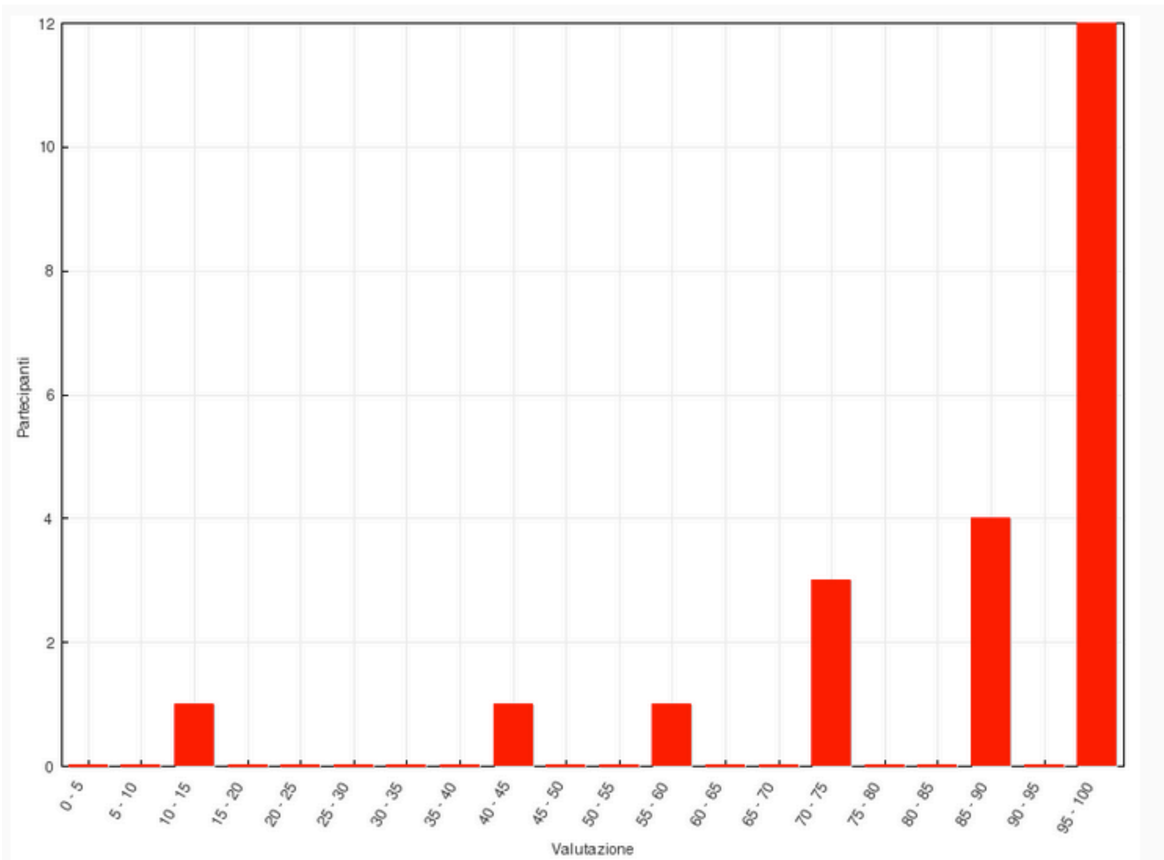


Fig. 8: Risultati *formative assessment* triangoli e quadrilateri.

Affrontate le aree di triangoli, quadrilateri e il teorema di Pitagora, è stato sottoposto come compito per casa un *formative assessment* con esercizi risolvibili utilizzando le formule dirette delle aree e del perimetro. I risultati, sintetizzati in fig. 8, sono stati soddisfacenti tranne nel caso di tre alunni. Questo dato mi ha portato a pensare per la lezione successiva un momento di recupero per questi studenti, mentre gli altri iniziavano a lavorare con GeoGebra.

Triangoli rettangoli particolari:

Il lavoro è proseguito con la presentazione dei triangoli rettangoli particolari, cioè triangolo rettangolo isoscele e triangolo rettangolo con angoli di 30° e 60° (metà di un triangolo equilatero); questo è stato il primo argomento nuovo che hanno affrontato, infatti nel corrispondente *formative assessment,* dove erano presenti anche esercizi in cui era necessario l'utilizzo delle formule inverse, i risultati sono stati più scadenti. Questo fatto ha suggerito di fare una correzione partecipata in cui alla lavagna venivano chiamati gli studenti che avevano sbagliato l'esercizio, ciò mi ha permesso di intervenire puntualmente sulle difficoltà dei singoli studenti (fig. 9: grafico dei risultati e fig. 10: tabella generata da *moodle* in cui posso vedere le risposte dei singoli studenti).

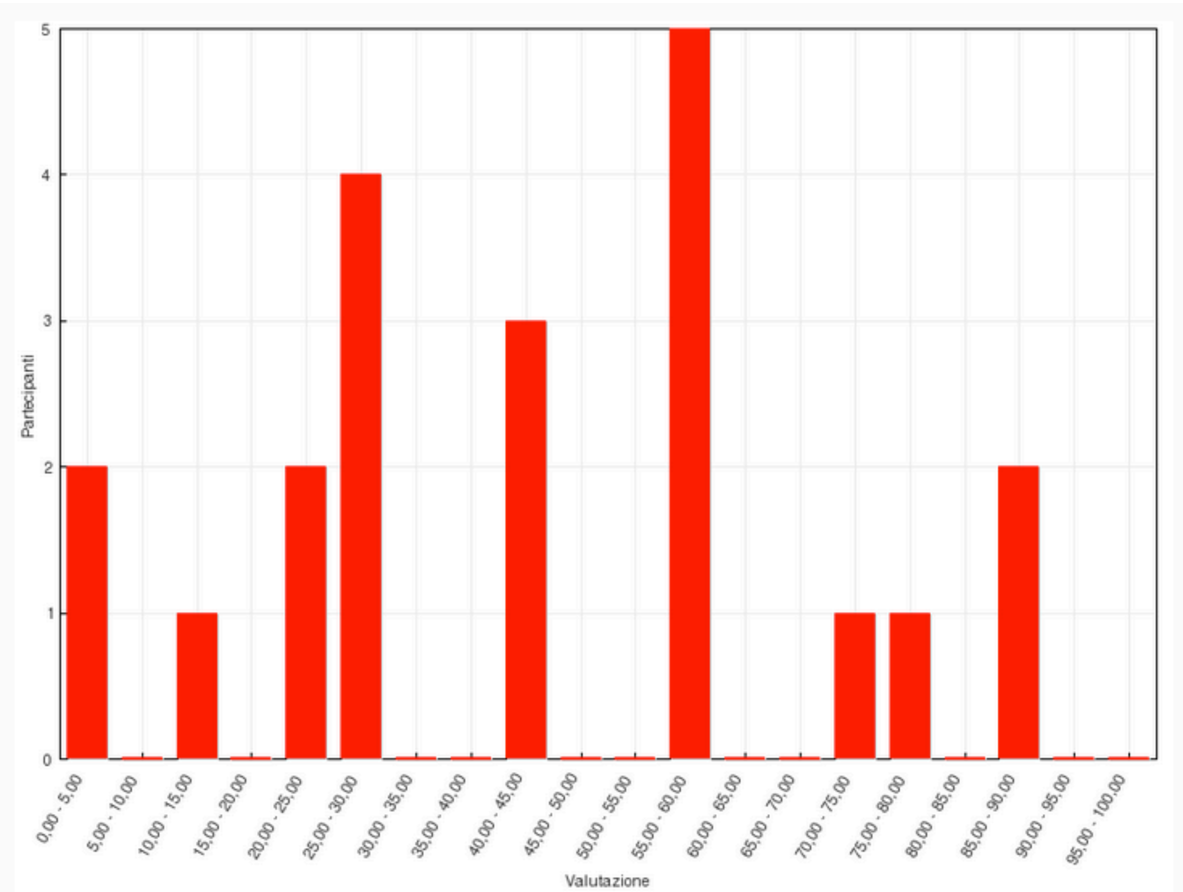


Fig. 9: Risultati *formative assessment* su triangoli rettangoli particolari.

Nome / Cognome	Indirizzo email	Stato	Valutazione/100,00	Risposta data 1	Risposta data 2	Risposta data 3	Risposta data 4	Risposta data 5	Risposta data 6	Risposta data 7
Francesco Allavena Rivedi tentativo	Francesco.Allavena@cometaformazione.org	Completato	57,14	✗ Non lo so fare	✓ (15;20,88)	✓ 7,07 cm	✗ A=692,82 cm	✗ 2,16 cm	✓ A = 86,60 cm2; P = 47,32 cm	✓ 13,00 cm
Francesco Amigoni Rivedi tentativo	Francesco.Amigoni@cometaformazione.org	Completato	0,00	✗ C2 = 15,36 dm; P = 10,4 dm;	✗ -	✗ -	✗ A=120 cm2	✗ -	✗ A = 20 cm2; P = 45 cm	✗ -
Fabio Bulgheroni Rivedi tentativo	Fabio.Bulgheroni@cometaformazione.org	Completato	28,57	✗ -	✓ (20.8; 15)	✗ 5 cm	✓ A=692,82 cm2	✗ -	✗ A = 47,32 cm2; P = 86,60 cm	✗ -
Mattia Caspani Rivedi tentativo	Mattia.Caspani@cometaformazione.org	Completato	57,14	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✓ area=15cm2 P=20,88cm	✗ non lo so fare	✓ A=692,82 cm2	✓ h=8,66cm	✗ -	✗ l=11,95cm
Gabriele Castiglioni Rivedi tentativo	Gabriele.Castiglioni@cometaformazione.org	Completato	71,43	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✓ (15; 20,88)	✗ -	✓ A=692,82 cm2	✓ 8,66 cm	✗ A = 47,32 cm2; P = 86,60 cm	✓ 13 cm
Andrea Civelli Rivedi tentativo	Andrea.Civelli@cometaformazione.org	Completato	28,57	✗ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm2;	✗ Area=65cm2 e P=23cm	✗ -	✓ A=692,82 cm2	✗ -	✗ A = 47,32 cm2; P = 86,60 cm	✓ L=13cm
Daniel Degli Esposti Rivedi tentativo	Daniel.Degli_Esposti@cometaformazione.org	Completato	85,71	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✗ (15;20)	✓ 7cm	✓ A=692,82 cm2	✓ 8,66cm	✓ A = 86,60 cm2; P = 47,32 cm	✓ 13cm
Denys Farina Rivedi tentativo	Denys.Farina@cometaformazione.org	Completato	57,14	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✓ (15; 20,88)	✗ -	✗ A=800 cm2	✓ 8,66cm	✗ A = 20 cm2; P = 45 cm	✓ 13cm
Simone Folpini Rivedi tentativo	Simone.Folpini@cometaformazione.org	Completato	28,57	✗ Non lo so fare	✓ 15/20.88	✗ 10	✗ A=692,82 cm	✓ 8.66	✗ Non lo so far	✗ NON LO SO FARE
Ivan Largaiolli Rivedi tentativo	Ivan.Largaiolli@cometaformazione.org	Completato	85,71	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✓ (15; 20,88)	✗ 7,9 cm	✓ A=692,82 cm2	✓ 8,66 cm	✓ A = 86,60 cm2; P = 47,32 cm	✓ 13 cm
Leonardo Lattaro Rivedi tentativo	Leonardo.Lattaro@cometaformazione.org	Completato	14,29	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✗ 25	✗ -	✗ A=120 cm2	✗ -	✗ A = 20 cm2; P = 45 cm	✗ -
Alan Longhi Rivedi tentativo	Alan.Longhi@cometaformazione.org	Completato	42,86	✗ Non lo so fare	✓ P=20,88cm A=15cm2	✓ 7 07cm	✓ A=692,82 cm2	✗ 4,33cm	✗ Non lo so far	✗ 13cm
Matteo Menotti Rivedi tentativo	Matteo.Menotti@cometaformazione.org	Completato	57,14	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✓ A=15. P=20,88	✗ -	✓ A=692,82 cm2	✓ H=8,66	✗ Non lo so far	✗ -
William Merlo Rivedi tentativo	William.Merlo@cometaformazione.org	Completato	57,14	✗ -	✓ 15;20.88	✗ 10 cm	✓ A=692,82 cm2	✓ 8.66	✗ -	✓ 13
Rosario Palumbo Rivedi tentativo	Rosario.Palumbo@cometaformazione.org	Completato	42,86	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✓ 15; 20,88	✗ -	✗ A=800 cm2	✗ 9,6 cm	✓ A = 86,60 cm2; P = 47,32 cm	✗ -
Mattia Pelizzari Rivedi tentativo	mattia.pelizzari@cometaformazione.org	Completato	0,00	✗ -	✗ -	✗ -	✗ -	✗ -	✗ -	✗ -
Riccardo Santantonio Rivedi tentativo	Riccardo.Santantonio@cometaformazione.org	Completato	21,43	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✓ (15;	✗ -	✗ A=800 cm2	✗ -	✗ A = 47,32 cm; P = 86,60 cm	✗ -
Carlo Selva Rivedi tentativo	Carlo.Selva@cometaformazione.org	Completato	28,57	✗ Non lo so fare	✓ (15; 20,8)	✗ Non lo so fare	✓ A=692,82 cm2	✗ Non lo so fare	✗ Non lo so far	✗ Non lo so fare
Cristian Simonetto Rivedi tentativo	Cristian.Simonetto@cometaformazione.org	Completato	42,86	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✓ (15cm2;20,88cm)	✗ 6,6cm	✗ A=800 cm2	✗ -	✓ A = 86,60 cm2; P = 47,32 cm	✗ l=13,40cm
Patrik Stella Rivedi tentativo	Patrik.Stella@cometaformazione.org	Completato	21,43	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✓ 15; 7.5	✗ -	✗ A=800 cm2	✗ 4.33	✗ Non lo so far	✗ l= 30cm
Davide Zani Rivedi tentativo	Davide.Zani@cometaformazione.org	Completato	78,57	✓ C2 = 5,66 dm; P = 15,36 dm;	✓ (15; 41,76)	✗ -	✓ A=692,82 cm2	✓ (8,6)	✓ A = 86,60 cm2; P = 47,32 cm	✓ l= 13; 13

Fig. 10: Tabella generata automaticamente da *moodle* con in verde le risposte che gli studenti hanno dato correttamente.

La correzione è stata caricata sulla piattaforma *Moodle* della classe per dare agli studenti una raccolta di esercizi svolti.

Calcolo dell'area di figure complesse:

Il percorso è proseguito lavorando sulle abilità: sono state proposte agli studenti una serie di figure complesse[120] (fig. 11) in cui dovevano determinare il perimetro e l'area e successivamente rappresentarle su GeoGebra (essendo GeoGebra un piano cartesiano, dovevano determinare le coordinate dei vertici di ogni poligono).

Dopo questo lavoro, è stato chiesto agli studenti di scrivere una relazione sul procedimento che avevano seguito per calcolare il perimetro e l'area delle figure proposte. L'utilizzo della relazione o del *journal* è una metodologia che serve a monitorare il grado di consapevolezza che gli studenti hanno del procedimento che mettono in atto o se la loro è solo l'applicazione di uno schema ma senza "occhio critico", cioè senza reale comprensione.

Riporto la relazione fatta da uno studente (A.S.) con una certificazione di ritardo lieve, seppur con qualche errore dimostra una consapevolezza dettagliata della procedura utilizzata, nella relazione parla di tutte le figure dell'esercitazione, in fig. 11 sono riportate solo due di esse:

[120] L'esercitazione completa con tutte le 4 figure si trova nell'e-book.

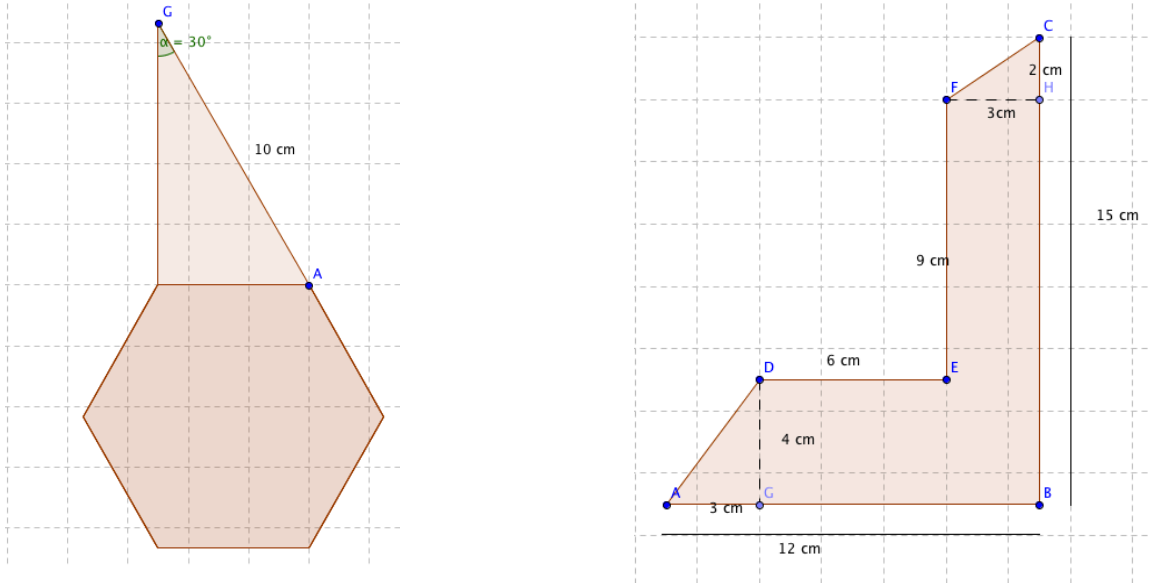


Fig. 11: Figure complesse scomponibili in triangoli e quadrilateri.

- Per calcolare la prima figura, ho dovuto scomporre la figura in 4 quattro parti, ossia quattro rettangoli, di cui misurava 5 cm e 7 cm.

A questo punto ho calcolato il perimetro sommando tutti i lati della figura ed il risultato ottenuto fu 58 dm, poi ho calcolato l'area di ogni rettangolo ed ho ottenuto 140 dm^2, così ho fatto la prova se tutti i risultati erano diversi oppure erano uguali ma è risultato che le aree di tutti e quattro i rettangoli sono uguali tra loro.

Mentre per calcolare la seconda figura, ho dovuto scomporre la figura in quattro parti (due triangoli e due rettangoli).Poi ho dovuto calcolare l'ipotenusa di un triangolo con cateti 2 cm e 3 cm, quindi ho fatto la radice quadrata di 3^2 + 2^2 ed ho ottenuto 3,4 cm e per calcolare l'area ho dovuto moltiplicare il cateto maggiore per il cateto minore e l'ho diviso per due, il risultato è stato 3 cm^2.

Per calcolare invece un lato del rettangolo (costruito sotto al triangolo), ho sottratto la somma del lato più lungo e del cateto minore, del triangolo(costruito sopra) ed ho ottenuto che il lato del rettangolo misura 13 cm. Poi ho calcolato l'area del rettangolo e moltiplicando il lato maggiore (13 cm) con il lato minore (3 cm) ho ottenuto 39 cm^2. Sappiamo che un lato dell'altro rettangolo (quello più lungo) misura 6 cm e che il lato più corto misura 4 cm e così ho potuto calcolare l'area, moltiplicando i due lati ho ottenuto 24 cm^2.

Ed infine per trovare l'ipotenusa dell'ultimo triangolo ho calcolato anche l'ipotenusa dell'ultimo triangolo, facendo sotto radice, il cateto maggiore alla seconda più il cateto minore ed *ho ottenuto 5 cm^2. Per calcolare l'area invece ho dovuto moltiplicare 3 per 4 e l'ho diviso per 2 e così ho ottenuto 4 cm^2*

Facendo la somma di tutti i lati trovati ho calcolato il perimetro ed ho ottenuto 50,4 cm.

Così ho dovuto trovare l'area totale, facendo la somma di tutte le area già trovate, ed il risultato ottenuto fu 70 cm^2.

Invece di per la terza figura ho dovuto scomporla in due figure (un esagono e un triangolo).

Sappiamo che un lato del triangolo misura 10 cm, ma dobbiamo trovare la misura di tutti i lati, il perimetro e l'area.Quindi per trovare la misura della base del triangolo ho dovuto dividere il lato per due ed ho ottenuto 5 cm; ma se il triangolo equilatero è costruito direttamente su un lato dell'esagono, il lato 5 cm. appena trovato è la misura di uno dei lati dell'esagono.

Per trovare invece la misura dell'altro lato del triangolo, ho diviso la base per due e ho ottenuto 2,5 cm.

Possiamo così trovare la misura del perimetro dell'esagono, quindi ho fatto 6•5=30 cm.

Ora abbiamo ottenuto 6 triangoli di cui sappiamo solo la misura della base, ma sappiamo anche che un triangolo rettangolo è l'esatta metà di un triangolo equilatero è che la base diviso 2 è 2,5 cm.Dobbiamo sapere l'altezza del triangolo equilatero è per questo calcoliamo la misura facendo la radice quadrata di 5^2 - 2,5^2 ed ho ottenuto 4,3 cm.Poi ho calcolato l'area del triangolo all'interno dell'esagono ed ho fatto 5 per 4,3 fratto due ed il risultato sarà 10,75 cm^2.

Infine ho calcolato l'area del triangolo costruito sopra all'esagono facendo 10 per 5 fratto 2 ed ho ottenuto 25 cm^2, poi ho trovato l'area di tutta la figura (triangolo + esagono) ed ho ottenuto 89,5 cm^2.

Compito in classe su triangoli, quadrilateri e teorema di Pitagora:

Questa è stata l'ultima attività svolta prima del compito in classe, di cui riporto la scheda di valutazione (tab. 3) e alcuni esercizi per spiegare come è stato utilizzata la struttura: conoscenze, abilità e competenze.

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA2.1: Riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con linguaggio naturale.	Risoluzione problemi (calcolo, fasi del procedimento, risultato).	Calcoli totalmente errati, ordine sequenziale del procedimento errato.	Calcoli parzialmente corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto.	Calcoli corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto, risultato determinato correttamente.	Riconoscimento dei principali enti in contesti nuovi e risoluzione corretta del problema corrispondente
MA2.2: Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete.	Riconoscimento figure semplici e scomposizione figure complesse.	Figure semplici non riconosciute.	Figure semplici riconosciute, figure complesse non scomposte.	Figure semplici riconosciute, figure complesse parzialmente scomposte.	Figure semplici riconosciute, figure complesse scomposte correttamente.
MA2.5: In casi reali di facile leggibilità risolvere problemi di tipo geometrico e ripercorrerne le procedure di soluzione. **MC2.4:** Misure di grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e Pitagora.	Determinazione area e perimetro (calcolo, teorema di Pitagora, risultato).	Calcoli totalmente errati, teorema di Pitagora non applicato.	Calcoli parzialmente corretti, teorema di Pitagora applicato.	Calcoli corretti, teorema di Pitagora applicato, risultato determinato correttamente.	

Tab. 3: Scheda di valutazione primo compito in classe.

Per verificare il raggiungimento del livello base, che possiamo identificare con il saper risolvere semplici esercizi sui temi oggetto di verifica, sono stati somministrati quesiti come questo:

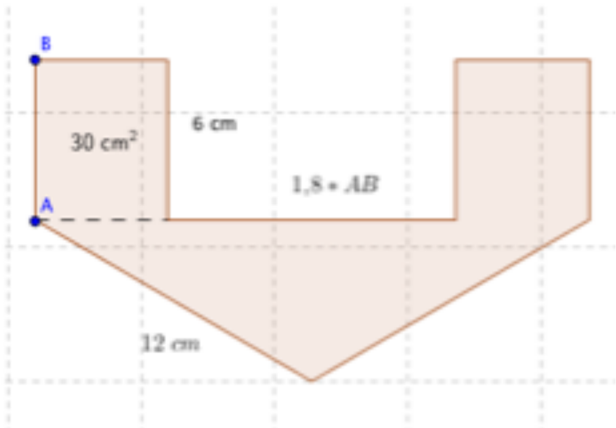
Livello Base - Conoscenze

Calcola l'area e il perimetro di un triangolo isoscele sapendo che la base misura 30 dm e i lati obliqui misurano il doppio della base.

Livello Intermedio - Abilità

Per il livello intermedio il ragazzo deve risolvere dei primi problemi analoghi a quelli affrontati in classe:

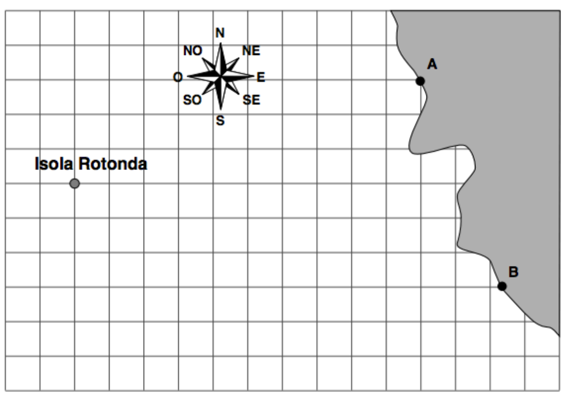
Determina il perimetro e l'area di questa figura e disegnale su GeoGebra:



Livello Avanzato - Competenze

Per il livello avanzato si deve mostrare di avere la competenza di riconoscere quale strumento matematico utilizzare in contesti nuovi che non sono stati affrontati in classe[121]:

Se il lato di ogni quadretto della mappa corrisponde a 1 miglio nautico, qual è la distanza del faro A dall'isola Rotonda[122]?



[121] Alcuni di questi esercizi sono stati presi dalle prove Invalsi.

[122] In classe non era stato ancora affrontato il calcolo della distanza tra due punti in un piano cartesiano.

Unità di misura:

Dopo il primo compito in classe il percorso è continuato con un’attività sulle unità di misura:

Usando due listelli di legno gli studenti dovevano misurare ogni parte del banco e della sedia con precisione e riportare le misure sulle immagini sottostanti (fig. 12 riporto solo le foto relative al banco).

Fig. 12: Tipico banco di Cometa Formazione scs.

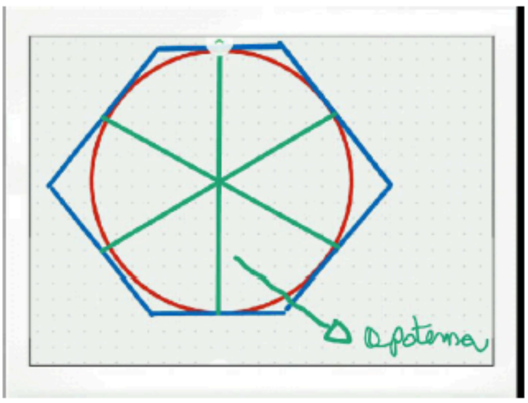
Per questa attività la classe è stata divisa in gruppi di 3 alunni. Ogni *team* ha ricevuto in dotazione due listelli con i quali dovevano riuscire a misurare ogni parte della sedia e del banco. Gli studenti non potevano usare le unità di misura convenzionali ma dovevano inventarne una.

Finite le misurazioni e condivisi i risultati, emergeva chiaramente come fosse impossibile confrontare i valori ottenuti dai diversi gruppi. Questa constatazione è servita per far capire agli studenti i motivi che hanno condotto l'uomo alla decisione di scegliere delle unità di misura convenzionali (metro, litro, grammo, ecc…) che rispondono ad un'esigenza di comunicazione anche tra persone che non appartengono alla stessa città o nazione. Da qui abbiamo ripassato le principali unità di misura e le equivalenze. Anche in questo caso, per sapere chi avesse bisogno di un'ulteriore spiegazione, è stato somministrato un *formative assessment,* i buoni risultati ottenuti mi hanno permesso di passare a parlare dei poligoni regolari.

Poligoni regolari:

I poligoni regolari, che vanno ad ultimare le figure geometriche piane trattate in questo primo modulo di geometria, sono stati studiati scomponendoli in triangoli aventi come base il lato e come altezza l'apotema, cioè il raggio della circonferenza inscritta nella figura stessa. Riporto gli appunti di uno studente che sono stati condivisi con l'intera classe:

POLIGONI REGOLARI



Circonferenza "INSCRITTA"

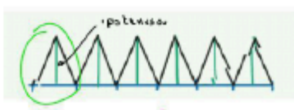
L'apotema è il RAGGIO della circonferenza circonferenza inscritta in un poligono regolare.

POLIGONO REGOLARE: hanno tutti i lati uguali e gli angoli uguali

Dimostrazione per la formula dell'area:

$$A = \frac{2p \cdot a}{2}$$

Esagono aperto:



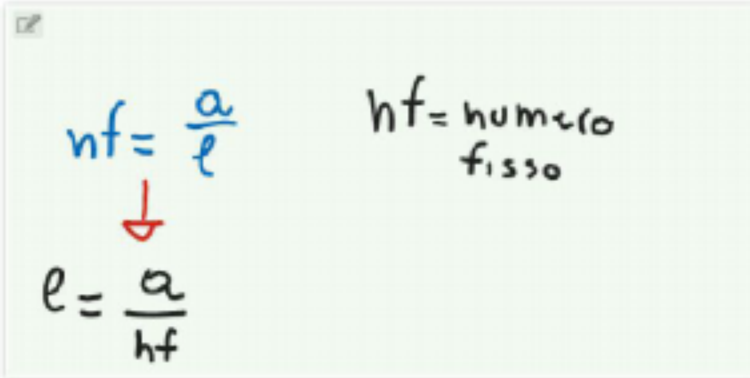
$A_1 = \frac{l \cdot a}{2}$

$A_t = 5 \cdot A_1 = \frac{2p \cdot a}{2}$

Invece di 5 è 6, perché i lati dell'esagono sono 6, c'è stato un errore di transcrizione.

HANNO LA STESSA BASE E STESSA ALTEZZA

C.V.D=come volevasi dimostrato



$$a = n_f \bullet l$$

L'errore commesso dallo studente che stava diligentemente prendendo appunti, può essere dovuto o ad un effettivo errore di scrittura, oppure al fatto che pur stando attento lo studente avesse un atteggiamento passivo, quindi, non ragionando criticamente su quanto stava registrando non si è accorto dell'incongruenza tra quanto scritto e quanto disegnato. Questo è un problema diffuso: studenti che scrivono e prendono appunti ma in realtà sono assenti. Probabilmente in quel momento la spiegazione era diventata più frontale che dialogata e questo ha provocato un calo di attenzione da parte del discente.

Dopo questa spiegazione, sono seguiti momenti di esercitazione e ri-spiegazione prima del secondo compito in classe[123].

Compito in classe sui poligoni regolari:

Il compito in classe proposto agli studenti ha mantenuto la stessa impostazione del precedente (conoscenze, abilità, competenze) ed è stata usata la stessa scheda di valutazione (tab. 3) del precedente, in quanto abbiamo lavorato sugli stessi elementi di competenza. Come precedentemente fatto, riporto un esercizio per ognuna delle tre parti del compito:

Conoscenza:

[123] Nello stesso periodo la classe ha partecipato alla *Hour of Code* durante la settimana dell'informatica, utilizzando le lezioni preparate e condivise gratuitamente dalla *Khan Academy. G*li ottimi risultati di questa attività e l'interesse mostrato dagli studenti, mi hanno portato, in accordo con il consiglio di classe, a decidere di dedicare un'ora alla settimana ad attività su *Khan Academy* in cui gli studenti, in base al loro livello, potevano decidere su quale argomento di matematica esercitarsi. Quest'ora è stata inoltre utilizzata dall'insegnate di sostegno per fare dei gruppetti di recupero con chi stava mostrando più difficoltà sugli argomenti di quel periodo.

Calcolare il perimetro e l'area di un ettagono sapendo che il suo lato misura 12 cm. (nf = 1,04)

Abilità:

Un palo fissato perpendicolarmente nel terreno proietta un'ombra di 5 m, il raggio luminoso che congiunge l'estremo superiore del palo e l'estremità dell'ombra è inclinato di 60° rispetto all'orizzontale. Schematizza la situazione descritta e calcola l'altezza h del palo.

Competenza:

Il trapezio ABCD, circoscritto a un cerchio di raggio 5 cm, ha l'area di 120 cm^2*. Quanto misura la somma delle base AB e DC?*

Esame di fine primo quadrimestre:

Abbiamo utilizzato il mese di gennaio per prepararci alla *prova d'esame di fine quadrimestre*, ripassando gli argomenti trattati, studiando il volume dei solidi più semplici e facendo esercizi in cui bisognava determinare il costo del materiale utilizzato per la realizzazione di piatti, sottopiatti e vassoi. Problematiche di questo tipo portano a dover determinare il volume del materiale utilizzato e l'area delle impiallacciature utilizzate per la decorazione. Riuscendo a sostenere la prova d'esame, gli studenti hanno dimostrato che stavano iniziando ad acquisire le competenze di calcolo e modellizzazione necessarie per il loro lavoro. Riporto integralmente la prova che contiene sia la parte professionale che la parte relativa alle materie di base. È una prova interdisciplinare, infatti si parte dalla ideazione, progettazione e realizzazione di un prodotto e dalla redazione di tutti i documenti utili per tenere i rapporti con il cliente e per mettere in vendita il prodotto:

COMETA
Formazione

Oliver Twist COMETA FORMAZIONE

Operatore del legno - manutentore d'immobili

I annualità

Anno formativo 2014/2015

Prova di Fine Primo Quadrimestre

Progettazione e realizzazione della decorazione intarsiata del fondo di un vassoio

OGGETTO:

Progettare e realizzare la decorazione intarsiata a base poligonale (esagono o ottagono) inscritta in un cerchio di 150 mm, da posizionare sul fondo di un vassoio circolare.

ELABORATI TECNICI RICHIESTI:

- appunti di progetto che chiariscano con schizzi la genesi geometrica della decorazione proposta, evidenziando con colore rosso le strutture geometriche e gli assi di forza considerati per la composizione della decorazione, da eseguire su foglio A3 “schizzi di studio” fornito;
- tavola tecnica verticale realizzata su 1 foglio da disegno F4 o F2 liscio 33x48 cm con squadratura e cartiglio impostata come allegato B fornito:
- il cartiglio deve essere costituito da tre fasce da 5 mm.

  Nome Cognome L1

  Prova Primo Quad.: Decorazione intarsiata Data

  Elaborazione geometrica
- tutti i testi contenuti all’interno dell’elaborato tecnico devono essere scritti in letterina H.5 mm
- tratto grafico: per costruire il disegno matita 2H; per ripassare matita HB
- i disegni tecnici contenuti devono essere i seguenti:
  - ➡ poligono regolare - esagono o ottagono - in scala 1:2 con decorazione definitiva colorata (fare lo studio dei colori utilizzati),
  - ➡ elaborazione in serie del modulo decorativo scelto, colorato in scala di grigi.
- Decorazione realizzata con impiallacciatura di due/tre essenze alternate secondo la tecnica dell’intarsio.

Scheda di valutazione del prodotto e del processo di lavoro

1) Stai presentando la decorazione intarsiata a un cliente inglese, c’è una tabella con i nomi del legno in italiano ma non in inglese, quindi il cliente potrebbe non capire. Scrivi quindi in un’altra colonna della tabella la traduzione:

- Rovere
- Pero
- Acero
- Noce Regia
- Faggio

2) Traduci i vari vocaboli riguardanti il mondo della falegnameria in inglese:

- Metro
- Misurare
- Stringere
- Falegname
- Pezzo di legno
- Carta vetrata
- Buco
- Inchiodare
- Carteggiare
- Martello

3) Attività in falegnameria

a) Quando lavori in falegnameria, svolgi attività di routine. Scrivi 5 frasi che descrivano le 5 attività che svolgi solitamente.

b) Scrivi 3 domande per un tuo compagno di classe, chiedendogli cosa solitamente fa in falegnameria.

Relazione tecnica

Dopo aver eseguito il disegno tecnico dell'intarsio e la sua realizzazione in laboratorio, dovrai elaborare una **descrizione oggettiva** del prodotto finito, che riguardi i materiali utilizzati, le forme e i colori impiegati nella sua lavorazione.

Dovrai allegare in seguito una breve **relazione tecnica**, utilizzando la seguente scaletta:

- introduzione all'oggetto prodotto e suo obiettivo
- tempi e luoghi impiegati per la sua produzione
- strumenti e materiali impiegati
- risultati ottenuti rispetto all'obiettivo prefissato.

La relazione dovrà essere compresa tra le **80** e le **120 parole**.

Computo metrico e rappresentazione su GeoGebra

1) Utilizzando il disegno tecnico che hai realizzato, determina il costo delle impiallacciature della tua decorazione e del massello di pioppo con cui è stat fatto il vassoio (290 €/m^3). Nelle tabelle trovi i costi delle impiallacciature e i numeri fissi dei diversi poligoni.

Tipo d'Impiallacciatura	Costo (€/m^2)
Noce nazionale	7
Frassino	5
Mogano	6
Olmo	7

Numero lati	Nome del poligono regolare	Numero fisso
3	Triangolo equilatero	0,28867
4	Quadrato	0,5
5	Pentagono	0,68819
6	Esagono	0,86602
7	Ettagono	1,0383
8	Ottagono	1,2071
9	Ennagono	1,3737
10	Decagono	1,5388

2) Il nostro cliente ci ha chiesto un file con una rappresentazione del vassoio e della decorazione che hai realizzato, quindi riproducili su GeoGebra ed invialo a: giuseppe.sinatra@cometaformazione.org, il file deve essere nominato così: Cognome_decorazione e nell'oggetto della mail scrivere il vostro Nome e Cognome.

Riporto i disegni fatti su GeoGebra (fig. 13) da due studenti come esempio del tipo di lavoro che hanno fatto:

Come si evince dai due disegni, ogni studente ha ideato la propria decorazione (anche se dal disegno non è chiaro, ogni poligono è stato decorato utilizzando delle impiallacciature) e quindi ogni studente ha svolto il proprio compito in base al progetto che aveva ideato.

Rispetto alla progettazione iniziale non sono riuscito a svolgere le proiezioni ortogonali su GeoGebra. Tuttavia, considerando che la prova di fine quadrimestre era un prodotto a sviluppo

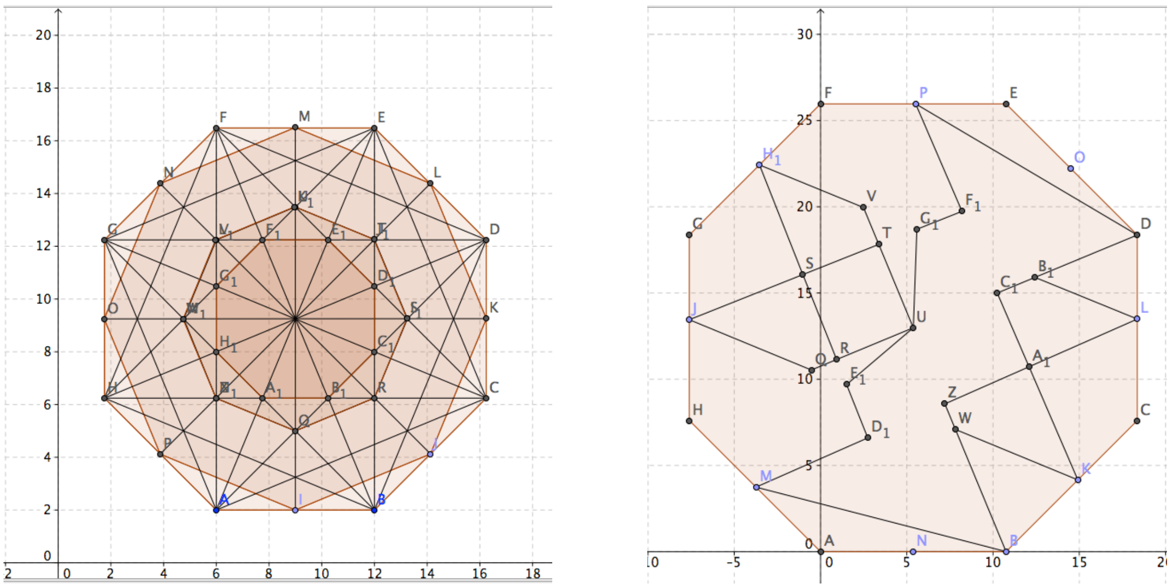


Fig. 13: Elaborazioni su GeoGebra delle decorazioni per un vassoio.

sostanzialmente bidimensionale, questo non ha inficiato la possibilità per gli studenti di svolgere correttamente la prova.

3.3.2 Prima legno: UBD 2 - Preventivo (Febbraio - Giugno 2015)

In questo secondo paragrafo riguardante la prima legno esporrò il percorso didattico effettuato sull'aritmetica e sull'algebra di un preventivo svolto nel secondo quadrimestre dell'anno scolastico 2014/2015.

Ricordiamo che nel primo quadrimestre la classe ha già acquisito le conoscenze, le abilità e le competenze per determinare il materiale utilizzato per realizzare un oggetto.

Nel secondo quadrimestre arriviamo a quello che è l'argomento cuore del primo anno: come si può determinare il preventivo di un oggetto partendo dal suo progetto e dai dati su come è avvenuta la lavorazione. Essendo il preventivo l'obiettivo finale del primo anno, il computo metrico è stata una tappa intermedia per raggiungere questo risultato. Anche in questo caso la ricchezza del contesto permette di lavorare contemporaneamente su molti livelli di competenza; nel riportare la UBD del quadrimestre, ricordo che questo è il contributo dato dalle materie che insegno allo sviluppo umano e professionale dello studente e quindi, anche se nel *format* sono presenti solo le competenze matematiche, la progettazione nasce da dialoghi previ avvenuti con il Consiglio di Classe. Inoltre, durante la realizzazione gli insegnanti coinvolti sono in constante contatto.

Possiamo dire che la UBD da me presentata (tab. 4), fa parte di una UBD più grande che contiene i contributi particolari di tutti i docenti.

<table>
<tr><td colspan="2">Titolo: Geometria, aritmetica e algebra per la determinazione del preventivo di un mobile e per la sua “modellizzazione”</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Step 1: Risultati desiderati</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Comprensione di lunga durata (Enduring understanding)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gli studenti comprenderanno come utilizzare i primi strumenti di modellizzazione matematica per determinare il preventivo di un mobile e per ottimizzarne la procedura di calcolo usando strumenti informatici.</td></tr>
<tr><td align="center">Domande essenziali</td><td align="center">Competenze, abilità e conoscenze</td></tr>
<tr><td>• Quali “strumenti” può darci l’algebra per visionare tutte le fasi del processo produttivo?
• Di quali strumenti ho bisogno per gestire una bottega?</td><td>M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica.
MA1.1: Comprendere il significato logico-operativo di numeri appartenenti ai diversi sistemi numerici. Utilizzare le diverse notazioni e saper convertire da una all’altra (da frazioni a decimali, da frazioni apparenti ad interi, da percentuali a frazioni…).
MA1.2: Comprendere il significato di potenza; calcolare potenze e applicarne le proprietà.
MA1.3: Risolvere brevi espressioni nei diversi insiemi numerici; rappresentare la soluzione di un problema con un’espressione e calcolarne il valore anche utilizzando una calcolatrice.
MA1.5: Comprendere il significato logico-operativo di rapporto e grandezza derivata; impostare uguaglianze di rapporti per risolvere problemi di proporzionalità e percentuale; risolvere semplici problemi diretti e inversi.
MC1.1: Gli insiemi numerici N, Z, Q, R; rappresentazioni, operazioni, ordinamento.
MC1.2: I sistemi di numerazione.
MC1.3: Espressioni algebriche; principali operazioni.</td></tr>
</table>

	M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni. **MA2.3:** Disegnare figure geometriche con semplici tecniche grafiche e operative. **MC2.6:** Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.
	M4: Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico. **MA4.7:** Elaborare e gestire semplici calcoli attraverso foglio elettronico.
Step 2: Prove di valutazione	
Gli studenti devono mostrare come partendo dal progetto di un mobile siano in grado di selezionare i dati e utilizzare tutte le informazioni a loro disposizione al fine di calcolare il preventivo dello stesso e gestirlo utilizzando un foglio di Excel.	
Sommario delle prove per competenze	**Griglia di valutazione**
• Tabella con dettagli costi e preventivo finale. • Foglio Excel del preventivo.	• Proprietà potenze e frazioni. • Espressioni con le potenze. • Risoluzione di espressioni e problemi. • Espressioni algebriche e risoluzione problemi. • Risoluzione di problemi impostando delle proporzioni.
Auto-valutazioni	**Altre prove**
Formative assessment Feedback di autovalutazione	Compiti intermedi disciplinari.
Step 3: Attività di apprendimento	
Totale ore: 52	
Obiettivo	**Attività**
1-2) Espressioni numeriche.	Risoluzione espressioni in coppie.
3-4-5) Le potenze: loro importanza e esercizi.	Risoluzione problemi in coppie.
6-7) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati del *formative assessment*).	
8-9-10) Definizione di MCD e mcm.	Analisi del concetto di MCD e mcm e risoluzione esercizi.

11-12) Frazioni e operazioni con le frazioni.	Lezione dialogata sulle frazioni.
13-14-15) Utilizzo delle diverse notazioni numeriche al fine di risolvere espressioni.	Risoluzione espressioni in coppie.
16-17) Risoluzione di problemi aritmetici.	Risoluzione problemi.
18-19) Valutazione.	Compito in classe (intermedio).
20-21) Proiezioni ortogonali con GeoGebra.	Disegnare figure tridimensionali su GeoGebra.
22-23) Utilizzo delle proporzioni.	Risoluzione esercizi.
24-25) Problemi risolvibili utilizzando le proporzioni.	Risoluzione problemi.
26-27) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati dei *formative assessment*).	
28-29) Le percentuali.	Analisi di alcuni problemi risolvibili con le percentuali.
30) Introduzione all'algebra.	A coppie risolvono una frase criptata.
31-32) Il calcolo letterale	Analisi delle proprietà del calcolo letterale.
33-34-35) Espressioni con i monomi	Risoluzione espressioni in coppie.
36) Il preventivo	Discussione e lavoro in coppie sul concetto di preventivo.
37-38) Valutazione	Compito in classe (intermedio).
39) Modello algebrico per il preventivo	Lavoro in coppie su come usare l'algebra per un preventivo.
40) Esercitazione monomi	Risoluzione esercizi.
41) Preventivo e Excel	Lavoro in coppie con Excel per la determinazione di un preventivo.
42) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati del compito)	
43) Preventivo di una sedia con impiallacciatura	Calcolo di un preventivo di un mobile con diverse componenti.
44-45) Esercitazione calcolo letterale	Risoluzione esercizi.
46-47) Valutazione	Compito in classe (intermedio).
48) Preventivo e modello algebrico	Determinazione del modello algebrico di un mobile con diverse componenti.
49) Preventivo e modello algebrico	Determinazione del modello algebrico di un mobile con diverse componenti.
50) Preventivo e Excel	Utilizzo degli Excel per un preventivo.

51) Valutazione	Esame di fine quadrimestre (calcolo di un preventivo, determinazione del modello algebrico dello stesso e utilizzo di Excel per determinare automaticamente il preventivo di tutti i mobili con la stessa struttura di quello assegnato).
52) Sintesi percorso	Correzione e conclusioni.

Tab. 4: Geometria, aritmetica e algebra per la determinazione del preventivo di un mobile e per la sua "modellizzazione".

Anche in questo caso quasi tutti gli argomenti sono stati già affrontati dagli studenti all'interno della loro carriera scolastica. Se il primo quadrimestre è stato incentrato sul costruire la capacità di "vedere" la geometria, nel secondo quadrimestre, al fine di poter controllare i processi di calcolo che diventeranno più complessi, è necessario sviluppare la capacità di utilizzare con abilità le diverse rappresentazioni numeriche.

Potenze:

Dopo una prima esercitazione sulle espressioni con numeri relativi, abbiamo iniziato ad affrontare il tema delle potenze. La modalità scelta per presentare il tema è stata quella del *problem solving*: agli studenti, divisi in coppie, è stato chiesto di risolvere quattro problemi senza una precedente spiegazione, riporto uno dei quesiti:

In una biblioteca ci sono 10 sezioni, ogni sezione ha 10 armadi, ogni armadio ha 10 scaffali e ogni scaffale ha 10 libri: quanti libri possiede quella biblioteca? Se in media ogni libro è costato € 10, qual è il capitale investito da quella biblioteca?

I problemi erano abbastanza semplici, in questo caso basta moltiplicare 10 quattro volte per se stesso, per rispondere alla prima domanda e cinque volte per rispondere alla seconda. Gli studenti avevano mezz'ora per risolverli, nella seconda parte della lezione abbiamo riflettuto sui problemi. In particolare, ho chiesto di comunicare oralmente al proprio compagno l'operazione risolutiva e dicevano: "devi fare dieci per dieci per dieci per dieci e per la seconda domanda dieci per dieci per dieci per dieci per dieci". Discutendo con loro siamo arrivati a dire che un'informazione data in questo modo rischia di essere compresa in modo errato perché, se non comunicata lentamente, accadeva che il destinatario scriveva un numero errato di dieci. Arrivati a questo problema comunicativo, sorge spontanea la necessità di trovare una forma di comunicazione più efficiente. Dopo queste fasi, gli studenti erano tesi a capire quale potesse essere la soluzione, sono state, quindi, presentate le potenze come lo strumento matematico che risolve questo problema, sottolineando il fatto che erano state pensate proprio per semplificare la comunicazione, in quanto è molto più facile dire: “dieci alla quarta” che “dieci per dieci per dieci per dieci”.

Questa lezione è stata molto interessante e partecipata perché insieme abbiamo scoperto il bisogno che avevamo di trovare uno strumento per semplificare lo scambio d’informazioni, è stata anche molto interessante perché si sono attivamente coinvolti gli studenti con le loro idee e con il loro intuito. Questa lezione è stata una grande opportunità per conoscere il loro modo di pensare e per permettere loro di riconquistare il significato di qualcosa che probabilmente prima non li aveva colpiti per niente.

M.C.D., m.c.m. e frazioni:

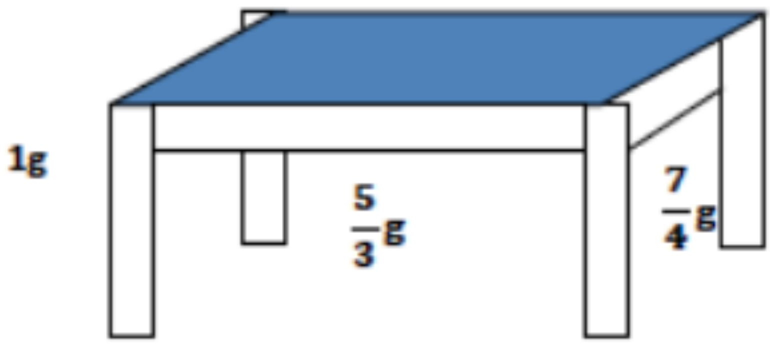
Anche per quanto riguarda l’introduzione del massimo comune divisore, del minimo comune multiplo e delle frazioni si è utilizzata la stessa metodologia: ho somministrato tre problematiche, a partire dalla discussione sulle quali siamo arrivati ad introdurre i tre strumenti sottolineando che rispondevano ad un principio di “convenienza”, cioè il poter fare in modo più rapido ed efficiente ciò che già si sapeva fare.

Riporto i tre problemi proposti uno per ogni strumento:

a) *Il proprietario di un consorzio compra all’ingrosso orzo, mais e mangime: L’orzo è venduto in sacchi da 108 kg ciascuno, il mais in sacchi da 60 kg e il mangime in sacchi da 120 kg. Il negoziante confeziona sacchi più piccoli, tutti dello stesso peso, per venderli al pubblico: prova a usare sacchi da 10 kg ma avanzano 8 kg di orzo. I sacchetti da 2 o 4 kg sono troppo piccoli, come trovare la misura giusta per non avere avanzi?*

b) *Tre insegne luminose si accendono la prima ogni 3 secondi, la seconda ogni 4, la terza ogni 6. Quando si accenderanno di nuovo insieme, se sono in funzione contemporaneamente alle ore 20?*

c) *La falegnameria Riva 1920 ha progettato una linea di mobili formata da un poggiapiedi, un tavolino ed un tavolo. Costruiti con una struttura di legno ed un piano di vetro. Le*



particolarità di questa linea è che con un unico progetto è possibile rappresentare tutti i tre prodotti.

Dove ***g*** *indica la lunghezza della gamba del tavolo. Si vuole determinare quanti centimetri di listelli di legno servono per produrre un poggiapiedi, un tavolino ed un tavolo, sapendo che la gamba misura rispettivamente 20 cm, 50 cm e 80 cm.*

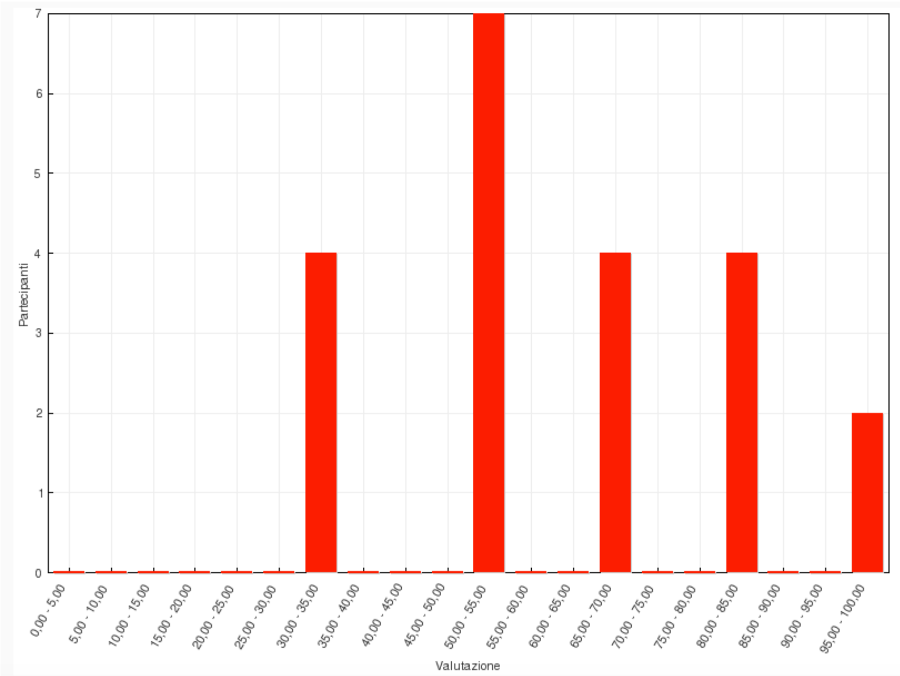


Fig. 14: Risultati *formative assessment* espressioni con potenze e frazioni.

Dall'analisi di questi problemi e delle soluzioni che sono state trovate dalle diverse coppie sono partito per spiegare le tre tematiche. Molta attenzione è stata data alle frazioni e alle operazioni con le frazioni, classicamente argomenti ostici per gli studenti. Dopo aver presentato le loro proprietà e aver svolto espressioni ed esercizi in classe, ho somministrato agli studenti due *formative assessment:* uno sulle espressioni con frazione e potenze e l'altro sulla risoluzione di problemi con frazioni (i due test sono presenti nell'e-book), riporto un'espressione e uno dei problemi proposti:

$$\left[\left(-\frac{4}{3}\right)^5 : \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \frac{1}{4} - 10\right]^2 \cdot \frac{1}{2} + 1 =$$

Luigi ha un sacchetto contenente alcune palline. Ne dà 1/4 a Maria e 1/8 delle rimanenti a Filippo. In questo modo gli restano 21 palline nel sacchetto. Quante ce n'erano all'inizio?

I risultati ottenuti sono mostrati nelle figg. 14-15.

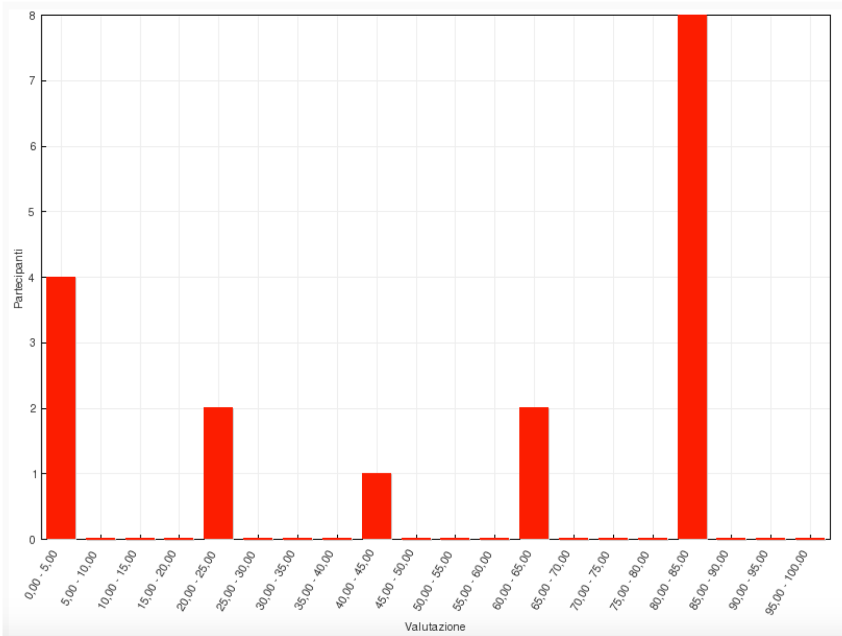


Fig. 15: Risultati *formative assessment* problemi risolvibili con frazioni.

Dai risultati otteniamo alcune importanti informazioni:

- Nel test sulle espressioni ci sono state 10 sufficienze, di cui due tra 95 e 100 e quattro tra 80 e 85, e 11 insufficienze, di cui sette tra 50 e 55.
- Nel test sui problemi ci sono 10 sufficienze, di cui otto tra 80 e 85, e 7 insufficienze (a cui aggiungerei i quattro che hanno lasciato il test totalmente in bianco non sapendo neanche ipotizzare una soluzione, non avendo dato nessuna soluzione non sono conteggiati dal sistema), di cui quattro tra 0 e 5.

I dati sul primo test ci dicono che diciassette alunni su ventuno (quattro non hanno eseguito il test) hanno ricevuto una valutazione dal 50 in poi, posso dire che la maggior parte della classe ha una conoscenza quasi sufficiente delle proprietà delle potenze e delle frazioni. Dal secondo invece noto che c'è stato un peggioramento quasi in tutti, non abbiamo più eccellenze e un buon numero ha sbagliato tutti i problemi. Unendo i due risultati, posso dedurre che la difficoltà più grande che hanno incontrato gli studenti non è nella conoscenza e applicazione delle regole delle frazioni e delle potenze ma nella lettura e analisi di un testo e nel trovare una strada risolutiva. Potrei dire: conoscono le regole e le proprietà ma poi non sanno cosa farsene.

Il ripasso prima del compito in classe è stato svolto in due fasi: nella prima si è sfruttata la "spaccatura" a metà della classe per formare, con la mia supervisione, delle coppie[124] in cui gli studenti svolgevano esercizi analoghi a quelli dei test; nella seconda, l'insegnante di sostegno ha svolto alcune ore in piccolo gruppo con gli studenti con maggiori difficoltà, nel frattempo il resto della classe in aula informatica svolgeva un'esercitazione sulla piattaforma di *Khan Academy*.

Compito in classe su frazioni e potenze:

Dopo queste attività di ripasso, è stato somministrato un compito in classe di cui riporto la scheda di valutazione (tab. 5) e tre esercizi corrispondenti a tre livelli: uno per il livello base, uno per il livello intermedio e uno per quello avanzato.

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA1.1: Comprendere il significato logico-operativo di numeri appartenenti ai diversi sistemi numerici e saper convertire da uno all'altro. **MC1.2:** I sistemi di numerazione.	Proprietà potenze e frazioni.	Non applica le proprietà in modo corretto. Non distingue tra potenze e frazioni.	Individua le potenze e le frazioni ma sa applicare solo alcune proprietà.	Individua sempre in modo corretto le frazioni e le potenze e sa utilizzare tutte le proprietà nel calcolare il risultato di un'espressione.	
MA1.2: Comprendere il significato di potenza; calcolare potenze e applicarne proprietà.	Espressioni con le potenze.	Calcoli totalmente errate.	Risolve correttamente l'espressioni più semplici.	Risolve correttamente tutte le espressioni.	

[124] Le coppie erano formate da un alunno che ha ottenuto buoni risultati nei due test e da uno che ha avuto delle difficoltà.

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MC1.1: Gli insiemi numerici N, Z, Q, R; rappresentazioni, operazioni, ordinamento.	Risoluzione di espressioni e problemi.	Calcoli totalmente errati.	Risolve correttamente tutte le espressioni.	Risolve tutte le espressioni e i problemi.	

Tab. 5: Scheda di valutazione compito su frazioni e potenze.

Livello base:

$$[9^2 \cdot (9 \cdot 9^3)^2 : 9^6]^2 : (9^3 \cdot 9^2) : \left\{ \left[3^7 : (3^8 : 3^5)^2 \right]^{10} : 3^7 \right\} \cdot \left\{ \left[(3^3 \cdot 3^2 \cdot 3)^3 : 3^8 \right]^3 : (9^3)^5 \right\} =$$

Livello intermedio:

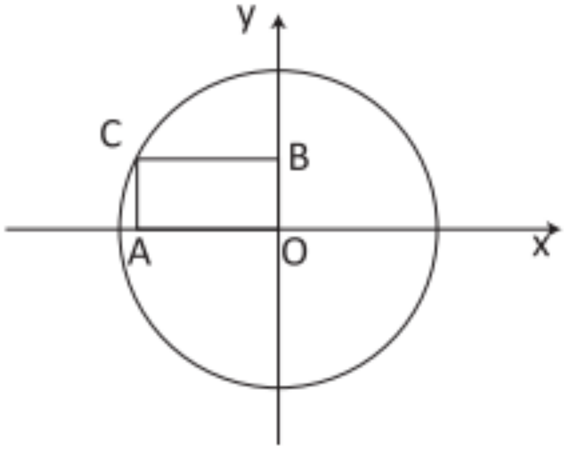
Mario spende 1/4 del suo stipendio per l'affitto, e i 2/5 del rimanente per il vitto. Riesce così ad avere ancora 2160 € a sua disposizione. A quanto ammonta lo stipendio di Mario?

Livello avanzato:

Si può notare che manca il livello avanzato nella scheda di valutazione, questo è dovuto al fatto che gli elementi di competenza oggetto di verifica si riferiscono più ad abilità di calcolo e alla conoscenza delle proprietà specifiche. Tuttavia, per permettere agli studenti di raggiungere il massimo del punteggio, sono stati inseriti alcuni problemi geometrici, non complessi dal punto di vista del calcolo, ma in cui si doveva mostrare di essere in grado di analizzare la situazione e trovare la simmetria/proprietà che avrebbe portato alla soluzione, come in questo problema:

La circonferenza disegnata qui sotto ha come centro l'origine O degli assi cartesiani e C è un suo punto. A e B sono le proiezioni sugli assi cartesiani di C. Il diametro della circonferenza è 12 cm.

Qual è la lunghezza del segmento AB? Scrivi come hai fatto a trovare la risposta e poi riporta il risultato.



Proiezioni ortogonali con GeoGebra:

Dopo il compito in classe, prima di continuare con lo sviluppo delle abilità aritmetiche, i studenti si sono esercitati a disegnare le proiezioni ortogonali di un oggetto usando GeoGebra, i due oggetti su cui ci siamo esercitati sono stati un comodino, presente in classe a fini didattici, e la sedia della classe. Riporto nelle figg. 16-17 i disegni fatti da uno degli studenti.

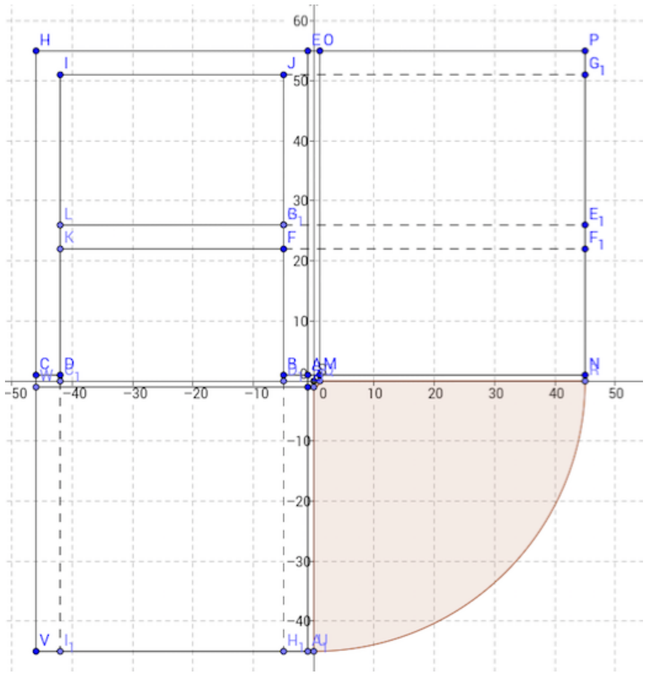


Fig. 16: Proiezione ortogonale di un comodino con GeoGebra.

Per poter eseguire questi disegni, essendo la schermata dell'*app* GeoGebra un piano cartesiano, gli studenti hanno dovuto determinare le coordinate di ogni singolo punto utile per la costruzione delle proiezioni. Questo lavoro, oltre ad essere propedeutico per il futuro uso di CAD, necessario per programmare le macchine di falegnameria a controllo numerico, obbliga lo studente a prendere dimestichezza con il piano cartesiano e le sue regole.

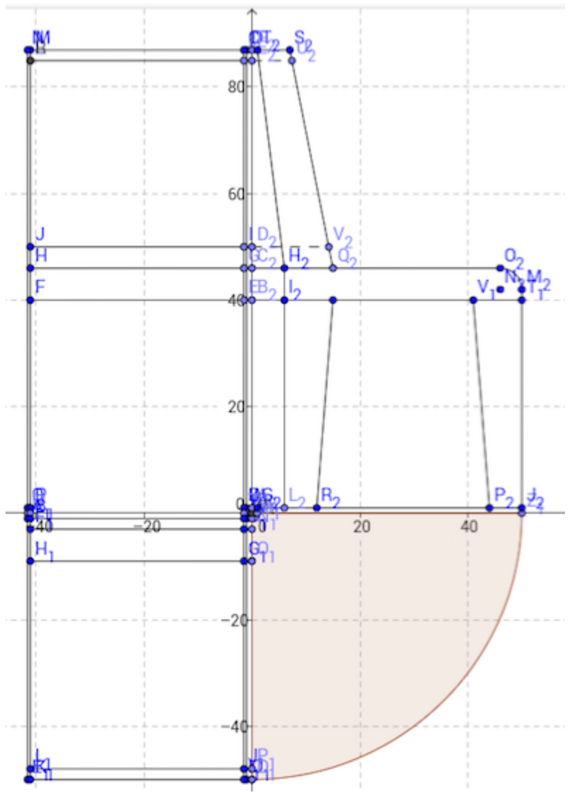


Fig. 17: Proiezione ortogonale di una sedia con GeoGebra.

Proporzioni e percentuali:

Dopo il compito e le proiezioni ortogonali il percorso è continuato con le proporzioni e le percentuali.

Le proporzioni sono state l'occasione per mettere in atto una piccola esperienza di f*lipped classroom*[125], il tema in oggetto era già stato utilizzato dal docente d'informatica per spiegare l'utilizzo di *Excel,* quindi i ragazzi avevano già una certa conoscenza dell'argomento. Partendo da questo fatto, agli studenti è stata assegnato da studiare la teoria sulle proporzioni e poi in classe hanno subito svolto un *formative assessment* sulla definizione di proporzione, calcolo del termine incognito e primi problemi con le proporzioni, i risultati sono mostrati nella fig. 18.

I risultati sono stati molto interessati, infatti, con l'eccezione di cinque studenti, tutti sono risultati più che sufficienti. Questo ha permesso, dopo un momento di spiegazione per gli studenti in difficoltà, di passare ad applicazioni più avanzate delle proporzioni stesse. La mancanza di test perfetti è dovuta alla difficoltà, già notata precedentemente, che gli studenti hanno nella comprensione del testo di un problema e individuazione della strategia risolutiva. Anche le

125 M. Maglioni e F. Biscaro, *La classe capovolta. Innovare la didattica con la flipped classroom,* Le Guide Erickson, Trento 2014.

percentuali, essendo un’applicazione delle proporzioni, sono state affrontate rapidamente. Questo è un esempio di come la modalità della *flipped classroom* possa ottimizzare i tempi d’aula, in quanto mi ha permesso di lavorare sulle difficoltà di comprensione, cosa che ha reso anche l’apprendimento dello studente più sicuro.

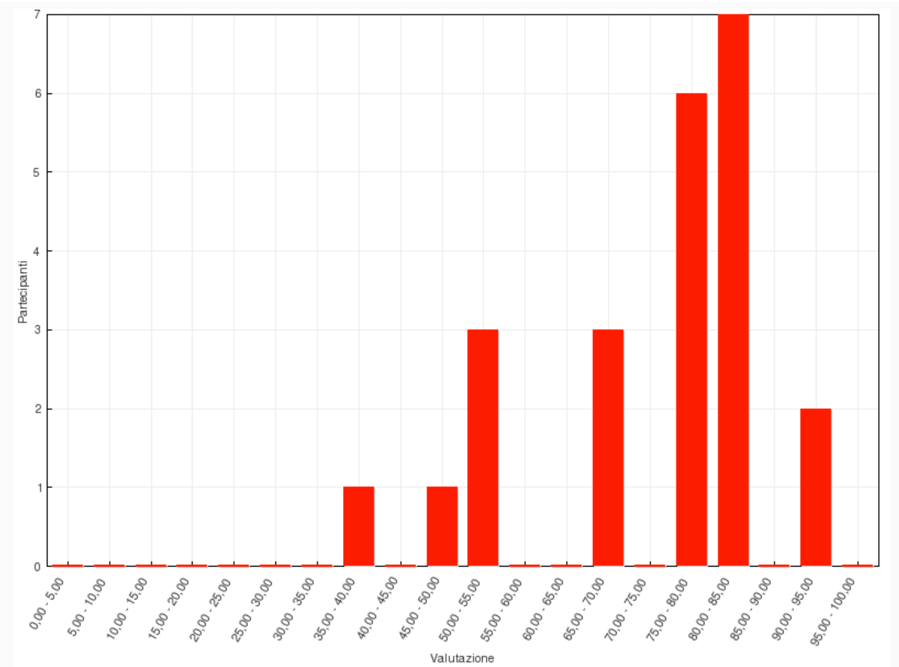


Fig. 18: Risultati *formative assessment* proporzioni e percentuali.

Algebra - i monomi:

Una volta ripassati i temi relativi all’aritmetica e avendo mostrato maestria con le proporzioni, la classe era pronta ad aprirsi all’universo dell’algebra con tutta la sua potenza di descrizione della realtà. Per far ciò, la prima cosa che deve essere chiara agli studenti è il rapporto che c’è tra lettera, numero e rappresentazione, ho cercato di raggiungere questo obiettivo chiedendo agli studenti, divisi in coppie, di decifrare la seguente frase criptata (estratta da un numero de "La settimana enigmistica”):

Sostituisci ogni numero con una lettera e otterrai un aforisma.

La parola che va inserita nelle caselle colorate di giallo corrisponde alla seguente definizione:

"Si ottengono con…degli scatti"

19	4	8	4	10	18	9	19	1	12

1	2		3	4	5	6	4		7	8	9		10
1	11	5	10	12	5	6	4		9		11	5	
13	11	5	8	4		1	5		14	11	1		14
15	1	11	5	16	11	12		9	17	18	9		4
5		2	1	5	12		6	12	2	2	12		19
4	8	4	10	18	9	19	1	12		1	3	20	9
18	9	21	21	9	5	8	1		6	1		7	12
	7	8	12	7	7	4		16	11	12	7	8	4
	12		9		8	11	8	8	1		10	2	1
	12	19	19	12	8	8	1		13	18	9	8	1
14	1		11	10	11	9	2	12		9	6		11
5		3	4	5	6	4		1	5		14	11	1
	5	12	7	7	11	5	4		2	4		19	9

La scelta di una frase criptata per introdurre l'algebra è perché in questo gioco si deve mettere la stessa lettera dove compare lo stesso numero, cioè il numero "rappresenta" la lettera. Il legame inverso è quello che avviene nell'algebra, ma se non si capisce questo rapporto gli studenti avranno molta più difficoltà a capire le regole delle operazioni algebriche, come per esempio che la somma possa essere eseguita solo tra monomi simili.

Il passaggio all'algebra è un passaggio molto ostico per tutte le classi, in quanto è il passaggio all'astrazione e alla generalizzazione, con la classe in questione non è stato diverso tant'è che anche dopo un paio di settimane che lavoravamo sulle espressioni algebriche con i monomi, una buona parte della classe mostrava ancora disorientamento, dichiarato in un *feedback* di autovalutazione che ho chiesto agli studenti di compilare (risultati nella fig. 19).

Fig. 19: Risultati *feedback* di autovalutazione sul calcolo letterale.

Compito in classe su proporzioni, percentuali e monomi:

Questo ha portato ad ulteriori ore di ri-spiegazione ed esercitazione prima del compito in classe, di cui riporto la scheda di valutazione (tab. 6) e alcuni esercizi per individuare ciò che veniva richiesto:

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA1.5: Comprendere il significato logico-operativo di rapporto e grandezza derivata; impostare uguaglianze di rapporti per risolvere problemi di proporzionalità e percentuale; risolvere semplici problemi diretti e inversi.	Risoluzione di problemi impostando delle proporzioni.	Non risolve i problemi.	Risolve solo i problemi che richiedono una singola operazione.	Risolve tutti i problemi impostando correttamente tutte le proporzioni necessarie.	
MC1.3: Espressioni algebriche; principali operazioni.	Espressioni algebriche e risoluzione problemi.	Non risolve le espressioni o risolve solo quelle in cui è presente una singola operazione.	Risolve le espressioni algebriche sia quelle in cui presente una singola operazione, sia quelle più complesse.	Risolve le espressioni e nei problemi scrive l'espressione algebrica risolutiva correttamente ma non la risolve.	Risolve le espressioni e i problemi.

Tab. 6: Scheda di valutazione compito su proporzioni, percentuali e monomi.

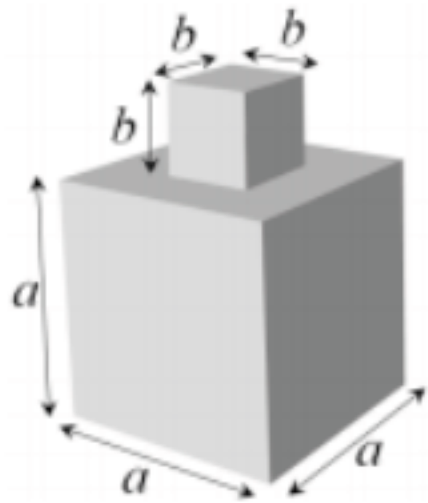
Livello base:

$$\left(a^3b^2\right)^2 \bullet \left(-ab^3\right)^3 : \left[\left(-2a^2b^3\right)^2\right]^2 + \left(2a^2b^3\right)^2 : \left(-2ab\right)^3 : \left(-b\right)^2 =$$

Un gruppo di biologi per stimare quante trote ci sono in un lago ne pesca 200 e, dopo averle marcate, le rigetta nel lago. Dopo qualche giorno, utilizzando la stessa rete, vengono pescate 720 trote e solo 12 di esse sono marcate. In base a queste informazioni, quante trote possiamo pensare che ci siano all'incirca nel lago?

Livello intermedio:

Un solido S è ottenuto incollando uno sopra l'altro due cubi come mostra la seguente figura:



Determina l'espressione che esprime l'area della superficie totale del solido S?

Livello avanzato:

Considera un quadrato di lato a. Se si aumenta il lato a del 20%, si ottiene un nuovo quadrato di lato b. Determina l'espressione che rappresenta la misura di b. Di quanto aumenta in percentuale l'area del quadrato di lato b rispetto all'area del quadrato di lato a? (Questo problema valutava il *livello intermedio* per quanto riguarda l'elemento di competenza MA1.5).

Questo compito è stato l'ultimo solo disciplinare svolto durante il primo anno, in quanto da questo momento è iniziata la preparazione verso la prova di fine secondo quadrimestre.

Il preventivo:

Lo strumento che ha fatto da sintesi e dove hanno trovato applicazione i temi trattati durante l'anno è stato il preventivo, che è stato suddiviso in tre fasi più due per creare dei modelli per l'ottimizzazione del calcolo. Le prime tre fasi sono:

- il computo metrico sviluppato nel primo quadrimestre, cioè il calcolo dei materiali necessari per la realizzazione di un mobile;
- la determinazione del costo di produzione in cui bisogna calcolare il costo del materiale utilizzato (alla quantità della fase precedente bisogna sommare il 30% che tiene conto del materiale di scarto), i costi dovuti alla manodopera e i costi fissi. La somma di queste tre quantità porta al costo di produzione del mobile;
- il completamento del preventivo con il calcolo del guadagno dell'azienda (che è una quantità in percentuale rispetto al costo di produzione) e l'IVA. Queste quantità sommate al costo di produzione definiscono il preventivo con e senza tasse.

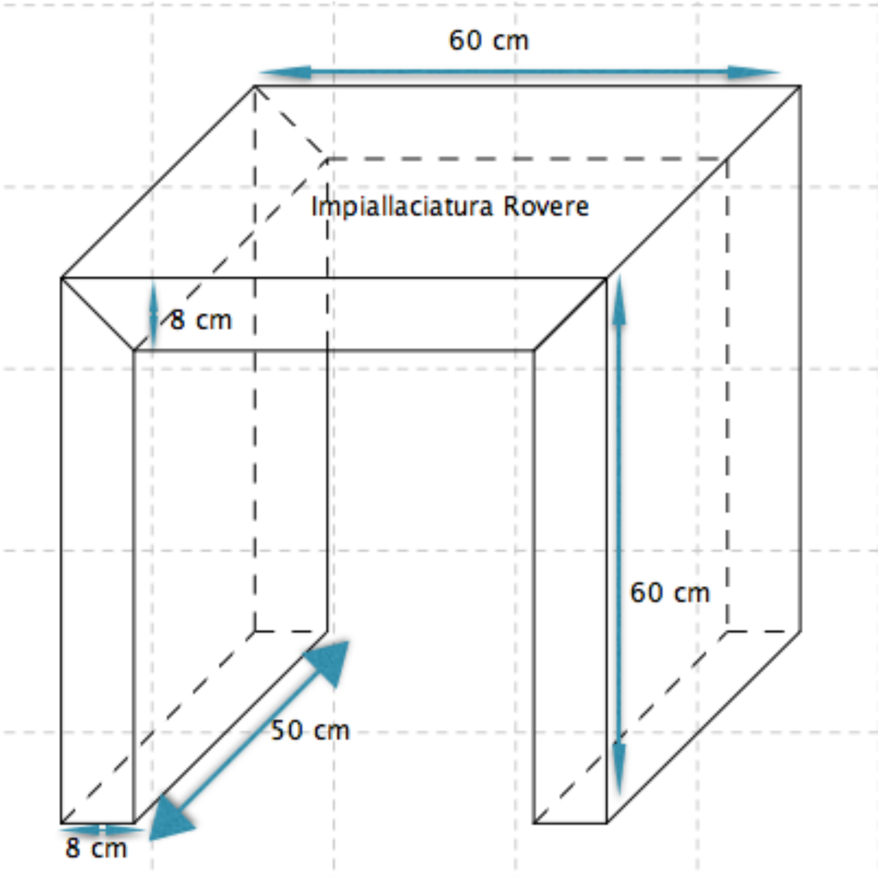
Questo mi permette di determinare il prezzo di vendita di un oggetto partendo dal suo progetto. Ma presenta il problema che ogni volta che in fase di progettazione è modificata qualche dimensione si deve ricalcolate il preventivo. Questa procedura, utilizzando un modello algebrico ed un foglio di calcolo *Excel*, è facilmente automatizzatile. Quindi le altre due fasi sono:

- determinazione della formula algebrica per il calcolo del preventivo. In questo caso lo studente non utilizzerà le dimensioni del progetto ma ogni misura sarà una variabile, così come le ore di lavoro e altre quantità;
- creazione di un foglio *Excel*, in cui usando gli strumenti a disposizione si possa automatizzare la procedura di calcolo.

Esame di fine secondo quadrimestre:

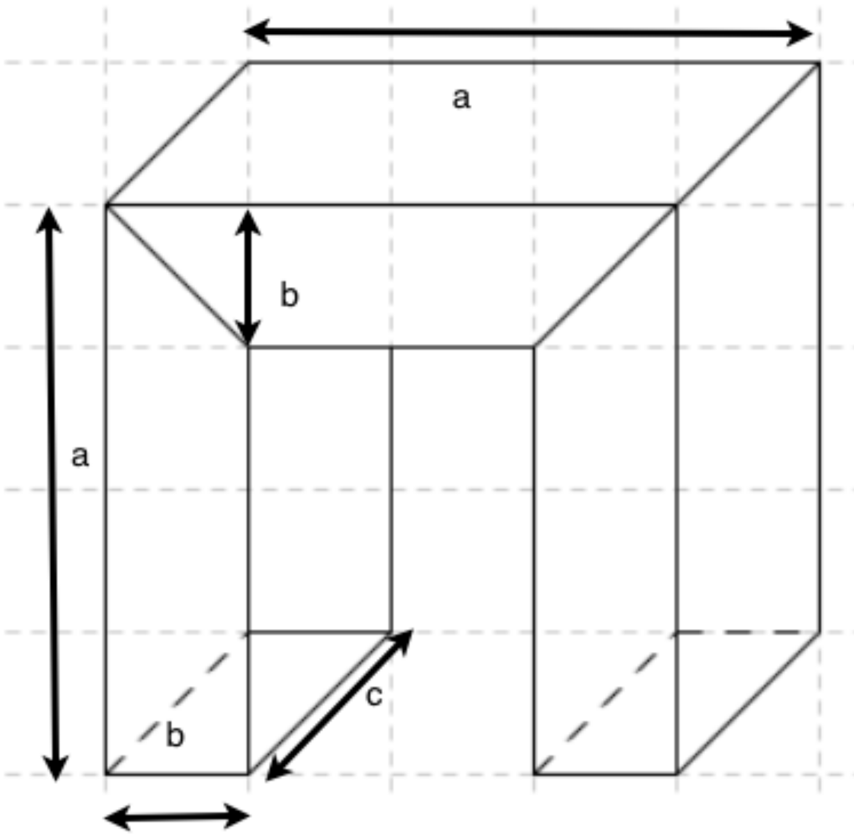
Riporto la parte dell'esame di fine quadrimestre utilizzata per valutare le competenze matematiche, in cui gli studenti dovevano, a partire da un progetto, svolgere le cinque fasi descritte precedentemente.

A) Calcola il preventivo di questo comodino utilizzando i dati della tabella:



Costo Noce	800 €/m^3
Impiallacciatura Rovere	8,50 €/m^2
Scarti	30%
Costo Manodopera Apprendista	7 €/h
Ore di Lavoro	3
Costi Fissi	6 €
Guadagno	70%
IVA	22%

B) Determina l'espressione letterale che descrive il preventivo del comodino (suggerimento: considera tutte le misure in metri):



Costo Noce	800 €/m^3
Impiallacciatura Rovere	8,50 €/m^2
Scarti	30%
Costo Manodopera Apprendista	7 €/h
Ore di Lavoro	x
Costi Fissi	y
Guadagno	70%
IVA	22%

C) *Costruisci su Excel il modello descrittivo del preventivo del comodino e caricalo su moodle nel corso Matematica Professionale.*

Valutazione del percorso del primo anno:

Alla fine di un anno scolastico è necessario valutare se c'è stata una crescita da parte degli studenti. In quanto la loro crescita nelle competenze matematiche sarebbe un indicatore della positività della metodologia didattica utilizzata. Per questo motivo ho riportato i risultati del test di ingresso e della prova di fine secondo quadrimestre su uno stesso piano cartesiano (fig. 20).

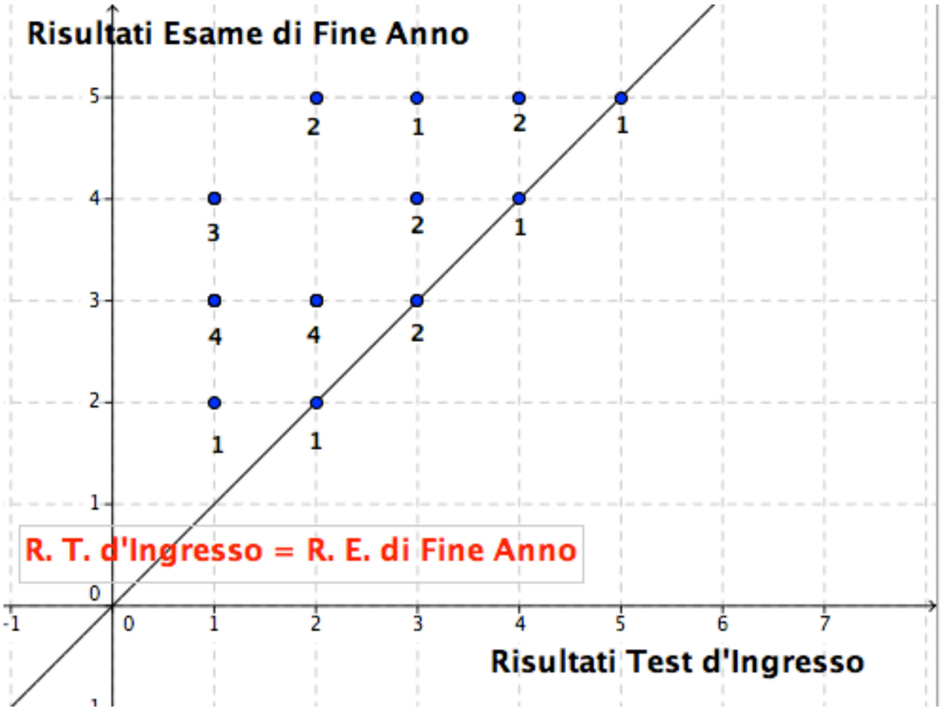


Fig. 20: Confronto tra i risultati ottenuti dagli studenti nel test d'ingresso e nell'esame di fine anno.

Le valutazioni del test d'ingresso sono in una scala da uno a cinque, mentre l'esame usa una scala in centesimi. Per poter confrontare i dati, la scala dell'esame di fine anno è stata suddivisa in intervalli di 20. I numeri sotto i punti indicano la quantità di studenti rappresentati da quel punto. Quello che vediamo è che non tutti gli studenti hanno raggiunto la sufficienza, ma ben 19 studenti hanno mostrato un miglioramento, alcuni alunni sono passati da risultati insufficienti a risultati eccellenti, cinque hanno confermato il livello di partenza. Essendo diversi i due test con miglioramento intendo che hanno mostrato una maggiore capacità nell'utilizzo degli strumenti matematici, quindi nella capacità di modellizzazione e nell'individuazione dei metodi più appropriati per la risoluzione di un problema reale. Più che un'analisi sulle conoscenze acquisite questo grafico ci dà una misura della profondità con cui sono state acquisite, quindi il non mostrare un miglioramento rispetto ai livelli di partenza (due casi su cinque partivano già da un livello eccellente), vuol dire confermare lo stesso grado di profondità anche davanti o a strumenti nuovi o a strumenti già noti ma utilizzati per risolvere nuovi problemi. Questa è un'indicazione del fatto che è stata rotta la corrispondenza tra livelli iniziali e risultati finali[126], quindi sostanzialmente tutti gli studenti sono cresciuti durante l'anno.

[126] Sandrone 2008, cit. p. 152.

3.3.3 Seconda legno: Descrizione della classe e avvio della seconda annualità (Settembre 2014)

Questo paragrafo è un'introduzione alla sperimentazione svolta nella classe seconda, presenta la composizione e le problematiche della classe e il ripasso dei prerequisiti per l'anno che gli studenti si stavano accingendo ad iniziare.

La classe è composta da 18 studenti maschi e 2 studentesse, con due alunni con certificazione di disabilità, due con certificazione di DSA e tre con problemi comportamentali legati al loro contesto socio-culturale. La classe si presenta molto eterogenea nei livelli in quanto sono anche presenti due studenti con notevoli doti nell'ambito logico-matematico, dato che ha portato il consiglio di classe a pensare una programmazione personalizzata per gli studenti in questione.

Un altro dato da considerare, constatato dal consiglio di classe in questi anni di insegnamento, è che il secondo anno rappresenta l'anno più complesso in quanto gli studenti, in piena fase adolescenziale, si trovano a dover scegliere che "ruolo" aver nel mondo e questo genera irrequietezza e difficoltà nello stare focalizzati sulla proposta scolastica. Scelta e maturazione spesso si compiono con il primo tirocinio in azienda che gli studenti fanno negli ultimi mesi della seconda annualità. Posso quindi indicare il secondo come un vero e proprio anno di passaggio dovuto, anche, all'abitudine al metodo della scuola che non desta più stupore negli studenti ma una sorta di scontatezza di fronte a quanto viene loro proposto, inoltre il fatto che l'esame di qualifica sarà solo l'anno successivo li induce ad un certo disimpegno.

Questa premessa serve a comprendere le scelte fatte durante la sperimentazione svolta in classe.

Nel primo mese dell'anno scolastico, ci siamo focalizzati sulla ripresa dei concetti trattati durante la prima annualità con particolare attenzione alla ripresa del concetto di preventivo che è stato il vero "cuore" del lavoro svolto precedentemente. Questo è servito a consolidare, in molti casi, oppure a ripresentare e rispiegare per altri studenti (come detto all'inizio la classe presenta una grossa forbice per quanto riguarda le abilità). Il primo preventivo proposto è mostrato in fig. 21.

Ricordo che nella realizzazione dei preventivi lo studente deve utilizzare abilità e conoscenze sia del campo geometrico che del campo aritmetico-algebrico, in questo modo il preventivo rappresenta un oggetto completo per il ripasso dei temi svolti durante la prima annualità. Questo compito è stato anche la possibilità di fare emergere la crisi che stavano vivendo molti dei componenti della classe: di fronte a questo lavoro alcuni si mostravano demotivati e dichiaravano di non riuscire a capire e a superare le proprie lacune. Questo atteggiamento, registrato anche in altre

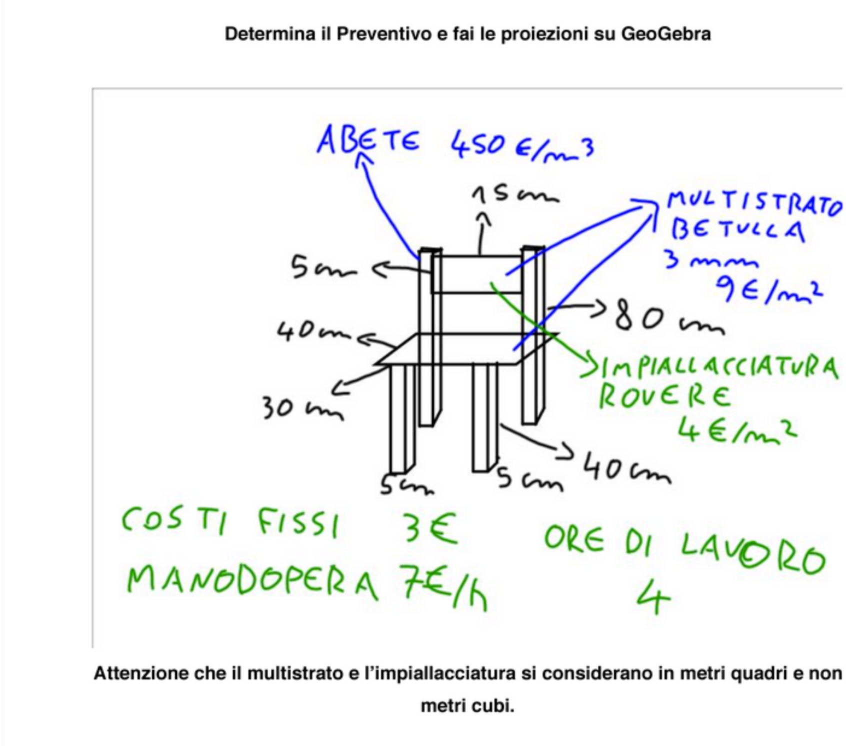


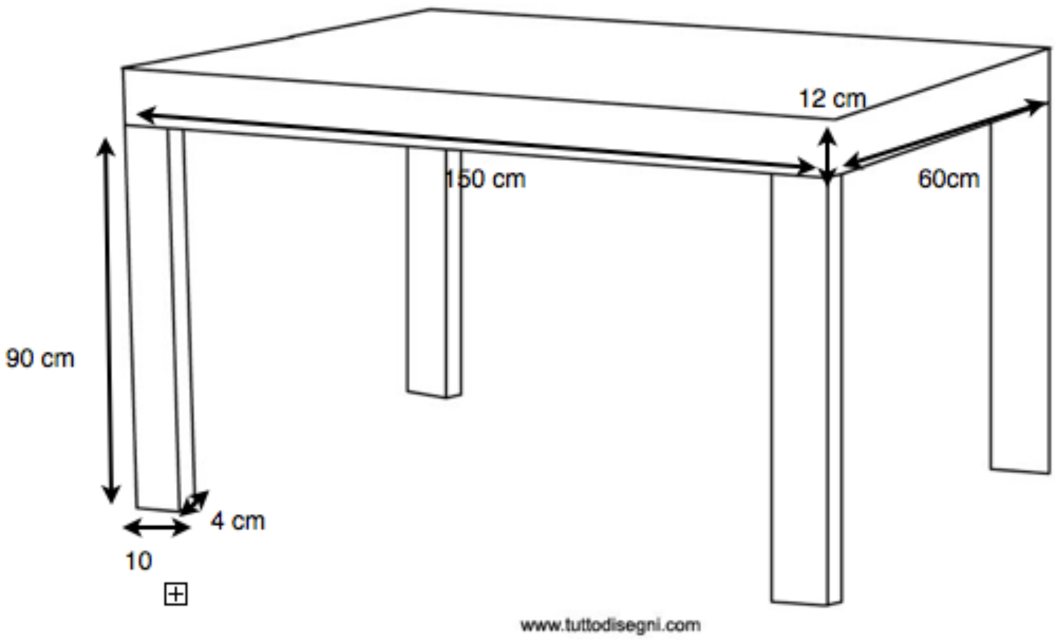
Fig. 21: Preventivo di una sedia con decorazioni realizzate con multistrato di betulla e impiallacciature.

discipline e in altre seconde classi ha portato, dopo un confronto con l'insegnante di sostegno della classe e con gli altri colleghi del dipartimento di matematica, a decidere i seguenti due interventi:

1) dividere la classe in coppie a partire non solo dal mettere insieme uno studente con difficoltà con uno studente bravo ma cercando anche di considerare, nella scelta del *partner,* la personalità degli studenti;

2) sono stati preparati dei *quiz* su *moodle* con quattro domande che rappresentavano le quattro fasi per arrivare al risultato finale di un preventivo, in questo modo mi è stato possibile monitorare tutte le fasi dello svolgimento e capire in quale punto ogni singolo studente entrava in difficoltà. In questa fase lo studente non riceveva dal sistema un *feedback* sulla correttezza o meno dello svolgimento fatto, in quanto nel caso di errore, volevo che lo studente mi spiegasse la "logica" seguita senza la frustrazione di saper che era sbagliata. In seguito, la correzione avveniva riflettendo insieme sulla plausibilità delle diverse strade. Dopo questa fase di lavoro insieme, agli studenti è stato assegnato un preventivo come compito a casa correlato da un *formative assessment* su *moodle*, in questo caso il sistema valutava la correttezza o meno della risposta, permettendo allo studente di correggere e di ricercare dove aveva sbagliato.

Riporto l'immagine del mobile utilizzato (fig. 22), il test e i risultati ottenuti (fig. 23), perché aiutano a comprendere il tipo di lavoro che è stato compiuto:



Il piano d'appoggio del tavolo è ricoperto da un'impiallacciatura di radica di noce.

Costo Noce	1500 €/m³
Costo Impiallacciatura di Radica di Noce	18 €/m²
Costi Fissi	€ 15
Costo Manodopera	8 €/h
Ore di Lavoro	9 h

Ricordo che gli scarti sono sempre il 30%, il guadagno è il 70% e l'IVA il 22%.
Calcolare il prezzo finale che il cliente dovrà pagare.

Fig. 22: Preventivo tavolo in noce con piano d'appoggio in radica di noce.

1) Scrivi l'ammontare in euro del costo del legname.

2) Scrivi l'ammontare in euro del costo dell'impiallacciatura di radica di noce da utilizzare per ricoprire il piano d'appoggio del tavolo.

3) Scrivi l'ammontare in euro del costo totale della produzione del tavolo.

4) Scrivi l'ammontare in euro del prezzo finale che il cliente dovrà pagare per il tavolo.

Dai risultati ottenuti dagli studenti (fig. 23) possiamo notare come 12 studenti sui 16 che hanno svolto il compito hanno ottenuto risultati eccellenti, al contrario di quattro che necessitano di un ulteriore lavoro. Per concludere questo primo paragrafo sulla classe seconda posso dire che gli accorgimenti apportati hanno contribuito a generare un clima di maggiore lavoro in classe, il 75% degli studenti si è riattivato e si è dichiarato soddisfatto del percorso svolto, è rilevante sottolineare l'importanza che ha avuto in questo contesto l'utilizzo dello strumento tecnologico con la

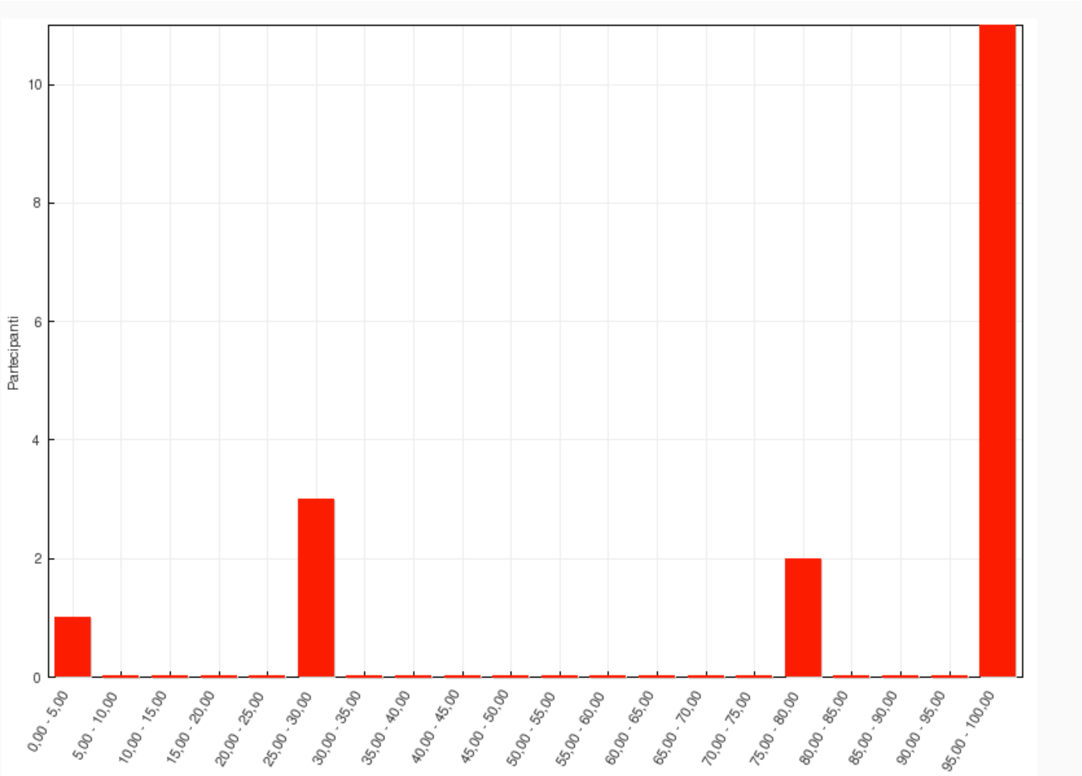


Fig. 23: Risultati *formative assessment* preventivo tavolo in noce.

metodologia del *formative assessment,* che ha aiutato lo studente a non sentirsi da solo davanti al compito da svolgere ma guidato anche fuori dall'aula, ciò ha diminuito, in senso positivo, la distanza tra il docente (me) e gli studenti, ho potuto comprendere più da vicino le loro difficoltà e le abbiamo affrontate insieme.

3.3.4 Seconda legno: UBD 3 - Modelli matematici per la gestione della bottega: proporzionalità e modelli di dipendenza lineare (Ottobre 2014 - Gennaio 2015)

Trattiamo adesso il percorso didattico riguardante i modelli matematici, il loro utilizzo per la gestione della bottega e per lo studio di diversi fenomeni naturali. Questo tema rappresenta il passaggio da problemi direttamente derivanti dal prodotto a problematiche legate ad un ambito più gestionale, che quindi implicano una maggiore abilità da parte degli studenti nell'utilizzo dei modelli matematici. Data la vastità del tema affrontato, è possibile lavorare contemporaneamente su diversi elementi di competenza, riporto la UBD (tab. 7) del percorso in oggetto. Differentemente dagli argomenti del primo anno, si affronteranno temi che gli studenti non hanno mai trattato. Inoltre, la competenza che il percorso vuole fare sviluppare agli studenti è di essere in grado di studiare e analizzare una situazione al fine di costruire un modello algebrico che permetta di risolvere la situazione problematica.

Titolo: La proporzionalità: modelli matematici per conoscere il mondo, l'importanza dei modelli lineari per la gestione della bottega.	
Step 1: Risultati desiderati	
Comprensione di lunga durata (Enduring understanding)	
Gli studenti comprenderanno come utilizzare i diversi tipi di proporzionalità per risolvere problemi di carattere professionale e per studiare fenomeni naturali, con particolare attenzione ai modelli lineari.	
Domande essenziali	**Competenze, abilità e conoscenze**
• Come le funzioni elementari diventano strumenti per conoscere sempre più in profondità ciò che mi circonda? • Di quali strumenti ho bisogno per gestire una bottega? • Può l'utilizzo della "semplice" modellizzazione lineare migliorare le mie competenze di gestione della bottega?	**M1:** Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica. **MA1.3:** Risolvere brevi espressioni nei diversi insiemi numerici; rappresentare la soluzione di un problema con un'espressione e calcolarne il valore anche utilizzando una calcolatrice. **MA1.4:** Tradurre brevi istruzioni in sequenze simboliche (anche con tabelle); risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici. **MA1.6:** Risolvere equazioni di primo grado e verificarne la correttezza dei procedimenti utilizzati.
	MA1.7: Rappresentare graficamente equazioni di primo grado; comprendere il concetto di equazione e quello di funzione. **MA1.8:** Risolvere sistemi di equazioni di primo grado verificando la correttezza dei risultati. **MC1.4:** Equazioni e disequazioni di primo grado. **MC1.5:** Sistemi di equazioni e disequazioni di primo grado.

	M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni. **MA2.4:** Applicare le principali formule relative alla retta e alle figure geometriche sul piano cartesiano. **MC2.6:** Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano. **MC2.7:** Interpretazione geometrica dei sistemi di equazioni.
	M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi. **MA3.2:** Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici. **MA3.4:** Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa. **MC3.3:** Tecniche risolutive di un problema che utilizzano frazioni, proporzioni, percentuali, formule geometriche, equazioni e dissertazioni di 1° grado.

Step 2: Prove di valutazione

Gli studenti devono mostrare come, partendo dalla descrizione di una situazione problematica, sono in grado di individuare il modello matematico che meglio descrive le caratteristiche delle relazioni tra le diverse grandezze considerate e che dal modello scelto sono in grado di determinare le informazioni richieste.

Sommario delle prove per competenze	**Griglia di valutazione**
• Funzione matematica del modello. • Rappresentazione grafica del problema. • Scelta del miglior fornitore.	• Piano cartesiano • Risoluzione di problemi e dipendenza funzionale • Funzioni lineari • Retta • Costruzione modelli lineari • Calcoli • Fasi del procedimento • Risultato • Tabella riassuntiva • Disequazione risolutiva • Volume.
Auto-valutazioni	**Altre prove**
Formative assessment Feedback di autovalutazione	Compiti intermedi disciplinari.

Step 3: Attività di apprendimento

Totale ore: 42	
Obiettivo	**Attività**
1-6) Introdurre la proporzionalità.	Risoluzione di problemi in coppie
7) Problemi con proporzionalità	Risoluzione problemi in coppie
8) Applicazioni della proporzionalità	Lezione dialogata sulle molteplici applicazioni della proporzionalità
9) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati del *formative assessment*)	
10-11) Preparazione al compito	Risoluzione esercizi in coppie
12-13) Valutazione	Compito in classe (intermedio)
14) Correzione in aula della verifica Risoluzione problemi.	
15-16) Introduzione ai modelli lineari	Risoluzione problemi in coppie
17) L'importanza della modellizzazione.	Lezione dialogata sull'argomento.
18) I sistemi lineari	Risoluzione esercizi.
19-20) Le rette	Presentazione delle rette e delle loro caratteristiche
21-22) Problemi con le rette	Risoluzione insieme col docente
23-24) Dal grafico alla retta	Lezione dialogata su quali informazioni possono essere dedotte dal grafico di una retta.
25) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati del *formative assessment*)	
26) Valutazione	Compito in classe (intermedio)
27) Correzione in aula della verifica	
28) La pendenza	Discussione e lavoro in coppie sul concetto di pendenza
29-32) Problemi con disequazioni	Risoluzione di problemi in coppie
33) Le disequazioni	Presentazione delle disequazioni
34-35-36) Esercitazione	Risoluzione esercizi.
37-38) Esercitazione in preparazione dell'esame di fine quadrimestre	Risoluzione esercizi per l'esame di fine quadrimestre.
39-40) Valutazione	Esame di fine quadrimestre: calcolo preventivo e scelta del fornitore.
41-42) Sintesi del percorso	Correzione e conclusioni.

Tab. 7: La proporzionalità: modelli matematici per conoscere il mondo, l'importanza dei modelli lineari per la gestione della bottega.

Anche in questo caso per introdurre i temi che saranno trattati, ho proposto agli studenti un *problem solving* su quesiti riguardanti i tre tipi di proporzionalità e di dipendenza funzionale:

Proporzionalità diretta e funzione lineare:

1) In una segheria per la produzione di un listello lungo 1 m si impiegano 15 minuti. Quanti minuti ci vogliono per produrre un listello di 4 m? Quanto sarà lungo il listello prodotto in 90 minuti? Rappresenta i punti trovati su un piano cartesiano. Prova a scrivere la funzione che lega la lunghezza del listello ai tempi di produzione.

2) Se per la produzione dei diversi listelli dell'esercizio precedente aggiungiamo 10 minuti per la preparazione della macchina, come cambierà la disposizione dei diversi punti sul piano cartesiano? Disegna i nuovi punti.

Proporzionalità diretta quadratica e funzione quadratica:

3) Per la verniciatura di un muro un imbianchino chiede 18 €/m^2. Quanto costa verniciare i seguenti muri di forma quadrata aventi il lato lungo rispettivamente 2 m, 3,5 m, 4 m e 7 m? Rappresenta i punti trovati su un piano cartesiano. Prova a scrivere la funzione che lega il costo della verniciatura alla lunghezza del lato del muro.

4) Se per la verniciatura dei muri aggiungiamo 15 € per il trasporto dei materiali, come cambierà la disposizione dei diversi punti sul piano cartesiano? Disegna i nuovi punti.

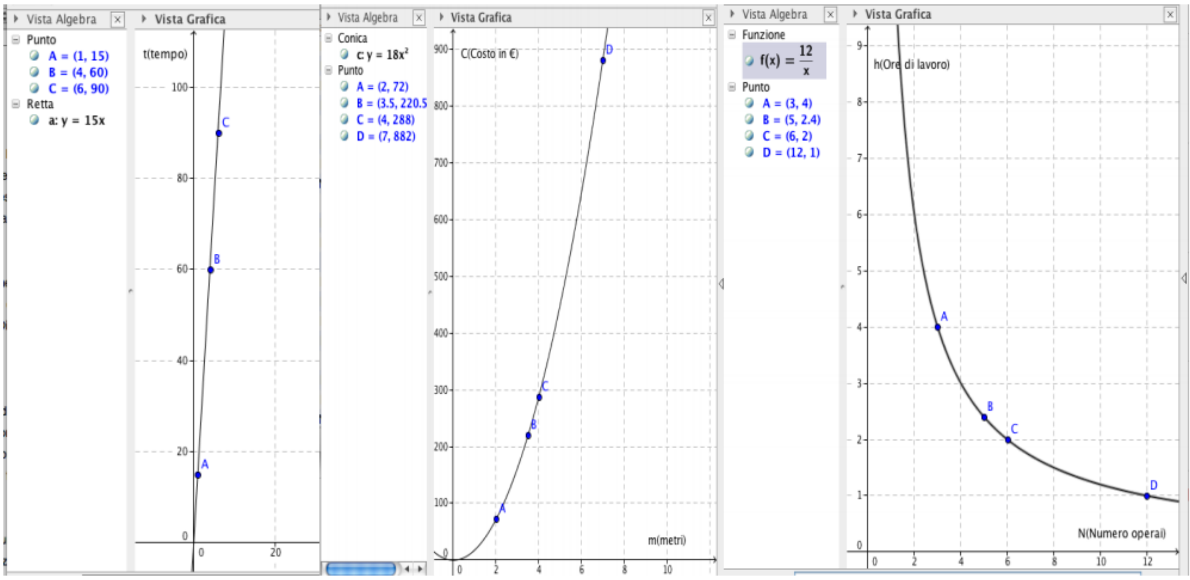
Proporzionalità inversa e funzione fratta

5) Per eseguire un lavoro occorrono 12 ore se viene eseguito solo da una persona. Quante ore ci vorranno se il lavoro viene eseguito da 3 persone? E da 5? E da 6? e da 12? Rappresenta i punti trovati su un piano cartesiano. Prova a scrivere la funzione che lega la durata del lavoro al numero di persone.

6) Se per il lavoro aggiungiamo 2 ore affinché gli operai arrivino sul posto di lavoro, come cambierà la disposizione dei diversi punti sul piano cartesiano? Disegna i nuovi punti.

Gli studenti hanno provato per circa 90 minuti a risolvere i problemi già descritti, le difficoltà che hanno incontrato sono state soprattutto nello scrivere le funzioni che formalizzano le situazioni dei problemi. Nella lezione successiva abbiamo discusso insieme dei problemi e da questi sono stati introdotti i diversi tipi di proporzionalità (diretta, diretta quadratica e inversa) e i tre tipi di funzioni elementari di cui la proporzionalità è un caso particolare (lineare, quadratica e fratta). È stata posta particolare attenzione sui metodi per determinare le costanti di proporzionalità nei diversi casi e nell'evidenziare quali sono gli indicatori che aiutano a capire la relazione che sussiste tra le grandezze considerate. Nella fig. 24 riporto le due slide di sintesi della spiegazione fatta agli studenti utilizzando la metodologia della lezione dialogata.

I tre tipi di proporzionalità



$t = 15L$

Proporzionalità Diretta

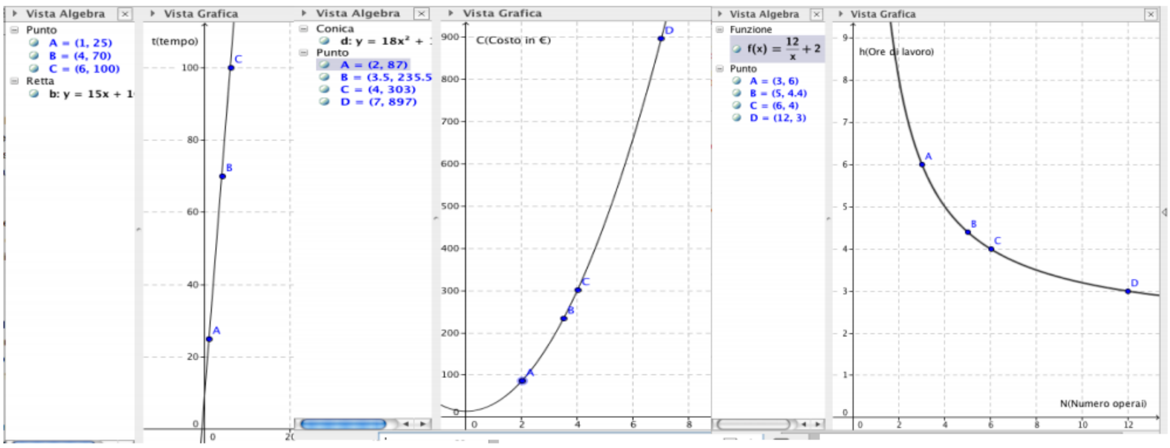
$C = 18L^2$

Proporzionalità Quadratica

$$h = \frac{12}{N}$$

Proporzionalità Inversa

I tre tipi di Funzioni



$t = 15L + 10$

$C = 18L^2+15$

$$h = \frac{12}{N} + 2$$

Funzione Lineare (Retta)

Funzione Quadratica (Parabola)

Funzione Fratta (Iperbole)

Fig. 24: Sintesi lezione sulla proporzionalità.

Al termine della lezione sono stati somministrati due *formative assessment* per valutare la comprensione degli argomenti trattati. Il taglio di questi test era orientato alla valutazione dell'acquisizione o meno del linguaggio adeguato per la descrizione degli elementi introdotti: Il primo si concentra sulla proporzionalità diretta mentre il secondo è più generale sui diversi tipi di

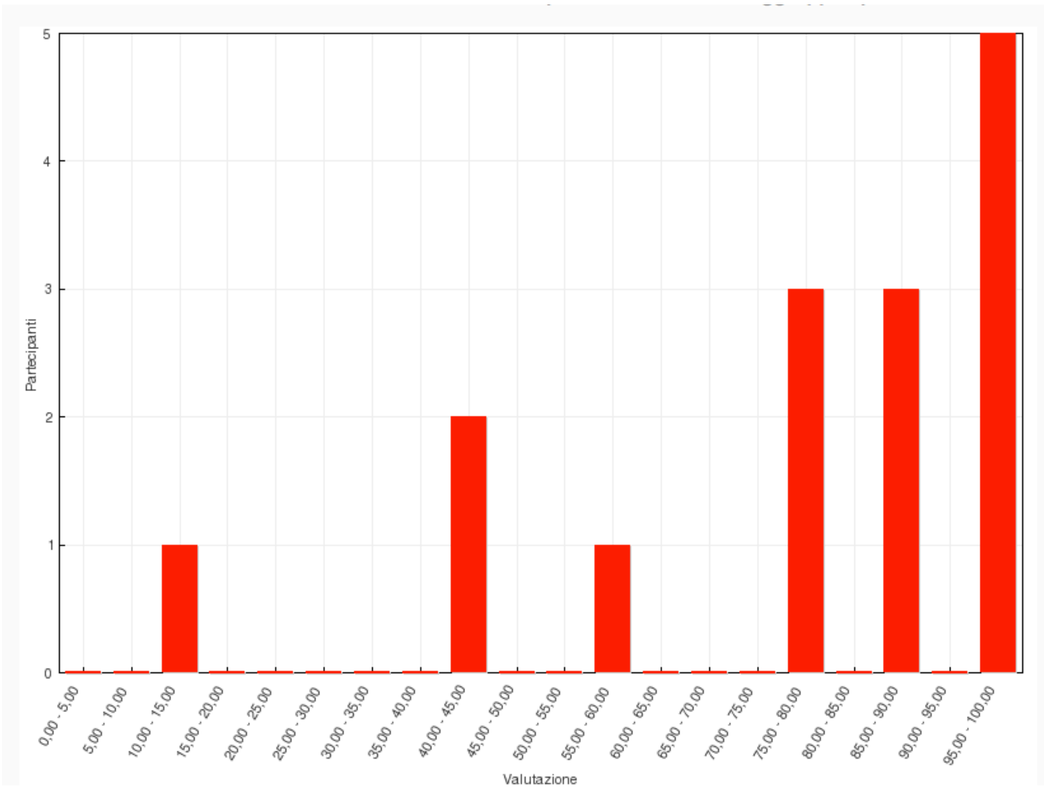


Fig. 25: Risultati *formative assessment* "Cosa abbiamo capito della proporzionalità diretta?"

proporzionalità e dipendenza funzionale. Dai risultati dei due *formative assessment* (figg. 25-26) osserviamo che in quello sulla proporzionalità diretta 11 studenti su 15 sono risultati ampiamente sufficienti e solo 3 studenti mostrano una comprensione gravemente carente; nel secondo test la distribuzione si equilibra, infatti più studenti mostrano difficoltà nell'orientarsi quando si considerano i tre modelli matematici insieme. A seguito di questi risultati il lavoro è proseguito sottolineando maggiormente le differenze tra le tre proporzionalità attraverso gli interventi in seguito riportati.

Nel corso delle lezioni successive sono stati assegnati e discussi in classe problemi ed esercizi in cui gli studenti dovevano utilizzare i concetti appena incontrati e i nuovi termini specifici. La discussione in classe è sempre stata molto utile per chiarire alcuni dubbi e per andare in profondità sui temi trattati. Riporto alcune delle consegne date agli studenti per mostrare il percorso fatto:

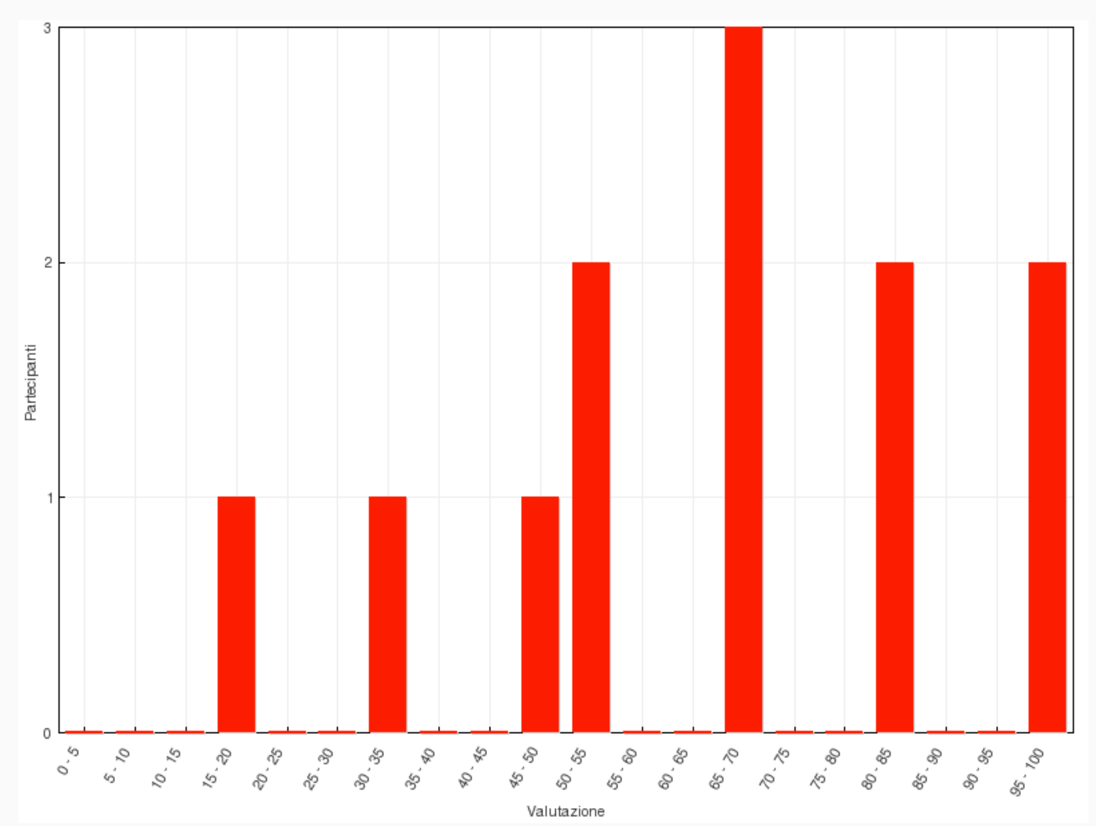


Fig. 26: Risultati *formative assessment* “Sintesi proporzionalità”.

1) Indica con x la lunghezza del lato di un triangolo equilatero e con y il suo perimetro. Esprimi la funzione che lega y a x e disegna il grafico.

2) Un tassista chiede a un cliente 5€ alla partenza come quota fissa, più 2 € per ogni chilometro percorso.

➡ *Esprimi la spesa in funzione dei chilometri percorsi.*

➡ *Rappresenta in un piano cartesiano la funzione ottenuta (presupponi un percorso non superiore a 10 km).*

➡ *Un secondo tassista richiede 3 € al chilometro (senza spesa iniziale). Esprimi anche in questo caso la spesa in funzione dei chilometri percorsi e rappresenta la nuova funzione ottenuta nel medesimo piano cartesiano in cui hai rappresentato la precedente.*

➡ *Decidi quale delle due proposte è più vantaggiosa per il cliente.*

3) Indica la misura delle dimensioni di un rettangolo con x e y. Sapendo che l’area della superficie è 84 cm^2, esprimi la funzione che lega y e x e disegna il grafico di tale funzione. Stabilisci di quale curva si tratta e determina dal grafico il perimetro del rettangolo che ha un lato lungo 28 cm.

4) *In un rettangolo abbiamo la base tripla dell'altezza. Se indichiamo con x la misura di quest'ultima, qual è il valore dell'area A del rettangolo? Come varia A al variare di x? Rappresenta graficamente questa relazione. Che tipo di proporzionalità intercorre tra A e x? Qual è il coefficiente di proporzionalità? Come si chiama il grafico della relazione rappresentata? Se il valore di x raddoppia, triplica, quadruplica… che ne è del valore di A?*

Dai problemi proposti agli studenti si può evincere che non ho lavorato su quesiti via via più complessi ma sull'abilità nel saper riconoscere le diverse situazioni che possono essere descritte in un testo. Potremmo dire che agli studenti era richiesto di sviluppare l'abilità della comprensione del testo, il che vuol dire una lettura attenta a diversi livelli, che porti alla individualizzazione delle variabili in gioco, delle costanti e delle relazioni che legano le diverse quantità. Questo lavoro è particolarmente impegnativo, in quanto, nella concezione dello studente, la matematica è qualcosa di schematico, procedurale e ripetitivo in cui non bisogna mettere in campo competenze di analisi e critica e questa posizione inficia una lettura adeguata dei testi proposti.

Applet Java:

Per tentare di sbloccare gli studenti sono stati utilizzati anche degli Applet Java che mostravano come alcuni fenomeni fisici sono descritti dalle funzioni studiate, ciò al fine di sottolineare l'importanza e la potenza della modellizzazione matematica che permette, conoscendo per esempio solo la dipendenza lineare, di studiare e analizzare fenomeni appartenenti a campi del conoscere molto diversi tra loro (dalla fisica alla biologia, alla chimica, all'economia, ecc..). Riporto un fotogramma dei tre Applet Java mostrati in classe (figg. 27-28-29).

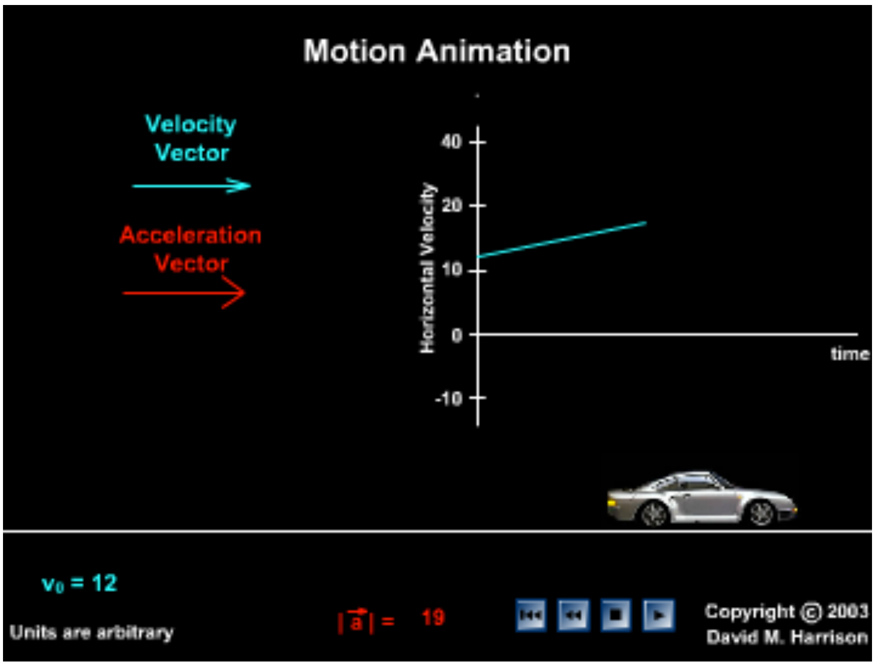


Fig. 27: Il moto uniformemente accelerato e la dipendenza lineare.

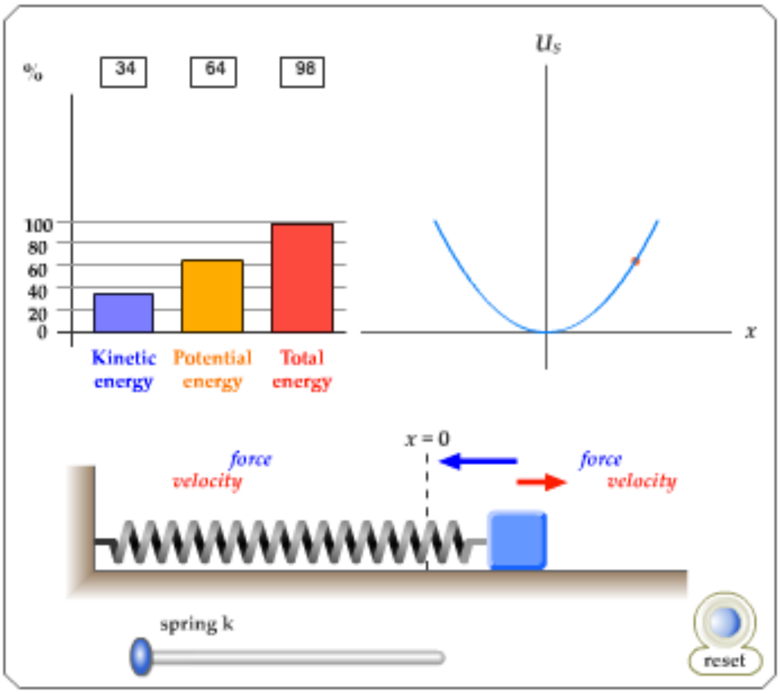


Fig. 28: L’energia potenziale di una molla e la proporzionalità diretta quadratica.

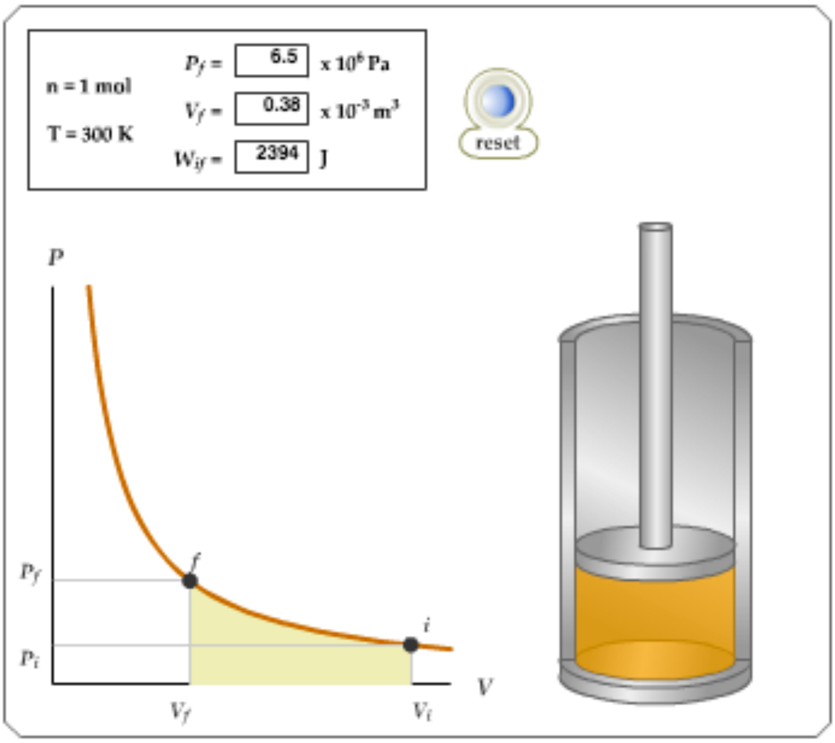


Fig. 29: La legge di Boyle e la proporzionalità inversa.

Contemporaneamente, per guidarli nella lettura dei problemi e per aiutarli a scrivere il modello corretto, ho distribuito un insieme di domande guida che dovrebbero porsi durante l’analisi di un testo. Queste domande possono essere tenute e utilizzate anche durante il compito in classe:

- *Quali sono le grandezze in gioco?*
- *Qual è la variabile indipendente?*
- *Qual è la variabile dipendente?*
- *Ci sono quantità fisse?*
- *Crescono nello stesso verso?*
- *Che tipo di relazione lega le variabili?*
- *Prova a scrivere la forma funzionale.*

Compito in classe sui diversi tipi di proporzionalità:

Questo è stato l'ultimo lavoro prima del compito in classe, di cui riporto la scheda di valutazione (tab. 8) e alcuni esercizi per spiegare come sono stati valutati i diversi livelli di competenza.

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA1.4: Tradurre brevi istruzioni in sequenze simboliche (anche con tabelle); risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici. **MA3.2:** Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici. **MA3.4:** Tradurre dal linguaggio algebrico e viceversa.	Risoluzione problemi di proporzionalità e dipendenza funzionale.	Non risolve i problemi.	Risolve solo i problemi che richiedono la proporzionalità diretta o la dipendenza lineare.	Risolve i problemi riguardanti gli altri tipi di proporzionalità e dipendenza lineare.	Riconosce le diverse dipendenze anche in problemi con contesti più complessi e di natura non algebrica.

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MC2.6: Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.	Piano cartesiano	Non sa interpretare i grafici sul piano cartesiano e non sa costruirne uno da una lista di coordinate di punti.	Interpreta correttamente i grafici rappresentati sui piani cartesiani. Riporta correttamente una tabella sul piano cartesiano.	Oltre al livello base costruisce i grafici delle funzioni richieste.	Oltre al livello intermedio risolve problemi rappresentandoli graficamentete in modo totalmente corretto e appropriato.

Tab. 8: Scheda di valutazione sui diversi tipi di proporzionalità.

Livello base:

Per verificare il raggiungimento del livello base, che possiamo identificare con il riconoscere e disegnare le diverse forme funzionali, sono stati somministrati quesiti come questo:

Associa ogni funzione a ciò che rappresenta e disegnala su un piano cartesiano:

$$y = \frac{5}{x} \qquad y = 3x + 4 \qquad y = -3x$$

$$y = \frac{4}{x} - 6 \qquad y = 3x^2$$

Livello intermedio:

Per il livello intermedio lo studente deve risolvere dei problemi analoghi a quelli affrontati in classe:

Immagina di voler costruire un rettangolo con area A=24 cm^2. A tal scopo assegna valori arbitrari alla base b e determina i corrispondenti valori che deve possedere l'altezza h.

base b (cm)	1,0	2,0	3,0	4,0	6,0	8,0	12,0	24,0
altezza h (cm)	…	…	…	…	…	…	…	…

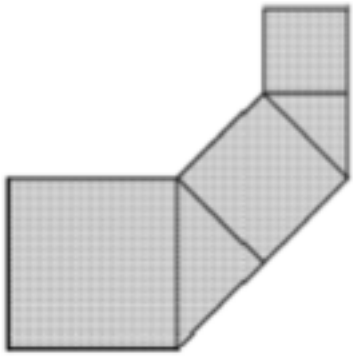
Che tipo di relazione lega la base b e l'altezza h?

Costruisci il grafico cartesiano relativo ai dati della tabella riportando sull'asse orizzontale i valori della base b e sull'asse verticale quelli dell'altezza h.

Livello avanzato:

Per il livello avanzato si deve mostrare di saper utilizzare le abilità acquisite in contesti diversi non direttamente riconducibili a quelli studiati:

La seguente figura è formata da 3 quadrati e 2 triangoli rettangoli isosceli. Quanto vale la sua area se il lato del quadrato più grande misura 2 cm?



La dipendenza lineare e la sua rappresentazione grafica:

Dopo il compito in classe, il percorso è continuato approfondendo le caratteristiche della forma funzionale più semplice, cioè la dipendenza lineare. Il percorso e gli strumenti matematici che si studieranno saranno gli stessi che si affronteranno nel caso delle altre due forme funzionali. Studieremo il grafico, le intersezioni con gli assi, l'appartenenza di un punto al grafico della funzione, come determinare l'equazione della funzione dalla rappresentazione grafica, l'intersezione di due o più funzioni dello stesso tipo o di tipi diversi e le relative disequazioni che ci permettono di ottenere informazioni sul segno della nostra funzione. Questo percorso si completerà a febbraio del quarto anno, nell'ordine saranno trattate prima le funzioni lineari, le quadratiche e infine le funzioni razionali fratte.

Nel periodo successivo al compito in classe, l'obiettivo è stato sviluppare gli strumenti matematici degli studenti facendo loro imparare a leggere le informazioni dai grafici e a determinare i punti d'incontro di due o più rette. Questi strumenti permettono allo studente di comprendere più in profondità come selezionare le strategie da utilizzare per risolvere diverse tipologie di problemi.

Anche in questo caso, all'inizio ho proposto agli studenti divisi in gruppi dei problemi con difficoltà crescente utili per introdurre, partendo dalla discussione che ne sarebbe nata, gli oggetti matematici obiettivo di questo periodo scolastico. I problemi proposti descrivono un percorso, per questo motivo, in questo caso, riporterò tutti i quesiti:

1) *Una segheria vende legno di Abete a 500 € al m^3. Se voglio acquistarne 3,5 m^3 quanto dovrò pagare?*

2) *Sfortunatamente questa segheria si trova a Bormio e chiede 70 € di trasporto, quanto sarà il costo totale?*

3) *Riassumendo la tariffa della segheria di Bormio, 70 € di trasporto più 500 € al m^3, è possibile rappresentare su un piano cartesiano la retta che rappresenta la tariffa della segheria? Chi rappresenta la variabile indipendente e chi quella dipendente?*

4) *Una seconda segheria per lo stesso tipo di legno fa la seguente tariffa: 150 € per il trasporto e 485 € al m^3 per il legname. Determina quanto legno devo comprare per spendere la stessa cifra nelle due falegnamerie?*

5) *Dopo quanti metri cubi di legno è più conveniente la seconda tariffa?*

Partendo da questi problemi sono stati introdotti i sistemi lineari e le disequazioni di primo grado, per entrambi i concetti si è data particolare attenzione al loro significato grafico e alle informazioni deducibili dal loro utilizzo. Per esempio, nel caso di un problema sulla scelta del migliore fornitore. Stessa cura è stata data per le intersezioni di una retta con l'asse y e l'asse x, in particolare quest'ultima, oltre ad introdurre il significato grafico delle equazioni, è importante nei problemi di gestione in cui la funzione guadagno è rappresentata da una retta, infatti in questo caso l'intersezione con l'asse x rappresenta il quantitativo di prodotti minimo da vendere affinché l'azienda non sia in perdita.

Gli strumenti presentati fino ad ora hanno la caratteristica di poter determinare informazioni dall'espressione algebrica della funzione. Il percorso è continuato cercando, invece, di imparare a ricavare informazioni dal grafico stesso. Ci siamo posti il problema di come sia possibile ricavare dal grafico di una retta la sua espressione algebrica, per semplicità si è scelto di usare la seguente metodologia:

- si parte dall'osservazione che l'equazione di una retta scritta in forma esplicita è del tipo: $y = ax + b$, con a che è il coefficiente angolare e b è l'intercetta della retta con l'asse y (le rette del tipo $x = k$ sono state studiate separatamente);
- dal grafico determino direttamente il valore del coefficiente b;
- per il coefficiente a ho invece bisogno di conoscere due punti, in quanto esso rappresenta la pendenza della retta. È stata data e spiegata agli studenti la seguente formula:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Determinati *a* e *b*, siamo ora in grado di scrivere l'equazione della retta corrispondente al grafico dato. L'unica semplificazione di questa metodologia, rispetto a quelle standard, è che nel grafico dato dev'essere indicata l'intersezione con l'asse y della nostra retta.

Alla fine di questa fase focalizzata più su nozioni e strumenti teorici, è stato somministrato agli studenti un *formative assessment* con esercizi sui sistemi lineari, intersezioni di una retta con gli assi cartesiani, appartenenza di un punto ad una retta e determinazione dell'equazione di una retta dal suo grafico. Riporto in fig. 30 i risultati ottenuti. Dai risultati di questo test si nota come ci sia

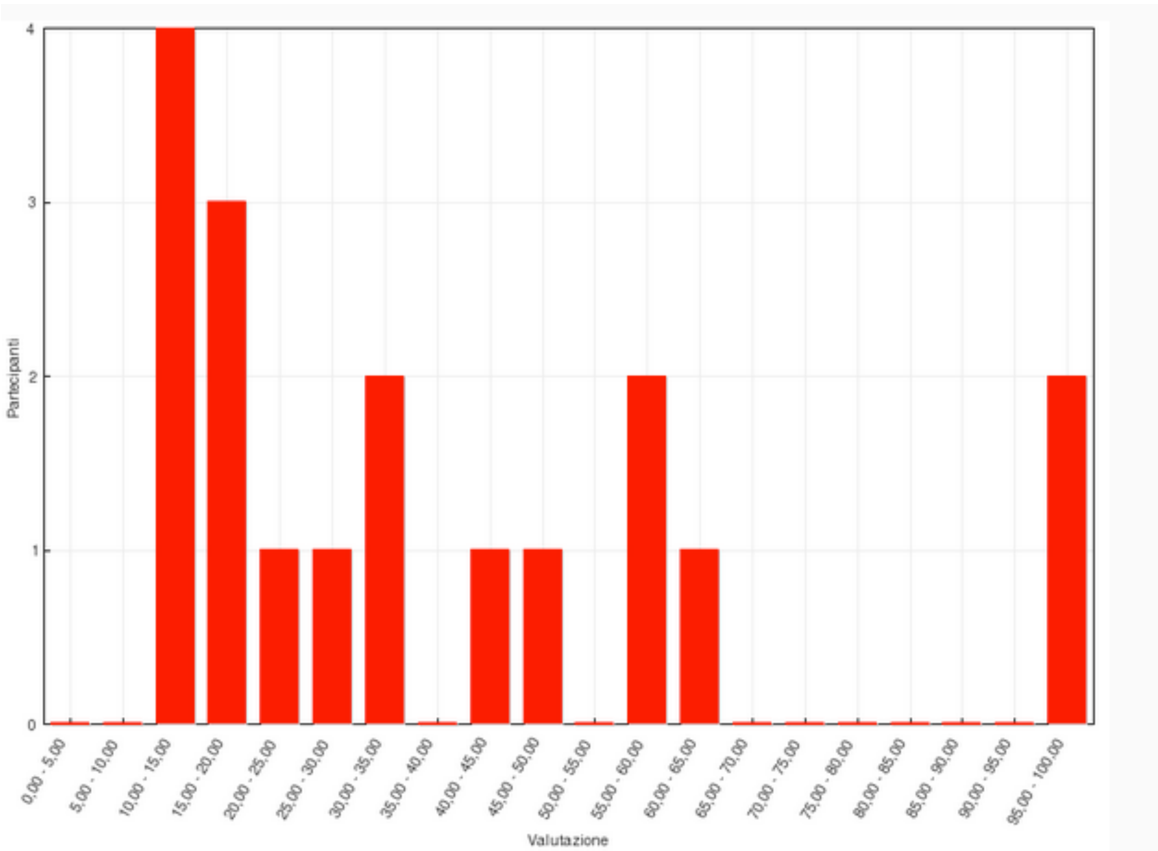


Fig. 30: Risultati *formative assessment* "La Retta".

ancora molta confusione sui temi trattati quasi in tutti gli studenti della classe. Questo mi ha costretto a dovere prendere alcune decisioni: spendere due settimane per poter riaffrontare le quattro tipologie di esercizi proposti. Inoltre, si poneva il problema di quale lavoro proporre ai due studenti che invece avevano ottenuto un risultato eccellente, in quanto non prevedere nulla per loro avrebbe avuto gravi conseguenze sulle loro motivazioni come dimostrava il fatto che uno dei due aveva già mostrato di soffrire i tempi rallentati della classe. Da questa problematica è nato un percorso di eccellenza in cui i due studenti hanno iniziato a fare delle ore fuori aula in cui hanno studiato il metodo di Cramer per la risoluzione si sistemi lineari 2x2 e 3x3. Nelle due settimane di rispiegazione è stato anche approfondito il significato del coefficiente angolare, sottolineando che rappresenta la pendenza della retta e che questo concetto ha molte implicazioni nella vita di tutti i giorni, per questo motivo è stato mostrato un video sulla pendenza e lo snowboard[127]. È stato anche proposto un lavoro a coppie dove dovevano determinare come costruire una rampa per disabili per superare un dislivello di 1,20 metri, a tal fine hanno dovuto cercare la legge che regola ciò, e dai limiti imposti dal legislatore determinare le caratteristiche della propria rampa.

Dopo questo periodo, è stato somministrato un nuovo *formative assessment* simile al precedente, e sono stati ottenuti i risultati presentati in fig. 31. La differenza è evidente rispetto al

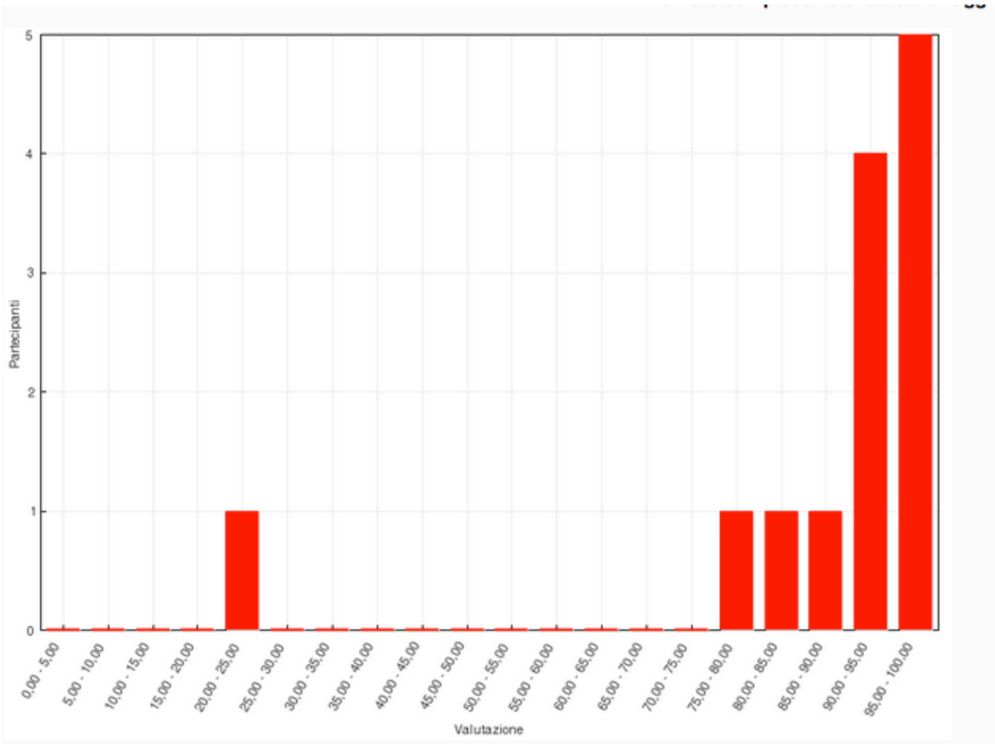


Fig. 31: Risultati *formative assessment* “La Retta 2”.

precedente, per il singolo studente che è risultato gravemente insufficiente sono intervenuto svolgendo altre due ore di recupero personalizzato; nonostante questo il compito in classe è andato malissimo. Questo fatto ha convinto il consiglio di classe a chiedere alla famiglia dello studente di procedere con esami atti a capire se lo studente avesse qualche forma di dislessia e discalculia non ancora certificate, a maggio è arrivata la conferma di questo nostro sospetto.

[127] https://www.youtube.com/watch?v=vi12aITNRts

Compito in classe sulla retta:

Il compito in classe somministrato è stato strutturato in modo tale che le quattro tipologie di esercizi avrebbero garantito al massimo un risultato discreto, mentre per l'eccellenza gli studenti avrebbero dovuto applicare gli strumenti studiati a dei problemi. Gli studenti che hanno partecipato al progetto eccellenza dovevano, nello stesso tempo concesso ai compagni (1 ora), risolvere anche due sistemi lineari uno 2x2 e uno 3x3 utilizzando il metodo di Cramer, inoltre il punteggio di ogni esercizio in comune con i compagni era ridotto del 20%. Riporto la scheda di valutazione (tab. 9) della verifica e alcuni problemi proposti per raggiungere l'eccellenza, facendo in seguito una riflessione su questo primo esperimento di valutazione personalizzata.

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA1.7: Rappresentare graficamente equazioni di primo grado; comprendere il concetto di equazione e quello di funzione. **MA1.8:** Risolvere sistemi di equazioni di primo grado verificando la correttezza dei risultati. **MC1.5:** Sistemi di equazioni e disequazioni di primo grado.	Funzioni lineari	Non applica le proprietà in modo corretto. Non riconosce quando utilizzare i diversi strumenti matematici.	Utilizza sistemi lineari e equazioni in modo corretto e adeguato.		

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA2.4: Applicare le principali formule relative alla retta e alle figure geometriche del piano cartesiano. **MC2.7:** Interpretazione geometrica dei sistemi d equazioni.	Retta	Non utilizza le proprietà delle rette e non sa applicare le relative formule.	Determina le intersezioni della retta con gli assi coordinati e dimostra l'appartenenza di un punto alla retta o meno.	Oltre al livello base sa determinare la formula algebrica di una retta a partire dal suo grafico.	
MA3.2: Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici. **MA3.4:** Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa.	Costruzione modelli lineari	Non risolve né i problemi proposti né i quesiti.	Risolve solo i quesiti proposti.	Risolve i problemi in cui è richiesto di costruire e studiare solo un modello.	Oltre all'intermedio risolve anche problemi di scelta in cui bisogna ottimizzare un risultato.

Tab. 9: Scheda di valutazione compito sulla retta.

Livello avanzato:

Un fornitore di legname vende l'abete a 650 €/m^3 e per il trasporto chiede 120 €. Scrivi la funzione che descrive la tariffa, disegna il grafico e determina quanto costerà alla Contrada degli Artigiani comprare e farsi consegnare 10 m^3 di abete.

Un'azienda che vende sottopiatti di legno ha la sua funzione guadagno descritta dalla seguente retta: $y = 20x - 180$ e una produzione massima di 1500 sottopiatti. Quanti sono i sottopiatti che devono essere venduti per non essere in perdita e a quanto ammonta il massimo guadagno?

Due compagnie telefoniche hanno le seguenti tariffe:

A) 1 € di scatto alla risposta e 0,5 € al minuto;

B) 1,5 € di scatto alla risposta e 0,4 € al minuto;

Quanti minuti devo parlare perché le due tariffe siano equivalenti?

Valutazione personalizzata

Per poter applicare questa metodologia dovevo conoscere in profondità le competenze e le abilità degli studenti e il livello che potevano raggiungere. Ho dovuto comunicare in anticipo questa mia decisione agli studenti che hanno mostrato di fidarsi del mio giudizio. Infatti, hanno mostrato di essere consapevoli del lavoro personale da fare smitizzando anche il punteggio che avrebbero ottenuto che non è stato più il fine ultimo del compito in classe ma un mezzo per testare i propri progressi, cioè hanno riconosciuto che il valore non è nel voto ma nella loro crescita.

Inoltre, gli studenti hanno dimostrato di essere interessati a migliorare le proprie conoscenze dando la loro disponibilità a lavorare senza riserva per andare sempre meglio e senza farsi fermare da scarsa, o eccessiva, autostima.

Mettere in atto questo tipo di valutazione ha permesso agli studenti di raggiungere il massimo possibile rispetto alle proprie capacità e conoscenze; questo ha la potenzialità di stimolare i bravi ad andare oltre rispetto ai livelli adatti a loro e permette di progettare un percorso valutativo ad *hoc* per chi ha delle carenze. Questo tipo di valutazione è stata la conclusione coerente dell'aver monitorato il percorso degli studenti attraverso gli strumenti informatici. Aver costruito un test con punteggio tarato sul livello di preparazione di ogni alunno è uno strumento efficace che sarebbe valido e opportuno usare nelle verifiche in itinere come è stato fatto in questo caso. Nelle verifiche sommative finali sembra più utile non utilizzare un tipo di punteggio diverso per sottolineare, soprattutto per chi parte da livelli più bassi, che alla fine del percorso didattico, ognuno facendo la strada più adeguata a sé, può e deve raggiungere gli obiettivi previsti per l'anno in corso[128].

Questa strategia, nata da una problematica che si è presentata in classe, merita sicuramente ulteriori approfondimenti, futuri studi e sperimentazioni che potranno trovare spazio in un progetto successivo a questa tesi di dottorato.

Disequazioni lineari:

Durante il mese di gennaio è stato introdotto l'ultimo strumento matematico utile per lo studio delle funzioni e per la risoluzione di problemi: le disequazioni. Il tema è stato introdotto proponendo agli studenti di risolvere alcuni problemi. In seguito dall'analisi di questi, è stato introdotto il significato di disequazione e sono state presentate alcune applicazioni. Riporto alcuni dei problemi proposti:

La pasticceria della bottega del gusto necessita di ricavare più di 200 € dalla vendita delle torte. Se ogni torta è venduta a 10 €, quante torte dovrebbero essere vendute per raggiungere l'obiettivo?

Un lavoratore guadagna 75 € al giorno e 15 € all'ora, per guadagnare più di 700 € a settimana (5 giorni lavorativi), quante ore dovrà lavorare?

Due ditte che affittano camion hanno le seguenti tariffe:

A) *50 € al giorno e 3,50 € al chilometro.*
B) *80 € al giorno e 2 € al chilometro.*

Dopo quanti chilometri è più conveniente la seconda tariffa?

Dal punto di vista del metodo risolutivo, l'introduzione delle disequazioni non ha presentato difficoltà, in quanto poco si discostano dalle equazioni, più complesso è stato aiutare i ragazzi a comprendere il significato profondamente diverso che hanno.

Esame di fine quadrimestre:

Il mese di gennaio è stato utilizzato per prepararci alla *prova d'esame di fine quadrimestre,* ripassando gli argomenti trattati nei due anni, come il preventivo, e facendo esercizi in cui le richieste dell'esame dell'anno precedente erano ampliate introducendo quesiti che coinvolgevano i temi trattati nel primo quadrimestre del secondo anno. Riporto la scheda di valutazione (tab. 10) e la parte dell'esame di fine quadrimestre utilizzata per valutare le competenze matematiche:

---

[128] Biagioni, cit. p. 24.

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica.	Calcoli Fasi del procedimento Risultato Tabella riassuntiva Disequazione risolutiva.	Calcoli totalmente errati, ordine sequenziale del procedimento errato. Disequazione non impostata.	Calcoli parzialmente corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto. Disequazione impostata ma non risolta.	Calcoli corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto, risultato determinato correttamente, tabella riassuntiva assente o imprecisa. Disequazione impostata e risolta correttamente.	Calcoli corretti, ordine sequenziale del procedimento corretto, risultato determinato correttamente, tabella riassuntiva corretta. Disequazione impostata, risolta correttamente e rappresentata graficamente.
M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.	Volume Piano Cartesiano	Calcolo del volume errato. Costruzione del piano cartesiano errato.	Calcolo del volume corretto. Intercette delle rette segnate correttamente ma pendenze errate.	Calcolo del volume corretto. Rette disegnate correttamente ma su piani cartesiani errati.	Calcolo del volume corretto. Rette e piano cartesiano corretti.

Tab. 10: Scheda di valutazione esame di fine quadrimestre.

Utilizzando il disegno tecnico che hai realizzato, determina il prezzo di vendita della cornice che hai realizzato in Bottega. Tenendo conto dei seguenti dati:

Tipo di decorazione	Costo
Sabbia dorata	0,60 €
Sassi (intonaco)	0,10 €
Trucioli di legno	0,30 €

Tipo di decorazione	Costo
Trucioli di ferro	0,70 €
Scaglie di legno	0,15 €
Pezzettini di legno vecchio	0,50 €
Pezzettini di botti (usando il lato color vinaccia)	0,95 €
Colorato con terra su gesso e tirato con pietra d'agata	1,20 €
Carta pasta intrecciata	0,20 €
Pezzettini di botti	0,90 €

La cornice è fatta di larice che la "Contrada degli Artigiani" può ordinare da due fornitori, che applicano le seguenti tariffe:

A) 200 € per il trasporto e 1200 €/m^3 per il legname;

B) 50 € per il trasporto e 12225 €/m^3 per il legname.

Richieste:

1) Disegna il grafico delle due tariffe.

2) Determina dopo quanti metri cubi è più conveniente la prima tariffa.

3) In base alla quantità di larice di cui hai bisogno, prenderai contatto con il fornitore A o B?

Per il calcolo del preventivo considera solo il costo del legname e non il trasporto. Altri dati per il calcolo del preventivo:

Costo multistrato di betulla	9 €/m^2
Costi fissi	5 €
Scarti	30%
Ore di lavoro	3
Costo orario apprendista	6 €/h
Guadagno bottega	70%
IVA	22%

Ricorda di considerare tra i costi il larice e la decorazione. Il preventivo deve essere ultimato con una tabella riassuntiva.

Riporto anche il progetto (fig. 32) per aiutare a comprendere il tipo di lavoro svolto dagli studenti.

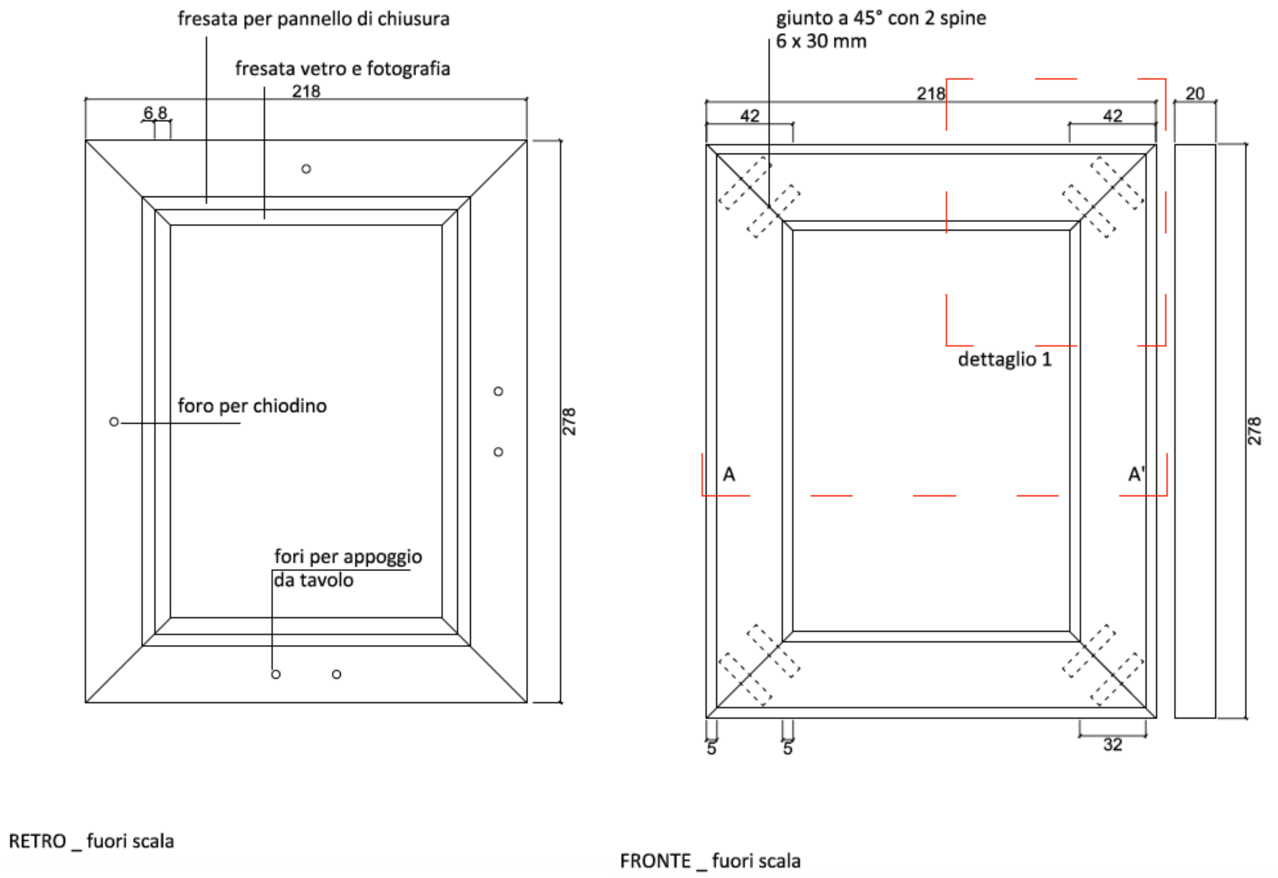


Fig. 32: Fronte e retro quotato della cornice realizzata dagli studenti.

3.3.5 Seconda legno: UBD 4 - Baricentro (Febbraio 2015)

In questo terzo paragrafo riguardante la seconda legno esporrò il percorso didattico svolto sullo studio delle caratteristiche di staticità di un manufatto ligneo, il tema è stato affrontato in seconda in quanto gli studenti in questa annualità iniziano a realizzare oggetti come alzatine per dolci o tavoli in cui nella progettazione bisogna chiedersi se le caratteristiche di stabilità sono idonee all'uso che se ne dovrà fare. Il percorso in oggetto è durato circa un mese, riporto la UBD che è stata redatta (tab. 11).

Titolo: Studio della statica di un oggetto tridimensionale	
Step 1: Risultati desiderati	
Comprensione di lunga durata (Enduring understanding)	
Gli studenti comprenderanno come utilizzare, come determinare il baricentro di un oggetto e come stimarne il carico sostenibile.	
Domande essenziali	**Competenze, abilità e conoscenze**
• Esistono modi per conoscere già in fase di progettazione se un oggetto sarà adeguato all'uso per cui è stato richiesto? • Come considerare i limiti fisici di un oggetto nella sua progettazione?	**M2:** Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni. **MA2.2:** Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete.
	M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi. **MA3.2:** Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici.
Step 2: Prove di valutazione	
Gli studenti devono mostrare come partendo dal progetto di un mobile e dai dati sui materiali utilizzati riescano a determinare il baricentro delle stesso e a calcolare il massimo peso che possa essere posto sugli estremi del suo piano d'appoggio senza che questo causi il ribaltamento del mobile.	
Sommario delle prove per competenze	**Griglia di valutazione**
• Calcolo del baricentro • Massimo peso senza ribaltamento.	• Massa • Baricentro • Limite stabilità • Piano Cartesiano • Equazione del baricentro
Auto-valutazioni	**Altre prove**
Formative assessment	Nessuna altra prova
Step 3: Attività di apprendimento	
Totale ore: 9	
Obiettivo	**Attività**
1-2) Introduzione al baricentro	Visione video sul baricentro
3) Che cos'è la media?	Lezione dialogata sulla media
4-5) Che cos'è il baricentro matematicamente?	Studio a coppia di schede sul calcolo del baricentro
6) *Formative assessment* sul concetto di media	Esercitazione

7) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati del *formative assessment*)	
8) Valutazione	Compito di fine UBD in cui gli studenti hanno dovuto studiare le caratteristiche di staticità di un oggetto.
9) Consegna verifiche	Correzione e conclusioni.

Tab. 11: Studio della statica di un oggetto tridimensionale.

La prima attività che è stata svolta in classe per introdurre il concetto di baricentro è stata la visione di un video[129] realizzato da GeoScienza (un programma televisivo scientifico per ragazzi della Rai) andato in onda nell'ottobre 2011. Nel video vengono mostrate alcune applicazioni del baricentro e se ne presenta il suo significato fisico, all'interno dello stesso viene spiegato come fa la Torre di Pisa a non crollare attraverso proprio il concetto appena spiegato. Gli studenti sono risultati molto ricettivi, il video ha attivato la loro curiosità e li ha fatti concentrare sulla problematica dell'equilibrio. Dopo una prima fase di domande da parte degli studenti, questa fase introduttiva è continuata con un *brainstorming* in cui ho chiesto loro cosa pensassero che fosse il baricentro. Partendo da alcuni interventi degli studenti è stato possibile dare una definizione formale del baricentro:

Testo della domanda	Possibili risposte alternative		Scelta
In una classe composta da 25 studenti è stata condotta un'indagine per sapere quanti libri sono stati letti da ogni studente nel mese di dicembre.	A	1	☐
Il grafico illustrai dati raccolti.	B	2	☐
	C	2,5	☐
Qual è il numero medio di libri letti da ogni studente nel mese di dicembre?	D	5	☐

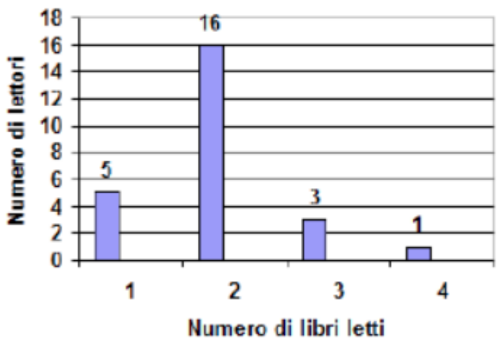


Fig. 33: Quesito d'esame sulla media pesata.

129 http://www.rai.tv/dl/RaiTV/programmi/media/ContentItem-60047290-c015-4df6-b8b2-efe44f168f79.html

Il centro di massa o baricentro di un sistema di corpi è il punto geometrico corrispondente al valore medio della distribuzione della massa del sistema nello spazio.

Questa definizione mette in evidenza che il baricentro è una posizione media che dipende dalle masse dei singoli oggetti considerati. Essendo una posizione sarà necessario determinare delle coordinate, il passo successivo è stato capire come si determina la posizione media di un insieme di punti in un piano cartesiano. Utilizzando il quesito d'esame in fig. 33 gli studenti hanno dedotto che non sempre una media semplice è sufficiente per ottenere il risultato corretto, ma che a volte bisogna utilizzare un altro tipo di media che è appunto quella pesata. A questo punto eravamo pronti per applicare in modo compiuto il concetto di baricentro e il calcolo che ne deriva, abbiamo assegnato a tre punti sul piano cartesiano la massa e, insieme agli studenti, abbiamo potuto notare che pur mantenendo le coordinate di ognuno di essi, se si assegnano diversi valori al valore della massa dei punti, è possibile notare come anche le coordinate del baricentro si modifichino. In questo modo è stato chiaro come non sia possibile non considerare il valore delle masse nel momento del calcolo. Seppure quasi tutte le parti per risolvere la nostra problematica sono state presentate nelle lezioni successive, ho proposto esercitazioni, su cui puntualmente dopo si discuteva insieme, sui tre concetti fondamentali: media, media pesata e calcolo del baricentro. Per sintetizzare e dare agli studenti la possibilità di avere una presentazione schematica del baricentro con le

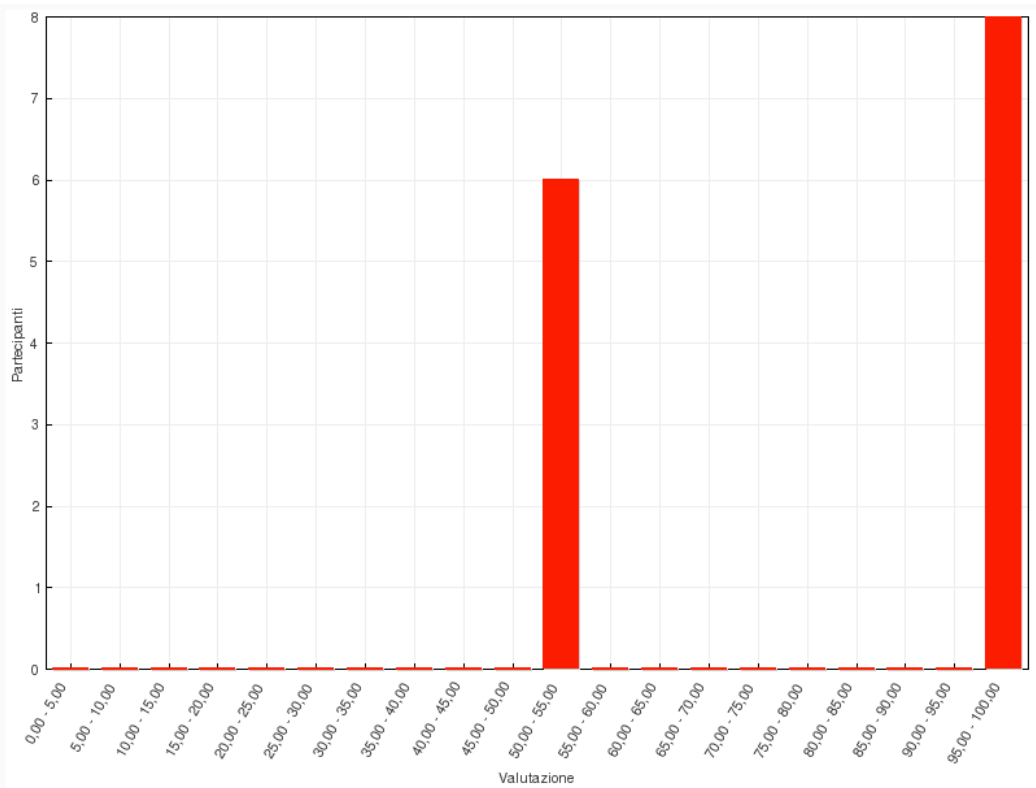


Fig. 34: Risultati *formative assessment* sulla media.

relative formule, è stato condiviso su *moodle* un *link*[130] dove era possibile trovare uno schema di quanto presentato in aula.

Per valutare se gli studenti avevano imparato ad individuare correttamente il tipo di media da utilizzare nelle diverse situazioni, è stato somministrato un *formative assessment* con due problemi uno da risolvere con la media pesata e l'altro con la semplice media aritmetica, i risultati sono nella fig. 34. Dai risultati ottenuti si può vedere come quasi metà della classe necessiti di ulteriori esercitazioni per imparare a trovare quali sono gli indizi in un problema che possano far decidere per un tipo di media o per l'altro.

Condizione di ribaltamento:

Fatta chiarezza sul concetto di media pesata, è stato possibile presentare come sia possibile determinare quale possa essere la massa massimo di un oggetto posto sul bordo del piano di appoggio di un tavolo affinché il "sistema tavolo più oggetto" non si ribalti, per ottenere questo risultato con un procedimento adeguato ai miei studenti abbiamo descritto le caratteristiche di stabilità del nostro "tavolo" considerando una sezione dello stesso come si può vedere nella fig. 35.

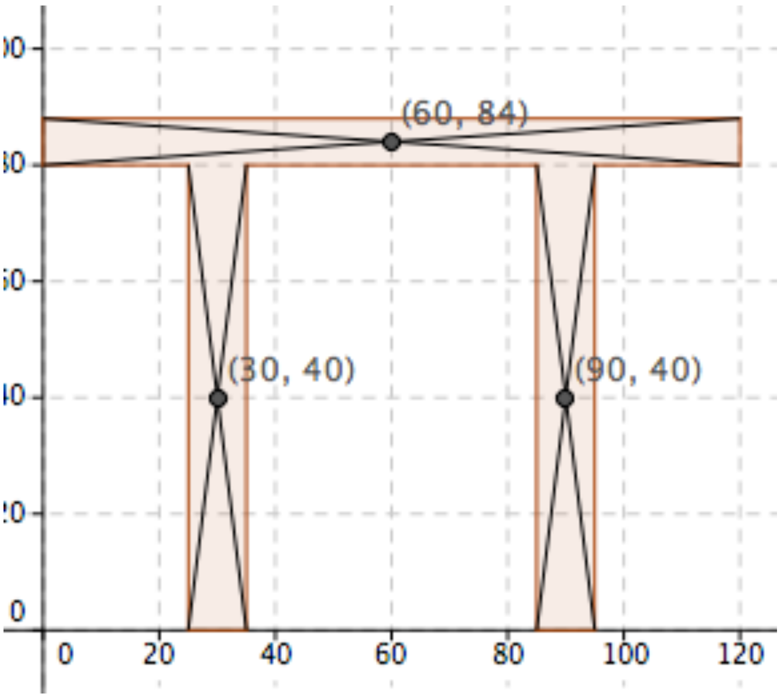


Fig. 35: Modello bidimensionale di un tavolo per lo studio del baricentro.

Con questa semplificazione è stato possibile impostare un'equazione fratta per la determinazione della massa limite prima del ribaltamento, conoscere questo risultato in fase di

130 http://www.youmath.it/formulari/formulari-di-geometria-analitica/428-baricentro-di-tre-punti-e-centro-di-massa.html

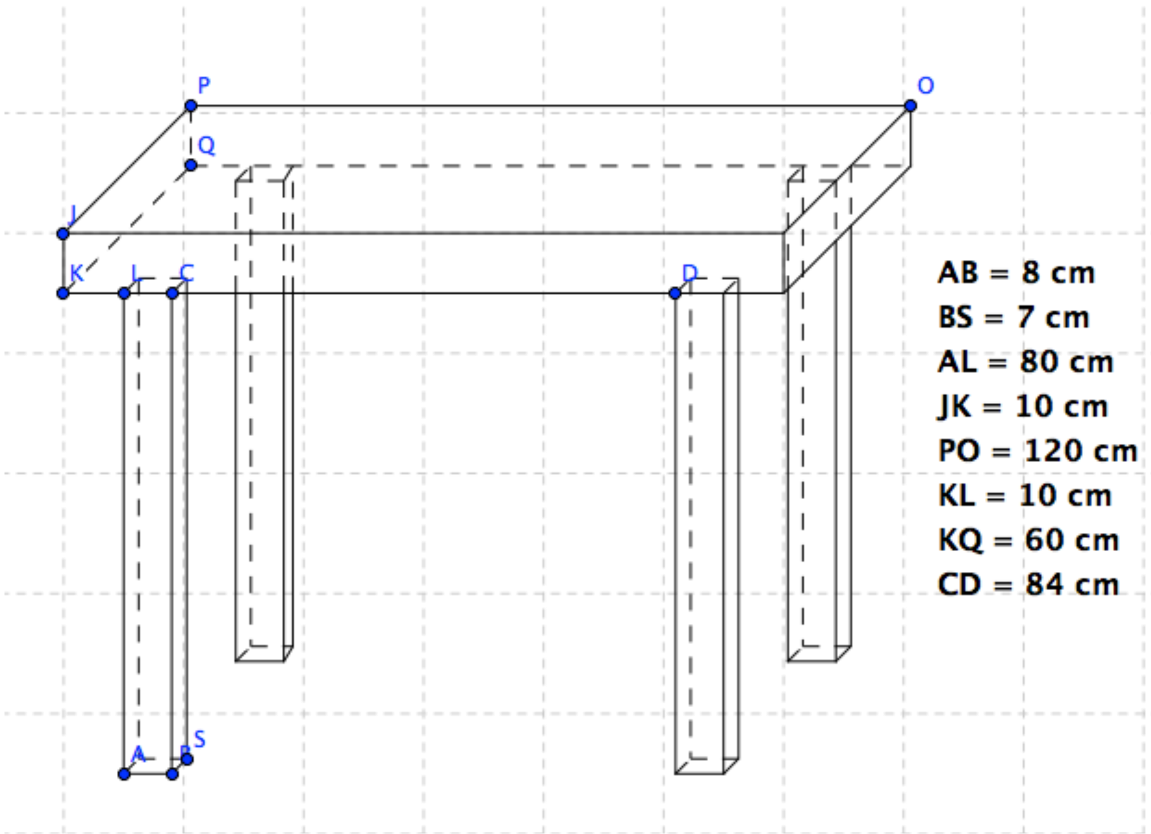
progettazione è importante perché ci permette di valutare se la struttura pensata è adeguata agli usi a cui sarà destinata.

Compito in classe sul baricentro:

Dopo un'altra esercitazione, gli studenti sono stati pronti a sostenere il compito in classe che termina questa UBD. Come sempre riporto la scheda di valutazione (tab. 12) e il compito in classe.

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA2.2: Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete.	Massa Baricentro Limite stabilità	Calcoli totalmente errat o calcola correttamente solo il volume.	Determina correttamente le masse coinvolte.	Determina le masse e il baricentro dell'oggetto considerato.	Determina le masse, il baricentro e limite di stabilità.
MA3.2: Formalizzare il percorso di soluzione si un problema attraverso modelli algebrici e grafici.	Piano Cartesiano Equazione del baricentro	Non utilizza né modelli grafici né modelli algebrici adeguati.	Scegli in modo opportuno la sezione dell'oggetto da rappresentare sul piano cartesiano e la rappresenta in modo corretto.	Determina graficamente il baricentro dei singoli elementi geometrici.	Imposta correttamente l'equazione risolutiva per la determinazione dei limiti di stabilità.

Tab. 12: Scheda di valutazione compito sul baricentro.



1) Calcola i volumi dei singoli pezzi.

2) Calcola le loro masse sapendo che la densità dell'abete è 480 kg/m^3.

3) Rappresenta il tavolo su un piano cartesiano.

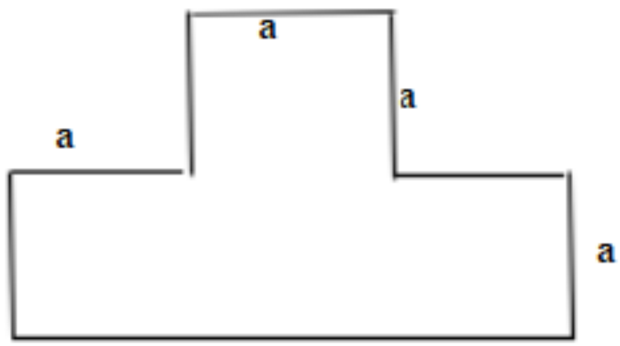
4) Calcola il baricentro.

5) Determina la massa massima che può essere posta sul bordo senza che il tavolo si ribalti.

3.3.6 Seconda legno: Equazioni di secondo grado (Febbraio 2015)

Per quanto riguarda la presentazione delle equazioni di secondo grado non è stato possibile svolgere una UBD in quanto la classe a inizio marzo avrebbe iniziato i suoi due mesi in azienda, l'argomento è stato però completato all'inizio della terza annualità con lo studio della parabola e la risoluzione di problemi di gestione (nell'*e-book* queste due parti saranno presentate insieme in un'unica UBD). Il breve periodo non mi ha però impedito di introdurre l'argomento con una serie di problemi di natura geometrica che portavano alla risoluzione di un'equazione di secondo grado. Ne riporto uno come esempio:

Calcola l'area e il perimetro di questa figura:



Se l'area è 64 metri quadrati quanto dovrà valere a?

Molti studenti hanno intuito come risolvere questo problema, comprendendo così il procedimento risolutivo delle equazioni di secondo grado pure. Per introdurre le equazioni di secondo grado spurie è stata proposta una scheda sulla legge di annullamento del prodotto, mostrando come questo tipo di equazione sia riconducibile a due equazioni di primo grado, di cui una con soluzione banale. Spiegato anche l'ultimo tipo di equazione è stato somministrato agli studenti un *formative assessment* (risultati visualizzatili nella fig. 36).

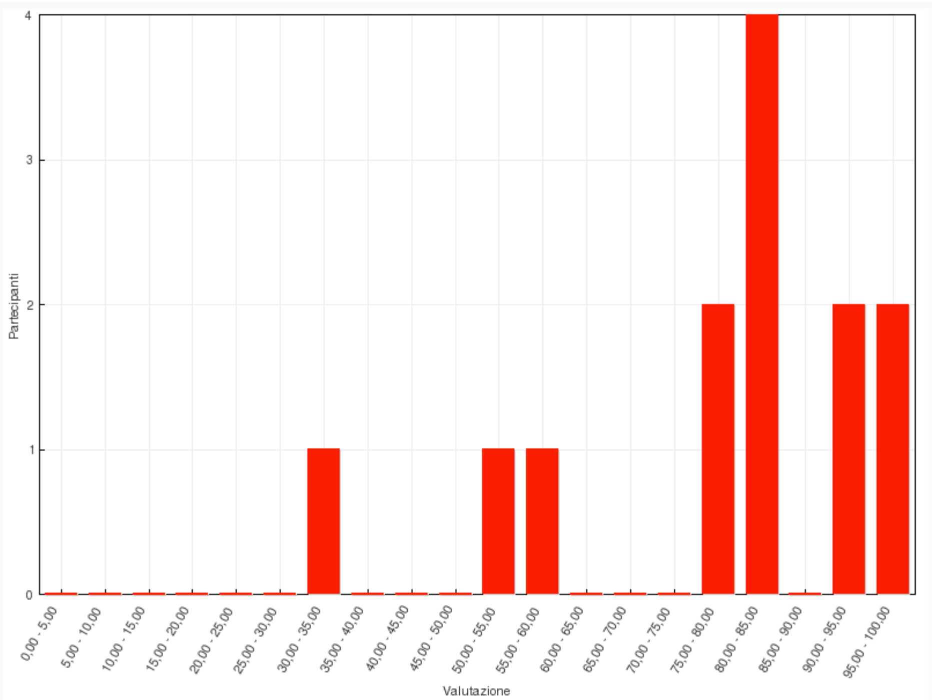


Fig. 36: Risultati *formative assesment* sulle equazioni di secondo grado.

Come è possibile vedere dal grafico i risultati sono stati soddisfacenti nonostante il breve tempo avuto per lo sviluppo adeguato di un tema così importante. Ottenuti questi risultati ho potuto somministrare il compito in classe, che non riporto in quanto è stato un classico test sulle equazioni di secondo grado.

3.3.7 Seconda legno: UBD 5 - Probabilità e statistica (Aprile - Maggio 2015)

L'ultimo argomento affrontato nel corso del secondo anno, sviluppato durante il periodo di tirocinio (in cui incontravo gli studenti circa un'ora a settimana), e le ultime due settimane di scuola, è stato un'introduzione alla probabilità e alla statistica con lettura di diverse rappresentazione dei dati statistici. Una nota che bisogna fare è che l'anno scorso non è stato possibile svolgere l'esame di fine secondo quadrimestre a causa del poco tempo avuto dopo lo stage. Riporto l'ultima UBD (tab. 13) del secondo anno:

<table>
<tr><td colspan="2">Titolo: Probabilità e statistica per la comprensione del mondo.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Step 1: Risultati desiderati</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Comprensione di lunga durata (Enduring understanding)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gli studenti comprenderanno come leggere diversi tipi di diagrammi e valutare la convenienza di una scelta o di un'altra.</td></tr>
<tr><td align="center">Domande essenziali</td><td align="center">Competenze, abilità e conoscenze</td></tr>
<tr><td>• Come la probabilità e la statistica ci aiutano a comprendere meglio il mondo attorno a noi?</td><td>M4:Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.
MA4.1: Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati.
MA4.2: Rappresentare classi di dati mediante istogrammi e diagrammi a torta.
MC4.1: Significato di analisi e organizzazione di dati numerici.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Step 2: Prove di valutazione</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gli studenti devono mostrare di saper leggere diversi diagrammi, ricavando da essi le informazioni richieste per la soluzione di un problema.</td></tr>
<tr><td align="center">Sommario delle prove per competenze</td><td align="center">Griglia di valutazione</td></tr>
</table>

• Analisi del contesto • Interpretazione di diagrammi	• Costruzione diagrammi • Tabelle • Diagrammi • Interpretazione problemi
Auto-valutazioni	**Altre prove**
Formative assessment	Nessuna altra prova
Step 3: Attività di apprendimento	
Totale ore: 10	
Obiettivo	**Attività**
1-2) Introduzione alla probabilità	Lezione dialogata sul concetto di probabilità
3) Esercitazione	Risoluzione in coppia di problemi
4) Introduzione alla statistica	Presentazione delle principali grandezze statistiche.
5) *Formative assessment*	Esercitazione
6) Ri-spiegazione (in funzione dei risultati del *formative assessment*)	
7-8) Preparazione al compito	Risoluzione in coppia di esercizi e problemi
9) Valutazione	Compito di fine UBD di analisi e risoluzione di diversi tipi di problemi.
10) Consegna verifiche e conclusione	Correzione e conclusioni.

Tab. 13: Probabilità e statistica per la comprensione del mondo.

Per quanto riguarda la probabilità, è stata presentata solo quella classica e come determinare la probabilità dell'evento contrario, di due eventi incompatibili e di due eventi in successione nel caso in cui essi siano indipendenti. Questo è anche il livello richiesto dall'esame di qualifica, infatti molti esercizi e quesiti sono stati estratti dalle prove degli anni precedenti. Incontrando gli studenti per poche ore durante il mese di aprile, in ogni lezione è stato necessario riprendere ciò che era stato svolto precedentemente. Discorso analogo riguarda la statistica di cui sono stati presentati i seguenti tipi di diagrammi: ortogramma, istogramma, ideogramma e a torta. Inoltre, sono stati presentati i concetti di moda, mediana, frequenza assoluta e relativa. Presentati questi concetti e finito il periodo di tirocinio, è stato possibile somministrare agli studenti un *formative assessment* su quanto presentato. I risultati presenti in fig. 37 non sono negativi anche se, essendo appena sufficienti, mostrano la necessità di fortificare le conoscenze e le abilità acquisite dagli studenti prima di poter somministrare il compito in classe.

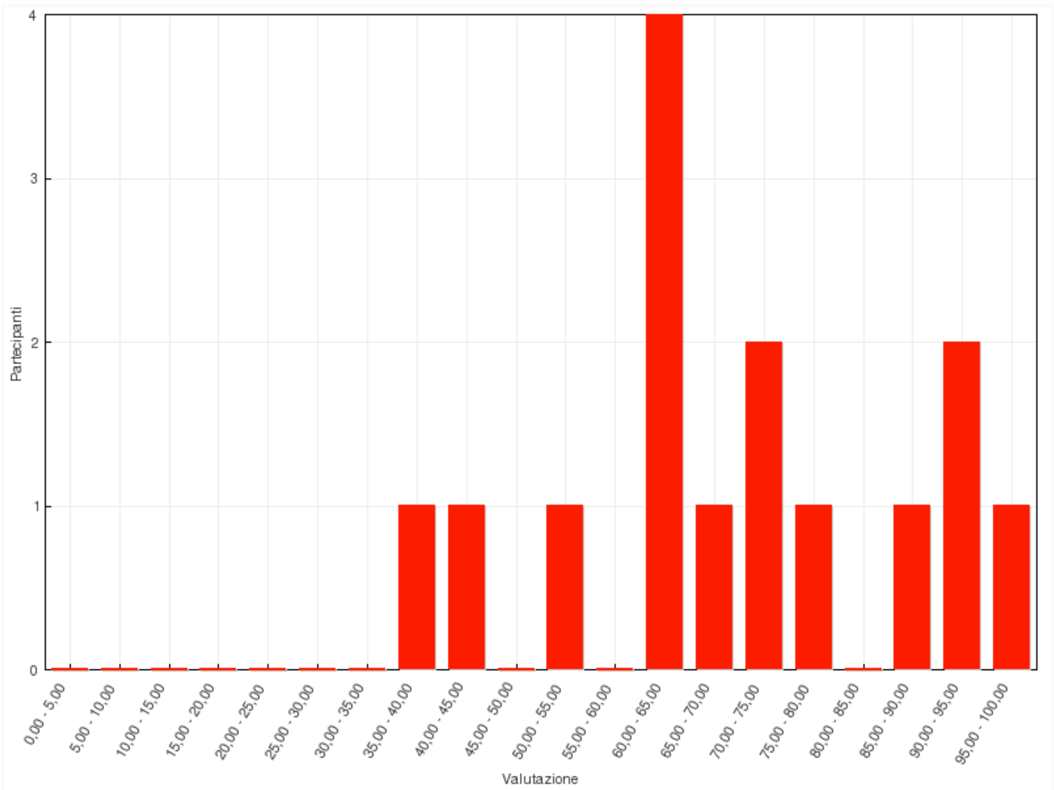


Fig. 37: Risultati *formative assessment* su media e statistica.

Riporto uno degli esercizi utilizzati prima del compito in classe per svolgere il ripasso necessario:

I 25 alunni di una classe hanno ottenuto i voti riportati nella tabella seguente in una certa prova scritta:

7	8	5	7	4	6	5	7	8	7	6	5	4	5	6	7	7	8	6	6	4	6	7	7	6

Il voto, espresso con valori che vanno da 1 a 10 secondo le normative scolastiche, rappresenta il carattere mentre la modalità del carattere è il valore, per cui 6 è una modalità del carattere, 8 è un'altra modalità e così via.

1) Completa la seguente tabella

Modalità (voto)	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
1			
2			
3			
4			
5			

Modalità (voto)	Frequenza assoluta	Frequenza relativa	Frequenza percentuale
6			
7			
8			
9			
10			

2) Individua la media dei voti della classe per la verifica in oggetto, la mediana e la moda dei voti.

3) Nell'ipotesi in cui i ragazzi fossero stati 24 con i voti riportati di seguito, come varierebbero i valori della media, moda e mediana?

7	8	5	7	4	6	5	7	8	7	6	5	4	5	6	7	7	8	6	6	4	6	7	7

Compito in classe su statistica e probabilità:

Questa è stata l'ultima attività prima del compito in classe, di cui riporto la scheda di valutazione (tab. 14):

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA 4.1: Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati. **MC 4.1:** Significato di analisi e organizzazione di dati numerici.	Tabelle Diagrammi Interpretazione problemi	Interpretazione dati e tabelle errata.	Riesce a dedurre informazioni solo se i dati sono già organizzati in tabelle.	Lettura tabelle e diagrammi corretta e adeguata giustificazione delle risposte date.	Risolve problemi e determina informazioni statistiche anche nei casi in cui i dati non sono organizzati in tabelle o grafici.

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Elementi di Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
MA4.2: Rappresentare classi di dati mediante istogrammi e diagrammi a torta.	Costruzione diagrammi	Non costruisce i diagrammi richiesti	Costruisce i diagrammi richiesti in modo adeguato.		

Tab. 14: Scheda di valutazione compito su statistica e probabilità.

Il compito è stato costruito estrapolando quesiti di statistica dalle prove invalsi somministrate negli anni precedenti. Riporto due esercizi come esempio: uno sulla lettura di una tabella ed uno su quella di un diagramma.

1) Nella tabella che vedi sono riportati i dati relativi alla distribuzione di alunni e insegnanti nella scuola secondaria di primo grado in Italia.

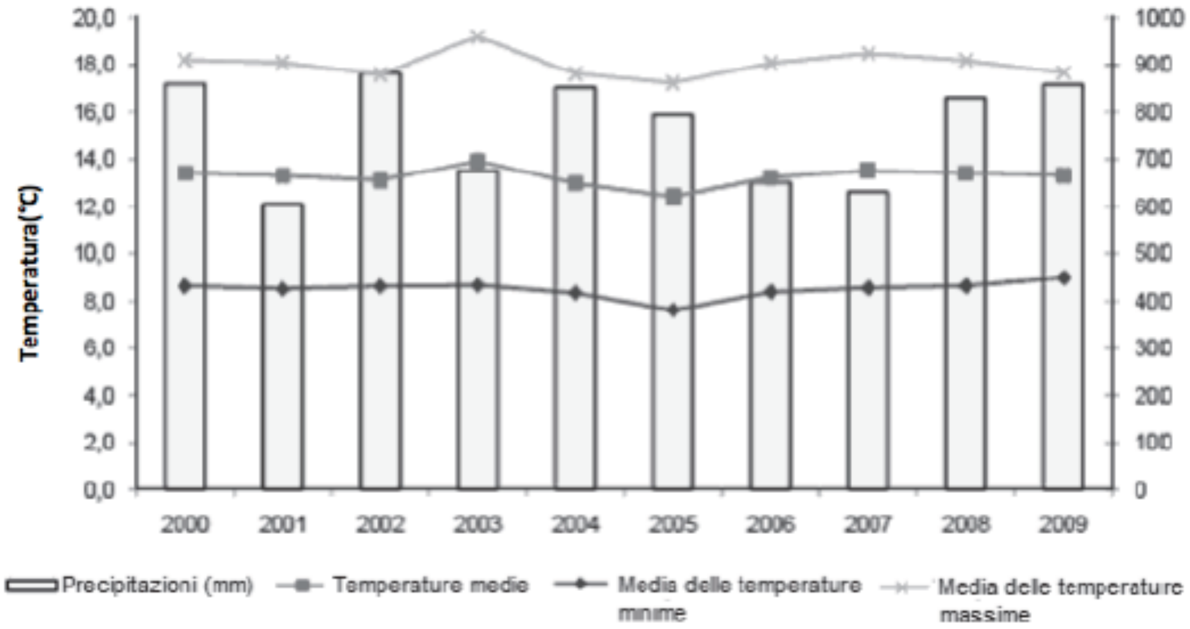
Aree geografiche	Scuole	Classi	Alunni (compresi i ripetenti)		Ripetenti		Insegnanti
			Maschi e femmine	Femmine	Maschi e femmine	Femmine	
ITALIA	7939	82446	1727339	826869	51407	16199	212041
Nord	3381	33131	711292	339508	19615	5679	86312
Centro	1358	14656	312700	150098	8066	2508	36570
Sud	3200	34659	703347	337263	23726	8012	89159

Sulla base dei dati in tabella, indica se le seguenti affermazioni sono vere o false.

		Vero	Falso
a.	Nel Nord gli alunni maschi sono meno delle femmine	☐	☐
b.	In Italia il rapporto insegnanti/classi è inferiore a 3	☐	☐
c.	Nel Sud ci sono mediamente più di 10 classi per scuola	☐	☐

2) Osserva il seguente grafico che rappresenta l'andamento delle temperature (scala a sinistra) e delle precipitazioni piovose (scala a destra) in Italia negli ultimi anni.

Figura 1. **Media annua della temperatura media, massima e minima giornaliera e precipitazioni totali annue in Italia. Anni 2000-2009** ***(temperatura in gradi Celsius e precipitazioni in millimetri)***



Indica per ciascuna delle seguenti affermazioni se è vera o falsa o se non si può ricavare dal grafico (metti una crocetta per ciascuna riga).

		Vero	Falso	Non si può ricavare
a.	Nel decennio 2000-2009 la temperatura media annua è risultata più alta di 0,8 gradi rispetto al periodo 1971-2000	☐	☐	☐
b.	L'anno 2003 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature massime	☐	☐	☐
c.	L'anno 2005 è quello in cui si è registrato il più alto valore per la media delle temperature minime	☐	☐	☐
d.	L'anno in cui la media delle temperature massime è stata più alta è anche quello in cui le precipitazioni sono state minori	☐	☐	☐
e.	L'anno 2005 è quello in cui c'è stato il giorno più freddo	☐	☐	☐
f.	Il 2004 è stato l'anno più piovoso	☐	☐	☐

3.3.8 Terza legno: Descrizione della classe e avvio della terza annualità (Settembre - Dicembre 2014)

Questo paragrafo è un'introduzione alla sperimentazione svolta nella classe terza, che rappresenta la fine del percorso di formazione. Gli studenti alla fine del terzo anno sosterranno l'esame per ottenere la qualifica di "operatore del legno - manutenzione di immobili". Questo obiettivo, che rappresenta il punto di sintesi del percorso svolto nei tre anni, ha influenzato anche le scelte didattiche fatte perché lo studente arrivi pronto il giorno dell'esame.

Gli studenti dopo aver preso la qualifica professionale possono decidere se continuare gli studi, frequentando l'anno aggiuntivo per ottenere il diploma di "tecnico del legno" che darebbe loro la possibilità di frequentare anche il quinto anno per ottenere il diploma di maturità, oppure possono decidere di andare a lavorare. Questa possibile scelta da parte del singolo studente verrà considerata dal tutor nel momento in cui deve decidere in quale azienda mandarlo per lo *stage;* infatti, si cercherà un'azienda che ha intenzione di assumere personale per coloro che vogliono andare a lavorare dopo la qualifica.

La classe è composta da 25 alunni maschi, con due alunni con certificazione di disabilità, tre con certificazione di DSA, uno con certificazione ADHD e quattro con problemi comportamentali o di tenuta dell'attenzione legati al loro contesto socio-culturale e individuati come BES. La classe si presenta con un buon livello di partenza, la maggior parte degli allievi ha sempre seguito con interesse e passione le proposte che venivano fatte loro, nei due anni precedenti questo ha permesso a molti di raggiungere ottimi risultati anche se i livelli di partenza non erano sempre adeguati.

La classe, dopo cinque settimane dall'inizio della scuola ha iniziato il periodo di *stage* che è durato fino alle vacanze di Natale, in questo periodo è stato coperto un argomento che non era stato svolto in seconda, che sono le equazioni di secondo grado, già presentate nel modo mostrato nel paragrafo 3.3.6. Riporto un questionario che ho somministrato agli studenti nelle prime settimane di scuola in cui ponevo loro le seguenti cinque domande:

1) *Quali obbiettivi ti poni dal punto di vista personale e professionale?*
2) *Quali sono le tue aspettative?*
3) *Cosa vorresti chiedere alla scuola?*
4) *Quanto è importante per te raggiungere la qualifica e perché?*
5) *In cosa credi di poter migliorare?*

Per ogni domanda riporto parola per parola una selezione delle risposte date dagli studenti:

1) Quali obiettivi ti poni dal punto di vista personale?

a) Migliorare, impegnarmi e riuscire ad essere promosso senza alcun debito.

b) Riuscire a trovare un lavoro ben pagato.

c) Di prendere la qualifica dal punto di vista professionale e di creare rapporti di cui mi possa fidare.

d) Non vedo l'ora qui al terzo anno di imparare qualcosa di nuovo in questa bellissima scuola.

e) I miei obiettivi per quest'anno sono sicuramente migliorare le mie capacità nell'ambito della falegnameria. Un altro obiettivo che mi pongo quest'anno è migliorare nei preventivi o nel public-speaking per essere autonomo nella vendita di oggetti o anche durante il lavoro.

2) Quali sono le tue aspettative?

a) Mi aspetto un anno impegnativo, e mi aspetto un grande impegno.

b) Avere le "basi" per poter iniziare a lavorare, sia in falegnameria che in ufficio.

c) Un anno molto intenso e complicato, a causa dell'esame e della commessa.

d) Di essere aiutato durante lo studio.

e) Credo che quest'anno sarà fantastico ma nettamente più faticoso degli scorsi anni, darò il massimo pur di superare quest'anno e fare la quarta.

3) Cosa vorresti chiedere alla scuola?

a) Vorrei chiedere di essere paziente come lo è già stata, e vorrei chiedergli di non lasciarmi neanche per un secondo perché potrei cadere di nuovo dalle braccia della voglia.

b) Di aiutarmi nei momenti dove faccio più fatica.

c) Un'aula dove gli alunni possano studiare al pomeriggio, con o senza professori.

d) Continuare a ripetere i test dell'anno scorso fino a quando non mi vengono tutti giusti nel tempo previsto.

e) Io alla scuola non chiedo niente perché c'è tutto, ci sono prof che ti aiutano e ti seguono, persone molto preparate nell'ambito di falegnameria.

4) Quanto è importante raggiungere la qualifica e perché?

a) Abbastanza importante, perché anche non essendo il lavoro che vorrei fare è comunque una buona strada e una buona qualifica.

b) Secondo me, senza qualifica sarebbe più difficile trovare lavoro, soprattutto per far vedere ad una ditta che hai le basi per poter iniziare a lavorare.

c) Per me è molto importante raggiungere questa qualifica per più motivi:

- *per aver accesso al mondo del lavoro;*
- *per poter andare avanti negli studi;*
- *per avere maggiore esperienza lavorativa.*

d) Davvero molto perché ho perso un anno e mi è servito per capire che è inutile e senza guadagno.

e) È importante per me perché avrò un'autostima da parte mia.

5) In cosa credi di poter migliorare?

a) Credo di poter migliorare in tutto perché fino ad adesso è la voglia che mancava, ma credo che in matematica non ho possibilità, ma non è che non mi voglio impegnare ma perché non mi entra in testa.

b) Credo di poter migliorare nella capacità di avere pazienza durante i lavori, non agitarmi davanti a test/verifiche.

c) Nel concentrarmi di più di quello che sto facendo.

d) Credo di essere in grado di poter migliorare ogni materia e anche il mio comportamento e nell'essere sociale.

e) Nella progettazione e realizzazione di mobili o arredi e nell'ideamento di progetti.

Quasi in tutti gli interventi degli studenti possiamo notare che c'è una grande fiducia nella scuola e un grande desiderio di incominciare l'anno scolastico, di migliorarsi e di poter raggiungere alla fine la qualifica. Considerando le storie con cui i nostri studenti arrivano a scuola, questo è già un notevole risultato perché è segno che, nei due anni, hanno imparato a fidarsi degli adulti che li guidano e iniziano a guardare sé stessi con "simpatia" cioè con autostima e credendo di poter superare gli ostacoli che di volta in volta si troveranno davanti. Questo atteggiamento è stato evidente durante tutto l'anno scolastico in questione e ha permesso loro di raggiungere, in sede di esame di qualifica, ognuno secondo le proprie capacità, ottimi risultati. Ognuno di loro ha dato prova di essere migliorato come persona e professionista.

Come detto in precedenza, la terza è fortemente caratterizzata dall'avvicinamento all'esame di qualifica, per questo motivo presenterò solo una UBD e poi mostrerò quali strumenti abbiamo utilizzato per arrivare preparati alle prove di qualifica. Inoltre, nelle conclusioni mostrerò i risultati ottenuti nella prova di matematica e li confronterò con quelli ottenuti negli anni precedenti, dove non era stato applicato il metodo oggetto di questa tesi.

3.3.9 Terza legno: UBD 6 - Modelli matematici lineari e quadratici per la gestione della bottega (Gennaio - Febbraio 2015)

Questa UBD, che completa quelle presentate in questa tesi, mostra l'ultimo argomento che è stato affrontato in maniera completa all'interno del percorso triennale per ottenere la qualifica professionale di "operatore del legno - manutenzione di immobili". Questo modulo ha come obiettivo di rinforzare negli studenti la consapevolezza della potenza degli strumenti matematici che possiedono, lavorando sulle competenze del *problem solving* utili per trasformare una semplice conoscenza disciplinare in uno strumento a disposizione dello studente quando si troverà ad affrontare una qualche problematica lavorativa.

Gli strumenti matematici che verranno introdotti ed utilizzati all'interno dei problemi sono: lo studio delle parabole e le disequazioni di secondo grado. Lo studente dovrà essere in grado di utilizzare le conoscenze presentate all'interno di diverse situazioni problematiche. Riporto la UBD (tab. 15) del percorso in oggetto.

Questa UBD si pone in continuità con la UBD 3[131] svolta durante il secondo anno in cui avevamo iniziato a vedere quanto sono importanti i modelli matematici per risolvere alcune problematiche inerenti alla gestione della bottega. Rispetto alla UBD citata, adesso vedremo come anche i modelli parabolici rivestono importanza in questo campo, questo coinvolgerà situazioni più complesse che permetteranno agli studenti di riflettere sul fatto che non sempre la migliore condizione di produzione e vendita per massimizzare il guadagno è quella in cui produco e vendo di più. Gli studenti rifletteranno sul fatto che a volte produrre di più può voler dire anche spendere di più, per esempio, perché ciò potrebbe imporre un affitto di nuovi macchinari o aumentare la forza lavoro. Rispetto ai modelli lineari, i modelli quadratici permettono di "abbracciare" più precisamente la complessità della realtà.

[131] UBD 3 - La proporzionalità: modelli matematici per conoscere il mondo, l'importanza dei modelli lineari per la gestione della bottega.

<table>
<tr><td colspan="2">Titolo: Modelli matematici lineari e quadratici per la gestione della bottega</td></tr>
<tr><td colspan="2">Step 1: Risultati desiderati</td></tr>
<tr><td colspan="2">Comprensione di lunga durata (Enduring understanding)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Gli studenti comprenderanno come individuare quale modello matematico è più adeguato per risolvere problemi di carattere professionale e non.</td></tr>
<tr><td>Domande essenziali</td><td>Competenze, abilità e conoscenze</td></tr>
<tr><td>• Come le funzioni elementari diventano strumenti per conoscere sempre più in profondità ciò che mi circonda?
• Di quali strumenti ho bisogno per gestire una bottega?
• Può l’utilizzo della “semplice” modellizzazione lineare migliorare le mie competenze di gestione della bottega?
• Quali strumenti mi dà in più l’utilizzo di modelli quadratici? Descrivono meglio la complessità della realtà?</td><td>M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica.
MA1.4: Tradurre brevi istruzioni in sequenze simboliche (anche con tabelle); risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici.
MA1.7: Rappresentare graficamente equazioni di primo grado; comprendere il concetto di equazione e quello di funzione.
MA1.8: Risolvere sistemi di equazioni di primo grado verificando la correttezza dei risultati.
MC1.5: Sistemi di equazioni e dissequazioni di primo grado.</td></tr>
<tr><td></td><td>M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.
MA2.4: Applicare le principali formule relative alla retta e alle figure geometriche sul piano cartesiano.
MC2.6: Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.
MC2.7: Interpretazione geometrica dei sistemi di equazioni.</td></tr>
<tr><td></td><td>M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.
MA3.2: Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici.
MA3.4: Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa.</td></tr>
</table>

	M0T0: Padroneggiare concetti matematici e scientifici fondamentali, semplici procedure di calcolo e di analisi per descrivere e interpretare sistemi, processi, fenomeni e per risolvere situazioni problematiche di vario tipo legate al proprio contesto di vita quotidiano e professionale. M0T0.A1: Applicare tecniche e procedure di calcolo per affrontare problemi di vario tipo nel proprio contesto. M0T0.A5: Utilizzare linguaggi tecnici e logico-matematici specifici. M0T0.A6: Applicare tecniche di calcolo per risolvere problemi geometrici. M0T0.C1: Caratteristiche del linguaggio matematico (regole e sintassi) ed elementi di matematica: risoluzione algebrica di problemi, rappresentazione grafica di grandezze. M0T0.C2: Fasi e tecniche risolutive di un problema. M0T0.C3: Complementi di matematica di settore. M0T0.C4: Elementi di calcolo professionale.
Step 2: Prove di valutazione	
Gli studenti devono mostrare come, partendo dalla descrizione di una situazione problematica, sono in grado di individuare il modello matematico che meglio descrive le caratteristiche delle relazioni tra le diverse grandezze considerate e che dal modello scelto sono in grado di determinare le informazioni richieste.	
Sommario delle prove per competenze	Griglia di valutazione
• Funzione matematica del modello. • Rappresentazione grafica del problema. • Scelta del miglior fornitore. • Determinazione della migliore condizione.	• Piano cartesiano • Risoluzione di problemi e dipendenza funzionale • Funzioni lineari e quadratiche • Parabole • Costruzione modelli quadratici
Auto-valutazioni	Altre prove
Formative assessment	Compiti intermedi disciplinari.
Step 3: Attività di apprendimento	
Totale ore: 21	
Obiettivo	Attività

1) Problemi con equazioni	Risoluzione di problemi in coppie
2-7) Le parabole e loro rappresentazione grafica	Lezioni dialogate per mostrare le differenze tra i diversi tipi di parabole e le corrispondenze tra le caratteristiche dell'equazione della funzione e la sua rappresentazione grafica.
8) Esercitazione	Risoluzione esercizi in coppie.
9-10) Modelli parabolici per la risoluzione di problemi	Risoluzione insieme col docente di problemi quadratici.
11-12) Disequazioni di secondo grado	Risoluzione esercizi in coppie
13-14) Problemi con disequazioni	Risoluzione di problemi in coppie.
15-17) Modelli quadratici per la gestione della bottega	Risoluzione di problemi inerenti alla gestione di una bottega.
18) Esercitazione	Risoluzione problemi in coppie
19-20) Valutazione	Compito in classe inerente tutto il percorso fatto sulle funzioni di secondo grado.
21) Sintesi del percorso	Correzione e conclusioni.

Tab. 15: Modelli lineari e quadratici per la gestione della bottega.

Per introdurre i problemi di secondo grado ho utilizzato un problema tratto dal libro *"La matematica per il cittadino*[132]*"*.

Il Poster

Durante un viaggio a Parigi hai scattato una bella fotografia che vuoi trasformare in un poster gigante da appendere nella tua camera. Decidi che il taglio migliore della foto è dato da un rettangolo un po' schiacciato, con un lato z di lunghezza tripla rispetto all'altro lato x. Il tuo intento è quello di ingrandire la fotografia e corredarla di un vetro e di una cornice. Per valutare la spesa ti rechi dal fotografo, dal vetraio e dal falegname. Nella tabella sono riportati, per ciascun prodotto, i costi forniti dai vari artigiani, comprendenti una quota fissa a cui va sommata una quota che varia con le dimensioni dell'opera realizzata.

Prodotto	Quota Fissa (€)	Quota Variabile
Ingrandimento fotografico	9	0,02 €/cm^2
Vetro	7	0,01 €/cm^2

[132] Barozzi, Bergamini, Boni, Ceriani, Pagani, *Il Poster,* in Barozzi (et al.) *La matematica per il cittadino,* Zanichelli, Bologna 2012, pp. 98-101.

Prodotto	Quota Fissa (€)	Quota Variabile
Cornice	5	0,02 €/cm

1) Considerando il lato x del poster come variabile indipendente, quale delle seguenti funzioni di x sono lineari e quali sono quadratiche? (Una funzione è quadratica quando è esprimibile mediante un polinomio di secondo grado nella variabile indipendente.) Completa la tabella ponendo una crocetta in ogni riga.

Prodotto	Funzione Lineare	Funzione Quadratica
Ingrandimento fotografico		
Vetro		
Cornice		

2) Scrivi in funzione del lato x del poster le espressioni in euro del costo y_i dell'ingrandimento, del costo y_v del vetro, del costo y_c per la cornice. Infine, considerando tutte le spese, scrivi la formula più sintetica che esprima il costo totale y di realizzazione del tuo poster.

3) Rappresenta, mediante un grafico nel piano cartesiano la funzione del costo totale per valori di x compresi fra 0 e 50 centimetri, corredando gli assi delle tacche, del nome delle variabili e delle loro unità di misura.

4) Se disponi di € 70, qual è all'incirca il valore della dimensione x del poster, con vetro e cornice, che puoi realizzare con questa cifra?

5) Desiderando un poster più grande, decidi di ingrandire solo la fotografia e di rinunciare a vetro e cornice. Qual è approssimativamente il valore di x che puoi ottenere spendendo lo stesso importo di € 70?

Il problema somministrato risulta adeguato per introdurre i modelli di secondo grado per la risoluzione di problemi, in quanto le cinque richieste fatte vanno da un livello semplice, riconoscere come le tre voci di costo hanno caratteristiche diverse, fino alla determinazione di un'informazione utilizzando il modello matematico costruito in precedenza. Altro fattore importante è la richiesta numero tre in cui agli studenti viene richiesta una rappresentazione grafica del modello parabolico, ricordiamo che prima di questa UBD gli studenti hanno studiato solo le equazioni di secondo grado. Ma analizziamo le cinque richieste, verificando che tipi di conoscenze, abilità e competenze richiedono e quindi quali argomenti è stato necessario introdurre nel corso del modulo.

La prima richiesta chiede di riconoscere quale voce di costo sarà rappresentata da una funzione lineare e quale da una funzione quadratica. Questo richiede di ripassare il concetto di funzione (conoscenza) e di chiedere agli studenti quali sono gli indizi che mi permettono di valutare se devo usare un modello lineare o un modello quadratico (competenza). La prima domanda è proprio un lavoro sulla capacità di lettura e di analisi di un testo.

Il secondo punto chiede di scrivere la funzione costo (abilità) cioè di passare dal linguaggio naturale al linguaggio matematico, questo richiederà di scrivere l'aria del nostro rettangolo con un'espressione algebrica, gli studenti dovranno anche mostrare di conoscere la differenza tra quota fissa e quota variabile, individuando quale parte della funzione costo dipenderà o meno dalla lunghezza dei lati, cioè dalla variabile indipendente. Il punto 2 completa la costruzione del modello matematico, quindi compie il passaggio da una forma di linguaggio ad un'altra, indirettamente lo studente dimostra di avere una chiara comprensione del testo e di ciò che esso descrive (competenza).

Nella terza domanda, si chiede invece di rappresentare graficamente (abilità) il modello costruito. Con gli studenti non avevamo ancora parlato di parabole, quindi è stata suggerita una costruzione per punti, utile per ripassare come utilizzare una rappresentazione funzionale al fine di rappresentarla graficamente.

Negli ultimi due quesiti le conoscenze da mettere in campo sono molto simili, in quanto entrambi richiedono la risoluzione di un'equazione di secondo grado, completa nel primo caso e pura nel secondo. La cosa interessante è che in questi quesiti una volta risolta l'equazione, lo studente deve giudicare se entrambe le equazioni fossero accettabili nel contesto del problema (competenza), spesso gli studenti fanno l'errore di fermarsi alla risoluzione delle equazioni senza chiedersi se esse hanno senso quando si ritorna dal modello matematico al contesto reale.

Un problema come questo permette agli studenti di vedere tutto il percorso della risoluzione di un problema[133] (fig. 38).

Questo da una parte aiuta gli studenti a capire il senso della fatica che viene chiesta loro e dall'altra sviluppa le competenze del *problem solving,* facendo prendere coscienza che la matematica è uno strumento che permette di analizzare e risolvere situazioni complesse.

Partendo da questo problema il lavoro in classe si è sviluppato introducendo con una lezione dialogata i diversi tipi di parabole, le loro caratteristiche e le grandezze da determinare per poterle disegnare in modo corretto. Abbiamo lavorato sul doppio binario cioè dall'espressione algebrica al

---

[133] Bolondi, cit. p. 194.

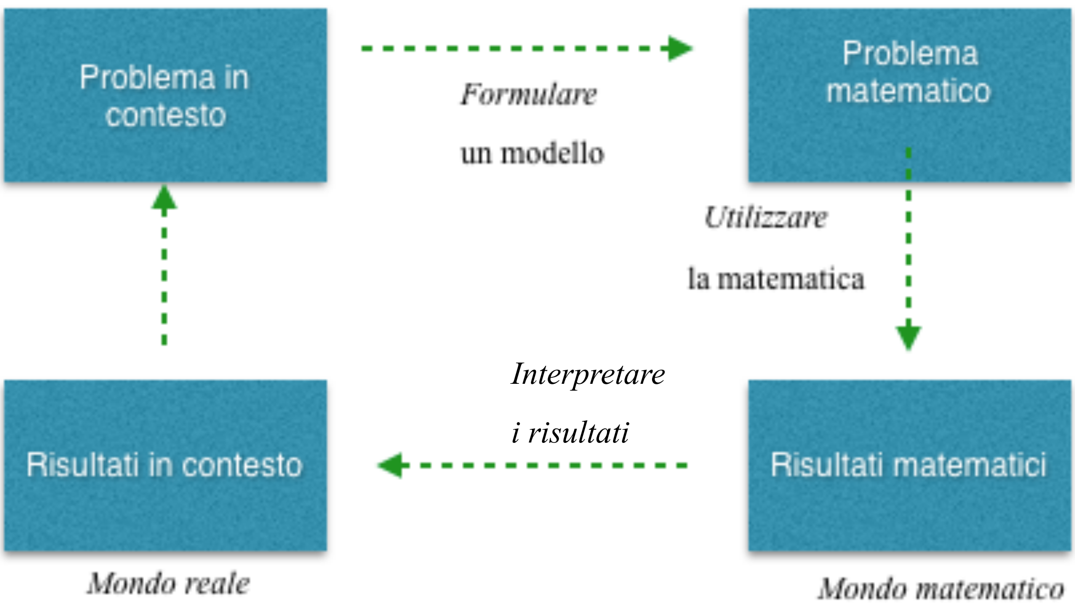


Fig. 38: Ciclo per la risoluzione di un problema.

grafico e dal grafico all'espressione, questo ha permesso agli studenti di capire che l'equazione della funzione e la rappresentazione grafica sono due linguaggi complementari. Contemporaneamente, è continuato il lavoro sui problemi, in quanto l'acquisizione di queste competenze è un processo molto lungo, perché obbliga gli studenti a passare da un approccio alla matematica meccanico e ripetitivo ad uno costruttivo e creativo.

Agli studenti è stata anche distribuita una dispensa sulle equazioni di primo e secondo grado e sulle parabole, consultabile nell'*e-book* nella parte di matematica. Dal punto di vista matematico l'ultimo argomento che è stato introdotto è stato quello delle disequazioni di secondo grado, in modo tale da completare gli strumenti matematici derivanti dal modelli algebrici quadratici. Poiché abbiamo lavorato molto sulle rappresentazioni grafiche, il metodo introdotto per la risoluzione delle disequazioni è stato quello grafico utilizzando la rappresentazione della parabola e lo studio dal disegno della sua positività o negatività.

Per quanto riguarda il lavoro sul *problem solving* ho costruito su *moodle* un quiz che era un problema guidato. Per prima cosa ho scritto un testo per richiamare i concetti di costo, ricavo e guadagno e del loro essere delle funzioni[134].

Riporto il testo del problema e dei quesiti proposti da me per accompagnare gli studenti verso la soluzione:

Il ricavo totale e il costo totale relativi alla produzione e alla vendita di certi articoli, sono dati rispettivamente dalle seguenti funzioni: $R(x) = -0{,}04x^2 + 600x$ e $C(x) = 25.000 + 100x$. Determina la funzione guadagno, la quantità da produrre e vendere per realizzare il massimo guadagno e il relativo valore.

Questo è il testo originale del problema; per guidare lo studente durante la risoluzione del problema, ho aggiunto i seguenti 4 quesiti a risposta multipla:

Quesito 1:

Determina la funzione guadagno G(x), ricordando che:

$$\boldsymbol{G(x) = R(x) - C(x)}$$

Scegli un'alternativa:

a) $G(x) = -0{,}04x^2 + 700x + 25.000$
b) $G(x) = -0{,}04x^2 + 700x - 25.000$
c) $G(x) = -24500{,}04x^3$
d) $G(x) = -0{,}04x^2 + 500x - 25.000$
e) *Non lo so*

---

[134] Le tre funzioni costo, ricavo guadagno dipendono spesso da una incognita (x), che può indicare la quantità di materia prima utilizzata per produrre qualcosa o la quantità di beni prodotti e venduti. Quando ciò accade, si usa indicare le tre funzioni così: C(x), R(x) e G(x), appunto per sottolineare la loro dipendenza da una quantità incognita.

La funzione **costo** è solitamente formata da un costo fisso (indipendente dalla quantità di merce realizzata) e da un costo variabile (dipendente dalla quantità di merce realizzata):

$$C(x) = C_f + C_{v}(x)$$

il testo dell'eventuale problema ci farà capire se il costo dipende dalla x in modo lineare o in modo quadratico.

La funzione **ricavo** è il prodotto tra la quantità venduta x e il prezzo unitario di vendita:

$$R(x)=xp(x)$$

il prezzo unitario di vendita p(x) può essere una quantità fissa o dipendente da quanta merce è stata venduta.

La funzione **guadagno** o **profitto** o **utile** è la differenza tra il ricavo e il costo:

$$G(x)= R(x) - C(x)$$

Un'azienda sarà in **perdita** quando **G(x) < 0**.
Sarà in **pareggio** (break even point) quando **G(x) = 0**, cioè quando i ricavi sono uguali ai costi.
Avrà un **utile**, o sarà in **attivo**, quando **G(x)>0**.

Nel caso in cui il guadagno sia rappresentato da un modello parabolico con concavità verso il basso, il massimo guadagno sarà determinato dal vertice.

Quesito 2:

Essendo la funzione guadagno una parabola con concavità verso il basso, questo implica che la nostra parabola raggiungerà la massima quota e quindi il massimo guadagno nel vertice.

Da ciò si evince che la quantità da produrre e vendere per realizzare il massimo guadagno è la x del vertice della parabola, cioè:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

Dove a è il coefficiente della x alla seconda e b della x.

Scegli un'alternativa:

a) 6.250

b) -6.250

c) -12.500

d) 12.500

e) Non lo so

Quesito 3:

In questa ultima fase, dopo aver determinato la quantità da produrre e vendere per realizzare il massimo guadagno, dobbiamo determinare a quanto ammonta il massimo guadagno, cioè l'ordinata del vertice della parabola.

Scegli un'alternativa:

a) 3.125.000 €

b) -6.250 €

c) -12.500 €

d) 12.500 €

e) Non lo so

Quesito 4:

Per completezza determiniamo quali sono le condizioni affinché l'azienda sia in attivo, ti ricordo che questo vuol dire che:

$$G(x) > 0$$

Scegli un'alternativa:

a) x > 50,25 oppure x < 12.449,75

b) 50,25 > x > 12.449,75

c) 50,25 < x < 12.449,75

d) x < 50,25 oppure x > 12.449,75

e) Non lo so

Riporto i risultati ottenuti da queso *formative assesment* nella fig. 39. Dai risultati si evince come la risoluzione dei problemi, seppur guidata, sia un competenza alta per gli studenti a conferma

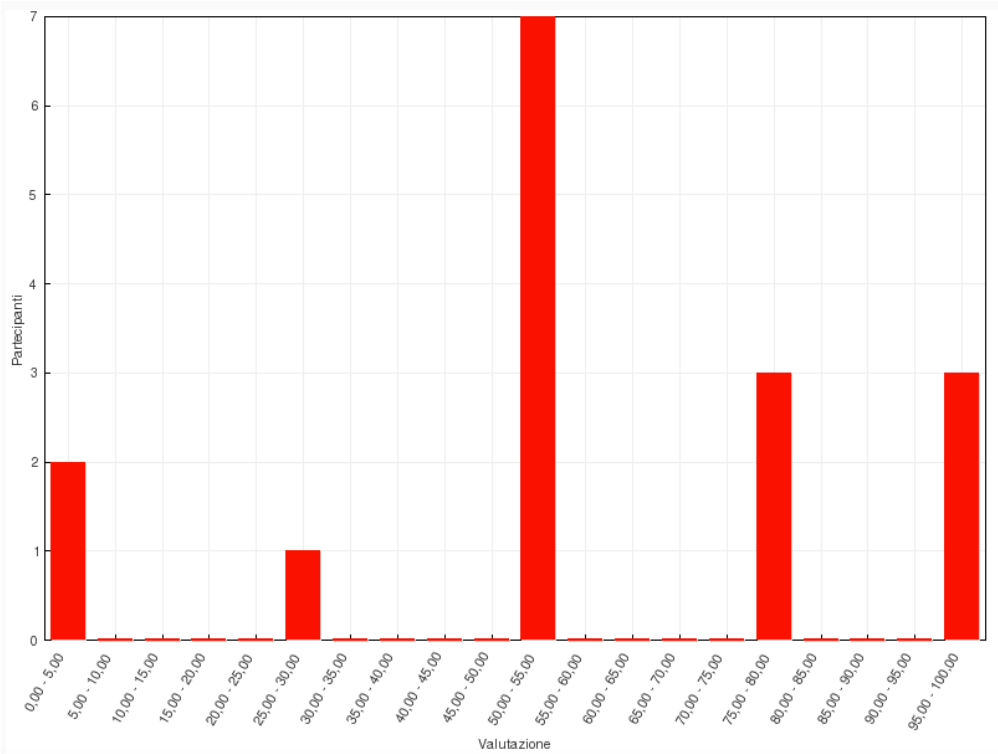


Fig. 39: Risultati *formative assessment* problema guidato.

di quanto già detto. Nel corso delle settimane successive abbiamo continuato a lavorare sia sugli strumenti matematici, grafici di rette e parabole e disequazioni, sia sulla risoluzione di problemi che richiedono sia modelli lineari che modelli quadratici. Nei problemi somministrati non sempre il modello algebrico era così esplicito come quello utilizzato nel quiz precedente. Riporto due problemi per mostrare che tipo di abilità risolutive e di competenze di *problem solving* erano richieste agli studenti:

1) Un condominio intende dare in appalto le pulizie delle parti comuni e riceve le seguenti offerte da tre imprese diverse, relative a un mese di attività:

a) spese fisse € 360 e spese variabili di € 1,90 al m^2*;*

b) spese variabili di € 2,40 al m^2*;*

c) spese fisse € 1.900, qualunque sia la superficie.

Determina a quale impresa conviene rivolgersi, in funzione della superficie.

2) Scrivi la funzione guadagno di un'impresa che vende ogni unità di prodotti a € 40 e sostiene costi di produzione pari a € 10.000 quali costi fissi e l'1% del quadrato della quantità prodotta quali costi variabili. Determina la quantità da produrre e vendere per realizzare il massimo guadagno e il relativo valore.

Compito in classe su parabole, disequazioni e modelli algebrici:

Dopo aver somministrato una esercitazione contenete sia esercizi che problemi, ho somministrato il compito in classe di cui riporto la scheda di valutazione (tab. 16) e alcuni quesiti. Dalla scheda di valutazione notiamo che, invece degli elementi di competenza, sono riportate le competenze, questo è giustificato dal fatto che, essendo nella seconda parte del terzo anno, tutti gli elementi di competenza sono stati affrontati. Quindi, la valutazione d'ora in poi risulterà essere direttamente sulla competenza. In questo passaggio lo studente deve dimostrare di aver sviluppato senso critico nel selezionare di volta in volta lo strumento matematico più adeguato per quella problematica, considerando che nell'arco dei tre anni la sua "cassetta degli attrezzi" si è riempita di molti "utensili".

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
M1: Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica.	Risoluzione di equazioni e disequazione, e utilizzo dei sistemi per la risoluzione di problemi geometrici.	Non risolve gli esercizi	Risolve correttamente le disequazioni.	Risolve correttamente le disequazioni, riconosce l'errore in un'equazione svolta e usa correttamente i sistemi per determinare le intersezioni. Calcoli corretti.	

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
M2: Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.	Piano cartesiano. Parabole. Rappresentazione grafica di un problema.	Non disegna la parabola correttamente.	Determina correttamente tutte le informazioni richieste per costruire il grafico di una parabola e ne determina l'intersezione con altre curve.	Oltre al livello base, utilizza la rappresentazione grafica per risolvere problemi.	
M3: Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.	Problemi. Modelli algebrici.	Non risolve i problemi.	Risolve quasi correttamente i problemi in cui il modello matematico è già esplicitato.	Risolve correttamente i problemi in cui il modello matematico è già esplicitato e costruisce correttamente i modelli matematici negli altri problemi. Non interpreta correttamente le soluzioni.	Oltre al livello intermedio, interpreta correttamente le soluzioni. Risolve problemi che non sono stati esplicitamente trattati in aula.

Scheda di valutazione con elementi di competenza, indicatori e descrittori					
Competenza	**Indicatori**	**LIVELLO - Non raggiunto (0-60)**	**LIVELLO - Base (C) (61-70)**	**LIVELLO - Intermedio (B) (71-90)**	**LIVELLO - Avanzato (A) (91-100)**
M0T0: Padroneggiare concetti matematici e scientifici fondamentali, semplici procedure di calcolo e di analisi per descrivere e interpretare sistemi, processi, fenomeni e per risolvere situazioni problematiche di vario tipo legate al proprio contesto di vita quotidiano e professionale.	Utilizzo delle strategie risolutive	Non risolve gli esercizi e i problemi.	Risolve solo i quesiti più semplici, non scegliendo la procedura più adatta.	Risolve i quesiti più semplici, individuando la strategia risolutiva ottimale.	Risolve tutti i quesiti in modo corretto e scegliendo per ogni situazione la strategia risolutiva più adeguata.

Tab. 16: Scheda di valutazione compito su parabole, disequazioni e modelli algebrici.

Riporto alcuni dei quesiti somministrati agli studenti, la prova mantiene la stessa struttura degli altri compiti con una prima parte sulle conoscenze caratterizzata dalla presenza di esercizi algebrici classici (risoluzione di disequazioni e studio di parabole), una seconda parte sulle abilità con problemi simili a quelli affrontati in classe ed una terza parte sulle competenze con problemi liberi, in cui lo studente dovrà individuare la strategia di risoluzione ottimale, attingendo a tutto il suo bagaglio matematico. Riporto alcuni quesiti delle ultime due fasi:

Abilità

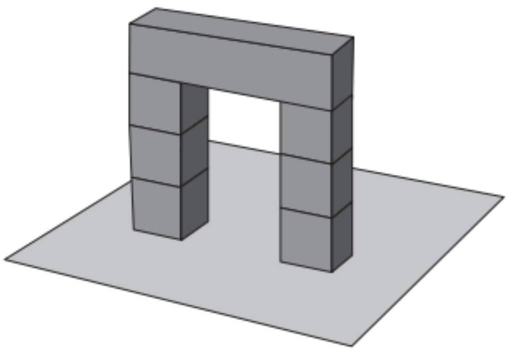
Un'azienda, per produrre un certo bene, sostiene un costo fisso settimanale di € 1.200 più un costo pari a € 0,4 per ogni unità prodotta; inoltre, per pubblicizzare il bene, sono previste spese *pari allo 0,01% del quadrato delle unità prodotte. Il bene è rivenduto al prezzo unitario di € 1,7. Determina:*

- *le funzioni costo totale e ricavo, rappresentale sul medesimo piano cartesiano;*
- *i limiti di produzione entro i quali l'azienda non è in perdita;*
- *la funzione utile e rappresentala graficamente;*
- *il livello di produzione per il quale l'azienda realizza il massimo utile e il relativo importo.*

Competenza

La stampante laser L in un minuto stampa il triplo delle pagine della stampante deskjet D. Quando L e D lavorano contemporaneamente stampano in tutto 24 pagine al minuto. Se D viene sostituita con una stampante laser identica a L, quante pagine potranno essere stampate complessivamente in un minuto?

L'arco mostrato in Figura è formato da sei cubi di lato L e da un parallelepipedo di dimensioni L, L, 4L.



Si vuole dipingere l'arco; quanto misura la superficie da colorare?

3.3.10 Terza legno: Preparazione all'esame (Marzo - Maggio 2015)

Dopo il compito in classe della UBD precedente, ultima per quanto riguardo l'offerta formativa del triennio, è iniziato il periodo più intenso di preparazione all'esame di qualifica. Questo tempo è stato usato per ripassare e per somministrare agli studenti le prove degli anni precedenti. In totale abbiamo potuto confrontarci con sei annualità di esami di qualifica.

Il lavoro che è stato fatto per sostenere la preparazione agli esami degli studenti è stato diviso in diversi *step*:

- ho digitalizzato i test d'esame in modo da trasformarli in quiz di *moodle* a risposta multipla sempre a disposizione degli studenti. Il sistema comunica agli studenti la correttezza o meno della risposta data;
- di settimana in settimana sono stati resi disponibili i quiz a partire da quello più vecchio;
- in aula, contemporaneamente, per ogni test venivano analizzati e spiegati gli esercizi più interessanti e quelli più difficili.

Riporto uno *screenshot* (fig. 40) per far vedere come lo studente visualizzava il testo dell'esame.

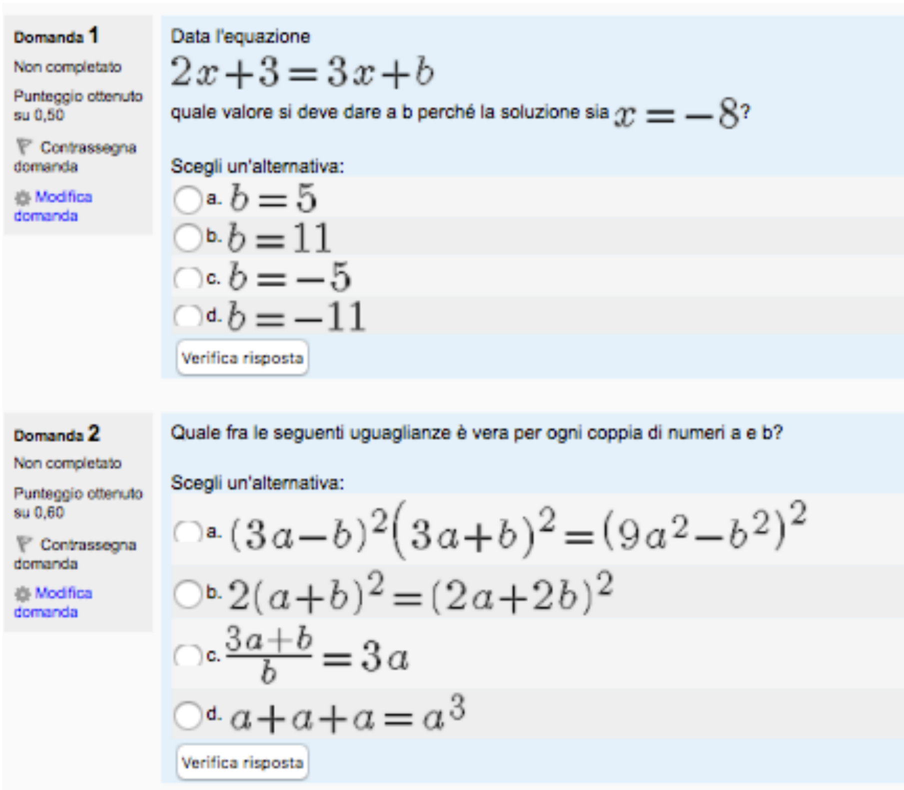


Fig. 40: *Screenshot* test d'esame digitalizzato.

Come al solito grazie agli strumenti di *moodle* ero in grado di monitorare il lavoro fatto dagli studenti e chiamare alla lavagna chi non era riuscito a svolgere un determinato esercizio, per spiegarglielo. Dallo studio di come cambiavano i grafici con i risultati degli studenti, potevo monitorare come stava migliorando la preparazione degli stessi in vista dell'esame di fine percorso formativo (fig. 41 e 42). La difficoltà di un esame come questo, per gli studenti, sta nel fatto di dover richiamare alla memoria tutti gli argomenti affrontati nei tre anni.

Dal confronto dei due grafici possiamo notare come la media della classe si sia spostata su valutazioni più alte seppure permangono circa sei studenti con risultati critici. Per chi aveva

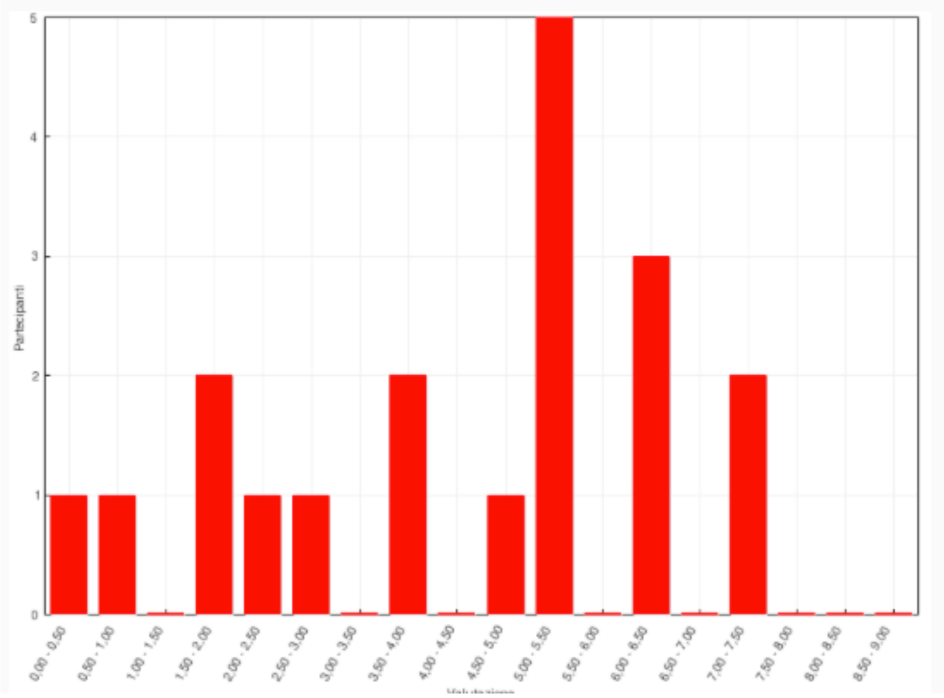


Fig. 41: Primi risultati sui test d'esame (inizio marzo).

mostrato più difficoltà nelle ultime tre settimane di scuola sono stati previsti dei momenti pomeridiani dedicati solo a loro al fine di farli arrivare più preparati possibile all'esame.

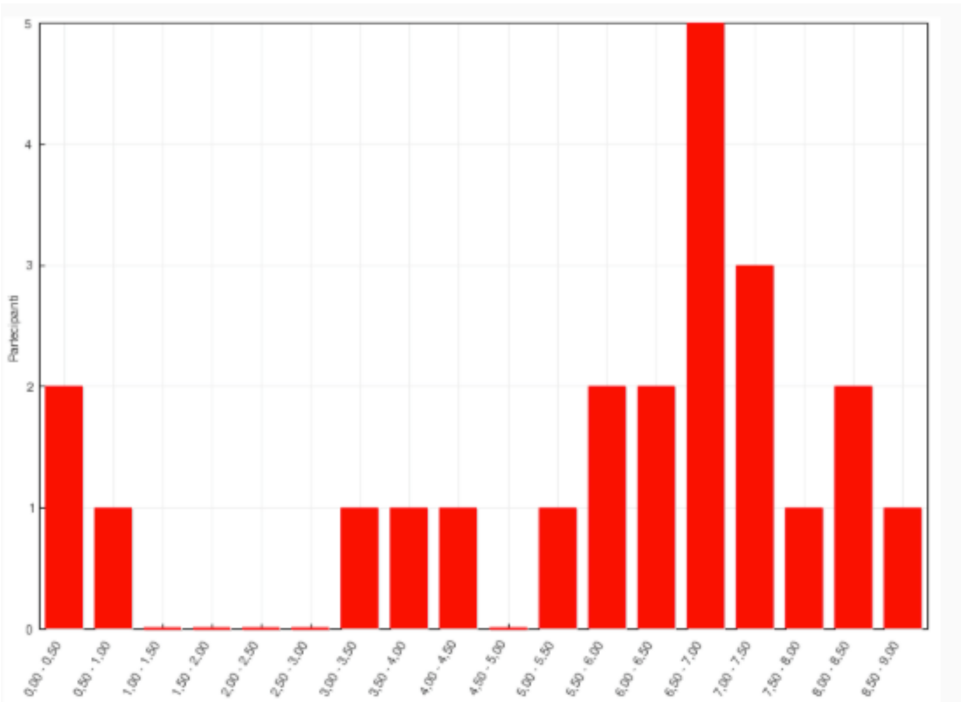


Fig. 42: Ultimi risultati sui test d'esame (metà maggio).

Questo conclude il percorso triennale, per poter giudicare la bontà della sperimentazione svolta è utile studiare i risultati ottenuti dagli studenti all'esame di qualifica nella prova di matematica e confrontarli con quelli ottenuti dagli studenti del settore legno che hanno sostenuto la qualifica negli anni scolastici 2012/2013 e 2013/2014 che non hanno beneficiato del metodo presentato in questa tesi.

Conclusione: risultati e sviluppi futuri

Nel corso degli anni in oggetto (dal 2013 al 2015) il punteggio dell'esame di matematica è cambiato, passando da valere 11 punti a 9 punti, questo però senza cambiare la struttura della prova formata sempre da 18 esercizi di cui circa 7 a risposta chiusa e 11 a risposta multipla. Per favorire il confronto le valutazioni verranno riportate tutte su una scala avente come punteggio massimo 9.

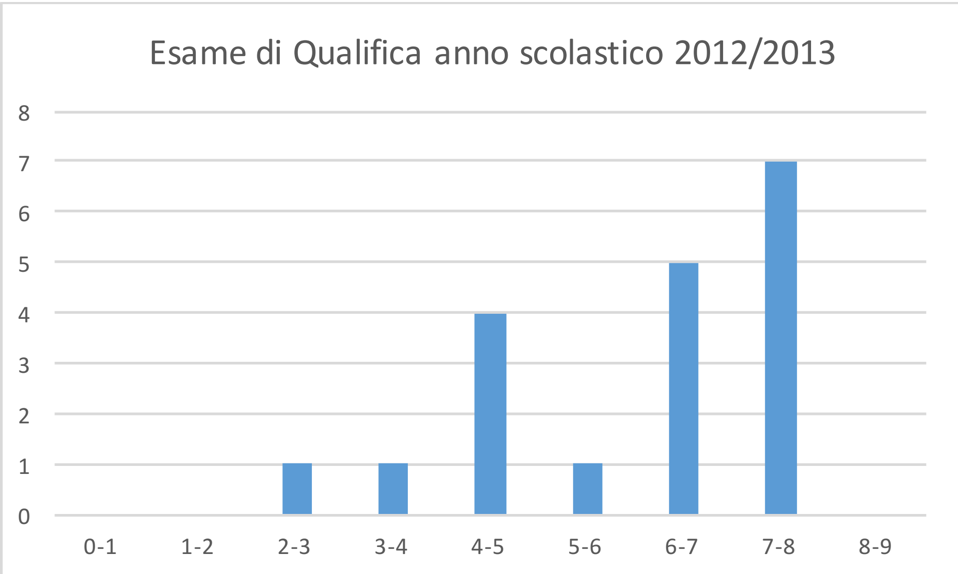


Fig. 43: Risultati esame di matematica a.s. 2012/2013.

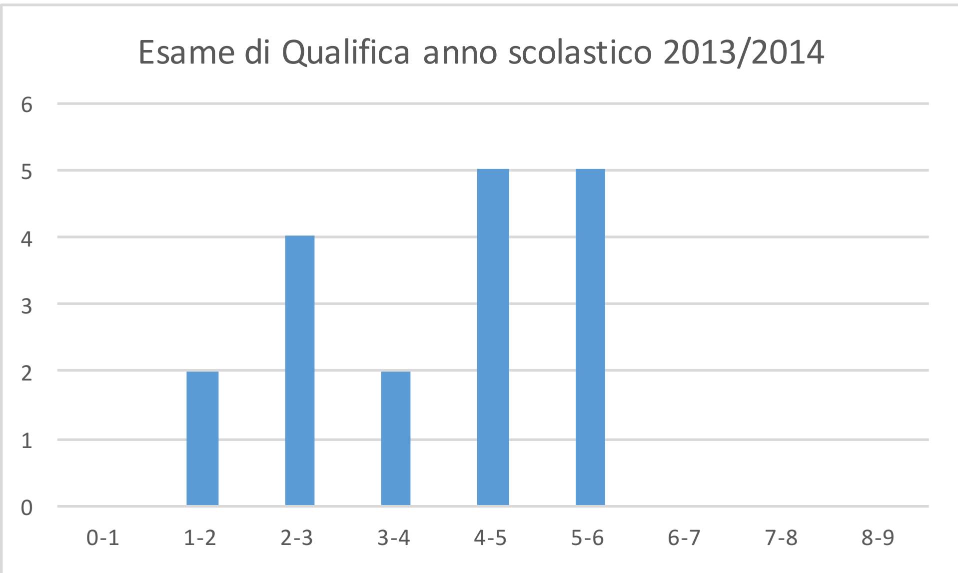


Fig. 44: Risultati esame di matematica a.s. 2013/2014.

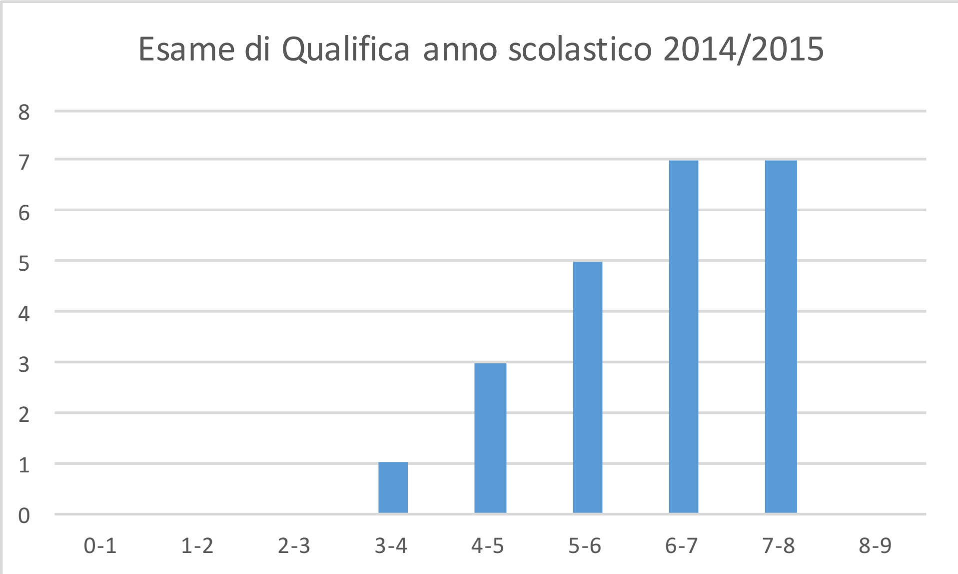


Fig. 45: Risultati esame di matematica a.s. 2014/2015.

Nei tre istogrammi (figg. 43-44-45) sull'asse orizzontale ci sono le classi di voto, vengono inseriti, per esempio, nella classe 3-4 gli studenti che hanno preso una valutazione compresa tra 3 escluso e 4 incluso, l'altezza delle colonne è data, invece, dal numero di studenti che appartengono a quel particolare intervallo di valutazione.

Guardando questi istogrammi possiamo notare come i risultati ottenuti dagli studenti della terza oggetto della tesi (2014/2015) siano evidentemente migliori di quelli ottenuti dalla classe del 2013/2014 e, meno nettamente, migliori dell'annualità 2012/2013. Per favorire il confronto, riportiamo in una stessa tabella e in uno stesso grafico la media e la deviazione standard[135] di ogni distribuzione di voti.

	2012/2013	2013/2014	2014/2015
Media	6,08	3,77	6,45
Deviazione Standard	1,48	1,35	0,93

[135] La deviazione standard dà un'informazione sulla dispersione dei voti rispetto al valore medio, in quanto due insiemi di valori possono avere lo stesso valore medio ma essere più o meno concentrati rispetto al valore centrale. Per esempio se consideriamo questi due insiemi (3, 4, 5) e (1, 4, 7) , essi hanno la stessa media ma il primo insieme è formato da valori più vicini al valor medio, rispetto al secondo insieme. La deviazione standard è definita dalla seguente relazione:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(x_i - M\right)^2}{N}}$$

Dove M è il valor medio dell'insieme numerico considerato, N è il numero degli elementi dell'insieme (nel nostro caso il numero di alunni) e x_i sono gli elementi dell'insieme (il punteggio di ogni singolo studente).

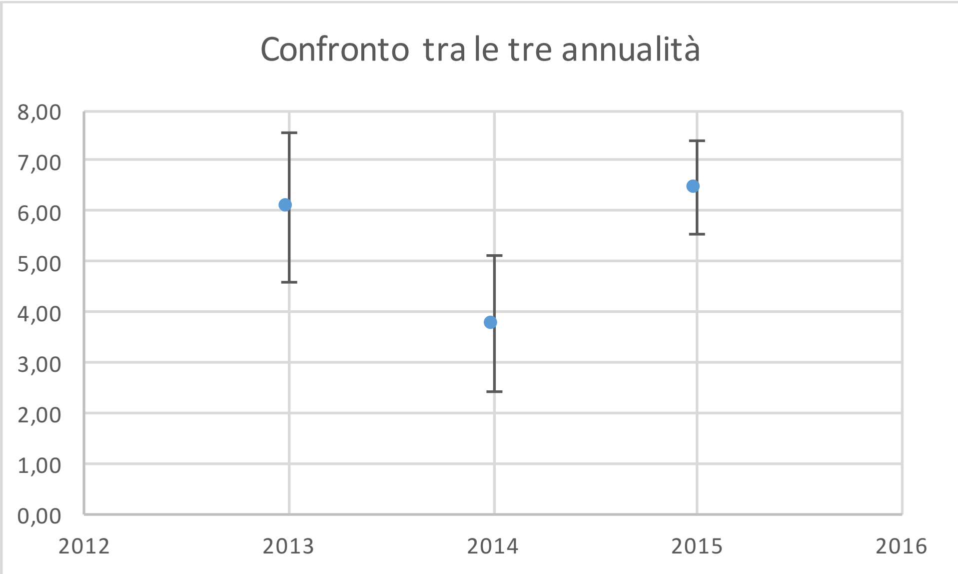


Fig. 46: Grafico delle medie e delle deviazioni standard delle tre annualità.

Guardano il grafico del confronto delle annualità (fig. 46) dove i punti indicano le medie e le barrette indicano le deviazioni standard, vediamo come, seppure le medie tra le annualità del 2012/2013 e 2014/2015 non sono molto diverse (la differenza è di 0,37 centesimi di punto), la deviazione standard dell'ultima annualità è circa il 40% più piccola. Questo vuol dire che la preparazione della classe 2014/2015 è mediamente più alta della classe del 2012/2013, dato confermato anche dalle percentuali dei ragazzi che hanno svolto correttamente più del 60% del test di matematica. La percentuale degli studenti della classe che ha beneficiato della sperimentazione oggetto di questa tesi e che ha svolto correttamente almeno il 60% della prova è pari al 78%, mentre nel caso della classe 2012/2013 è solo del 63%.

Questo dato ci dice che il metodo dal "fare al sapere" ha incrementato del 15% il numero degli studenti che hanno svolto con successo la prova di matematica durante l'esame per ottenere la qualifica di "operatore del legno - manutenzione di immobili". Il risultato è molto positivo e sottolinea come lo studente beneficia di un approccio all'insegnamento in cui si parte da qualcosa di pratico, in questo caso il lavoro o la realtà, e che favorisce un approccio per scoperta in cui i nuovi argomenti vengono presentati al fine di risolvere una particolare problematica.

Seguendo quanto di buono scoperto in questo lavoro di ricerca si individuano già alcuni sviluppi futuri, tre in particolare:

1) lo strumento del *formative assessment* tende a suggerire che le prove di valutazione in itinere possano essere individualizzate e personalizzate a partire dal percorso svolto dagli

studenti, questo permetterebbe di valorizzare i talenti di ciascuno e di mettere ognuno al centro del proprio processo di apprendimento;

2) in diversi punti della tesi è stata sottolineata la difficoltà degli studenti nella lettura e analisi del testo di un problema, sarebbe opportuno potenziare momenti di analisi di un testo in modo tale da abituare lo studente a stare davanti a situazioni problematiche in cui la risoluzione non risulti immediata. Spesso gli studenti si approcciano ad un problema come se fosse un esercizio, cioè come qualcosa in cui bisogna applicare solo una procedura, invece un problema è molto di più in quanto richiede una capacità di lettura, analisi e scelta delle migliori azioni da compiere tra quelle possibili;

3) questo metodo dovrebbe essere sviluppato anche per i licei, come sarà possibile a partire da settembre 2016 con l'apertura presso Cometa di un liceo scientifico delle scienze applicate chiamato "Liceo Artigianale", dove gli studenti oltre a studiare le materie classiche di un liceo scientifico impareranno anche un lavoro artigianale. Al centro della progettazione didattica di questo liceo ci saranno i punti di metodo individuati all'interno di questa tesi.

Per quanto riguarda il panorama italiano quello che mi conforta è che alcune preoccupazioni e problematiche che ho individuate sono state raccolte anche dal legislatore attraverso la cosiddetta "Buona Scuola[136]", due in particolare:

1) l'introduzione di periodi lavorativi all'interno della scuola superiore che se vissuti come opportunità possono aiutare a riportare la "realtà" dentro la scuola, progettando dei percorsi formativi interdisciplinari a partire dalle problematiche lavorative;

2) come già citato, la modifica degli esami di maturità in cui per quanto riguarda la seconda prova di matematica, si sta sperimentando l'introduzione di prove di valutazione in cui siano presenti problemi reali. Questo, a "cascata" dovrebbe influenzare anche le scelte didattiche compiute dai colleghi nel corso dei cinque anni precedenti l'esame di maturità.

Al momento, questi due punti non hanno ancora cambiato la realtà della scuola italiana, ma ci auguriamo che, anche col contributo di questo lavoro, questa spinta di cambiamento possa condurre a risultati concreti, in modo da poter offrire ai nostri studenti dei percorsi formativi che realmente li preparino a questo mondo in continua evoluzione.

[136] Legge 13 luglio 2015, n. 107.

Allegato A: Tabelle delle competenze

Per rendere più veloce la consultazione delle competenze e degli elementi di competenza abbiamo introdotti dei codici:

- con la prima lettera indichiamo l'asse di appartenenza (M per matematica, T per scienze e tecnologie, L per i linguaggi);
- se la lettera è seguita da un numero, vuol dire che ci stiamo riferendo alla competenza, il numero si riferisce all'ordine con cui compaiono all'interno dei documenti ufficiali;
- se la prima lettera è seguita da A o da C, vuol dire che ci stiamo riferimento ad un elemento di competenza, A se è una abilità, C se è una conoscenza;
- il numero successivo si riferisce alla competenza di appartenenza, quindi se abbiamo MA2 e LC3, vuol dire che mi sto riferendo alle abilità della seconda competenza matematica ed alle conoscenze della terza competenza dell'asse dei linguaggi;
- l'ultimo numero (MA2.3 - LC3.1) serve ad indicare a quale abilità o conoscenza in particolare mi sto riferendo.
- nel caso della competenza regionale, l'abbiamo indicato invece che con una lettera con M0T0 in quanto unisce in sé matematica, scienze e informatica e perché al suo interno raccoglie le altre quattro.

COMPETENZA	
M1	Utilizzare le tecniche e le procedure del calcolo aritmetico ed algebrico, rappresentandole anche sotto forma grafica
ABLITÀ/CAPACITÀ	
MA1.1	Comprendere il significato logico-operativo di numeri appartenenti ai diversi sistemi numerici. Utilizzare le diverse notazioni e saper convertire da una all'altra (da frazioni a decimali, da frazioni apparenti ad interi, da percentuali a frazioni…).
MA1.2	Comprendere il significato di potenza; calcolare potenze e applicarne le proprietà.
MA1.3	Risolvere brevi espressioni nei diversi insiemi numerici; rappresentare la soluzione di un problema con un'espressione e calcolarne il valore anche utilizzando una calcolatrice.
MA1.4	Tradurre brevi istruzioni in sequenze simboliche (anche con tabelle); risolvere sequenze di operazioni e problemi sostituendo alle variabili letterali i valori numerici.

MA1.5	Comprendere il significato logico-operativo di rapporto e grandezza derivata; impostare uguaglianze di rapporti per risolvere problemi di proporzionalità e percentuale; risolvere semplici problemi diretti e inversi.
MA1.6	Risolvere equazioni di primo grado e verificare la correttezza dei procedimenti utilizzati.
MA1.7	Rappresentare graficamente equazioni di primo grado; comprendere il concetto di equazione e quello di funzione.
MA1.8	Risolvere sistemi di equazioni di primo grado seguendo istruzioni e verificarne la correttezza dei risultati.
CONOSCENZE	
MC1.1	Gli insiemi numerici N, Z, Q, R; rappresentazioni, operazioni, ordinamento.
MC1.2	I sistemi di numerazione.
MC1.3	Espressioni algebriche; principali operazioni.
MC1.4	Equazioni e dissertazioni di primo grado.
MC1.5	Sistemi di equazioni e dissertazioni di primo grado.

Tab. 1: Competenza M1 e suoi elementi.

COMPETENZA	
M2	Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.
ABILITÀ/CAPACITÀ	
MA2.1	Riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con linguaggio naturale.
MA2.2	Individuare le proprietà essenziali delle figure e riconoscerle in situazioni concrete.
MA2.3	Disegnare figure geometriche con semplici tecniche grafiche e operative.
MA2.4	Applicare le principali formule relative alla retta e alle figure geometriche sul piano Cartesiano.
MA2.5	In casi reali di facile leggibilità risolvere problemi di tipo geometrico, e ripercorrerne le procedure di soluzione.
MA2.6	Comprendere i principali passaggi logici di una dimostrazione.
CONOSCENZE	
MC2.1	Gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini: assioma, teorema, definizione.
MC2.2	Il piano euclideo: relazioni tra rette; congruenza di figure; poligoni e loro proprietà.
MC2.3	Circonferenze e cerchio.
MC2.4	Misura di grandezze; grandezze incommensurabili; perimetro e area dei poligoni. Teoremi di Euclide e di Pitagora.
MC2.5	Teorema di Talete e sue conseguenze.
MC2.6	Il metodo delle coordinate: il piano cartesiano.
MC2.7	Interpretazione geometrica dei sistemi di equazioni.
MC2.8	Trasformazioni geometriche elementari e loro invariati.

Tab. 2: Competenza M2 e suoi elementi.

COMPETENZA	
M3	Individuare le strategie appropriate per la soluzione di problemi.
ABILITÀ/CAPACITÀ	
MA3.1	Progettare un percorso risolutivo strutturato in tappe.
MA3.2	Formalizzare il percorso di soluzione di un problema attraverso modelli algebrici e grafici.
MA3.3	Convalidare i risultati conseguiti sia empiricamente sia mediante argomentazioni.
MA3.4	Tradurre dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico e viceversa.
CONOSCENZE	
MC3.1	Le fasi risolutive di un problema e loro rappresentazioni con diagrammi.
MC3.2	Principali rappresentazioni di un oggetto matematico.
MC3.3	Tecniche risolutive di un problema che utilizzano frazioni, proporzioni, percentuali, formule geometriche, equazioni e dissertazioni di 1° grado.

Tab. 3: Competenza M3 e suoi elementi.

COMPETENZA	
M4	Analizzare dati e interpretarli sviluppando deduzioni e ragionamenti sugli stessi anche con l'ausilio di rappresentazioni grafiche, usando consapevolmente gli strumenti di calcolo e le potenzialità offerte da applicazioni specifiche di tipo informatico.
ABILITÀ/CAPACITÀ	
MA4.1	Raccogliere, organizzare e rappresentare un insieme di dati.
MA4.2	Rappresentare classi di dati mediante istogrammi e diagrammi a torta.
MA4.3	Leggere e interpretare tabelle e grafici in termini di corrispondenze fra elementi di due insiemi.
MA4.4	Riconoscere una relazione tra variabili, in termini di proporzionalità diretta o inversa e formalizzarla attraverso una funzione matematica.
MA4.5	Rappresentare sul piano cartesiano il grafico di una funzione.
MA4.6	Valutare l'ordine di grandezza di un risultato.
MA4.7	Elaborare e gestire semplici calcoli attraverso un foglio elettronico.
MA4.8	Elaborare e gestire un foglio elettronico per rappresentare in forma grafica i risultati dei calcoli eseguiti.
CONOSCENZE	
MC4.1	Significato di analisi e organizzazione di dati numerici.
MC4.2	Il piano cartesiano e il concetto di funzione.
MC4.3	Funzioni di proporzionalità diretta, inversa e relativi grafici, funzione lineare.
MC4.4	Incertezza di una misura e concetto di errore.
MC4.5	La notazione scientifica per i numeri reali.
MC4.6	Il concetto e i metodi di approssimazione.
MC4.7	I numeri "macchina".
MC4.8	Il concetto di approssimazione.
MC4.9	Semplici applicazioni che consentono di creare, elaborare un foglio elettronico con le forme grafiche corrispondenti.

Tab 4: Competenza M4 e suoi elementi.

COMPETENZA	
M0T0	Padroneggiare concetti matematici e scientifici fondamentali, semplici procedure di calcolo e di analisi per descrivere e interpretare sistemi, processi, fenomeni e per risolvere situazioni problematiche di vario tipo legate al proprio contesto di vita quotidiano e professionale.
ABILITÀ	
M0T0A.1	Applicare tecniche e procedure di calcolo per affrontare problemi di vario tipo del proprio contesto.
M0T0A.2	Identificare i fenomeni connessi ai processi del proprio settore professionale che possono essere indagati in modo scientifico.
M0T0A.3	Utilizzare strumenti e metodi di analisi quantitativa per indagare i fenomeni appartenenti ai processi di settore.
M0T0A.4	Rilevare, elaborare e rappresentare dati significativi per la comprensione e lo svolgimento di attività di settore.
M0T0A.5	Utilizzare linguaggi tecnici e logico-matematici specifici.
M0T0A.6	Applicazione di tecniche di calcolo per risolvere i problemi geometrici.
CONOSCENZE	
M0T0C.1	Caratteristiche del linguaggio matematico (regole e sintassi) ed elementi di matematica: concetto e metodi di approssimazione, risoluzione algebrica di problemi, rappresentazione grafica di grandezze che implicano relazioni, elementi di calcolo statistico e di statistica descrittiva, figure geometriche, loro proprietà e trasformazioni.
M0T0C.2	Fasi e tecniche risolutive di un problema.
M0T0C.3	Complementi di matematica di settore.
M0T0C.4	Elementi di calcolo professionale.
M0T0C.5	Elementi base di metodologia della ricerca scientifica e di metodo sperimentale applicabili al settore professionale.
M0T0C.6	Elementi e modelli di base relativi ai saperi scientifici richiesti dal settore professionale.
M0T0C.7	Applicazioni, strumenti e tecniche per l’elaborazione e la rappresentazione di dati.

Tab. 5: Competenza M0T0 e suoi elementi.

Allegato B: Format UBD- Understanding by Design

Riporto il format di progettazione e poi commenterò le diverse fasi:

<table>
<tr><td colspan="2">Titolo:</td></tr>
<tr><th colspan="2">Step 1: Risultati desiderati</th></tr>
<tr><th colspan="2">Comprensione di lunga durata (Enduring understanding)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Che cosa lo studente capirà (sui grandi temi) alla fine dell’unità? “Lo studente capirà che…”</td></tr>
<tr><th>Domande essenziali</th><th>Competenze, abilità e conoscenze</th></tr>
<tr><td>• Quali domande guideranno l’investigazione e quali ci aiuteranno a comprendere il grande tema dell’unità?</td><td>• Quali sono le competenze, le abilità e le conoscenze necessarie per sviluppare i risultati desiderati?
• Quali competenze, conoscenze e abilità sono collegate al contenuto della unità?</td></tr>
<tr><th colspan="2">Step 2: Prove di valutazione</th></tr>
<tr><td colspan="2">Quali prove saranno raccolte per determinare se sono state raggiunte le competenze, abilità e conoscenze obiettivo dell’unità?</td></tr>
<tr><th>Sommario delle prove per competenze</th><th>Griglia di valutazione</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><th>Auto-valutazioni</th><th>Altre prove</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">Step 3: Attività di apprendimento</th></tr>
<tr><td colspan="2">• Qual è la sequenza delle attività che permetteranno allo studente di svolgere bene i compiti dello step 2 al fine di dare evidenza del raggiungimento degli obiettivi dello step 1?</td></tr>
</table>

Tab 1: Format UBD tradotto

Il *format* è composto da tre stadi, oltre il titolo in cui deve emergere la connessione dell’unità formativa con una problematica di ambito professionale o reale. Nella struttura si evince come si sfrutti la metodologia del *backward design:* la costruzione è di tipo *top-down*, solo dopo aver definito i risultati attesi posso progettare in che modo andrò a certificare il loro raggiungimento e successivamente disegnare la strada giornaliera che conduca gli studenti al raggiungimento degli obiettivi fissati.

Nello *Step 1* il docente deve definire quali risultati vuole raggiungere con questa unità. I tre tipi di risultati sono:

1) Comprensione di lunga durata (Enduring understanding): cosa desidero che i ragazzi comprendano come valore per tutta la loro vita. La domanda a cui devo rispondere come docente è: cosa desidero che a 30 anni gli studenti possiedano di questa unità?

2) Domande essenziali: le domande essenziali a cui vogliamo rispondere con le attività proposte.

3) Competenze, abilità e conoscenze: le competenze, le abilità e le conoscenze sviluppate nel percorso proposto. In questa sezione andranno elencati gli elementi di competenza selezionati come obiettivi formativi dell'unità.

Nello *Step 2* il docente deve definire quali sono le prove che gli permetteranno di dire se lo studente ha raggiunto gli obiettivi.

1) Nella prima sezione il docente scrive che cosa lo studente dovrà essere in grado di mostrare per poter dire se ha raggiunto gli obiettivi.

2) Sommario delle prove per competenze: elenco degli oggetti o delle schede prodotte dai ragazzi durante la prova per competenze.

3) Griglia di valutazione: cosa il docente andrà a valutare per assegnare una valutazione. È molto importante compilare con attenzione questa rubrica perché ciò che non è esplicitato non può essere utilizzato come criterio di valutazione. Questa specificità permette allo studente di essere sempre consapevole su che cosa verrà valutato.

4) Auto-valutazioni: prove che permettono allo studente di sapere a che punto del percorso si trova. I risultati di questi test non vengono riportati nel registro del docente in quanto servono per capire in quale punto si è eventualmente bloccato l'apprendimento dello studente. Questi dati permettono di ripensare le lezioni successive avendo una panoramica completa della situazione della classe.

5) Altre prove: altri tipi di compiti che possono essere somministrati durante il percorso come le prove disciplinari.

Nello *Step 3* il docente elenca la sequenza delle attività che permetteranno allo studente di raggiungere gli obiettivi formativi indicati in testa al *format*. Per ogni lezione viene indicato l'obiettivo e la principale attività svolta per "centrare" il *target* della lezione. Trattandosi di una progettazione, nella fase di erogazione potrebbero esserci anche delle notevoli variazioni.

Bibliografia

AA.VV., *La matematica per il cittadino,* Zanichelli. Bologna 2012.

Art 1, secondo comma del DPR 275/1999.

Bardi D., *La classe scomposta. La didattica per competenze nelle tecnologie,* Nuova Multimedia Editore in collaborazione con RCS-Education, 2014.

Bargellini C. e S. Cantù (a cura di), *Viaggi nelle storie. Frammenti di cinema per l'educazione interculturale e l'insegnamento dell'italiano a stranieri,* Libera Universitaria dell'Autobiografia. 2011.

Bertagna G. (ed), *Fare laboratorio. Scenari culturali ed esperienze di ricerca nelle scuole del secondo ciclo,* La Scuola editrice, Brescia 2012.

Bertagna G., *Valutare tutti, valutare ciascuno. Una prospettiva pedagogica,* La Scuola editrice, Brescia 2004.

Bertagna G., e P. Triani (eds), *Dizionario di didattica. Concetti e dimensioni operative,* La Scuola editrice, Torino 2013.

Bertagna G. e Xodo C., *Le competenze dell'insegnare. Studi e ricerche sulle competenze attese, dichiarate e percepite,* Rubettino Università, Bergamo 2011.

Biagioni E., *Maria Boschetti Alberti e l'attivismo svizzero,* Ciranna, Palermo 1972.

Bolondi G. (a cura di), *Perché studiare la matematica,* Pearson, Orio Litta (Lo) 2012.

Bolondi G. e M.I. Fandiño Pinilla (a cura di), *Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della matematica,* EdiSES, Pozzuoli (Na) 2012.

D'Amore B., *Elementi di Didattica della Matematica,* Pitagora Editrice Bologna, Bologna 1999.

dm 139/2007 Fioroni.

Dweck C., *Mindset: how you can fulfill your potential,* Robinson, London 2012.

France A., *Le jardin d'Epissure,* Calman-Lévy, Paris 1923.

Freudenthal H., *Ripensando l'educazione matematica,* a cura di C. F. Mandara, La Scuola editrice, Brescia 1994.

Galimberti U., *L'ospite inquietante. Il nichilismo e i giovani,* Feltrinelli, Milano 2007.

Giunti A., *La scuola come centro di ricerca,* La Scuola editrice, Brescia 2012.

Hoz. W.G., *L'educazione personalizzata* (trad. it), La Scuola editrice, Brescia 2005.

Legge 13 luglio 2015, n. 107.

Maglioni M. e Biscaro F., *La classe capovolta. innovare la didattica con la flipped classroom,* Le Guide Erickson, Trento 2014.

Manara R., *La matematica e la realtà. Linee di metodo,* Marietti 1820, Perugia 2008.

Melzi G., *Perché la matematica,* La Scuola editrice, Brescia 1978.

Mottana P. *Miti d'oggi nell'educazione. E opportune contromisure,* Franco Angeli, Milano 2000.

Munari A., *Il sapere ritrovato,* Guerini e associati, Roma 1993.

Polya G., *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere problemi,* Feltrinelli, Milano 1979.

Sandrone Boscarino G., *Personalizzare l'educazione. Ritrosia e necessità di un cambiamento,* Rubettino Università, Bergamo 2008.

Stewart I., *Domare l'infinito. Storia della matematica dagli inizi alla teoria del caos,* Bollati Borighieri, Torino 2011.

Vygotsky L., *Pensiero e linguaggio,* Giunti, Firenze 1966.

Wiggins G. P. e McTighe J., *Understanding by design,* ASCD, Alexandria, Virginia Usa 2005.

www.rai.tv/dl/RaiTV/programmi/media/ContentItem-60047290-c015-4df6-b8b2-efe44f168f79.html

www.youmath.it/formulari-di-geometria-analitica/428-baricentro-di-tre-punti-e-centro-di-massa.html

www.youtube.com/watch?feature=player_embedded&v=JC82Il2cjqA

www.youtube.com/watch?v=F9WDtQ4Ujn8

www.youtube.com/watch?v=Iy1rumvo9xc

www.youtube.com/watch?v=sMVGvCb_9eQ

www.youtube.com/watch?v=vi12aITNRts