Università degli Studi di Bergamo

XXXI Ciclo
Dottorato in Ingegneria e Scienze Applicate

Tesi di Dottorato

STUDIO DI ASPETTI TEORICI E FENOMENOLOGICI DELLA FISICA DI PARTICELLE

Autore:
Dott.ssa Laura Deleidi

Relatore:
Prof. Valerio Re
Co-Relatore:
Prof. Roberto Leporini

Ai miei figli Matteo e Stefano,
gioia e orgoglio della mia vita ...

Introduzione

In questa tesi sono state indagate alcune condizioni cinematiche e dinamiche in cui potrebbero essere rilevati possibili neutrini superluminali ossia con massa quadratica negativa emessi nel decadimento binario di pioni. Si è ricavato che sopra un'energia di soglia pionica il comportamento dell'energia dei neutrini tachionici rispetto all'angolo di emissione cambia drasticamente rispetto al caso bradionico ordinario; in particolare, sopra l'energia di soglia, che dipende dalla massa del neutrino, si potrebbe osservare anche un'emissione trasversale (angoli maggiori di 90°), proibita per neutrini ordinari. Questo potrebbe costituire una chiara evidenza per i neutrini superluminali.
Nel primo capitolo è stata percorsa la storia del neutrino

particella estremamente interessante, ma anche estremamente misteriosa per la sua difficoltà ad essere rivelata a causa della sua rara interazione con la materia.
Nel secondo capitolo si sono esposti gli aspetti fenomenologici e sperimentali in merito alle informazioni inerenti la massa dei neutrini; effettivamente dati raccolti da più fonti, raggi cosmici, supernove, decadimento β del trizio e altri hanno portato a rilevare che i neutrini elettronici ν_e e i neutrini muonici ν_μ risultano essere con massa quadratica negativa: questo avvalla maggiormente lo studio su questa particolare tipologia di particelle.
Nel terzo capitolo vengono esposte le teorie che riguardano lo studio di particelle con massa quadratica negativa; affrontato già negli anni sessanta e settanta, da un punto di vista cinematico vengono denominate le particelle tachioniche con $v > c$ e le particelle bradionniche con $v < c$; in seguito si sviluppa l'aspetto dinamico affrontando anche l'aspetto quantistico partendo dalla teoria di Dirac, estendendola anche a particelle pseudotachioniche (PT con massa quadratica negativa e $v > c$) e utilizzando il concetto di dualità ed in particolare di velocità duale.

Nel quarto capitolo, partendo dalla relazione di dispersione ordinaria, si sono proposti i passaggi matematici e fisici per ottenere le equazioni dell'energia ε in funzione dell'angolo ϑ; si è poi indagato il caso tachionico supponendo che la massa quadratica di un neutrino coinvolto nel decadimento sia negativa ottenendo interessanti risultati. Si è impostato lo studio della determinazione della distribuzione angolare delle energie nel sistema del Laboratorio, trovando la relazione tra l'angolo ϑ_0 nel Centro di Massa e l'angolo ϑ nel Laboratorio. Passando alla parte quantistica si è cercata la distribuzione angolare $\mathrm{d}\omega$ utilizzando la matrice di scattering $\mathcal{M}_{fi}$ applicando la teoria di Salesi per il caso bradionico e pseudotachionico.
Nel quinto capitolo, partendo dalle equazioni di Pontecorvo, si sono studiati e considerati gli effetti della massa quadrata negativa sulle oscillazioni di sapore, prima nel vuoto e poi nella materia affrontando la teoria e proponendo eventuali verifiche sperimentali.
Nelle conclusioni si trovano le osservazioni fisiche e le prospettive future per un'ulteriore ricerca.

Indice

Introduzione **I**

1 Stato dell'arte **1**

2 Fenomenologia **15**

2.1 I neutrini del Sole 16

2.2 Neutrini da collassi gravitazionali 19

2.3 Neutrini da resto di supernova 27

3 Teorie Classiche e Quantistiche **37**

3.1 Teoria Classica 39

3.1.1 I postulati della RS rivisti 41

3.1.2 Principio di switching 45

3.1.3 Antimateria 48
3.1.4 Descrizione della natura, leggi fisiche e tachioni 49
3.2 Teoria Quantistiche 52
3.2.1 Particelle di spin $\frac{1}{2}$ con $m^2 < 0$ . . . 54
3.2.2 Onde piane 56
3.2.3 Dualità momento-velocità 64
3.3 Velocità Duale 69
3.3.1 Relatività Standard 72
3.3.2 Metrica nello spazio delle velocità ordinarie 76
3.3.3 Relatività Estesa 77
3.3.4 Metrica nello spazio delle velocità non ordinarie 82

4 Decadimenti Binari 85
4.1 Teoria Ordinaria 87
4.2 Estensione al caso $m_\nu^2 < 0$ 94
4.3 Distribuzione angolare dal centro di massa al laboratorio 99
4.4 Probabilità di decadimento dω 104
4.4.1 Caso ordinario 105

4.4.2 Caso non ordinario 106
4.5 Interpretazione fisica dei risultati 107
4.6 Calcolo di ε e p delle particelle emesse nel Centro di Massa 108
4.6.1 Caso ordinario 108
4.6.2 Caso esteso 111

5 Oscillazioni di sapore dei neutrini 113
5.1 Oscillazioni nel vuoto 124
5.2 Oscillazioni nella materia 129

6 Conclusioni 135

A Pontecorvo il neutrino e le oscillazioni 139

B Esperimenti Neutrini 149
B.1 Decadimento β 149
B.1.1 Mainz 150
B.1.2 Katrin 154
B.2 Produzione e Rivelazione di neutrini 161
B.2.1 Opera 163
B.2.2 Dune 167
B.2.3 Kamiokande e la sua evoluzione . . . 169

B.2.4 IceCube 171

Bibliografia **173**

Elenco delle figure

2.1 Andamento di E in funzione della velocità . 33
2.2 Particle Data Group-2017 35

3.1 Energia 41
3.2 Energia-Momento 44
3.3 Linea Universo di un tachione 47
3.4 Fenomeno di scambio 48
3.5 Descrizione fenomeno 53
3.6 Grafico dispersione energia-velocità 68
3.7 Scomposizione vettore velocità ordinaria . . 74
3.8 Scomposizione vettore velocità non ordinaria 79

4.1 Grafico distribuzione neutrini ordinari . . . 92

4.2 Grafico distribuzione neutrini non ordinari . 99
4.3 Velocità bradionica e tachionica 101

5.1 Particelle 115
5.2 Flusso di neutrini solari 123
5.3 Risonanza angolo di mixing 134
5.4 Frequenza angolo di mixing 134

B.1 Mainz-schema della struttura 151
B.2 Mainz-schema della struttura 153
B.3 Katrin-struttura 157
B.4 Katrin-grafico 161
B.5 Collisione protoni 162
B.6 Schema produzione neutrini 164
B.7 Opera 166
B.8 Dune 168
B.9 Kamiokande 171
B.10 IceCube 172

Elenco delle tabelle

4.1 Grafico distribuzione energie neutrini ordinari 93
4.2 Grafico distribuzione energie neutrini non ordinari 98
4.3 Grafico distribuzione energie neutrini 109

B.1 Katrin: Spettrometro struttura e trasporto 156

Capitolo 1

Stato dell'arte

"Cari Signore e Signori Radioattivi, a causa dello spettro continuo del decadimento beta, ho pensato a un possibile disperato rimedio per salvare le statistiche e il principio di conservazione dell'energia. Si tratta della possibilità che esista nel nucleo una particella elettricamente neutra, che chiamerò neutrone, con spin $\frac{1}{2}$, che rispetti il principio di esclusione, ma che sia diversa dai fotoni, in quanto non viaggia alla velocità della luce. La massa del neutrone dovrebbe essere simile a quella dell'elettrone e comunque non maggiore dell' 1% della massa del protone. Potremmo

così spiegare lo spettro continuo assumendo che nel decadimento beta è emesso un neutrone assieme all'elettrone in maniera tale che la somma delle energie del neutrone e dell'elettrone sia costante... Concordo sul fatto che tale rimedio possa sembrare incredibile poiché avremmo già dovuto osservare tali neutroni... Sfortunatamente non potrò raccontarvi personalmente le mie idee a Tubinga in quanto dovrò restare qui a Zurigo a causa di una festa da ballo la notte tra il 6 e il 7 dicembre..." Così scrisse Wolfang Pauli il 4 dicembre 1930 ai partecipanti al congresso a Tubinga come ultima risorsa quando non si individuava una via d'uscita all'ormai decennale problema dello spettro continuo degli elettroni emessi nel decadimento beta; propose l'esistenza di una particella neutra, con massa estremamente piccola come ultima risorsa per spiegare la mancanza di massa nel decadimento; era la prima proposta di una particella che non faceva parte della materia ordinaria. Verso la fine del 1920 si era osservato che durante il decadimento radioattivo di tipo beta (in cui il nucleo atomico emetteva un elettrone e si trasformava in un nucleo di una nuova specie atomica, con z che va a $z+1$) una parte dell'energia scom-

pariva, contraddicendo il noto principio di conservazione, ossia che l'energia complessiva di una trasformazione non cambia; per essere corretti si dovrebbe parlare non solo di energia, ma di massa-energia, perché l'una può scambiarsi nell'altra e viceversa, in seguito alla celebre formula di Einstein: $E = mc^2$. Inoltre lo spettro degli elettroni e^- non era piccato, mentre se il decadimento fosse stato binario, per esempio $n \to p^+ + e^-$ l'energia sarebbe stata ben definita.
Pauli, per ovviare al problema, ipotizzò l'esistenza di una strana particella che sarebbe comparsa quando il nucleo radioattivo emetteva l'elettrone; questa nuova particella avrebbe contenuto l'energia mancante, sarebbe stata neutra e molto più leggera dell'elettrone stesso. L'introduzione di questo "neutrino" sanava anche la violazione della legge della conservazione della quantità di moto e quella del momento angolare. Enrico Fermi verso il 1934, in un congresso internazionale, in seguito ad una battuta del suo allievo Edoardo Amaldi, introdusse per primo il termine "neutrino" per distinguerlo dal neutrone, molto più grande e scoperto da Chadwick nel 1932. Quando un neutrone si

fosse trasformato in protone ci sarebbe stata l'emissione di un elettrone e di un neutrino, mentre durante la trasformazione di un protone in un neutrone ci sarebbe stata l'emissione di un positrone e di un neutrino. Pauli, sempre nella sua lettera al gruppo di fisici della radioattività al congresso di Tubinga, scriveva di non osare pubblicare alcunché riguardo all'idea di questa nuova particella da lui proposta e chiedeva ai colleghi un parere sulla probabilità di trovarne evidenza sperimentale, consapevole di averla postulata ad hoc e consapevole che le sue proprietà la rendevano estremamente elusiva. Pauli fece appena in tempo a cogliere la soddisfazione della conferma sperimentale dell'esistenza dei neutrini. Morì infatti nel 1958, due anni dopo l'annuncio di Reines e Cowan. Di neutrini ora se ne conoscono tre coppie diverse (elettronici ν_e, muonici ν_μ e tauonici ν_τ, ognuno con la sua antiparticella); è noto che abbiano massa estremamente piccola (ma non nulla) e che si possano trasformare gli uni negli altri. Risultano essere particelle di grande rilevanza sia per la fisica dell'estremamente piccolo sia per quella dell'estremamente grande: l'astrofisica. Basti pensare che i neutrini, con i fotoni, sono le particelle

più abbondanti dell'universo: ce n'è quasi un miliardo per ogni protone. Soltanto il nostro Sole, da solo, ne produce $2 \cdot 10^{38}$ ogni secondo, tanto che a Terra su ogni centimetro quadrato, ne arrivano circa 60 miliardi al secondo!
E'anche certo che i neutrini oscillano, cambiano la loro identità viaggiando nello spazio e nel tempo, si trasformano da un sapore a un altro. Il fenomeno delle oscillazioni è la dimostrazione che i neutrini abbiano masse e tra loro diverse, ma nulla ci dice su come le tre differenti masse siano ordinate e quali siano i loro valori assoluti, di cui conosciamo al momento complessivamente solo dei limiti superiori. Il Modello Standard non prevede che i neutrini siano necessariamente massivi. Inoltre rimane un mistero il perché i neutrini siano così leggeri, ben undici ordini di grandezza meno pesanti rispetto al top quark. L'ordine o gerarchia delle tre masse è una questione ancora aperta e di grande rilevanza; lo studio dei neutrini che escono dal Sole e della loro interazione collettiva con gli elettroni nella materia, ha consentito di conoscere l'ordine di una delle coppie di neutrini di massa definita (autostati di massa), ma il quadro complessivo non è ancora noto e ci sono due possibili

soluzioni note, come gerarchia diretta o inversa delle masse dei neutrini. Le oscillazioni dei neutrini possono accadere perché i neutrini di massa definita (detta autostati di massa) sono una "mescola" dei neutrini di "sapore" diverso, e viceversa quelli di sapore definito una "mescola" di autostati di massa. Gli esperimenti già conclusi o in atto hanno misurato l'entità del mescolamento, in altri termini hanno misurato con maggiore o minore precisione i parametri della matrice di mescolamento dei neutrini nota come matrice di Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS) [30], [31] che descrive le probabilità di oscillazione dei neutrini mentre viaggiano nello spazio e nel tempo. Le probabilità di oscillazione dipendono dalle differenze dei quadrati delle masse (dette splitting delle masse) e non ci possono quindi aiutare a determinarne il valore assoluto. Esperimenti in grado di misurare con grandissima precisione lo spettro energetico di decadimenti beta possono determinare il valore assoluto del più leggero dei neutrini. L'esperimento KATRIN in costruzione a Karlsruhe in Germania che misura il decadimento beta del trizio, dovrebbe a breve darci la misura più precisa. Da tempo vi sono rivelatori di

neutrini sparsi per il mondo. Sono inevitabilmente enormi, proprio per massimizzare la probabilità di registrare le loro rare interazioni con la materia (in un mezzo denso come l'acqua, il libero cammino medio di un neutrino solare con energia di 10 MeV è di molti anni-luce!). Inoltre, i rivelatori di neutrini sono di solito situati in miniere o in grotte (come il Super-Kamiokande in Giappone o il Borexino sotto il Gran Sasso), nei mari profondi (Antares, nel Mediterraneo, al largo di Marsiglia a due chilometri e mezzo di profondità, Nemo, nel Mediterrao, al largo del sud della Sicilia ad una profondità di tre chilometri e mezzo) o addirittura sepolti nei ghiacci (come IceCube in Antartide). Questo per schermare i rivelatori dalla radiazione cosmica che comportandosi come "rumore" nella ricerca dei segnali dovuti alle rare interazioni dei neutrini con la materia, ne renderebbe proibitiva l'identificazione.
Gli studi dei neutrini di provenienza cosmica si sono concentrati soprattutto sui neutrini solari che hanno evidenziato subito quello che per anni è stato noto come il "problema dei neutrini solari" (la quantità di neutrini emessi dal Sole sembrava essere di molto inferiore -circa un terzo- a quella

prevista a seguito delle reazioni nucleari che dovevano aver luogo all'interno del Sole). Il problema fu risolto quando ci si rese conto che i neutrini "oscillavano" (come previsto da Bruno Pontecorvo)cambiando natura durante il loro viaggio dal Sole alla Terra, così che i rivelatori, studiati per rivelare i neutrini di tipo elettronico, non vedevano la frazione che si era trasformata in un tipo diverso (neutrini di tipo tau ν_τ)

Nel 1987 è stata rivelata per la prima volta una manciata di neutrini di provenienza extragalattica, prodotti dalla supernova $SN1987A$ esplosa nella vicina Grande Nube di Magellano. Ne furono "catturati" 24 dei circa 10^{28} che si stima abbiano in pochi secondi attraversato la Terra per l'occasione: 5 furono registrati nel Laboratorio del Monte Bianco (esperimento LSD a 3.000 m di profondità) $4,7$ ore prima della rivelazione dei 19 di KamiokandeII in Giappone e di IMB negli Stati Uniti oltre ad un altro segnale visto anche nell'unico rivelatore criogenico allora in funzione. La differenza di orario si puo' spiegare col fatto che i detectors italiano e giapponese erano sensibili a neutrini con energie diverse, e velocità diverse (la supernova distava 170 mila

anni-luce). I calcoli che fece Simone Giani del Cern con Erasmo Recami, suggerirono che i neutrini della supernova fossero superluminali (la conferma sta venendo da un paio di studi recenti [32]).
Più recentemente, l'esperimento Borexino al Gran Sasso ha rivelato i geo-neutrini, neutrini dovuti al decadimento radioattivo di alcuni elementi (Uranio, Torio e Potassio-40) contenuti nel mantello terrestre, fornendo quindi informazioni dirette sull'abbondanza di questi elementi.
In anni recenti i Laboratori del Gran Sasso hanno mantenuto la loro leadership in questo campo. L'esperimento Borexino nel 2014 ha osservato, primo al mondo, i neutrini di più bassa energia generati dalle reazioni di fusione di protoni nel nucleo del Sole. Questi costituiscono la maggioranza dei neutrini prodotti e sono direttamente legati all'energia che viene irradiata dal Sole. Il Sole ha un'importanza speciale in astronomia, essendo la stella a noi più prossima ed il banco di prova su cui verificare la validità delle nostre conoscenze. I telescopi di neutrini, (come il Large Volume Detector (LVD) e lo stesso Borexino), sono in grado di osservare gli ultimi istanti di vita delle più

grandi stelle della nostra galassia, quando collassano sotto il proprio peso, producendo un oggetto stellare compatto (come una stella di neutroni, un buco nero o forse una stella di quark). Si sta parlando delle cosiddette supernove a collasso gravitazionale. Sono proprio i neutrini, infatti, a permettere alla stella di rilasciare l'enorme eccesso di energia, che vale il $10 - 20\%$ dell'intera massa dell'oggetto compatto. Una caratteristica unica dei telescopi ospitati presso i Laboratori del Gran Sasso è la capacità di misurare neutrini di tutti i tipi, dovuta alle speciali reazioni dei neutrini emessi da queste stelle con i nuclei che compongono questi telescopi. Quanto detto assume ancora maggior rilevanza se si pensa che l'astronomia di neutrino è una disciplina giovane ed in rapida evoluzione. Per citare un unico ma importante esempio, si ricorda che l'osservazione quantitativa dei neutrini ha fornito le uniche prove solide al momento della esistenza di fisica oltre il modello standard delle particelle elementari. La scoperta delle oscillazioni dei neutrini, a cui hanno partecipato tra gli altri gli esperimenti MACRO, Gallex, GNO, OPERA, Icarus e Borexino, tutti ospitati nei Laboratori nazionali del Gran Sasso, ha

aperto la strada a misure di precisione sulla natura e i comportamenti di questa elusiva particella.
Sono proprio le caratteristiche che rendono i neutrini così difficili da rivelare (nessuna carica, piccola massa, bassissima probabilità di interagire con la materia) a rendere queste particelle delle sonde particolarmente utili per studiare ambienti altrimenti invisibili come appunto l'interno delle stelle ma anche del nostro pianeta. Il Sole è opaco ai fotoni prodotti al suo interno così come lo è l'interno della Terra. Ma poiché tutto è quasi completamente trasparente ai neutrini, essi ci permettono di "vedere" e studiare fenomeni che avvengono in luoghi altrimenti inaccessibili.
Fissare l'ordine dei valori delle masse porterà dei vantaggi anche agli esperimenti che si propongono di misurare l'eventuale violazione della simmetria CP nelle oscillazioni di neutrino o a quelli che hanno come scopo la misura di un rarissimo e finora mai osservato decadimento nucleare noto come decadimento doppio beta senza neutrino. In fisica le simmetrie, che esprimono l'invarianza di un sistema fisico rispetto a una trasformazione, rappresentano una proprietà della formulazione matematica delle forze fondamentali che

si esercitano tra le particelle elementari. Si chiama simmetria CP l'applicazione contemporanea della simmetria di carica C, cioè dello scambio particella-antiparticella, e della simmetria spaziale P (Parità) consistente nell'inversione spaziale delle coordinate. Mentre la forza elettromagnetica e la forza forte che tiene i quark legati nei nuclei, sono invarianti rispetto a CP, così non è per la forza debole e la violazione di CP ha ricevuto numerose prove sperimentali dagli anni $'60$ del secolo scorso in poi. La violazione di CP potrebbe essere stata la causa della prevalenza della materia sull'antimateria nei primissimi istanti dell'universo dopo il BigBang, anche se al momento l'entità della violazione di simmetria di CP sembra non essere sufficiente per spiegare il prevalere della materia nell'universo. Per quel che si sa oggi, infatti, non ci sono nell'universo galassie o altri corpi celesti isolati composti di antimateria. Viceversa all'inizio di tutto materia e antimateria dovevano necessariamente essere state prodotte in quantità perfettamente uguali. L'eco di questa simmetria iniziale è proprio il fondo cosmico di microonde, creato dall'annichilazione della materia con l'antimateria. Qualcosa deve avere leggermente

sbilanciato la materia rispetto all'antimateria e l'universo di cui noi oggi siamo parte, è il residuo di questa prevalenza di un "segno" rispetto all'altro, mentre tutto il resto si è annichilito in fotoni che oggi, dopo quasi 14 miliardi di anni, misuriamo a una temperatura di $2,7$ gradi Kelvin.

Capitolo 2

Fenomenologia

Negli esperimenti che coinvolgono i neutrini sono state talvolta osservate deviazioni dalla cinematica ordinaria e dalla relatività speciale.
La natura dei neutrini [4], [5], [6], rimane oggi piuttosto controversa e merita sia ulteriori studi teorici che nuove indagini sperimentali.

Per poter rivelare i neutrini si utilizzano diverse tipologie di esperimenti che vanno ad indagare neutrini di origini diverse [13].

2.1 I neutrini del Sole

Il Sole rappresenta la più abbondante sorgente astronomica di neutrini. La produzione di neutrini solari testimonia nel modo più diretto l'esistenza delle reazioni nucleari di combustione dell'idrogeno all'interno del Sole. Queste, liberando energia, controbilanciano l'emissione dalla superficie e garantiscono la stabilità del Sole su tempi evolutivi dell'ordine di miliardi di anni. La celebre monografia e la pagina web di Bahcall [14] restano autorevoli fonti di informazioni. Qualunque sia il meccanismo specifico attraverso cui avviene la conversione di 4 nuclei di idrogeno (cioè, protoni) in un nucleo di elio−4, debbono essere prodotti 2 neutrini elettronici, secondo lo schema:

$$2\,\mathrm{e}^- + 4\,\mathrm{p} \rightarrow 4\,\mathrm{He} + 2\,\nu_e$$

Per ogni nucleo di elio−4 viene liberata un'energia pari a $\mathrm{Q} \sim 26,7$ MeV. Se si ipotizza che tutta l'energia emessa dal Sole sia dovuta a processi di fusione di idrogeno in elio, si può stimare il flusso di neutrini. Per calcolare la loro distribuzione energetica è necessario specificare le catene di reazioni responsabili della fusione dell'idrogeno. I mec-

canismi principali sono la catena PP, così chiamata perché iniziata dalla reazione debole $\mathrm{p} + \mathrm{p} \rightarrow \mathrm{d} + \mathrm{e}^{+} + \nu_e$, con le sue possibili terminazioni PPI, PPII e PPIII ed il bi-ciclo CN-NO, che usa il carbonio (C), l'azoto (N) e l'ossigeno (O) presenti nel Sole come catalizzatori per la formazione dell'elio-4. È inoltre necessario conoscere temperatura, densità e composizione chimica degli strati interni del Sole, che determinano l'efficienza delle varie reazioni nucleari. Al fine di effettuare un tale calcolo si costruisce un Modello Solare Standard, cioè un modello teorico del Sole. I parametri fisici e chimici di ingresso sono scelti (entro i rispettivi intervalli di incertezza) per riprodurre le proprietà osservate, come il raggio del Sole, la sua luminosità, la sua composizione chimica superficiale. Il Modello Solare Standard è uno strumento di indagine fondamentale, in quanto consente di valutare la bontà delle teorie di evoluzione stellare con un alto livello di accuratezza. La prima rivelazione dei neutrini solari (e, più in generale, di neutrini da sorgenti astrofisiche) è avvenuta alla fine degli anni 60 con l'esperimento Homestake, basato sul processo di assorbimento di neutrini elettronici su nuclei di clo-

ro (^{37}Cl). Il segnale osservato, dovuto principalmente ai neutrini del boro, risultò pari a circa un terzo del segnale atteso. Tale deficit di neutrini solari fu confermato da numerosi esperimenti successivi e costituì il problema dei neutrini solari. Gli esperimenti Kamiokande e successivamente Super-Kamiokande (un ammasso di 50.000 tonnellate di acqua ultrapura, circondato da 11.146 tubi fotomoltiplicatori, con una struttura cilindrica che misura $41,4\,\mathrm{m}$ di altezza e $39,3\,\mathrm{m}$ di diametro), studiarono in dettaglio la regione spettrale ad alte energie, rivelando neutrini prevalentemente elettronici. Gallex/GNO e Sage, esperimenti radiochimici basati sull'assorbimento di neutrini elettronici su gallio (^{71}Ga), consentirono di estendere l'analisi ad energie più basse. La definitiva soluzione del problema dei neutrini solari si ottenne con l'esperimento SNO, rivelatore Cherenkov ad acqua pesante (D_2O) che, utilizzando nuclei di deuterio come bersaglio, consentì di monitorare tutti i tipi di neutrino. Tale analisi mostrò che il deficit di neutrini elettronici era compensato da un flusso di neutrini di tipo non-elettronico. Il deficit evidenziato negli esperimenti precedenti, sensibili solo o prevalementemente

ai neutrini elettronici, non è dunque "reale" ma dovuto al fatto che parte dei neutrini elettronici cambia natura (o come si dice in gergo, oscilla) durante il tragitto dal Sole alla Terra. Ulteriori evidenze del fenomeno di oscillazione dei neutrini sono state successivamente fornite dall'esperimento KamLAND, che ha studiato la propagazione degli (anti)neutrini elettronici prodotti da reattori nucleari e dall'esperimento Borexino che ha misurato il flusso di neutrini solari prodotti da processi di cattura elettronica su berillio e dal decadimento del boro.

2.2 Neutrini da collassi gravitazionali

Le esplosioni di supernove sono fenomeni astrofisici estremamente interessanti. Le ragioni che conducono al collasso gravitazionale di una stella di grande massa ($M > 8\,M_\odot$), alla esplosione ed alla formazione di una stella di neutroni (o di un buco nero) sono state discusse, per esempio nel riferimento [15]. Il meccanismo specifico non è però ancora stato chiarito; esso costituisce un problema complesso che coinvolge aspetti di fisica nucleare, fisica delle particelle ed

astrofisica, su cui l'astronomia neutrinica potrebbe gettar luce. L'esplosione di supernove dovute a collassi gravitazionali è accompagnata dall'emissione di intensi flussi di neutrini.
Ognuna di queste emissioni porta informazioni sulla fisica della stella durante il collasso e l'esplosione, che integrate tra di loro potrebbero dare un quadro dettagliato del fenomeno. La radiazione elettromagnetica viene emessa dalla stella insieme all'onda d'urto, qualche ora dopo il collasso. I neutrini e le onde gravitazionali, invece, interagiscono poco con il mezzo. Per questo portano informazioni sulla dinamica delle zone più interne del nucleo stellare, che raggiungono densità e temperature enormi. Lo studio di questi segnali permetterà di comprovare (o confutare) i modelli dell'esplosione, che sono ancora lontani dal costituire una teoria solida e completa di un fenomeno così complesso.
Oltre alle motivazioni di carattere astrofisico, vanno notate la possibilità di studiare le proprietà della materia in condizioni estreme e molti aspetti di fisica delle particelle. Lo studio delle supernove a collasso gravitazionale deve fare i conti con la rarità di questi eventi. Nella Via Lattea, l'a-

spettativa è di $1-3$ supernove a collasso gravitazionale ogni 100 anni. L'ultima supernova galattica visibile ad occhio nudo è stata quella testimoniata da Giovanni Keplero nel 1604; perciò si ritiene che la maggior parte delle supernove non siano state viste. Lo scenario standard per l'esplosione delle supernove a collasso gravitazionale attribuito a Bethe e Wilson [16] prevede varie fasi d'emissione di neutrini. Il collasso comincia quando il nucleo di ferro con un raggio di circa $R_{\mathrm{Fe}} \sim 3000\,\mathrm{km}$, raggiunge la massa di Chandrasekhar $M_{\mathrm{Ch}} \sim 1,4\,M_{\odot}$ e la pressione dovuta agli elettroni non riesce a controbilanciare la gravità. In questa fase, i processi di fotodisintegrazione del ferro e di cattura elettronica riducono la pressione, accelerando il collasso che avviene su tempi scala dell'ordine di $\tau_{coll} \sim 0,1\,\mathrm{secondi}$. Inizialmente, tutto il nucleo della struttura collassa e la densità centrale aumenta fino a raggiungere valori pari a $\rho_c \sim 10^{12}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. Il nucleo della stella si separa in una zona interna con masse tipiche di $M_i \sim 0,5-0,8\,M_{\odot}$ che continua a collassare subsonicamente, ed una parte esterna che collassa supersonicamente. Il collasso continua fin quando la densità centrale raggiunge i valori di densità nucleare

$\rho_c \sim 10^{15}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$. A questo punto, l'equazione di stato cambia: la materia diventa pressoché incompressibile ed il collasso si arresta. La parte esterna del nucleo, che non si è accorta di questo cambiamento, continua a precipitare e "rimbalza" sulla parte interna del nucleo originando un'onda d'urto con un'energia cinetica $E \sim 10^{52}\,\mathrm{erg}$. Se l'onda d'urto avesse un'energia sufficiente, potrebbe attraversare il nucleo esterno, producendo l'esplosione degli strati esterni della stella. Le analisi mostrano che questo non avviene. Infatti, ogni $0,1$ masse solari attraversate l'onda perde circa $1,7 \cdot 10^{51}\,\mathrm{erg}$ dissociando i nuclei. Inoltre, dopo pochi millisecondi dal rimbalzo, l'onda d'urto raggiunge zone a densità sufficientemente bassa da permettere ai neutrini intrappolati di fuggire dalla struttura, perdendo ulteriore energia. Questo può essere considerato l'istante iniziale della emissione, caratterizzato da un intenso picco di ν_e prodotti dai processi di cattura elettronica, detto flash di neutronizzazione. Le perdite di energia portano l'onda d'urto ad essere stazionariacon un raggio dell'ordine di $R_s \sim 200\,\mathrm{km}$. In questa fase la materia continua a cadere nel nucleo accrescendolo. Diversi fattori concor-

rono alla riaccensione dell'onda d'urto su tempi scala di $\geq 0,5\,\mathrm{s}$. Non esiste ancora un quadro chiaro del meccanismo predominante, ma certamente i neutrini svolgono un ruolo chiave. Infatti all'interno del materiale attraversato dall'onda d'urto i nucleoni liberi interagiscono con $e^{\pm}$ secondo le reazioni:

$$n + e^{+} \leftrightarrow p + \bar{\nu_e}$$

$$p + e^{-} \leftrightarrow n + \nu_e$$

Il bilancio tra i processi di produzione ed assorbimento dei neutrini dipende della densità e della temperatura del mezzo stellare. Nella zona subito sotto l'onda d'urto prevale l'assorbimento di neutrini e antineutrini, che riscalda la struttura cedendole energia. Questa energia è, in alcuni casi, sufficiente a produrre l'esplosione della stella secondo lo scenario di esplosione ritardata, anche detto scenario di esplosione coadiuvata dai neutrini. Nella zona più interna, vicina alla superficie della protostella di neutroni, prevalgono le reazioni di produzione che raffreddano la struttura e danno luogo ad un intenso flusso di neutrini e antineutrini elettronici. Questa fase dell'emissione, chiamata fase di accrescimento, è responsabile del $10 - 20\%$

dell'energia totale emessa in neutrini ed è di grande interesse in quanto rappresenta la prima emissione di antineutrini elettronici. Questa emissione raggiunge il massimo e poi declina durante la frazione di secondo che precede la riaccensione dello shock e l'esplosione finale. La restante energia viene emessa su scale di tempi dell'ordine di $\Delta t \sim 10\,\mathrm{s}$ dal raffreddamento termico della protostella che emette neutrini ed antineutrini di tutti i tipi. Il 23 Febbraio del 1987 venne rivelato un segnale dalla supernova a collasso gravitazionale nota come $SN1987A$. La stella progenitrice era la supergigante blu Sanduleak$-69°202a$, di massa $M_p \sim 15\,M_\odot$, situata nella Grande Nube di Magellano (D$\sim$ 50 kpc). La lontananza della $SN1987A$ ed il fatto che fossero attivi soltanto rivelatori relativamente piccoli consentirono di acquisire solo pochi eventi, che però aprirono una discussione scientifica ancora oggi estremamente vivace. Una parametrizzazione del segnale atteso consente di tracciare una strada che, partendo dall'astrofisica, porta a calcolare il numero di eventi attesi in un rivelatore. Tale strada può essere percorsa in senso contrario: partendo dai dati osservativi possiamo dedurre i

parametri astrofisici più appropriati a descrivere le osservazioni. Questo è il percorso che si è seguito in una recente dettagliata rianalisi dei dati della $SN1987A$ [17]. I valori dei vari parametri astrofisici trovati sono in ottimo accordo con le aspettative, anche se, a causa della limitata statistica, gli errori sui parametri sono relativamente grandi. Una supernova galattica è attesa dalla comunità scientifica da più di 20 anni; i motivi di tanto interesse sono numerosi; la principale ragione ha natura astrofisica: avere per la prima volta a disposizione dati dettagliati avrà un impatto enorme sulla comprensione dell'esplosione. Considerando i progressi di sensibilità dovuti alla costruzione di rivelatori sempre più grandi come Super-Kamiokande (Miniere di Kamioka, Giappone), LVD (Laboratori del GranSasso, Italia), IceCUBE (Polo Sud), e altri, con maggiore capacità di identificazione degli eventi osservati, si aspettano migliaia di eventi da IBD (Inverse Beta Decay), avendo una sezione d'urto di gran lunga maggiore rispetto alle altre reazioni di rivelazione. Con una tale statistica, i processi di interesse con tempi scala sopra ai $\sim 100\,\mathrm{ms}$ potranno essere ben studiati. Un rivelatore come Super-Kamiokande può

identificare certe reazioni con sezione d'urto minore, come l'urto elastico. Questo potrebbe permettere di studiare fasi di emissione caratterizzate solo da neutrini elettronici, come il flash di neutronizzazione, ma anche di desumere la posizione della supernova nel cielo. Come ricordato, una supernova emette diversi segnali. L'aspettativa è un impulso di durata complessiva di $\sim 30\,\mathrm{ms}$ nel momento in cui la parte esterna del nucleo di ferro collassa e rimbalza sulla parte interna; è possibile utilizzare il segnale neutrinico per coadiuvare la ricerca di questi impulsi. Ricostruendo la fase iniziale del segnale neutrinico si può identificare l'istante del rimbalzo con una precisione di $\sim 10\,\mathrm{ms}$. La ricerca di un segnale gravitazionale impulsivo così precisamente delimitato è molto più agevole; i rivelatori attuali, come LIGO e VIRGO, ne guadagnano in sensibilità. Vari quesiti di fisica fondamentale ancora irrisolti, come ad esempio il valore della massa dei neutrini, possono avvantaggiarsi di tali eventi. Infatti la massa dei neutrini modifica lo spettro che arriva nel rivelatore, causando un ritardo del segnale che dipende dall'energia dei neutrini.

2.3 Neutrini da resto di supernova

L'interesse per i resti di supernova come sorgenti di neutrini è legato strettamente al problema dell'origine dei raggi cosmici galattici. Si espongono gli argomenti che suggeriscono la connessione tra resti di supernove e raggi cosmici: il primo suggerimento è che in qualche modo i raggi cosmici fossero prodotti nelle supernove [18], prende formulazione compiuta grazie all'osservazione quantitativa di Ginzburg e Syrovatskii [19] che la perdita di energia dovuta alla fuoriuscita di raggi cosmici dalla Via Lattea è un ordine di grandezza più piccola dell'energia cinetica del gas espulso dalle supernove galattiche. Basta che un $\sim 10\%$ dell'energia del gas sia trasferito ad una ristretta popolazione di particelle sopra termiche (cioè, raggi cosmici) perché i processi di produzione e di perdite di raggi cosmici, veloci su scale di tempi galattici, risultino in equilibrio tra loro. Il meccanismo potenzialmente in grado di accelerare dei raggi cosmici con la necessaria efficienza, noto con il nome di "diffusive shock acceleration", fu descritto da Fermi nel 1949 [20]. È opportuno sottolineare che il quadro teorico-interpretativo sulle sorgenti e sui processi di acce-

lerazione dei raggi cosmici è molto complesso. Alla luce delle precedenti considerazioni, si ritiene che i resti di supernova ospitino una alta densità di raggi cosmici, principalmente protoni, le cui interazioni danno luogo ad intense cascate adroniche. Questo avviene specialmente in presenza di materia che possa fungere da bersaglio, in analogia con quanto succede in un esperimento a "bersaglio fisso". I pioni neutri prodotti in queste cascate danno origine a raggi gamma; i pioni carichi, invece, creano leptoni carichi e neutrini. Questo scenario è noto come "ipotesi adronica" per l'emissione gamma. Le energie di questi gamma (neutrini) secondari sono in media 10 (20) volte minori di quelle dei protoni primari. Siccome la componente galattica dei raggi cosmici si estende almeno fino al "ginocchio" osservato nello spettro dei raggi cosmici, con un'energia di circa $3 \cdot 10^{15}$ eV ($= 3\,\mathrm{PeV}$), si crede che i resti di supernove emettano gamma e neutrini fino a qualche centinaia di TeV ($1\,\mathrm{TeV} = 10^{12}$ eV). Particelle con questa energia vengono indicate con l'acronimo VHE dall'inglese "Very High Energy". In tempi recenti, l'astronomia VHE gamma (spesso inclusa tra le astronomie particellari) ha rivelato

l'esistenza di resti di supernova galattici caratterizzati da emissioni intense e ben osservabili. Alcuni di questi, come $RXJ1713.7-3946$ e Vela Jr, sembrano essere dominati da un'emissione di tipo adronico. Non è facile, tuttavia, escludere in modo categorico che i gamma VHE osservati siano dovuti a processi riguardanti elettroni, scenario noto come "ipotesi leptonica", sebbene certi indizi a favore dell'esistenza di intensi campi magnetici in alcuni resti di supernova rendano tale ipotesi meno plausibile. L'osservazione di una emissione di neutrini da parte di questi oggetti discriminerebbe tra le due ipotesi, dacché i neutrini VHE sono attesi solo nell'ipotesi adronica; cosa che spiega l'interesse per le future osservazioni. Presumibilmente, le osservazioni su un ampio spettro di lunghezze d'onda di questi oggetti, congiuntamente agli sforzi teorici verso descrizioni sempre più complete e convincenti, porteranno ad abbandonare la presente diffidenza verso l'ipotesi adronica e consentiranno di quantificare l'importanza relativa delle due diverse ipotesi. Le osservazioni di Fermi/Glast potrebbero risultare determinanti e comprovare la correttezza dell'ipotesi adronica. È ragionevole supporre che le

sorgenti più intense che oggi conosciamo, che includono le due sorgenti sopra discusse, resteranno soggetti privilegiati di indagine. I gamma (e certo i neutrini) prodotti nei resti di supernova attraversano un mezzo molto tenue; per questa ragione si ritiene che non vengano significativamente assorbiti. Inoltre, l'intensità dei gamma e dei neutrini prodotti dipende linearmente dal flusso dei protoni primari; dunque sussiste una relazione lineare tra l'emissione di gamma e quella di neutrini. Questa relazione, se esplicitata, permette di predire in maniera semplice e diretta il flusso di neutrini. È noto che, ad alte energie le interazioni adroniche sono tali da dare un flusso di gamma e di neutrini proporzionale a quello dei protoni primari. Sotto tale ipotesi, la relazione tra flussi di neutrini e di gamma è particolarmente semplice: sono connessi tra loro da una costante moltiplicativa. Questa ipotesi però non è sufficientemente accurata per predire i segnali nei futuri telescopi neutrinici, che risultano particolarmente sensibili alla parte ad alta energia dello spettro neutrinico, dove ci aspettiamo deviazioni significative da leggi di potenza. Lo studio dettagliato del resto di supernova $RXJ1713.7-3946$ ha, ad

esempio, evidenziato la presenza di un taglio degli spettri gamma VHE ad energie dell'ordine di $\sim 10\,\mathrm{TeV}$. Tuttavia, rimane possibile predire in modo affidabile il flusso di neutrini; è stato, infatti, mostrato che i flussi di neutrino ed antineutrino muonico ($F_{\nu_\mu}(E_\nu)$ e $F_{\bar{\nu}_\mu}(E_\nu)$) possono essere calcolati in ottima approssimazione partendo da un generico flusso gamma $F_\gamma(E_\gamma)$ tenendo conto delle oscillazioni, descritte dalla teoria elementare di Pontecorvo che si applica quando le distanze tra la produzione e la rivelazione sono molto più grandi delle lunghezze di oscillazione. In queste condizioni, le oscillazioni dipendono solo dagli angoli di mescolamento, che sono noti in adeguata approssimazione. Per rivelare eventi di neutrini da SNR è necessario osservare non tanto il cielo quanto piuttosto i muoni che vengono da sottoterra così da sopprimere il fondo di eventi indotti da radiazione atmosferica; questo fu suggerito alla fine degli anni $'50$ nella tesi di laurea di Zheleznykh, come ricorda il suo relatore [21]. La Terra funge da convertitore di neutrini in radiazione osservabile e quello che conta non è tanto il volume del rivelatore ma la sua area efficace. Considerando le perdite di energia

dei muoni nella materia è facile convincersi che la zona dove avviene la conversione ha dimensioni di qualche km di acqua, dimensioni necessarie per un telescopio di neutrini VHE. Un telescopio di questo tipo, IceCUBE, sta operando proprio adesso al Polo Sud e avrà di certo un importante impatto nella discussione, sia che riveli qualche sorgente di neutrini, sia che non ne riveli nessuna. Inoltre, IceCUBE quantificherà in modo affidabile il fondo sperimentale per questo tipo di ricerca. Un telescopio simile ad IceCUBE, ma situato nell'emisfero Nord, permetterebbe di esplorare la maggior parte delle sorgenti galattiche ed in particolare i due oggetti sopra menzionati, $RXJ1713.7-3946$ e Vela Jr.

Numerosi dati raccolti dagli esperimenti sembrano indicare che il quadrato della massa dei neutrini muonici (ν_μ), e più recentemente anche dei neutrini elettronici (ν_e), sia negativa (massa immaginaria!); nel linguaggio della Realtività Speciale Estesa la relazione di dispersione per un tachione libero (particelle con velocità V maggiore della velocità della luce c) diventa $E^2 - p^2 = -m^2$ e quindi non si deve pensare a masse immagnarie in quanto il segno meno "$-$"

viene introdotto dalla teoria della Relatività stessa. Un esperimento [22] nel 2011, (diventato famoso per la gaffe dell'allora minstro dell'istruzione) ha tentato di misurare direttamente la velocità dei neutrini muonici ν_μ emessi dal CERN di Ginevra in direzione dei laboratori italiani del Gran Sasso, percorrendo una distanza di 730 Km. Si

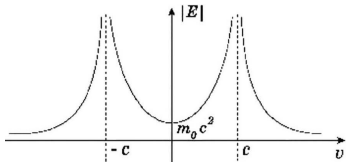


Figura 2.1: Andamento dell'energia E di un oggetto libero al variare della velocità v

può osservare (fig.2.1) che una particella non ordinaria, ha una velocità V abbastanza diversa da c e maggiore di essa quando la sua energia E risulta essere bassa; la difficoltà principale della rivelazione è stata dovuta al fatto che l'esperimento Opera era sensibile solo a neutrini di energia E elevata, circa 17 GeV, e dotati quindi di velocità V prossima a c, non distinguibile da quella di una particella dotata di velocità c, almeno per distanze terrestri. Per distanze

interstellari e intergalattiche, invece, è possibile misurare direttamente la differenza di velocità di neutrini rispetto a quella c della luce nel vuoto. Dati interessanti esistono infatti per i neutrini provenienti dalla Supernova $1987A$, esplosa a 170 mila anni-luce da noi; anche i dati raccolti da numerosi esperimenti negli ultimi anni (Aseev, Kraus, Lobashev, Weinheimer, Belesev, Hiddemann, Stoeffl, Sun, Holzschuh, Kawakami, Robertson) sullo studio del decadimento β del trizio, come evidenziato dalla più recente revisione di Particle Data Group danno come valore medio per la massa del neutrino al quadrato una quantità negativa, $m_\nu^2 = (-0.6 \pm 1.9)$ eV^2, [1], [2],[3].
Altri ambiti in cui si suppone possano essere presenti moti superluminali, non vengono qui trattati, per un approfondomento si rimanda agli scritti di E.Recami e al. [12].

$\overline{\nu}$ MASS SQUARED (electron based)

Given troubling systematics which result in improbably negative estimators of $m^{2(\mathrm{eff})}_{\nu_e} \equiv \sum_i |U_{ei}|^2 \; m^2_{\nu_i}$, in many experiments, we use only KRAUS 05 and LOBASHEV 99 for our average.

VALUE (eV^2)	CL%	DOCUMENT ID		TECN	COMMENT
− 0.6 ± 1.9 OUR AVERAGE					
− 0.67 ± 2.53		[1] ASEEV	11	SPEC	^{3}H β decay
− 0.6 ± 2.2 ± 2.1		[2] KRAUS	05	SPEC	^{3}H β decay
• • • We do not use the following data for averages, fits, limits, etc. • • •					
− 1.9 ± 3.4 ± 2.2		[3] LOBASHEV	99	SPEC	^{3}H β decay
− 3.7 ± 5.3 ± 2.1		[4] WEINHEIMER	99	SPEC	^{3}H β decay
− 22 ± 4.8		[5] BELESEV	95	SPEC	^{3}H β decay
129 ±6010		[6] HIDDEMANN	95	SPEC	^{3}H β decay
313 ±5994		[6] HIDDEMANN	95	SPEC	^{3}H β decay
−130 ± 20 ±15	95	[7] STOEFFL	95	SPEC	^{3}H β decay
− 31 ± 75 ±48		[8] SUN	93	SPEC	^{3}Hβ decay
− 39 ± 34 ±15		[9] WEINHEIMER	93	SPEC	^{3}H β decay
− 24 ± 48 ±61		[10] HOLZSCHUH	92B	SPEC	^{3}H β decay
− 65 ± 85 ±65		[11] KAWAKAMI	91	SPEC	^{3}H β decay
−147 ± 68 ±41		[12] ROBERTSON	91	SPEC	^{3}H β decay

Figura 2.2: Particle Data Group-2017

Capitolo 3

Teorie Classiche e Quantistiche

Fin da tempi lontani i fisici sono stati attratti dalla possibile esistenza di corpi che viaggiassero a velocità superiori a quelle della luce; uno dei primi scienziati a nominare particelle più veloci dei raggi del Sole è stato probabilmente Lucrezio, nel 50 a.C. circa, nel suo famoso De Rerum Natura "Quone vides citius debere et longius ire Multiplexque loci spatium transcurrere eodem Tempore quo Solis pervol-

gant lumina coelum?". In tempi precedenti alla relatività ci sono stati numerosi studi in merito, da J.J.Thomson ad A.Sommerfeld. Con l'avvento della teoria della Relatività Speciale di Einstein, a partire dal 1905, si diffuse però la convinzione che la velocità c della luce nel vuoto fosse necessariamente il limite superiore di ogni velocità. Ad esempio, R.C.Tolman nel 1917 credette di avere dimostrato in un suo paradosso (paradosso di causalità generato dall'invio di segnali superluminali nel passato) che l'esistenza di particelle con velocità maggiori di c avrebbe permesso l'invio di informazioni nel passato. Questa convinzione fermò per oltre cinquant'anni le ricerche sulle velocità Super-luminali ($v > c$), che ripresero a partire dagli anni Sessanta e Settanta ad opera soprattutto, negli Usa, di E.C.G.Sudarshan e collaboratori [7], e in Europa, di E.Recami e colleghi (R.Mignani e altri) [11]. Gli oggetti Super-luminali sono stati chiamati tachioni, T, da G.Feinberg, con riferimento alla parola greca $\tau\alpha\chi\nu\varsigma$, veloce; si sono chiamati bradioni B i corpi che hanno una velocità ordinaria ($v < c$) dalla parola greca $\beta\rho\alpha\delta\nu\varsigma$, lento e, per completezza, vengono chiamati luxoni i corpi che

viaggiano esattamente alla velocità della luce $v = c$, come i fotoni.

3.1 Teoria Classica

Si ripercorre la teoria proposta da E.Recami, R.Mignani, M.Fracastoro Decker e altri [9], [10], nei suoi aspetti principali.
La Relatività Speciale (SR) abbondantemente verificata, può essere costruita su due semplici e naturali postulati:

1 le leggi fisiche valgano non solo per un osservatore particolare, ma per tutta la classe degli osservatori *inerziali*;

2 lo spazio e il tempo sono omogenei e lo spazio sia inoltre isotropo.

Dai suddetti postulati (senza richiedere a priori che la velocità c sia invariante), fin dagli anni 1910/13 è stato teoricamente dedotto da Ignatowsi, Frank e Rothe, e Hahn che deve esistere una, e una sola, velocità invariante; l'esperienza sperimntale diretta dice che tale velocità è quella,

c, della luce nel vuoto: infatti, la luce possiede la caratteristica di presentare sempre la stessa velocità nel vuoto, qualunque sia la velocità della sua sorgente. Ne segue che essa ci mostrerà la medesima velocità sia che ci avviciniamo, sia che ci allontaniamo da essa. E' proprio questa caratteristica, di essere invariante, che rende la velocità della luce del tutto eccezionale; nessun bradione, e nessun tachione, potrà godere della medesima proprietà! Un'altra (nota) conseguenza dei due postulati è che l'energia totale di una comune particella cresce al crescere della sua velocità v, tendendo all'infinito quando v tende a c ($v \to c$). Quindi occorrerebbero forze infinite per far raggiungere a un bradione la velocità della luce. Questo fatto ha generato la diffusa opinione che la velocità c non possa essere né raggiunta né superata. Però, come esistono i fotoni, che nascono, vivono e muoiono sempre alla velocità della luce (senza mai avere avuto bisogno di accelerare per raggiungerla), così possono esistere particelle, i tachioni, che viaggiano sempre a velocità v maggiori di c (fig.3.1).
Come per i bradioni la velocità della luce c è il limite superiore delle velocità possibili v, così i tachioni, se esistono,

ammetteranno c quale limite inferiore delle loro velocità v; detto in altre parole: nella teoria della relatività (speciale) estesa ai tachioni, c continua ad essere una velocità limite che non può essere superata né da destra, né da sinistra.

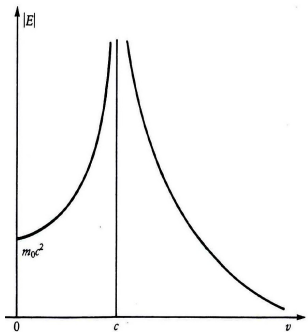


Figura 3.1: Andamento dell'energia totale E, relativistica, al variare della velocità v di un bradione ($|v| < c$) o di un tachione ($|v| > c$)

3.1.1 I postulati della RS rivisti

Una conseguenza importante della RS è la seguente: anche se la distanza spaziale $\Delta\mathbf{x}$ e la distanza tempora-

le Δt appaiono diverse a due osservatori diversi, la "distanza spazio-temporale" Δs tra i due eventi considerati è *assoluta*, ossia ha il medesimo valore per tutti gli osservatori inerziali. La RS insegna quindi a costruire, partendo da quantità *relative* all'osservatore, delle quantità *assolute*. La distanza quadridimenzionale Δs è definita da

$$\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta \mathbf{x}^2$$

che generalizza il teorema di Pitagora alle quattro dimensioni (con l'introduzione però di un segno meno, così che lo spazio-tempo risulta non più euclideo, bensì preudo-euclideo). Si verifica che:

$$\begin{cases} \Delta s^2 > 0 & \text{nel caso di un bradione } (\textit{timelike}) \\ \Delta s^2 = 0 & \text{nel caso di un luxone } (\textit{lightlike}) \\ \Delta s^2 < 0 & \text{nel caso di un tachione } (\textit{spacelike}) \end{cases} \tag{3.1}$$

Per i bradioni predomina il segno positivo di $c^2\,\Delta t^2$ in quanto percorrono "poco" spazio in "molto" tempo; al contrario i tachioni percorrono "molto" spazio in "poco" tempo e quindi predomina il segno negativo di $c^2\,\Delta t^2$.
Passando dallo spazio-tempo al suo *spazio duale*, cioè allo

spazio energia-impulso ci si aspetta che l'analoga quantità $E^2 - \mathbf{p}^2$ abbia lo stesso valore per tutti gli osservatori e che inoltre sia (in unità con $c = 1$

$$\begin{cases} E^2 - \mathbf{p}^2 = +m_0^2 > 0 & \text{nel caso di un bradione} \\ E^2 - \mathbf{p}^2 = m_0^2 & \text{nel caso di un luxone} \\ E^2 - \mathbf{p}^2 = -m_0^2 < 0 & \text{nel caso di un tachione} \end{cases} \tag{3.2}$$

Nello spazio energia-impulso $(E, \mathbf{p})$ le relazioni (3.2) rappresentano rispettivamente:

a) per i bradioni B un iperboloide a due falde simmetrico rispetto all'asse E

b) per i luxoni un doppio cono indefinito

c) per i tachioni T un iperboliode di rotazione ad un'unica falda

Si osserva che i bradioni liberi possono presentare impulso nullo (nel qual caso l'energia è minima e si ha $E_0 = m_0c^2$), ma mai energia nulla, mentre i tachioni liberi possono presentarsi con energia nulla e impulso minimo (nel qual caso l'impulso minimo è $|\mathbf{p}| = p_0 = m_0c$), ma mai impulso nullo. Ricordando che $\mathbf{v} = \mathbf{P}/E$ è immediato verificare che i tachioni a velocità infinita (*tachioni trascendenti*), tra-

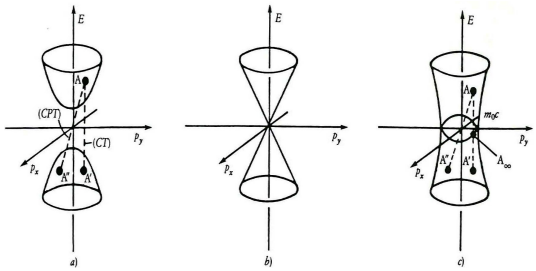


Figura 3.2: Modello in 3 dimensione delle superfici $E^2 - p^2 = \pm m_0^2$: a) per i bradioni B, con $p^2 > 0$; b) per i fotoni con $p^2 = 0$; c) per i tachioni T con $p^2 < 0$ (dove il quadrato di quadrivettore, p^2, è definito come $p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2$)

sportano energia nulla; nemmeno con i tachioni, quindi, sarebbe possibile trasmettere energia con velocità infinita. Infine, dalla terza equazione del sistema (3.2) si ricava che per i tachioni T l'equazione dell'energia diventa:

$$E = \frac{m_0\, c^2}{\sqrt{(v/c)^2 \, - \, 1}} \tag{3.3}$$

Questa espressione descrive l'andamento che si vede nella fig.3.1 nel caso $|v| > c$; ne segue che i tachioni hanno la proprietà di aumentare di velocità al diminuire della pro-

pria energia totale; in particolare al tendere della velocità all'infinito l'energia totale tachionica tende a zero. Di contro, per far diminuire la velocità di un tachione verso il limite inferiore c, occorrono energie crescenti all'infinito.

3.1.2 Principio di switching

Si ricorda che si stanno descrivendo oggetti sub- e superluminali visti da un osservatore ordinario. Riguardando la fig.3.2 si osserva che nel caso bradionico si ha una superficie a due falde e nel caso tachionico la superficie è ad una falda sola; per i tachioni si può passare con *continuità* da punti della superficie superiore ($E > 0$) a punti della superficie inferiore ($E < 0$); questo corrisponde ad una ordinaria trasformazione di Lorentz, ossia un tachione che appaia ad un dato osservatore O con energia positiva (punto A del semispazio superiore), potrà apparire ad un opportuno osservatore O' con energia negativa (puntoA' del semispazio inferiore), ma particelle con energia negativa non sono accettabili; ecco che entra in gioco il *principio dello switching* o *principio di reinterpretazione* introdotto da Stückelberg e Feynman e usato per la prima volta per i tachioni da Su-

darshan (e completato da Recami); questo principio permette di risolvere una serie di obiezioni.
E' possibile osservare che passando da un osservatore O ad un osservatore O' un tachione passa dal manifestare energia positiva a manifestare *energia negativa*; per quello stesso osservatore O' il tachione però apparirà *muoversi anche all' indietro nel tempo* rispetto alla drezione temporale univocamente fissata dal comportamento dei consueti macrooggetti. Le due situazioni paradossali (energia negativa e moto all'indietro nel tempo) quando sono contemporanee, come in questo caso, si compensano, rendendo possibile una spiegazione fisica ortodossa: si supponga infatti una particella P (fig.3.4) con energia negativa e carica elettrica $-e$, viaggiante all'indietro nel tempo, sia emessa da A al tempo t_1 e poi assorbita da B al tempo $t_2 < t_1$. Al tempo t_1 A perderà energia negativa e una carica $-e$ cioè *acquisterà* energia positiva e una carica $+e$; al tempo $t_2 < t_1$, inoltre B acquisterà energia negativa e una carica $-e$, cioè *perderà* energia positiva e una carica $+e$; tale fenomeno non potrà che apparire come lo scambio da A a B di una particella Q normale, ossia ad energia positi-

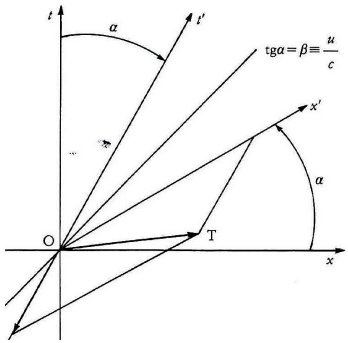


Figura 3.3: Linea d'universo OT di un tachione; rispetto agli osservatori di tipo $O' = (t', x')$ il tachione appare muoversi all'indietro nel tempo (la proiezone di OT sull'asse t' è diretta verso il semiasse negativo); gli osservatori O' sono però gli stessi per i quali il tachione manifesterà energia negativa. Le coppie di assi (t, x) e (t', x') rappresentano due diversi osservatori aventi velocità relativa $u = \tan\alpha$

va e viaggiante in avanti nel tempo, però con tutte le sue cariche additive cambiate di segno. Questa particella Q non è altro che l'antiparticella $\bar{P}$ della particella iniziale P $(Q \equiv \bar{P})$.

In questa reinterpretazione consiste lo *switching principale*

che può essere adottato come terzo postulato fondamentale della SR; "esso funziona egregiamente pure nel caso dei bradioni, prevedendo l'esistenza di Particelle e Antiparticelle sulla base della sola Relatività Ristretta"(E.Recami)

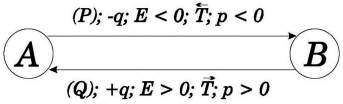


Figura 3.4: Fenomeno di scambio tra A e B di una particella P ad energia negativa (con carica $-e$) viaggiante all'indietro nel tempo $t_2 < t_1$. Tale processo appare all'osservatore come lo scambio tra B ed A di una particella Q ad energia positiva (con carica $+e$) viaggiante in avanti nel tempo, la particella Q apparirà proprio come l'antiparticella $\bar{P}$ della particella iniziale P ($Q \equiv \bar{P}$)

3.1.3 Antimateria

Come detto, il principio di reinterpretazione esposto per i tachioni (antitachioni), vale anche nel caso dei bradioni. Precisamente una particella Q, che si trovi nello stato cinematico corrispondente a un punto della falda inferiore dell'iperboloide della fig.(3.2a), apparirà necessariamente

come l'antiparticella $\bar{P}$ di P. Da sottolineare che dal 1905, sulla base della relazione $E^2 - \mathbf{p}^2 = + m_0^2$ e precisamente sulla base del doppio segno

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = \pm m_0^2$$

poteva prevedersi, per ogni particella, l'esistenza di una antiparticella nell'ambito della sola *relatività speciale*: purché si fosse fatto uso del principio di switching; si sottolinea inoltre come la differenza netta tra materia e antimateria sia solo per i bradioni, dovuta al fatto che l'iperboloide della fig.3.2a) consiste di due falde separate; per i tachioni il carattere materia/antimateria è *relativo* all'osservatore [7], [12], [8].

3.1.4 Descrizione della natura, leggi fisiche e tachioni

Guardando ancora la fig.(3.2) e la fig.(3.3) consideriamo un tachione T in moto lungo l'asse x con velocità $V > c$ rispetto ad un osservatore s_0 e ad un opportuna serie di osservatori s in moto collineare lungo l'asse x con velocità variabile u. Al variare dell'osservatore, T potrà essere visto

muoversi con velocità via via crescente finché l'osservatore *critico* $s_c \equiv (t_c, x_c)$ per cui $u = \frac{c^2}{V}$ vedrà T come un tachione trascendente (fig.(3.3)). Notiamo esplicitamente che, se invece di osservare da fermi una particella (in moto ad esempio lungo l'asse x), ci si mette ad *inseguirla*, ci si aspetta di osservarla a velocità *minore*; questo è confermato nel caso si parli di velocità bradioniche; nel caso di un fotone la sua velocità risulterà essere sempre la stessa, indipendentemente dalla velocità dell'inseguitore; nel caso di un tachione, come già sottolineato, l'inseguitore vedrà la particella andare ad una velocità *superiore*!
In fig.3.3 sembra che un osservatore (t', x'), il quale venga *dopo* l'osservatore critico s_c nella successione considerata, dovrebbe vedere T viaggiare all'indietro nel tempo. Studiando, però, le conseguenze del mutamento di osservatore, secondo la medesima successione, *anche* nello spazio duale $(E,\ \mathbf{p})$, si riconosce in fig.(3.2c) che l'osservatore critico s_c verdà il tachione T nello stato cinematico corrispondente al punto A_∞; mentre ogni osservatore $trans-critico\ s'$ vedrà T in uno stato di tipo A', cioè corrispondente ad energia negativa: si avrà che gli stessi osservatori che vedranno T

con $E < 0$ lo vedranno anche in moto all'indietro nel tempo e viceversa. Avvalendosi del principio di switching e della conseguente reinterpretazione si può concludere che ogni osservatore $trans-critico$ del tipo (t', x') vedrà il tachione T come un antitachione $\bar{T}$ regolarmente dotato di energia positiva e in moto avanti nel tempo, ma propagantesi nella direzione spaziale opposta (ossia nella direzione $-x$). Volendo precisare ancora meglio: se si considera una reazione in cui intervengono particelle superluminali, *un tachione nello stato iniziale può apparire come un antitachione nello stato finale* e viceversa, al variare dell'osservatore; ad esempio le due scritture:

$$\begin{aligned} a + b &\rightarrow c + d \\ a + \bar{c} &\rightarrow \bar{b} + d \end{aligned} \tag{3.4}$$

potranno essere le diverse descrizioni del *medesimo* processo fisico secondo due diversi osservatori.
E' interessante rendersi conto che la RS non richiede che due osservatori inerziali diano la stessa descrizione di un fenomeno, ma solo che trovino che il fenomeno sia regolato dalle medesime *leggi*. Consideraiamo un esempio esplicito (fig. 3.5): un tachione a di carica elettrica positiva, rispet-

to al primo osservatore s_1 emette un fotone c e, perdendo energia, si trasforma nel tachione b più veloce (si ricordi che un tachione che perde energia aumenta la velocità). Consideriamo ora un osservatore s_2 rispetto al quale il tachione uscente b appare come un antitachione entrante $\bar{b}$ (con carica elettrica negativa). Questo osservatore descriverà il processo come un'annichilazione tachione-antitachione con produzione di un fotone c. Il riferimento s_1 osserverà una carica elettrica totale $+1$, mentre il riferimento s_2 osserverà una carica totale nulla; entrambi si troveranno concordi nel constatare che è stata verificata la legge di conservazione della carica nel processo osservato.
Per ulteriori approfondimenti si rimanda alla bibliografia [8], [12].

3.2 Teoria Quantistiche

Partendo dalla teoria standard di Dirac si ripercorre, nei suoi punti principali, lo studio fatto da G.Salesi [24], che ha esteso la teoria di Dirac al caso di particelle con spin qualunque, proponendosi di ottenere un'equazione d'onda

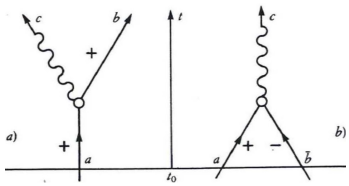


Figura 3.5: Due diverse descrizioni dello stesso fenomeno da parte di due osservatori s_1 e s_2; per s_1 si ha l'emissione di un fotone c da parte di un tachione positivo a, che si tramuta nel tachione veloce b. Per s_2 il tachione a e l'antitachione b si annichilano a vicenda dando luogo al fotone c. Le due descrizioni sono entrambe coerenti con la teoria della relatività

della meccanica quantistica che descriva lo stato di particelle a spin qualunque, particelle chiamate Pseudotachioni (PT), che si comportano come tachioni nello spazio del momento ($p^2 = -m^2$), e come particelle subluminali ($v < c$) nello spazio ordinario.
In ogni teoria quantistica per le particelle con spin 1/2, l'operatore del momento, $-i\nabla$, che è conservato, e l'operatore di velocità $\boldsymbol{\alpha}$, che non è conservato, sono operatori indipendenti, che si riferiscono a quantità tra loro indipen-

denti ($\widehat{\mathbf{p}} \neq m\widehat{\mathbf{v}}$). Di conseguenza, a differenza delle normali particelle di Dirac, per gli PT la velocità media v non risulta essere uguale alla velocità classica $\mathbf{v}_{cl} = \mathbf{p}/\varepsilon$, ma in realtà alla velocità "duale" di $\mathbf{v}_{cl} = \varepsilon\mathbf{p}/\mathbf{p}^2$. Poiché dati sperimentali sembrano implicare una massa al quadrato negativa per i neutrini, queste particelle potrebbero essere proprio PT, che viaggiano, a causa della loro massa molto piccola, a velocità subluminali molto vicine a c. Questa teoria risulta essere invariante rispetto alle trasformazioni C, P, T; si dimostra anche la covarianza sotto le trasformazioni di Lorentz; si derivano inoltre i vincoli cinematici che collegano i 4−impulsi, le 4−velocità e la 4−polarizzazione di PT liberi.

3.2.1 Particelle di spin $\frac{1}{2}$ con $m^2 < 0$

Si considera una Lagrangiana di tipo Dirac, al primo ordine nello scalare bilineare $\bar{\psi}\psi$, hermitiana e relativisticamente invariante, che è in grado di descrivere (come verrà mostrato) particelle con spin$\frac{1}{2}$ dotate di una massa al quadrato negativa:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\,\bar{\psi}\psi \tag{3.5}$$

(si assume qui di seguito $\hbar = c = 1$; $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$; $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, con $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}$ e $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$), mentre la lagrangiana ordinaria di Dirac (che descrive le particelle dette Bradioni con un 4−impulso positivo) sarà scritta:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\,\bar{\psi}\psi \tag{3.6}$$

Si chiamano Pseudotachioni (PT) le particelle con 4−impulsi negativi descritti nell'equazione (3.5); questa lagrangiana è stata introdotta per la prima volta da Tanaka [25] ed è stata poi riproposta per descrivere "neutrini tachionici" nel 1985 da Chodos et al [26]. Non è richiesta alcuna estensione della relatività speciale, e sono possibili solo le trasformazioni standard di Lorentz con estensioni subluminali dei sistemi di riferimento. Di conseguenza, si hanno due teorie distinte, una generata dalla lagrangiana (3.5) e una dalla lagrangiana (3.6), che si riferiscono a due tipi di particelle realmente differenti. Queste teorie comportano, rispetto al segno di riferimento, il segno opposto per p^2, anche se, entrambi i tipi di particelle sembrano viaggiare a velocità subluminali. Tra le differenze più evidenti vi è, ad esempio, la non esistenza, per PT, del sistema di riferimento del centro di massa, dove $\mathbf{p} = 0$, perché abbiamo sempre

$|\mathbf{p}| \geq m$ in ogni sistema di riferimento. Infatti, solo attraverso una trasformazione di Lorentz "superluminale" con un boost maggiore di c, la quantità di moto della particella potrebbe annullarsi rispetto ad un dato sistema di riferimento. Tuttavia, si mostra in seguito che esiste un sistema di riferimento "in quiete" in cui, non si annulla il momento bensì la velocità. Prendendo la variazione rispetto alla "coordinata lagrangiana" $\bar{\psi}$ otteniamo l'equazione di tipo Dirac per PT:

$$(i\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0 \tag{3.7}$$

in cui il termine cinetico differisce da quello dell'equazione standard di Dirac $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$.

3.2.2 Onde piane

Si considera l'equazione d'onda nella forma tipica incontrata nella teoria delle particelle standard con spin:

$$\psi = N_p\,\omega_{\pm p}\,\mathrm{e}^{\mp ipx} \tag{3.8}$$

dove N_p è un opportuno fattore di normalizzazione; la quantità $\omega_{\pm p}$ denota il bispinore di Dirac a quattro compo-

nenti, ovvero la $p-$funzione $px \equiv \varepsilon t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}$; il segno superiore si riferisce agli "stati energetici positivi" per i quali $p^0 = +\varepsilon$ (con $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ per i bradioni e $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{p}^2 - m^2}$ per PT) e l'impulso è $\mathbf{p}$, mentre il segno inferiore si riferisce agli "stati ad energia negativa" per cui $p^0 = -\varepsilon$ e l'impulso è $-\mathbf{p}$. Come è noto, le due componenti superiori e le due inferiori nelle ampiezze $\omega_{\pm p}$ sono collegate tramite relazioni la cui forma particolare dipende dalla rappresentazione scelta per le matrici γ^μ. Si lavora nella cosiddetta rappresentazione standard per le espressioni delle soluzioni delle equazioni tipo Dirac per PT. Nella rappresentazione standard le matrici γ^μ, γ^5 sono le seguenti:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \gamma \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \quad \gamma^5 \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

dove $\mathbb{I}$ è la matrice identità 2×2, $\mathbb{O}$ è la matrice nulla 2×2; le componenti di $\boldsymbol{\sigma} \equiv (\sigma_1; \sigma_2; \sigma_3)$ sono le matrici di Pauli ordinarie. In questa rappresentazione l'ampiezza ω dell'onda può essere scritta:

$$\omega \equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

dove χ e φ sono spinori a due componenti di Dirac.
Il fattore di normalizzazione della (3.8) risulta essere:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2kV}}\,\omega_{\pm p}\,\mathrm{e}^{\mp ipx} \tag{3.11}$$

dove $k \equiv |\mathbf{p}|$. Per una tale onda piana, l'equazione di Klein-Gordon ($(\Box - m^2)\phi = 0$) porta alla relazione che definisce la cinematica pseudo-tachionica

$$\varepsilon^2 = \mathbf{p}^2 - m^2 \tag{3.12}$$

mentre l'equazione di PT Dirac (3.7) porta alle seguenti equazioni di matrice per le ampiezze bispinoriali (con $u_p \equiv \omega_p$; $v_p \equiv \omega_{-p}$; $\not{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu$):

$$(\not{p} - m\gamma^5)u_p = 0 \tag{3.13}$$

$$(\not{p} + m\gamma^5)v_p = 0 \tag{3.14}$$

La rappresentazione standard della (3.13) risulta:

$$\begin{cases} \varepsilon\,\varphi - (\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi = m\chi \\ -\varepsilon\,\chi + (\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\varphi = m\varphi \end{cases} \tag{3.15}$$

mentre la rappresentazione standard della (3.14) risulta:

$$\begin{cases} -\varepsilon\,\varphi \,+\, (\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi \,=\, m\chi \\ \varepsilon\,\chi \,-\, (\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\varphi \,=\, m\varphi \end{cases} \tag{3.16}$$

Dal sistema (3.15) si deducono esplicitamente le ampiezze degli oggetti ad energia positiva e dal sistema (3.16) quelle degli oggetti ad energia negativa:

$$u_p = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}-m}{\varepsilon}\varphi \end{pmatrix} \qquad v_p = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}-m}{\varepsilon}\chi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Una volta scelto arbitrariamente lo spinore $\varphi(\chi)$, l'altro, $\chi(\varphi)$, viene determinato in modo univoco. I due gradi di libertà inerenti alla scelta dello spinore devono essere correlati all'orientamento dello spin ossia ai due stati di elicità disponibili. Quindi, per ogni momento $\mathbf{p}$ avremo due autostati distinti $\psi_{p\lambda}$. D'ora in poi λ è definita come il doppio dell'elicità, $\lambda \equiv 2\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{s}}{|\mathbf{p}|}$ (ma λ stesso si chiamerà elicità). Si pone inoltre che $u_{p\lambda}$ e $v_{p\lambda}$ siano autostati dell'operatore $\hat{\lambda} \equiv \frac{\mathbf{p}\cdot\vec{\Sigma}}{|\mathbf{p}|}$, dove l'operatore di spin $\vec{\Sigma} \equiv \boldsymbol{\alpha}\gamma^5$ di Dirac 4×4 si scrive:

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

Si richiede inoltre la normalizzazione "per 1 particella nel volume V", $\psi^\dagger\psi = 1/V$, che implica la normalizzazione:

$$u^\dagger_{p\lambda} u_{p\lambda} = v^\dagger_{p\lambda} v_{p\lambda} = 2k \tag{3.19}$$

Dall'equazione (3.17), sfruttando anche l'uguaglianza $\varepsilon = \sqrt{(k+m\lambda)(k-m\lambda)}$ si ottiene che le autofunzioni di elicità risultano essere:

$$u_{p\lambda} = \sqrt{(k+m\lambda)} \begin{pmatrix} \vartheta_\lambda \\ \frac{\lambda_\varepsilon}{k+m\lambda}\vartheta_\lambda \end{pmatrix} \quad v_{p\lambda} = \sqrt{(k-m\lambda)} \begin{pmatrix} \frac{-\lambda_\varepsilon}{k-m\lambda}\vartheta_{-\lambda} \\ \vartheta_{-\lambda} \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

In queste espressioni gli spinori ϑ_λ e $\vartheta_{-\lambda}$ sono spinori colonna a due componenti, autofunzioni di $\hat{\lambda}$ (l'accento circonflesso indica l'operatore e λ i suoi autovalori):

$$\hat{\lambda}\vartheta_\lambda = \lambda\vartheta_\lambda, \qquad \hat{\lambda}\vartheta_{-\lambda} = -\lambda\vartheta_{-\lambda} \tag{3.21}$$

e normalizzato all'unità: $\vartheta^\dagger_{\lambda'}\vartheta_\lambda = \delta_{\lambda'\lambda}$.
Si considerano ora, per un confronto diretto, le soluzioni dell'onda piana dell'equazione bradionica standard di Dirac $(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$. Si sceglie come fattore di normalizzazione $\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}}$ che, per i bradionni, costituisce uno scalare di Lorentz:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon V}}\omega_{\pm p}\mathrm{e}^{\mp ipx} \tag{3.22}$$

L'equazione di Dirac, per questa onda piana, porta alle seguenti equazioni matriciali per le ampiezze bispinoriali:

$$(\not{p} - m)u_p = 0 \tag{3.23}$$

$$(\not{p} + m)v_p = 0 \tag{3.24}$$

Per la rappresentazione standard dalla prima delle equazioni precedenti si ottiene:

$$\begin{cases} \varepsilon\,\varphi - (\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi = m\varphi \\ \varepsilon\,\chi - (\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\varphi = -m\chi \end{cases} \tag{3.25}$$

e da quest'ultima:

$$\begin{cases} -\varepsilon\,\varphi + (\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi = m\varphi \\ -\varepsilon\,\chi + (\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\varphi = -m\chi \end{cases} \tag{3.26}$$

Dal sistema (3.25) si deducono esplicitamente le espressioni di energia positiva e dal sistema (3.26) le espressioni di energia negativa:

$$u_p = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon+m}\varphi \end{pmatrix} \qquad v_p = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}}{\varepsilon+m}\chi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Per le autofunzioni di elicità, come prima, si richiede la normalizzazione $\psi^\dagger\psi = 1/V$ con il solito vincolo $u^\dagger_{p\lambda}u_{p\lambda} = v^\dagger_{p\lambda}v_{p\lambda} = 2\varepsilon$; di conseguenza si avrà (ora $k = \sqrt{(\varepsilon+m)(\varepsilon-m)}$):

$$u_{p\lambda} = \sqrt{(\varepsilon+m)}\begin{pmatrix}\vartheta_\lambda \\ \frac{\lambda k}{\varepsilon+m}\vartheta_\lambda\end{pmatrix} \quad v_{p\lambda} = \sqrt{(\varepsilon+m)}\begin{pmatrix}\frac{-\lambda k}{\varepsilon+m}\vartheta_{-\lambda} \\ \vartheta_{-\lambda}\end{pmatrix} \tag{3.28}$$

Si torni, ora, alla meccanica delle particelle PT e alle soluzioni delle equazioni di tipo Dirac per particelle PT. Il caso limite delle particelle senza massa ($p^2 = 0$) -spesso chiamate luxoni- viene immediatamente ottenuto, dalle soluzioni (3.20), assumendo $m = 0$ e $k = \varepsilon$. In questo modo si ottengono le due ampiezze "chirali" (autostati di γ^5) ω_{R} e ω_{L}:

$$u_{p,+1} = v_{p,-1} \equiv \omega_{\mathrm{R}} = \sqrt{k}\begin{pmatrix}\vartheta_1 \\ \vartheta_1\end{pmatrix} \tag{3.29}$$

$$u_{p,-1} = -v_{p,+1} \equiv \omega_{\mathrm{L}} = \sqrt{k}\begin{pmatrix}\vartheta_{-1} \\ \vartheta_{-1}\end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Come ci si aspettava, tali soluzioni sono identiche a quelle previste dall'equazione standard di Dirac.

È interessante, a questo punto, considerare i cosiddetti

tachioni trascendenti che, per definizione, sono particelle dotate di massa diversa da zero, ma con energia totale nulla:

$$\varepsilon = 0 \qquad k = m \tag{3.31}$$

I tachioni trascendenti classici viaggiano a velocità infinita $V \equiv k/\varepsilon$, rappresentando quindi il caso "duale" del caso con velocità nulla, $v = c/V \to 0$, $\mathbf{p} = 0$, $\varepsilon = m$. Per questo motivo non sorprende che, nello stesso modo in cui avviene per i bradioni nel sistema di riferimento del centro di massa, per PT trascendenti anche le equazioni per gli spin φ e χ si disaccoppino. Di fatto, rendendo $\varepsilon = 0$ nel sistema (3.25), si avrà per le componenti bispinoriali per u_p:

$$\begin{cases} (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} + m)\chi = 0 \\ (\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} - m)\varphi = 0 \end{cases} \tag{3.32}$$

Per gli stati polarizzati trascendenti (autostati di $\hat{\lambda}$), poiché $k = m$ e $(\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma})u_\lambda = m\lambda u_\lambda$, si avrà:

$$\begin{cases} (\lambda + 1)\chi = 0 \\ (\lambda - 1)\varphi = 0 \end{cases} \tag{3.33}$$

e poi:

$$u_{\lambda=+1} = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \sqrt{2k} \begin{pmatrix} \vartheta_{+1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

$$u_{\lambda=-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix} = \sqrt{2k} \begin{pmatrix} 0 \\ \vartheta_{-1} \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

3.2.3 Dualità momento-velocità

Proseguendo nella teoria proposta da G.Salesi si dimostra che momento e velocità sono variabili indipendenti, come previsto per le particelle con spin che, avendo un momento angolare intrinseco, sono dotate di gradi di libertà "interni". Come già detto, in ogni teoria quantistica per le particelle con spin$-1/2$, l'operatore del momento, $-i\nabla$, che è conservato, e l'operatore di velocità $\boldsymbol{\alpha}$, che non è conservato (e le cui componenti α_i non commutano), sono operatori indipendenti, che si riferiscono a quantità tra loro indipendenti ($\widehat{\mathbf{p}} \neq m\widehat{\mathbf{v}}$). Per le particelle di Dirac l'indipendenza tra gli operatori momento e velocità è collegato all'origine - per i pacchetti composti da energie opposte, che descrivono in generale sistemi spazialmente localizzati - al cosiddetto *zitterbewegung*. Per i PT, si ha, invece, la

fondamentale conseguenza della dualità momento-velocità. La dualità tra la velocità di dispersione $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ e la velocità di spostamento del momento e dell'energia è stata trovata, anche se in condizioni molto particolari, da Maccarrone e Recami per tachioni classici quantistici. Considerazioni di questo tipo dimostrano come una dualità momento-velocità sia acquisita in letteratura per particelle scalari. Al contrario questa proprietà risulta essere una novità per le particelle a spin1/2. Inoltre, per i tachioni scalari quantistici dobbiamo considerare la velocità di trasmissione dei segnali per pacchetti d'onda molto particolari o in presenza di speciali condizioni al contorno. Per i PT, invece, la dualità momento-velocità è intrinseca alla teoria, in quanto è dovuta alla presenza dello spin e alla conseguente indipendenza reciproca tra gli operatori di momento e velocità. Ad ogni modo, sia per particelle spinless o con spin, si può affermare che la Natura è sempre in grado di associare comportamenti subluminali a masse negative al quadrato, in modo tale da ostacolare l'osservazione di cariche e campi che viaggiano a velocità superiori a c.

La massa al quadrato negativa suggerisce che la teoria at-

tuale potrebbe effettivamente descrivere neutrini massivi. Da molti recenti esperimenti, i neutrini sembrano dotati di una piccola massa diversa da zero. Inoltre, è noto che in molti esperimenti di laboratorio che misurano i limiti cinematici diretti, il 4−impulso quadrato dei neutrini misurato sembra essere negativo. I dati sperimentali che coinvolgono $p^2 < 0$ per elettrone (c) e muone (a e b) neutrini sono stati dedotti da: a) osservazione del decadimento del pione, b) misurazioni di precisione della massa del pione π^-, c) analisi cinematica del decadimento β del trizio. I risultati sperimentali in merito sono già stati menzionati nel cap.2. L'idea che i neutrini potrebbero essere tachioni (nel senso "classico" della parola) risale alla fine degli anni Sessanta e talvolta è stata riproposta. Pertanto, questa ipotesi non è una novità assoluta. Tuttavia, ogni volta che gli autori citati parlavano di "neutrini tachionici", affermavano sempre o supponevano che la condizione $p^2 < 0$ implicasse movimenti più veloci della luce. Per tali particelle, così come accade per i tachioni classici, risulterebbe necessaria l'estensione della relatività standard alle trasformazioni di Lorentz superluminali (cioè con $V > c$), con ricorso alla

già citata Relatività Estesa. Tutto ciò non è necessario per i PT, che, in questa teoria, sono sempre corpi subluminali. Quindi, ci si può limitare a impiegare solo le trasformazioni ordinarie consentite nella relatività speciale, tenendo presente solo questo: la legge di dispersione classica $v = p/\varepsilon$ non regge più. Per i calcoli precedenti, la velocità prevista per i neutrini sarà data da:

$$v = \frac{\varepsilon}{k} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + m^2}} \tag{3.36}$$

Questa espressione differisce da quella per i bradioni

$$u = \frac{k}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - m^2}}{\varepsilon} \tag{3.37}$$

che è più piccola di c, e da quella che viene considerata per i tachioni classici:

$$\omega = \frac{k}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + m^2}}{\varepsilon} \tag{3.38}$$

che è invece maggiore della velocità della luce. Le curve corrispondenti a queste tre leggi di dispersione sono riportate in figura (3.6) per un confronto diretto. Si sottolinea che, per particelle molto leggere come i neutrini, poiché

$m^2 \ll \varepsilon^2$, ognuna delle tre espressioni sopra descritte comporta velocità sperimentalmente indistinguibili da c. Si noti che per $m \to 0$ i grafici relativi alla velocità di bradioni e PT si sovrappongono e che per $v \to 0$ la legge di dispersione PT mostra una tendenza di tipo newtoniano: $v \sim \varepsilon/m$

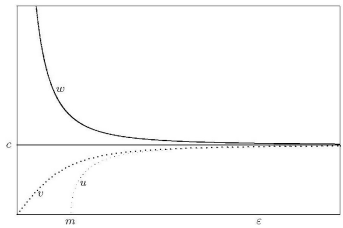


Figura 3.6: Grafico qualitativo della legge di dispersione della velocità in funzione dell'energia ε per bradioni (u), PT (v) e tachioni classici (ω).

Esperimenti di misura, estremamente precisi, esaminando la regione di *energia piccola* della legge sulla dispersione, potrebbero chiaramente mostrare se i neutrini sono o meno PT.

3.3 Velocità Duale

Si vuole estendere il risultato ordinario, che vale nella relatività standard, trovando che anche nel caso di trasformazioni di Lorentz superluminali (il passaggio tra un osservatore inerziale ad un altro osservatore inerziale con velocità $V > c$ rispetto al primo), la metrica dello spazio delle 3-velocità risulta essere quella posseduta da uno spazio a curvatura costante negativa (spazio di Lobacevskij). Tale risultato si ottiene tramite un'opportuna applicazione (addizionale rispetto a quella ordinaria) del gruppo di Lorentz proprio ortocrono, cioè della relatività standard, ricorrendo al concetto di velocità di boost duale. [12]
Partendo da una rotazione nello spazio di Minkowski con un angolo ψ si ottengono le note trasformazioni:

$$\begin{cases} x' = x \cosh\psi - t \sinh\psi \\ t' = t \cosh\psi - x \sinh\psi \end{cases} \tag{3.39}$$

quando si fa questa rotazione nello spazio tempo si ha un meno quindi una rotazione minkowskiana (con una metrica $[-1, +1, +1, +1]$).
si consideri

$$\begin{cases} \cosh\psi = \gamma \\ \sinh\psi = \gamma\, V \end{cases} \qquad \text{con } \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-V^2}} \Longrightarrow V = \tanh\psi$$

$V < 1$

$$\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = \frac{1}{1-V^2} - \frac{V^2}{1-V^2} = 1$$

le trasformazioni diventano

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - V\,t) \\ t' = \gamma(t - V\,x) \end{cases} \tag{3.40}$$

si consideri ora

$$\begin{cases} \cosh\psi = \widehat{\gamma}\, V \\ \sinh\psi = \widehat{\gamma} \end{cases} \qquad \text{con } \widehat{\gamma} \equiv \frac{1}{\sqrt{V^2-1}} \qquad \Longrightarrow V = \text{cotanh}\psi$$

$V > 1$

$$\cosh^2\psi - \sinh^2\psi = \frac{V^2}{V^2-1} - \frac{1}{V^2-1} = 1$$

sostituendo le trasformazioni diventano

$$\begin{cases} x' = \widehat{\gamma}(V\,x - t) \\ t' = \widehat{\gamma}(V\,t - x) \end{cases} \tag{3.41}$$

Si definisce come ***velocità duale***:

$$\boxed{\widetilde{\mathbf{v}} \equiv \frac{\mathbf{v}}{v^2}} \tag{3.42}$$

o in modulo

$$\boxed{\widetilde{v} \equiv \frac{1}{v} \implies \widetilde{v} \cdot v \,=\, 1} \tag{3.43}$$

Algebricamente si dimostra che partendo da un evento nel "cono luce", dopo la trasformazione duale, si è ancora all'interno dello stesso "cono luce".
Data la trasformazione di Lorentz estesa sostituendo V con $1/v$

$$\begin{cases} x' = \widehat{\gamma}(Vx - t) = -\widehat{\gamma}\big(t - \dfrac{x}{v}\big) = -\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{v^2} - 1}}\big(t - \dfrac{x}{v}\big) = -\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}\dfrac{tv - x}{v} \\ t' = \widehat{\gamma}(Vt - x) = -\widehat{\gamma}\big(x - \dfrac{t}{v}\big) = -\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{v^2} - 1}}\big(x - \dfrac{t}{v}\big) = -\dfrac{v}{\sqrt{1-v^2}}\dfrac{xv - t}{v} \end{cases}$$

$$\text{ossia} \begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma(x - vt) \\ \\ t' = \dfrac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma(t - vx) \end{cases}$$

Si presentano due casi possibili, uno duale dell'altro e accettabili entrambi

relatività standard: $V = \tanh\psi < 1$

relatività estesa: $V = \coth\psi > 1$

ci sono quindi due interpretazioni duali della rapidità ψ

relatività standard $\psi = \operatorname{arc\,tanh} V$

relatività estesa $\psi = \operatorname{arc\,coth} V$

Applicando queste trasformazioni nel caso ordinario e nel caso relativistico otteniamo le trasformazioni duali nella metrica della velocità.

3.3.1 Relatività Standard

Partendo dalle trasformazioni di Lorentz ordinarie si deduce l'espressione delle componenti della velocità ordinaria $\mathbf{v}'_B$ ossia con boost $V < c$ o analogamente $V < 1$ avendo posto $c = 1$, si pone inoltre $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - V^2}}$; il sistema delle coordinate spazio-temoprali diventa

$$\begin{cases} \mathrm{d}x' = \gamma\,(\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t) \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}t' = \gamma\,(\mathrm{d}t - V\mathrm{d}x) \end{cases} \tag{3.44}$$

Svolgendo i passaggi si ottiene per le singole componenti della velocità $\mathbf{v}'_B$

$$
\begin{aligned}
v'_x &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\gamma(\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t)}{\gamma(\mathrm{d}t - V\mathrm{d}x)} = \frac{\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t(1 - Vv_x)} = \frac{v_x - V}{1 - Vv_x} \\
v'_y &= \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\gamma(\mathrm{d}t - V\mathrm{d}x)} = \frac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x)} \\
v'_z &= \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z}{\gamma(\mathrm{d}t - V\mathrm{d}x)} = \frac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x)}
\end{aligned}
$$

ossia

$$
\begin{cases}
v'_x = \dfrac{v_x - V}{1 - Vv_x} \\
v'_y = \dfrac{v_y}{\gamma(1 - Vv_x)} \\
v'_z = \dfrac{v_z}{\gamma(1 - Vv_x)}
\end{cases}
\tag{3.45}
$$

Si esprime ora $\mathbf{v}'_B$ nelle sue componenti $\mathbf{v}'_{B\parallel}$ e $\mathbf{v}'_{B\perp}$ rispetto alla direzione del boost $\mathbf{V}$ del sistema come da immagine

$$
\begin{cases}
\mathbf{v}'_{B\parallel} = v'_x\mathbf{e}_x = \dfrac{\mathbf{v}_\parallel - \mathbf{V}}{1 - \mathbf{v}_\parallel \cdot \mathbf{V}} \\
\mathbf{v}'_{B\perp} = v'_y\mathbf{e}_y + v'_z\mathbf{e}_z = \dfrac{v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z}{\gamma_V(1 - \mathbf{v}_\parallel \cdot \mathbf{V})}
\end{cases}
\tag{3.46}
$$

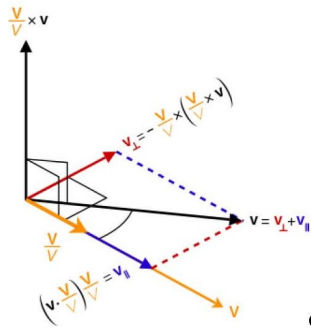


Figura 3.7: Scomposizione del vettore $\mathbf{v}$ nello spazio

Si calcola $\mathbf{v}'_B$

$$\mathbf{v}'_B = \mathbf{v}'_\parallel + \mathbf{v}'_\perp = \frac{\mathbf{v}_\parallel - \mathbf{V} + \frac{\mathbf{v}_\perp}{\gamma}}{1 - \mathbf{v}_\parallel \cdot \mathbf{V}} =$$

$$= \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_\perp - \mathbf{V} + \frac{\mathbf{v}_\perp}{\gamma}}{1 - \mathbf{v}_\parallel \cdot \mathbf{V}} = \frac{\left[\mathbf{v} - \mathbf{V} + \mathbf{v}_\perp(\frac{1}{\gamma} - 1)\right]}{1 - \mathbf{v}_\parallel l \cdot \mathbf{V}} =$$

$$= \frac{\mathbf{v} - \mathbf{V} - \frac{\mathbf{V}}{V} \times \left(\frac{\mathbf{V}}{V} \times \mathbf{v}\right)\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)}{1 - \mathbf{v}_\parallel \cdot \mathbf{V}} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{V} - \frac{1}{V^2}(\frac{1-\gamma}{\gamma})\mathbf{V} \times \left(\mathbf{V} \times \mathbf{v}\right)}{1 - \mathbf{v}_\parallel \cdot \mathbf{V}}$$

ricordando che $\gamma^2 = \dfrac{1}{1-V^2} \Longrightarrow 1 - V^2 = \dfrac{1}{\gamma^2} \Longrightarrow V^2 = \dfrac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$ il vettore $\mathbf{v}'_B$ diventa

$$\mathbf{v}'_B = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{V} - \frac{\gamma^2}{1-\gamma^2}\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\mathbf{V} \times \left(\mathbf{V} \times \mathbf{v}\right)}{1 - \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{V}} = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{V} + \frac{\gamma}{1+\gamma}\mathbf{V} \times \left(\mathbf{V} \times \mathbf{v}\right)}{1 - \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{V}}$$

Si determina ora la norma di $\mathbf{v}'_B$

$$\mathbf{v}'^2_B = \frac{\left[(\mathbf{v} - \mathbf{V}) + \frac{\gamma}{1+\gamma}\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{v})\right]^2}{(1 - \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{V})^2} =$$

$$= \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 + 2\frac{\gamma}{1+\gamma}(\mathbf{v} - \mathbf{V})\left[\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{v})\right] + \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2}\left[\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{v})\right]^2}{(1 - \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{V})^2}$$

ricordando che $\left[\mathbf{V} \times (\mathbf{V} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{v})\mathbf{V} - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})\mathbf{v}\right]$ la norma $\mathbf{v}'_B$ risulta:

$$\mathbf{v}'^2_B = \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 + 2\frac{\gamma}{1+\gamma}\left[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V})^2 - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\right] + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\left[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V})^2 - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\right]}{(1 - \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{V})^2} =$$

$$= \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 + \left[(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V})^2 - (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\right]}{(1 - \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{V})^2} = \frac{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 - (\mathbf{V} \times \mathbf{v})^2}{(1 - \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{V})^2}$$

ossia

$$\mathbf{v}'_B = \frac{\sqrt{(\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 - (\mathbf{V} \times \mathbf{v})^2}}{1 - \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{V}} \qquad (3.47)$$

3.3.2 Metrica nello spazio delle velocità ordinarie

Partendo dalla relazione (3.47) della velocità relativa ordinaria $\mathbf{v}'_B$ la sua norma risulta essere:

$$\mathbf{v}'^2_B = \frac{(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2 - (\mathbf{V}\times\mathbf{v})^2}{(1-\mathbf{v}_{\parallel}\cdot\mathbf{V})^2}$$

Sia

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v} \\ \mathbf{V} = \mathbf{v} \end{cases} \tag{3.48}$$

ricordando che

$$\mathrm{d}\mathbf{v}^2 = \mathrm{d}v^2 + v^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)$$

ora si determina l'elemento metrico $\mathrm{d}l^2_{VB}$ nello spazio delle velocità ordinarie

$$\mathrm{d}l^2_{VB} = \frac{(\mathbf{v}-\mathbf{V})^2 - (\mathbf{V}\times\mathbf{v})^2}{(1-\mathbf{v}_{\parallel}\cdot\mathbf{V})^2} = \frac{(\mathbf{v}+\mathrm{d}\mathbf{v}-\mathbf{v})^2 - \big[\mathbf{v}\times(\mathbf{v}+\mathrm{d}\mathbf{v})\big]^2}{\big[1-(\mathbf{v}+\mathrm{d}\mathbf{v})\cdot\mathbf{v}\big]^2} =$$

$$= \frac{(\mathrm{d}\mathbf{v})^2 - (\mathbf{v}\times\mathbf{v}+\mathbf{v}\times\mathrm{d}\mathbf{v})^2}{(1-v^2-\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{v})^2} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}^2 - (\mathbf{v}\times\mathrm{d}\mathbf{v})^2}{(1-v^2)^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}^2 - \big[v^2\mathrm{d}\mathbf{v}^2 - (\mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{v})^2\big]}{(1-v^2)^2} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}^2 - \big\{v^2\big[\mathrm{d}v^2 + v^2(\mathrm{d}\vartheta^2+\sin^2\vartheta\mathrm{d}\varphi^2)\big] - v^2\mathrm{d}\mathbf{v}^2\big\}}{(1-v^2)^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}^2 - v^4(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\varphi^2)}{(1-v^2)^2} = \frac{\mathrm{d}v^2 + v^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) - v^4(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)}{(1-v^2)^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}v^2 + v^2(1-v^2)(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)}{(1-v^2)^2} = \frac{\mathrm{d}v^2}{(1-v^2)^2} + \frac{v^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)}{1-v^2}$$

Sostituendo

$$\begin{cases} v = \tanh\psi \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\cosh^2\psi} \end{cases} \tag{3.49}$$

l'elemento metrico $\mathrm{d}l^2_{VB}$ diventa

$$\mathrm{d}l^2_{VB} = \frac{\frac{\mathrm{d}\psi^2}{\cosh^2\psi}}{(1-\tanh^2\psi)^2} + \frac{\tanh^2\psi(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)}{1-\tanh^2\psi} =$$

$$= \cosh^4\psi \mathrm{d}\frac{d\psi^2}{\cosh^4\psi} + \cosh^2\psi\frac{\sinh^2\psi}{\cosh^2\psi}(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)$$

ossia

$$\mathrm{d}l^2_{VB} = \mathrm{d}\psi^2 + \sinh^2\psi(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) \tag{3.50}$$

3.3.3 Relatività Estesa

Partendo dalle trasformazioni di Lorentz estese si deduce l'espressione delle componenti della velocità non ordinaria $\mathbf{v}'_T$ ossia con boost $V > c$ o analogamente $V > 1$ avendo

posto $c = 1$, si pone inoltre $\widehat{\gamma} = \dfrac{1}{\sqrt{V^2 - 1}}$; il sistema delle coordinate spazio-temporali diventa

$$\begin{cases} \mathrm{d}x' = \widehat{\gamma}(\mathrm{d}t - V\mathrm{d}x) \\ \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z \\ \mathrm{d}t' = \widehat{\gamma}(\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t) \end{cases} \tag{3.51}$$

Svolgendo i passaggi si ottengono per le singole componenti della velocità $\mathbf{v}'_T$

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\widehat{\gamma}(\mathrm{d}t - V\mathrm{d}x)}{\widehat{\gamma}(\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t)} = \frac{1 - V\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - V} = \frac{1 - v_x V}{v_x - V} \\ v'_y &= \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y}{\widehat{\gamma}(\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\widehat{\gamma}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - V)} = \frac{v_y}{\widehat{\gamma}(v_x - V)} \\ v'_z &= \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}z}{\widehat{\gamma}(\mathrm{d}x - V\mathrm{d}t)} = \frac{\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{\widehat{\gamma}(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - V)} = \frac{v_z}{\widehat{\gamma}(v_x - V)} \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{cases} v'_x = \dfrac{1 - v_x V}{v_x - V} \\ v'_y = \dfrac{v_y}{\widehat{\gamma}(v_x - V)} \\ v'_z = \dfrac{v_z}{\widehat{\gamma}(v_x - V)} \end{cases} \tag{3.52}$$

Esprimendo ora $\mathbf{v}'_T$ nelle sue componenti $\mathbf{v}'_{T\parallel}$ e $\mathbf{v}'_{T\perp}$ rispetto alla direzione del boost $\mathbf{V}$ del sistema come da immagine si ottiene

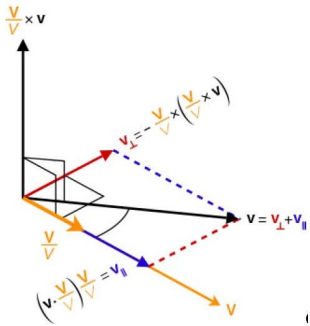


Figura 3.8: Scomposizione del vettore $\mathbf{v}$ nello spazio

$$\begin{cases} \mathbf{v}'_{T\parallel} = \dfrac{1 - \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{V}}{v_{\parallel} - V} \dfrac{\mathbf{V}}{V} \\ \mathbf{v}'_{T\perp} = \dfrac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}}{\widehat{\gamma}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel})} \end{cases} \tag{3.53}$$

Si determina ora $\mathbf{v}'_T$

$$\mathbf{v}'_T = \mathbf{v}'_{T\parallel} + \mathbf{v}'_{T\perp} = \frac{1 - \mathbf{v}_{\parallel} \cdot \mathbf{V}}{v_{\parallel} - V} \frac{\mathbf{V}}{V} + \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel}}{\widehat{\gamma}(v_{\parallel} - V)} =$$

$$= \frac{\frac{\mathbf{V}}{V}\left[1 - \mathbf{V}\frac{\mathbf{V}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}\right)}{V^2}\right] + \frac{1}{\widehat{\gamma}}\left[\mathbf{v} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}\right)\right]}{v_{\parallel} - V} = \frac{\frac{\mathbf{V}}{V}\left[1 - \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}\right)\right] + \frac{\mathbf{v}}{\widehat{\gamma}} - \frac{\mathbf{V}}{V^2\widehat{\gamma}}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}\right)}{v_{\parallel} - V} =$$

$$= \frac{\frac{\mathbf{v}}{\widehat{\gamma}} + \frac{\mathbf{V}}{V}\left[1 - \mathbf{V}\cdot\mathbf{v} - \frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}}{V\widehat{\gamma}}\right]}{v_{\parallel} - V} = \frac{\frac{\mathbf{v}}{\widehat{\gamma}} + \frac{\mathbf{V}}{V}\left[1 - \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}\right)\left(1 + \frac{1}{V\widehat{\gamma}}\right)\right]}{v_{\parallel} - V} =$$

$$= \frac{\frac{\mathbf{v}}{\widehat{\gamma}} + \frac{\mathbf{V}}{V}\left[1 - \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}\right)\left(\frac{\widehat{\gamma}}{V}\,\frac{1}{V\widehat{\gamma}-1}\right)\right]}{v_{\parallel} - V} = \frac{\frac{\mathbf{v}}{\widehat{\gamma}} + \frac{\mathbf{V}}{V} - \frac{\widehat{\gamma}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}\right)\mathbf{V}}{V^2\left(V\widehat{\gamma}-1\right)}}{v_{\parallel} - V} =$$

$$= \frac{\frac{\mathbf{v}}{\widehat{\gamma}} + \frac{\mathbf{V}}{V} - \frac{\widehat{\gamma}}{V^2\left(V\widehat{\gamma}-1\right)}\left[\mathbf{V}\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{v}\right)\right] - \frac{\widehat{\gamma}}{V^2\left(V\widehat{\gamma}-1\right)}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\right)\mathbf{v}}{v_{\parallel} - V} =$$

$$= \frac{\frac{\mathbf{V}}{V} - \frac{\widehat{\gamma}}{V^2\left(V\widehat{\gamma}-1\right)}\left[\mathbf{V}\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{v}\right)\right] + \mathbf{v}\left[\frac{1}{\widehat{\gamma}} - \frac{\widehat{\gamma}}{V\widehat{\gamma}-1}\,\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}}{V^2}\right]}{v_{\parallel} - V} =$$

$$= \frac{\frac{\mathbf{V}}{V} - \frac{\widehat{\gamma}}{V^2\left(V\widehat{\gamma}-1\right)}\left[\mathbf{V}\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{v}\right)\right] + \mathbf{v}\left[\frac{1}{\widehat{\gamma}} - V - \frac{1}{\widehat{\gamma}}\right]}{v_{\parallel} - V} = \frac{\frac{\mathbf{V}}{V} - \frac{\widehat{\gamma}}{V^2\left(V\widehat{\gamma}-1\right)}\left[\mathbf{V}\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{v}\right)\right] - V\mathbf{v}}{v_{\parallel} - V} =$$

$$= \frac{\frac{1}{V}\left\{\mathbf{V} - V^2\mathbf{v} - \frac{\widehat{\gamma}}{V\left(V\widehat{\gamma}-1\right)}\left[\mathbf{V}\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{v}\right)\right]\right\}}{\frac{V\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right)}{V^2} - V} = \frac{\frac{1}{V}\left\{\mathbf{V} - V^2\mathbf{v} - \frac{\widehat{\gamma}}{V\left(V\widehat{\gamma}-1\right)}\left[\mathbf{V}\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{v}\right)\right]\right\}}{\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2}{V}}$$

quindi

$$\mathbf{v}'_T = \frac{\mathbf{V} - V^2\mathbf{v} - \frac{\widehat{\gamma}}{V\left(1 - V\widehat{\gamma}\right)}\left[\mathbf{V}\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{v}\right)\right]}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2} \tag{3.54}$$

La norma di $\mathbf{v}'_T$ risulta essere

$$\mathbf{v}'^2_T = \frac{\left\{\mathbf{V} - V^2\mathbf{v} - \frac{\widehat{\gamma}}{V\left(1-V\widehat{\gamma}\right)}\left[\mathbf{V}\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{v}\right)\right]\right\}^2}{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)^2 + \frac{2}{V}\frac{\widehat{\gamma}}{1-V\widehat{\gamma}}\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)\cdot\left[\mathbf{V}\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{v}\right)\right] + \frac{1}{V^2}\left(\frac{\widehat{\gamma}}{1-V\widehat{\gamma}}\right)^2\left[\mathbf{V}\times\left(\mathbf{V}\times\mathbf{v}\right)\right]^2}{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)^2 - \frac{2V\widehat{\gamma}}{1-V\widehat{\gamma}}\left[\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right)^2 - \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)\right] + \frac{1}{V^2}\left(\frac{\widehat{\gamma}}{1-V\widehat{\gamma}}\right)^2 V^2\left[V^2v^2 - \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}\right)^2\right]}{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)^2 - \frac{1}{1-V\widehat{\gamma}}\left[2V\widehat{\gamma}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right)^2 - 2V\widehat{\gamma}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) + \left(1+V\widehat{\gamma}\right)\left[V^2v^2 - \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}\right)^2\right]\right.}{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)^2 - \frac{1}{1-V\widehat{\gamma}}\left[2V\widehat{\gamma}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right)^2 - 2V\widehat{\gamma}\left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right) + V^2v^2 - \left(\mathbf{V}\cdot\mathbf{v}\right)^2 + Vv^2V^2\widehat{\gamma} - V\widehat{\gamma}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)^2\right]}{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} - V^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)^2 - \frac{1}{1-V\widehat{\gamma}}\left[V\widehat{\gamma}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right)^2 - V^2v^2V\widehat{\gamma} + V^2v^2 - \left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right)^2\right]}{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)^2 - \frac{1}{1-V\widehat{\gamma}}\left[\left(V\widehat{\gamma} - 1\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right)^2 - V^2v^2\left(V\widehat{\gamma} - 1\right)\right]}{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)^2 + \frac{1-V\widehat{\gamma}}{1-V\widehat{\gamma}}\left[\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}\right)^2 - V^2v^2\right]}{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2\right)^2} = \frac{\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)^2 - \left(\mathbf{v}\times\mathbf{V}\right)^2}{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2\right)^2}$$

ossia

$$\mathbf{v}'_T = \frac{\sqrt{\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)^2 - \left(\mathbf{v}\times\mathbf{V}\right)^2}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{V} - V^2} \tag{3.55}$$

3.3.4 Metrica nello spazio delle velocità non ordinarie

Partendo dalla relazione (3.55) della velocità relativa nel caso esteso $\mathbf{v}'_T$ la sua norma diventa

$$\mathbf{v}'^2_T = \frac{\left(\mathbf{V} - V^2\mathbf{v}\right)^2 - \left(\mathbf{v} \times \mathbf{V}\right)^2}{\left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} - V^2\right)^2}$$

ponendo

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \mathbf{V} + \mathrm{d}\mathbf{V} & \text{superluminale} \\ \mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{V}}{V^2} & \text{subluminale} \end{cases} \tag{3.56}$$

L'elemento $\mathrm{d}l^2_{VT}$ nello spazio delle velocità non ordinarie risulta essere dato da

$$\mathrm{d}l^2_{VT} = \frac{\left[\left(\mathbf{V} + \mathrm{d}\mathbf{V}\right) - \frac{\mathbf{V}}{V^2}\left(\mathbf{V} + \mathrm{d}\mathbf{V}\right)^2\right]^2 - \left[\frac{\mathbf{V}}{V^2} \times \left(\mathbf{V} + \mathrm{d}\mathbf{V}\right)\right]^2}{\left[\left(\frac{\mathbf{V}}{V^2} \cdot \left(\mathbf{V} + \mathrm{d}\mathbf{V}\right) - \left(\mathbf{V} + \mathrm{d}\mathbf{V}\right)^2\right]^2} =$$

$$= \frac{\left[\mathbf{V} + \mathrm{d}\mathbf{V} - \frac{\mathbf{V}}{V^2}\left(V^2 + 2\mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{V} + \mathrm{d}\mathbf{V}^2\right)\right]^2 - \left(\frac{\mathbf{V}}{V^2} \times \mathrm{d}\mathbf{V}\right)^2}{\left(1 + \cancel{\frac{\mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{V}}{V^2}} - V^2 - \cancel{2\mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{V}} - \cancel{\mathrm{d}\mathbf{V}^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\mathbf{V} + \mathrm{d}\mathbf{V} - \mathbf{V} - 2\frac{V^2\mathrm{d}\mathbf{V}}{V^2} - \frac{\mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{V}^2}{V^2}\right)^2 - \frac{V^2 d\mathbf{V}^2}{V^4} + \left(\frac{\mathbf{V} \cdot \mathrm{d}\mathbf{V}}{V^2}\right)^2}{\left(1 - V^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(-\mathrm{d}\mathbf{V} - \cancel{\frac{\mathbf{V}\cdot\mathrm{d}\mathbf{V}^2}{V^2}}\right)^2 - \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}^2}{V^2} + \frac{\mathrm{d}V^2}{V^2}}{\left(1-V^2\right)^2} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}^2\left(1-\frac{1}{V^2}\right) + \frac{\mathrm{d}V^2}{V^2}}{\left(1-V^2\right)^2} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}^2\left(V^2-1\right) + \mathrm{d}V^2}{V^2\left(1-V^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}V^2}{V^2\left(1-V^2\right)^2} + \frac{\left(V^2-1\right)\mathrm{d}\mathbf{V}^2}{V^2\left(V^2-1\right)^2} = \frac{\mathrm{d}V^2}{V^2\left(V^2-1\right)^2} + \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}^2}{V^2\left(V^2-1\right)^2}$$

sostituendo

$$\begin{cases} V = \coth\psi \\ \mathrm{d}V = \dfrac{\mathrm{d}\psi}{\sinh^2\psi} \end{cases} \tag{3.57}$$

ricordando che

$$\mathrm{d}\mathbf{v}^2 = \mathrm{d}v^2 + v^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2)$$

l'elemento metrico $\mathrm{d}l^2_{VT}$ nello spazio delle velocità relativistiche risulta essere

$$\mathrm{d}l^2_{VT} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\sinh^4\psi}}{\coth^2\psi\left(\coth^2\psi-1\right)^2} + \frac{\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\sinh^4\psi} + \coth^2\psi\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)}{\coth^2\psi\left(\coth^2\psi-1\right)} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\sinh^4\psi\,\coth^2\psi\left(\frac{1}{\sinh^2\psi}\right)^2} + \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\sinh^4\psi\coth^2\psi\frac{1}{\sinh^2\psi}} + \frac{\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2}{\frac{1}{\sinh^2\psi}} =$$

$$= \tanh^2\psi\,\mathrm{d}^2\psi + \frac{\mathrm{d}^2\psi}{\cosh^2\psi} + \sinh^2\psi\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right) =$$

$$= \mathrm{d}^2\psi\frac{\sinh^2\psi\,+1}{\cosh^2\psi} + \sinh^2\psi\left(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)$$

ossia

$$\mathrm{d}l^2_{VT} = \mathrm{d}\psi^2 + \sinh^2\psi(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\varphi^2) \tag{3.58}$$

Si è quindi esteso il risultato ordinario trovando che, anche nel caso di trasformazioni di Lorentz superluminali (il passaggio tra un osservatore inerziale ad un altro osservatore inerziale con velocità $V > c$ rispetto al primo), la metrica dello spazio delle 3-velocità è quella posseduta da uno spazio a curvatura costante negativa (spazio di Lobacevskij).

Capitolo 4

Decadimenti Binari

La massa quasi evanescente del neutrino rende piuttosto difficile la misurazione diretta della sua velocità di spostamento. E' utile pertanto considerare altre grandezze cinematiche che potrebbero mostrare una netta differenza tra la massa quadratica positiva e la massa quadratica negativa dei neutrini. In particolare, possiamo teoricamente prevedere l'energia di neutrini emessi nel decadimento binario di pioni o caoni in funzione della distribuzione angolare.
Sul versante delle particelle, ossia dei tachioni, ci si è con-

centrati sugli aspetti fenomenologici e sperimentali: i possibili candidati di particelle superluminali sono i neutrini perché sembrano possedere una massa quadratica negativa come emerge in numerose misure di tale grandezza, in particolar modo nelle misure relative al decadimento beta del trizio. Di conseguenza ci si aspetta di trovare qualche evidenza di dinamica tachionica indagando i risultati delle osservazioni sperimentali relative a particolari decadimenti che coinvolgono neutrini elettronici e muonici.
I risultati dei calcoli teorici relativi alle previsioni sperimentali nel caso di decadimento binario del pione in muone e neutrino portano a ipotizzare che possano esistere degli intervalli angolari nella distribuzione delle particelle emesse che sono proibiti nel caso di neutrini bradionici e sono permessi nel caso dei tachioni. La teoria, prevede, ad esempio, stati finali con distribuzioni angolari differenti per i due regimi subluminale (bradionico) e superluminale (tachionico) quando l'energia del fascio pionico incidente supera una certa soglia che si è stimato essere circa uguale a 4.3 PeV per masse neutriniche dell'ordine di 1 eV.
Prima si ritrovano le relazioni cinematiche tra energia e

angolo dei neutrini ordinari emessi (cioè con massa quadratica positiva); in seguito si sono estese queste formule al caso $m^2 < 0$ non standard. Si sono utilizzate ovunque unità con $c = 1$.

4.1 Teoria Ordinaria

Si considera il decadimento binario di una particella di massa M e velocità V; come caso particolare si tratta il decadimento binario del pione in muone e neutrino, $\pi \to \mu + \nu$ e si indica:

V: velocità della particella M (pione π) nel sistema del laboratorio

E: energia della particella M (pione π) nel sistema del laboratorio

P: momento della particella M (pione π) nel sistema del laboratorio

v_0: velocità della particella (neutrino ν o muone μ) nel sistema del centro di massa della particella M (pione π)

ε_0: energia di una delle due particelle (neutrino ν o muone μ) nel sistema del centro di massa della particella M (pione π)

p_0: momento di una delle due particelle (neutrino ν o muone μ) nel sistema del centro di massa della particella M (pione π)

ε: energia della particella (neutrino ν o muone μ) nel sistema del laboratorio

p: momento della particella (neutrino ν o muone μ) nel sistema del laboratorio

ϑ: angolo di deflessione che la direzione della velocità v_0 della particella "decaduta" (neutrino ν o muone μ) forma con la direzione di V

Partendo dal caso ordinario, non relativistico si ha:

massa quadrata positiva: $m^2 \geq 0$

legge di dispersione ordinaria: $\varepsilon^2 - p^2 = m^2$

le quantità energia ε_0 e momento p_0 si ottengono tramite la classica trasformazione di Lorentz:

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon - Vp_{\|}}{\sqrt{1-V^2}} = \dfrac{\varepsilon - Vp\cos\vartheta}{\sqrt{1-V^2}} \\ p_{0\|} = \dfrac{p_{\|} - V\varepsilon}{\sqrt{1-V^2}} = \dfrac{p\cos\vartheta - V\varepsilon}{\sqrt{1-V^2}} \end{cases} \tag{4.1}$$

Ricavando l'energia ε dall'uguaglianza tra il primo e l'ultimo membro

$$\varepsilon - \varepsilon_0\sqrt{1-V^2} = Vp\cos\vartheta \tag{4.2}$$

Si ricava l'energia ε in funzione dell'angolo ϑ e quadrando membro a membro si determinano le soluzioni dell'equazione di secondo grado nell'incognita ε:

$$\varepsilon^2(1-V^2\cos^2\vartheta) - 2\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{1-V^2} + \varepsilon_0^2(1-V^2) + m^2V^2\cos^2\vartheta = 0 \tag{4.3}$$

$$\varepsilon_B(\vartheta) = \frac{\varepsilon_0\sqrt{1-V^2} \pm \sqrt{\varepsilon_0^2(1-V^2) - (1-V^2\cos^2\vartheta)(\varepsilon_0^2(1-V^2) + m^2V^2\cos^2\vartheta)}}{(1-V^2\cos^2\vartheta)} \tag{4.4}$$

o analogamente

$$\varepsilon_B(\vartheta) = \frac{\varepsilon_0\sqrt{1-V^2} \pm |V\cos\vartheta|\sqrt{(\varepsilon_0^2 - m^2)(1-V^2) - m^2V^2\sin^2\vartheta}}{1-V^2\cos^2\vartheta} \tag{4.5}$$

Per avere soluzioni reali per l'energia ε, deve essere posta la condizione di positività del discriminante ossia

$$\Delta = V^2 \cos^2 \vartheta [p_0^2(1 - V^2) - m^2 V^2 \sin^2 \vartheta] \geq 0 \; ; \tag{4.6}$$

analizzando i diversi fattori

$V^2 \cos^2 \vartheta \geq 0 \qquad \forall \vartheta \in [0, \pi]$

$p_0^2(1 - V^2) \geq m^2 V^2 \sin^2 \vartheta \qquad \Longrightarrow \qquad \sin^2 \vartheta \leq \dfrac{p_0^2(1 - V^2)}{m^2 V^2} \; ;$

si ricorda che

$$v_0 = \frac{p_0}{\varepsilon_0} \quad \text{e} \quad \varepsilon_0 = \frac{m}{\sqrt{1 - v_0^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad p_0^2 = \frac{v_0^2 m^2}{1 - v_0^2} \; ;$$

sostituendo si ottiene

$$\sin^2 \vartheta \leq \frac{v_0^2(1 - V^2)}{V^2(1 - v_0^2)}$$

e, considerando i due casi,

$V \leq v_0 \Longrightarrow \dfrac{v_0}{V} \geq 1$ e $\dfrac{1 - V^2}{1 - v_0^2} \geq 1 \quad \forall \vartheta \in [0, \pi]$

$V \geq v_0 \Longrightarrow \dfrac{v_0}{V} \leq 1$ e $\dfrac{1 - V^2}{1 - v_0^2} \leq 1 \quad \forall \vartheta \in [0, \vartheta_{MAX}]$ dove

$$\boxed{\sin \vartheta_{MAX} = \frac{p_0 \sqrt{1 - V^2}}{m V}} \tag{4.7}$$

Un'altra considerazione: con la quadratura si sono aggiunte soluzioni fisicamente non accettabili, si devono quindi inserire le

condizioni di "uguaglianza dei segni" ossia:

$$\varepsilon - \varepsilon_0\sqrt{1-V^2} = Vp\cos\vartheta$$

ponendo $\widehat{\varepsilon} \equiv \varepsilon_0\sqrt{1-V^2}$

$$\cos\vartheta > 0 \qquad \forall\ \vartheta\ \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \varepsilon(\vartheta) > \widehat{\varepsilon}$$

$$\cos\vartheta < 0 \qquad \forall\ \vartheta\ \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \implies \varepsilon(\vartheta) < \widehat{\varepsilon}$$

Avendo un angolo limite avremo un'energia di soglia $\widehat{E_\pi}$ che dipenderà dalla massa della particella "madre" M_π, dalla massa m_ν e dall'energia $\varepsilon_{0\nu}$ della particella decaduta.
La condizione $V \geq v_0$ implica l'esistenza di un angolo critico $\vartheta_{_{MAX}}$; da queste condizioni sulle velocità derivano delle condizioni sulle energie E_π e $\varepsilon_{0\nu}$

$$E_\pi = \frac{M_\pi}{\sqrt{1-V^2}} \qquad\qquad \varepsilon_{0\nu} = \frac{m_\nu}{\sqrt{1-v_0^2}}$$

quindi $V \geq v_0 \implies \sqrt{1-\dfrac{M_\pi^2}{E_\pi^2}} \geq \sqrt{1-\dfrac{m_\nu^2}{\varepsilon_{0\nu}^2}}$ da cui si ricava il valore notevole $\widehat{E_\pi}$ dell'energia del pione π

$$\boxed{\widehat{E_\pi} \equiv \frac{M_\pi}{m_\nu}\,\varepsilon_{0_\nu}} \tag{4.8}$$

nel caso più verosimile con $m_\nu = 1\,\mathrm{eV}$, $M_\pi = 140\,\mathrm{MeV}$, $\varepsilon_{0_\nu} = 31\,\mathrm{MeV}$ otteniamo

$$\boxed{\widehat{E_\pi} = \frac{M_\pi}{m_\nu}\,\varepsilon_{0_\nu} \simeq 4.3\,\mathrm{PeV}} \tag{4.9}$$

a cui corrisponde l'angolo critico

$$\boxed{\vartheta_{_{MAX}} \simeq 85^\circ} \tag{4.10}$$

Un grafico qualitativo per visualizzare la possibile distribuzione dei neutrini ordinari nel decadimento: L'andamento dell'energia

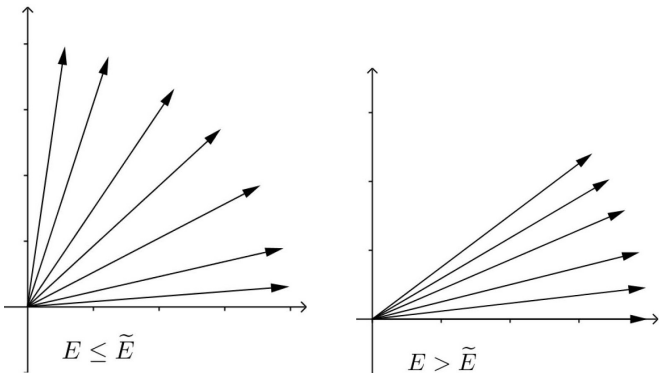


Figura 4.1: Grafico qualitativo della distribuzione per neutrini ordinari

$\varepsilon(\vartheta)$ (eq. (4.5)) risulta essere dato dalla tab. (4.1).

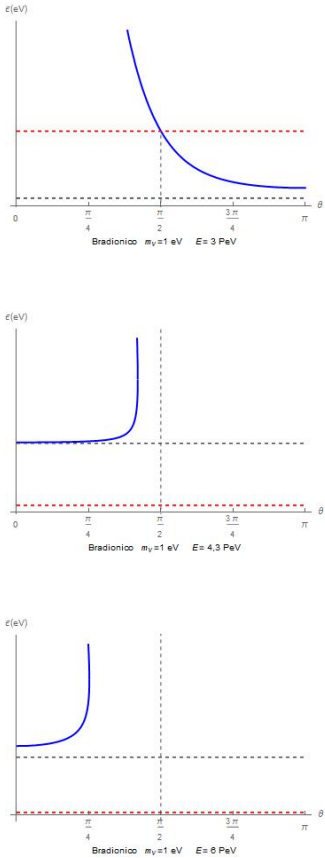


Tabella 4.1: Grafico dell'energia $\varepsilon(\vartheta)$ per neutrini ordinari con diverse energie del pione π

Si osserva che: per $V < v_0$ ossia $E_\pi < \widehat{E_\pi} \simeq 4,3\,\text{PeV}$ possiamo avere la presenza di neutrini bradionici sia "in avanti" che "indietro" mentre per $V \geq v_0$ ossia $E_\pi \geq \widehat{E_\pi} \simeq 4,3\,\text{PeV}$ esiste un angolo critico $\vartheta^* \simeq 85^\circ$ oltre il quale non sono presenti neutrini ordinari.

4.2 Estensione al caso $m_\nu^2 < 0$

Si considera ora il caso non ordinario, ossia quando il neutrino emesso sia tachionico:

massa quadrata negativa: $m^2 < 0$

legge di dispersione non ordinaria: $\varepsilon^2 - p^2 = -m^2$

Punto di partenza risultano essere ancora le trasformazioni di Lorentz

$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \dfrac{\varepsilon - V p_\parallel}{\sqrt{1-V^2}} = \dfrac{\varepsilon - V p \cos\vartheta}{\sqrt{1-V^2}} \\ p_{0\parallel} = \dfrac{p_\parallel - V\varepsilon}{\sqrt{1-V^2}} = \dfrac{p\cos\vartheta - V\varepsilon}{\sqrt{1-V^2}} \end{cases} \tag{4.11}$$

Esplicitando l'energia ε

$$\varepsilon - \varepsilon_0\sqrt{1-V^2} = V p \cos\vartheta \tag{4.12}$$

Si ricava l'energia ε in funzione dell'angolo ϑ e quadrando membro a membro si determinano le soluzioni dell'equazione di se-

condo grado nell'incognita ε:

$$\varepsilon^2(1 - V^2\cos^2\vartheta) - 2\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{1 - V^2} + \varepsilon_0^2(1 - V^2) - m^2V^2\cos^2\vartheta = 0 \tag{4.13}$$

$$\varepsilon_{_T}(\vartheta) = \frac{\varepsilon_0\sqrt{1 - V^2} \pm \sqrt{V^2\cos^2\vartheta[p_0^2(1 - V^2) + m^2V^2\sin^2\vartheta]}}{1 - V^2\cos^2\vartheta} \tag{4.14}$$

Queste soluzioni sono sempre reali, a differenza del caso ordinario, eq.(4.4), perché il radicando risulta essere dato dalla somma di termini positivi, quindi sempre positivo. Si noti che il neutrino, poiché viene imposto come tachione, viene osservato come una particella superluminale rispetto a qualsiasi sistema di riferimento ordinario; quindi $v_{0_\nu} > 1$ sia nel sistema di riferimento del Centro di Massa che nel sistema del Laboratorio: si ha allora un solo caso, $V < v_0$, mentre nel regime ordinario si hanno due possibilità.
Quadrando, si sono aggiunte soluzioni non accettabili fisicamente, si devono quindi inserire le condizioni di "positività dell'energia"; richiamando l'eq.(4.12):

$$\varepsilon - \varepsilon_0\sqrt{1 - V^2} = Vp\cos\vartheta$$

ponendo $\widehat{\varepsilon} \equiv \varepsilon_0\sqrt{1 - V^2}$ abbiamo i due casi:
$\cos\vartheta > 0 \qquad \forall\ \vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \varepsilon(\vartheta) > \widehat{\varepsilon}$
$\cos\vartheta < 0 \qquad \forall\ \vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \implies \varepsilon(\vartheta) < \widehat{\varepsilon}$

Tuttavia, non tutte queste soluzioni corrispondono a energia positiva. Come si può vedere dall'eq.(4.14), c'è sempre una soluzione reale $\varepsilon_T(\vartheta)$ con il segno "+" davanti alla radice quadrata per ogni angolo ϑ; mentre una condizione sull'angolo di rivelazione possibile è ottenuta dal requisito che la soluzione con il segno "−" davanti alla radice quadrata sia positiva.
La condizione di positività dell'energia dall'eq.(4.12) diventa:

$$\varepsilon(\vartheta) > 0 \implies \varepsilon_0\sqrt{1-V^2} > -Vp\cos\vartheta \tag{4.15}$$

$\vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \implies \varepsilon(\vartheta) > -Vp\cos\vartheta$ sempre verificato

$\vartheta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \implies |\cos\vartheta| < \frac{\varepsilon_0\sqrt{1-V^2}}{pV}$ $\exists$ angolo limite ϑ^*_{MAX} t.c.

$$\boxed{\left|\cos\vartheta^*_{MAX}\right| = \frac{\varepsilon_0\sqrt{1-V^2}}{pV}} \tag{4.16}$$

Si verifca, con alcuni passaggi, che l'emissione di neutrini tachionici può avvenire per angoli $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ (angoli proibiti nel caso bradionico).
Si riprenda l'espressione dell'impulso p: dalle trasformazioni di Lorentz, nel sistema di laboratorio, essa risulta:

$$\begin{cases} p_\parallel = \dfrac{p_{0\parallel} + V\varepsilon_0}{\sqrt{1-V^2}} = \dfrac{p_0\cos\vartheta_0 + V\varepsilon_0}{\sqrt{1-V^2}} \\ p_\perp = p_{0\perp} = p_0\sin\vartheta_0 \end{cases} \tag{4.17}$$

Ricordando le espressioni di energia $\varepsilon = \dfrac{m}{\sqrt{1-V^2}}$ e impulso $p = \dfrac{m\,v}{\sqrt{1-V^2}}$, si ottine la nota relazione $p = \varepsilon\, v$.
Allora $p_{0\|} = \varepsilon_0 v_0 \cos\vartheta_0$ e sostituendo nel sistema (4.17) si ottiene:

$$\begin{cases} p_\| = \dfrac{p_{0\|} + V\varepsilon_0}{\sqrt{1-V^2}} = \dfrac{\varepsilon_0 v_0 \cos\vartheta_0 + V\varepsilon_0}{\sqrt{1-V^2}} = \dfrac{\varepsilon_0}{\sqrt{1-V^2}}(v_0\cos\vartheta_0 + V) \\ p_\perp = p_{0\perp} = p_0 \sin\vartheta_0 \end{cases} \tag{4.18}$$

Per le condizioni iniziali $v_0 > 1 \Rightarrow v_0 > V$; se supponiamo il $\cos\vartheta_0 < 0$, ad esempio si consideri il caso limite con $\cos\vartheta_0 = -1 \Rightarrow \vartheta_0 = \pi$ (il pione emette il neutrino all'indietro), allora $p_\| < 0$.
Scrivendo la tangente di ϑ:

$$\tan\vartheta = \frac{p_\perp}{p_\|} < 0 \Longrightarrow \vartheta > \frac{\pi}{2} \tag{4.19}$$

Questo valore dell'angolo ($\vartheta > \frac{\pi}{2}$), non può essere ottenuto per neutrini bradionici per tutte le consideraazioni fatte nel paragrafo precedente.
La presenza di particelle per angoli $\vartheta > \frac{\pi}{2}$ avallerebbe l'ipotesi che i neutrini potrebbero essere particelle tachioniche.
In fig.(4.2) si riporta un grafico qualitativo della possibile distribuzione dei neutrini tachionici:
L'andamento dell'energia $\varepsilon(\vartheta)$ eq. (4.14) risulta essere dato nella tab. (4.2)

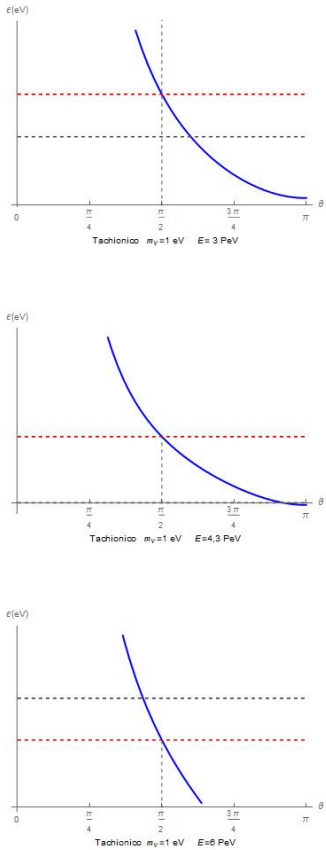


Tabella 4.2: Grafico dell'energia $\varepsilon(\vartheta)$ per neutrini tachionici con diverse energie del pione π

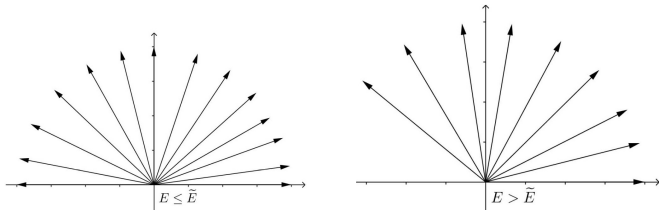


Figura 4.2: Grafico qualitativo della distribuzione di neutrini tachionici

4.3 Distribuzione angolare dal centro di massa al laboratorio

Nel sistema di riferimento della particella "madre" π (centro di massa) la distribuzione è isotropa ossia [27]:

$$\mathrm{d}N = N_0 \frac{\mathrm{d}\Omega_0}{4\,\pi} \propto \frac{\mathrm{d}\Omega_0}{4\,\pi} = \frac{2\,\pi \sin\vartheta_0 \mathrm{d}\vartheta_0}{4\,\pi} = \frac{1}{2}\sin\vartheta_0 \mathrm{d}\vartheta_0 = |\mathrm{d}\cos\vartheta_0| \tag{4.20}$$

Nell'eq.(4.20) N_0 è una costante che si ometterà per semplicità; N_0 può essere calcolato dalla teoria con la matrice $\mathcal{M}$ (matrice di diffusione o scattering), ma la dipendenza angolare risulta sempre isotropa nel centro di massa (C.M.).
Si vuole calcolare la dipendenza dell'energia ε nel laboratorio.
Mentre nel C.M. tutte le particelle di uno stesso tipo (p.e. i neutrini ν) hanno la stessa energia, nel laboratorio essa dipende

dall'angolo di emissione; ad esempio quelle con la medesima direzione e verso di V_π, "in avanti" con angolo $\vartheta_0 = 0$ hanno energia ε_{MAX} massima, mentre quelle con angolo $\vartheta_0 = \pi$ rispetto a V_π avranno energia ε_{MIN} minima. Il risultato è che l'isotropia nel C.M. si traduce in una uniformità di energia nel laboratorio; tutte le particelle sono equamente ripartite tra energia minima ε_{MIN} ed energia massima ε_{MAX}, quindi

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varepsilon} = cost \tag{4.21}$$

più precisamente

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{1}{2Vp_0}\sqrt{1-V^2}\mathrm{d}\varepsilon = \frac{1}{2Vp_0}\frac{1}{\gamma}\mathrm{d}\varepsilon = \frac{E_\pi}{2\gamma p_0 P_\pi}\mathrm{d}\varepsilon \tag{4.22}$$

con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-V_\pi^2}}$ e p_0 quantità di moto dei due frammenti (muone μ e neutrino ν) nel C.M.
Per poter trovare la distribuzione angolare nel Laboratorio (Lab.) si dovrebbe convertire $\cos\vartheta_0$ in $\cos\vartheta_{\text{lab}}$.
Partendo dall'equazione [29]

$$\mathrm{d}N \propto \frac{1}{2}\sin\vartheta_0 \mathrm{d}\vartheta_0 = \frac{1}{2}|\mathrm{d}\cos\vartheta_0| \tag{4.23}$$

Guardando la fig.(4.3) si ha che

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}_0 \Rightarrow v^2 = V^2 + v_0^2 + 2Vv_0\cos\vartheta_0 \tag{4.24}$$

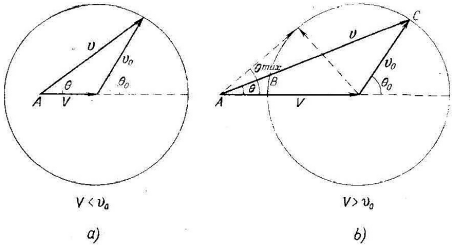


Figura 4.3: Velocità nel C.M. e nel Lab. nei casi $V < v_0$ e $V > v_0$

da cui

$$\cos\vartheta_0 = \frac{v^2 - V^2 - v_0^2}{2Vv_0} \qquad |\mathrm{d}\cos\vartheta_0| = \frac{|\mathrm{d}(v^2)|}{2Vv_0} \tag{4.25}$$

con $\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2 \equiv T$ (energia cinetica non relativistica nel laboratorio) si ha

$$\mathrm{d}(v^2) = \frac{2}{m}\mathrm{d}\varepsilon \qquad |\mathrm{d}\cos\vartheta_0| = \frac{|\mathrm{d}\varepsilon|}{mVv_0}\ ; \tag{4.26}$$

allora con $\mathrm{d}\varepsilon = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = mv\mathrm{d}v$ si avrà che

$$\mathrm{d}N = \frac{1}{2}|\mathrm{d}\cos\vartheta_0| = \frac{|\mathrm{d}\varepsilon|}{2mVv_0} = \frac{v|\mathrm{d}v|}{2Vv_0} = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{2p_0V} = \frac{p\mathrm{d}v}{2p_0V} \tag{4.27}$$

Si ricava ora la velocità $\mathbf{v}$ (nel caso non relativistico) nel laboratorio in funzione di ϑ; l'espressione $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ e quadrando

si ottiene l'equazione di 2^0 grado in v

$$v^2 - 2Vv_0\cos\vartheta + V^2 - v_0^2 = 0 \tag{4.28}$$

$$v \equiv |\mathbf{v}| = V\cos\vartheta \pm \sqrt{V^2\cos\vartheta^2 - V^2 + v_0^2} \Rightarrow$$

$$v = V\cos\vartheta \pm v_0\sqrt{1 - \left(\frac{V}{v_0}\sin\vartheta\right)^2} \tag{4.29}$$

Prima di calcolare dv si verifica la realtà delle soluzioni $v_\pm$

Caso a) $V \leq v_0$

$\odot$ $\Delta > 0$ poichè $\sin\vartheta \leq 1$ risulta che $\left(\frac{V}{v_0}\sin\vartheta\right)^2 \leq 1$; la velocità v $\exists$ $\forall$ $\vartheta \in (0;\pi)$; avremo allora particelle che nel laboratorio vanno in qualunque direzione e con energie diverse.

$\odot$ poichè $v \equiv |\mathbf{v}| \geq 0$ si deve verificare che $v_\pm \geq 0$; si avranno i casi:

1) $\cos\vartheta > 0 \Leftrightarrow \vartheta \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; $V\cos\vartheta > 0$; e con passaggi algebrici si ottiene che $\sqrt{1 - \left(\frac{V}{v_0}\sin\vartheta\right)^2} > |V\cos\vartheta|$: quindi si avrà una sola soluzione $v_+ = V\cos\vartheta + v_0\sqrt{1 - \left(\frac{V}{v_0}\sin\vartheta\right)^2}$

2) $\cos\vartheta < 0 \Leftrightarrow \vartheta \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$; $V\cos\vartheta > 0$; si esclude v_- e si

verifica che $v_+ = V\cos\vartheta + v_0\sqrt{1-\left(\frac{V}{v_0}\sin\vartheta\right)^2} > 0$
$3a)$ caso limite $V = v_0 \Rightarrow v_\pm = V\cos\vartheta \pm \sqrt{V^2\cos\vartheta^2}$
$3b)$ caso limite $\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_\pm = \pm\sqrt{v_0^2 - V^2}$, da cui si esclude la soluzione negativa.
In sintesi, per

$$V \leq v_0 \Longrightarrow v = V\cos\vartheta + v_0\sqrt{1-\left(\frac{V}{v_0}\sin\vartheta\right)^2} \;\forall\; \vartheta \in (0;\pi) \tag{4.30}$$

si ha una corrispondenza biunivoca tra gli angoli di emissione nel C.M. e quelli del Laboratorio.

Caso b) $V > v_0$
$\odot$ $\Delta > 0 \Longrightarrow \frac{V}{v_0}\sin\vartheta \leq 1 \;\forall\; \vartheta \in (0;\pi)$ poichè $\frac{V}{v_0} < 1 \Longrightarrow \sin\vartheta \leq \frac{v_0}{V} := \sin\vartheta_{\text{MAX}}$ con $\vartheta_{\text{MAX}} < \frac{\pi}{2}$; quindi la condizione di esistenza è verificata con $\forall\; \vartheta \in (0;\vartheta_{\text{MAX}})$.
$\odot$ per la condizione $v \equiv |\mathbf{v}| \geq 0$ ossia $v_\pm \geq 0$, si ha che $v_+ > 0$ per somma di quantità positive, per $v_- = V\cos\vartheta - \sqrt{V^2\cos\vartheta^2 - (V-v_0)^2}$ si verifica essere positiva.
Per calcolare $\mathrm{d}N$ nel Laboratorio si devono includere i due contributi di particelle che arrivano allo stesso angolo ϑ con due

velocità (energie) diverse $v_+ \neq v_-$ (vedi fig.(4.3) casob))

$$\mathrm{d}N \propto |\mathrm{d}\cos\vartheta_0| \propto |\mathrm{d}\varepsilon|_\vartheta = \sum_{+-} |\mathrm{d}\varepsilon_\pm(\cos\vartheta)| = \frac{1}{2Vv_0}(|v_-\,\mathrm{d}v_-|+|v_+\,\mathrm{d}v_+|) \tag{4.31}$$

4.4 Probabilità di decadimento dω

L'impostazione generale del problema delle collisioni consiste in questo [28]: per un dato stato iniziale del sistema, un certo numero di particelle libere, si deve determinare la probabilità dei diversi stati finali, (che in generale sono costituiti da insiemi di altre particelle libere). Se con il simbolo $|i>$ indichiamo lo stato iniziale, allora il risultato della collisione può essere rappresentato come una sovrapposizione:

$$\sum_f |f><f|\mathcal{S}|i> \tag{4.32}$$

dove la sommatoria è estesa agli stati finali possibili $|f>$. I coefficienti di questo sviluppo $<f|\mathcal{S}|i>$ o più semplicemente $\mathcal{S}_{fi}$ formano la cosiddetta Matrice di Diffusione o "Scattering". I quadrati $|\mathcal{S}_{fi}|^2$ danno la probabilità delle transizioni a determinati stati finali $|f>$. Dopo alcuni passaggi, per il caso in cui il decadimento avvenga con la generazione di due particelle (con impulso finale $|\mathbf{p}_{01}| = |\mathbf{p}_{02}| = p_0$ ed energia ε_{01} e ε_{02} tale che

$\varepsilon_{01} + \varepsilon_{02} = m$) la probabilità di decadimento diventa:

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{32\,\pi^2\,m^2}|\mathcal{M}_{fi}|^2 p_0 \mathrm{d}\Omega_0 = \frac{1}{32\,\pi^2\,m^2}|\mathcal{M}_{fi}|^2 p_0 2\,\pi\,\sin\vartheta_0 \mathrm{d}\vartheta_0 \tag{4.33}$$

dove abbiamo esplicitato l'angolo solido dΩ.
La matrice $\mathcal{M}_{fi}$ è collegata alla matrice di diffusione $\mathcal{S}_{fi}$ tenendo conto della normalizzazione degli stati iniziali e finali, e con alcuni passaggi si può dedurre l'espressione seguente:

$$\mathcal{M}_{fi} = f_\pi \frac{\mathrm{G_F}}{\sqrt{2}}\, p_\alpha \bar{u}(\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)v(\bar{\nu}) \tag{4.34}$$

dove γ^α sono le note matrici di Pauli.

4.4.1 Caso ordinario

Considerando il decadimento del pione π e, sapendo che nel centro di massa $\alpha = 0$, si ha:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

per $\bar{u}(\mu)$ e $v(\bar{\nu})$ consideriamo le espressioni ordinarie (bradioniche) (3.28)

$$\bar{u}(\mu) = \sqrt{\varepsilon_\mu + m_\mu}\Big(\omega_\mu^*\ ;\ -\frac{2\,\lambda\,p_\mu}{\varepsilon_\mu + m_\mu}\omega_\mu^*\Big) \tag{4.36}$$

$$v(\bar{\nu}) = \sqrt{\varepsilon_\nu + m_\nu}\Big(-\frac{2\,\lambda p_\nu}{\varepsilon_\nu + m_\nu}\omega_\nu\ ;\ \omega_\nu\Big) \tag{4.37}$$

con $\omega_\nu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\omega_\mu^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

L'espressione $\bar{u}(\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)v(\bar{\nu})$ risulta essere:

$$\bar{u}(\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)v(\bar{\nu}) = 2\sqrt{\varepsilon_\mu + m_\mu}\sqrt{\varepsilon_\nu + m_\nu}\left(\frac{p_\mu}{\varepsilon_\mu + m_\mu} - \frac{p_\nu}{\varepsilon_\nu + m_\nu}\right) \tag{4.38}$$

4.4.2 Caso non ordinario

Nel caso in cui il neutrino sia una particella PT utilizziamo l'espressione (3.20):

$$\bar{u}(\mu) = \sqrt{\varepsilon_\mu + m_\mu}\left(\omega_\mu^* \ ; \ -\frac{2\,\lambda\, p_\mu}{\varepsilon_\mu + m_\mu}\omega_\mu^*\right) \tag{4.39}$$

$$v(\bar{\nu}) = \sqrt{p_\nu - 2\lambda m_\nu}\left(-\frac{2\,\lambda\varepsilon_\nu}{p_\nu - 2\lambda m_\nu}\omega_\nu \ ; \ \omega_\nu\right) \tag{4.40}$$

ed otteniamo che l'espressione $\bar{u}(\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)v(\bar{\nu})$ risulta essere:

$$\bar{u}(\mu)\gamma^\alpha(1-\gamma^5)v(\bar{\nu}) = 2\sqrt{\varepsilon_\mu + m_\mu}\sqrt{p_\nu + m_\nu}\left(\frac{p_\mu}{\varepsilon_\mu + m_\mu} - \frac{\varepsilon_\nu}{p_\nu + m_\nu}\right) \tag{4.41}$$

questi risultati vanno sostituiti nell'eq. 4.33 per ottenere un'espressione finale della probabilità di transizione in termini di quantità fisiche misurabili.

4.5 Interpretazione fisica dei risultati

I risultati dei calcoli ci portano a delle importanti considerazioni:
- nel caso il neutrino emesso dal decadimento del pione sia bradionico - detta $\widehat{E_\pi}$ l'energia di soglia (stimata essere $\simeq 4,3\,\mathrm{PeV}$ considerando una massa del neutrino pari a $m_\nu = 1\mathrm{eV}$)- si avranno due casi:
1) per energie del pione $E_\pi < \widehat{E_\pi}$ ossia per $V < v_0$ si può avere una distribuzione angolare con angolo ϑ tale che $\vartheta \in [0, \pi]$;
2) per energie del pione $E_\pi \geq \widehat{E_\pi}$ ossia per $V \geq v_0$ esiste un angolo critico $\vartheta^* \simeq 85^\circ$ oltre il quale non sono presenti neutrini bradionici; inoltre più sono alte le energie più l'angolo è piccolo e il fascio si allinea in avanti, cioè sulla direzione del fascio pionico (tab.(4.3) linea blu).
Nel caso il neutrino emesso dal decadimento del pione sia tachionico si avrà una distribuzione sia concentrata in avanti con una presenza di neutrini all'indietro (backwards) essendo l'angolo di emissione maggiore di $\pi/2$ (tab.(4.3) linea rossa).
In sintesi: con un'energia del pione $E_\pi < \widehat{E_\pi}$ (velocità $V < v_0$) si ha una distribuzione angolare analoga per particelle bradioniche e tachioniche non permettendo, quindi, una discriminazione della natura delle particelle (vedi tab.(4.3) in alto).
Per energie del pione $E_\pi \geq \widehat{E_\pi}$ si hanno stati finali con distribu-

zioni angolari differenti per i due regimi subluminale e superluminale, infatti si ha un angolo limite oltre il quale non si ha la presenza di neutrini bradionici, mentre si possono avere particelle tachioniche permettendo quindi una loro differenziazione.

4.6 Calcolo di ε e p delle particelle emesse nel Centro di Massa

Nei paragrafi precedenti abbiamo usato energia ε_0, velocità v_0, e impulso p_0; qui di seguito le *rideterminiamo* utilizzando la relazione di dispersione, la conservazione dell'energia e dell'impulso del sistema, sempre considerando il decadimento binario del pione $\pi \to \mu + \nu$. Si ritrova l'espressione dell'energia ε_0 e della velocità v_0 di entrambi i prodotti del decadimento nel centro di massa, che risultano essere univocamente determinati, sia per il caso ordinario che per quello esteso.

4.6.1 Caso ordinario

Partendo dalle condizioni

legge di dispersione ordinaria: $\varepsilon_0^2 = p_0^2 + m^2$

conservazione dell'energia: $M_\pi = \varepsilon_{0\mu} + \varepsilon_{0\nu}$

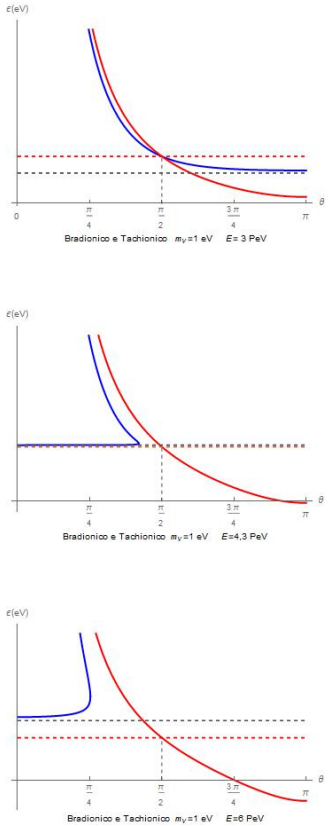


Tabella 4.3: Grafico dell'energia $\varepsilon(\vartheta)$ per neutrini bradionici (blu) e tachionici (rosso) considerando diverse energie del pione π

conservazione della quantità di moto: $\mathbf{p}_{0\mu} + \mathbf{p}_{0\nu} = 0$ con $\left|\mathbf{p}_{0\mu}\right| = \left|\mathbf{p}_{0\nu}\right| \equiv p_0$

Si considera la conservazione dell'energia, si quadra e si sostituisce la relazione di dispersione per l'energia $\varepsilon_{0\mu}$ o $\varepsilon_{0\nu}$, si evidenzia poi l'impulso p_0 che risulta essere

$$p_0 = \frac{[M_\pi^4 - 2M_\pi^2(m_\mu^2 + m_\nu^2) + (m_\mu^2 - m_\nu^2)^2]^{\frac{1}{2}}}{2M_\pi} \tag{4.42}$$

mentre l'energia $\varepsilon_{B0\nu}$ per il neutrino ν risulta

$$\varepsilon_{B0\nu} = \frac{M_\pi^2 + (m_\nu^2 - m_\mu^2)}{2M_\pi} \tag{4.43}$$

e per il muone μ

$$\varepsilon_{B0\mu} = \frac{M_\pi^2 + (m_\mu^2 - m_\nu^2)}{2M_\pi} \tag{4.44}$$

Ricordando che $v_0 = \dfrac{p_0}{\varepsilon_0}$ si avrà
per il neutrino ν

$$v_{B0\nu} = \frac{\{[M_\pi^2 - (m_\nu + m_\mu)^2][M_\pi^2 - (m_\nu - m_\mu)^2]\}^{\frac{1}{2}}}{M_\pi^2 + (m_\nu^2 - m_\mu^2)} \tag{4.45}$$

per il muone μ

$$v_{B0\mu} = \frac{\{[M_\pi^2 - (m_\nu + m_\mu)^2][M_\pi^2 - (m_\nu - m_\mu]^2)\}^{\frac{1}{2}}}{M_\pi^2 + (m_\mu^2 - m_\nu^2)} \tag{4.46}$$

4.6.2 Caso esteso

Considerando ora il caso esteso, si procede come nel caso ordinario dove si considera

legge di dispersione non ordinaria: $\varepsilon_0^2 = p_0^2 - m^2$

conservazione dell'energia: $M_\pi = \varepsilon_{0\mu} + \varepsilon_{0\nu}$

conservazione della quantità di moto: $\mathbf{p}_{0\mu} + \mathbf{p}_{0\nu} = 0$ con $|\mathbf{p}_{0\mu}| = |\mathbf{p}_{0\nu}| \equiv p_0$

Procedendo in modo analogo al caso ordinario per l'impulso si ottiene

$$p_0 = \frac{\{[M^2 + (m_\mu^2 - m_\nu^2)]^2 + 4m_\mu^2\, m_\nu^2\}^{1/2}}{2M} \tag{4.47}$$

L'energia $\varepsilon_{T0\nu}$ per il neutrino ν sarà

$$\varepsilon_{T0\nu} = \frac{M^2 - (m_\nu^2 + m_\mu^2)}{2M} \tag{4.48}$$

e per il muone μ

$$\varepsilon_{T0\mu} = \frac{M^2 + (m_\mu^2 + m_\nu^2)}{2M} \tag{4.49}$$

Ricordando ancora che $v_0 = \dfrac{p_0}{\varepsilon_0}$, si ottiene
per il neutrino ν

$$v_{T0\nu} = \frac{\{[M^2 + (m_\mu^2 - m_\nu^2)]^2 + 4m_\mu^2\, m_\nu^2\}^{1/2}}{M^2 - (m_\nu^2 + m_\mu^2)} \tag{4.50}$$

per il muone μ:

$$v_{T0_\mu} = \frac{\{[M^2 + (m_\mu^2 - m_\nu^2)]^2 + 4m_\mu^2\, m_\nu^2\}^{1/2}}{M^2 + (m_\mu^2 + m_\nu^2)} \tag{4.51}$$

Capitolo 5

Oscillazioni di sapore dei neutrini

Grazie all'intuizione di Wolfang Pauli nel 1930 è iniziata la storia del neutrino, evitando la possibilità della "non conservazione dell'energia", impopolare anche per quei tempi dai fisici. Pauli postulò in quella famosa lettera, che nel decadimento β venisse emessa anche una particella neutra oltre all'elettrone e; Enrico Fermi, studiò a fondo il processo e costruì la teoria delle interazioni deboli. Nel 1956 C.Cowan e F.Reines sono riusciti ad osservare le interazioni prodotte dai "fasci" di neutrini pro-

venineti da un potente reattore nucleare: questo è stato l'inizio di una straordinaria serie di scoperte; due anni dopo è stato supposto, e provato poco dopo, che nel decadimento β la parità veniva violata, sviluppando così la teoria a due componenti del neutrino, secondo cui questa particella ruota attorno ad un asse rappresentato dalla sua direzione in un verso opposto a quello di un cavatappi, mentre l'antineutrino ruota in verso contrario. In seguito, con il contributo fondamentale di Bruno Pontecorvo [30], si è supposta e poi verificata l'esistenza di due tipi di neutrini: *elettronico* ν_e, associato all'elettrone e nel decadimento β e *muonico* ν_μ associato al muone μ, una particella simile all'elettrone, ma instabile e con massa circa duecento volte maggiore. Di questa famiglia di particelle detta *leptoni*, fa parte un terzo componente neutro detto neutrino *tauonico* ν_τ associato ad una terza particella carica il *tauone* τ (o elettrone super-pesante); abbiamo quindi la famiglia dei leptoni "elettronici" formata da tre particelle cariche e dai loro corrispondenti neutrini. Il numero quantico che caratterizza le tre famiglie si chiama *sapore*, rispettivamente, elettronico, muonico e tauonico. Alle particelle sono associate le relative antiparticelle, dette *antileptoni*, con un numero quantico opposto a quello dei leptoni e con il valore quindi di -1. Nel Modello Standard delle interazioni deboli, questo numero viene conservato.

Un evento di grande importanza, nel campo della fisica fonda-

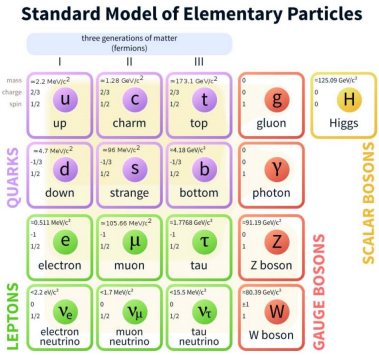


Figura 5.1: Particelle

mentale, è stato la scoperta delle oscillazioni dei neutrini, prevista, come sappiamo, da Pontecorvo [33] intorno agli annni ′60 e verificata nel 1968 per i neutrini solari; in questo caso i neutrini prodotti dai processi di fusione nucleare che hanno luogo nella zona centrale del Sole, sono la fonte di enormi energie generate da questo; il flusso di neutrini, di sapore elettronico, è così intenso che le loro pur deboli interazioni possono venire osservate in rivelatori di grande massa posti sotto un grande spessore di roccia per evitare il “rumore” prodotto dai raggi cosmici. Un esperimento pionieristico condotto negli Stati Uniti nel 1968 e quelli successivi in Giappone, Russia, Canada ed Italia (nei Laboratori

Nazionali del Gran Sasso) hanno concordemente osservato le interazionni di neutrini, indicando però un flusso inferiore di circa un terzo rispetto alle previsioni dei calcoli teorici; spiegazioine di questa assenza di neutrini deriva proprio dall'oscillazione dei neutrini stessi che, violando il sapore, si trasformano in neutrini muonici e tauonici, di conseguenza il loro flusso rilevato sulla Terra sarà inferiore a quello che ci si aspetta dal Modello Solare Standard. Queste oscillazioni, confermate da esperimenti con neutrini atmosferici, [34] da acceleratori e reattori, implicano che il numero di sapore non è conservato e che la differenza dei quadrati delle masse di due neutrini di diverso sapore è diversa da zero; questo a conferma del fatto che i neutrini posseggono massa.
Ci sono evidenze sperimentali a favore delle oscillazioni del neutrino [35].
I *neutrini atmosferici* di tipo elettronico e muonico sono prodotti nell'atmosfera terrestre dal decadimento di pioni e muoni secondo la catena:
$p + A \rightarrow \pi^{\pm}(K^{\pm}) + X$ dove $\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu})$ e ancora $\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \bar{\nu}_{\mu}(\nu_{\mu}) + \nu_{e}(\bar{\nu}_{e})$.
I pioni sono prodotti nelle interazioni dei raggi cosmici con i nuclei dell'atmosfera terrestre e i muoni sono emessi nel loro successivo decadimento. Nel 1995 l'esperimento MACRO ai Laboratori del Gran Sasso dell'INFN, studiando il flusso dei neutrini

atmosferici, aveva osservato un deficit di neutrini ν_μ provenienti da direzione antiverticale rispetto a quelli provenienti dall'alto, ma la limitata statistica non aveva permesso di concludere che l'effetto fosse dovuto ad oscillazioni di neutrini. Anche gli esperimenti Kamiokande e Soudan avevano osservato un'anomalia nel rapporto $N(\nu_\mu)/N(\nu_e)$ tra i dati e le previsioni. Nel 1998 il grande esperimento sotterraneo Super-Kamiokande, col rivelatore di 50.000 tonnellate di acqua posto in una miniera giapponese, confermò l'effetto e lo interpretò correttamente come l'effetto dovuto alle oscillazioni di neutrino. In questo esperimento i neutrini elettronici e muonici sono rivelati mediante l'osservazione di elettroni e muoni, prodotti nelle loro interazioni nucleari con nuclei del rivelatore stesso o della roccia intorno al rivelatore; in Super-Kamiokande grandi fotomoltiplicatori registrano la luce Cherenkov prodotta da elettroni e muoni nell'acqua del rivelatore.

Se non ci fossero le oscillazioni di neutrino il numero di elettroni (o muoni) di alta energia diretti verso l'alto dovrebbe essere uguale al numero di elettroni (o muoni) diretti verso il basso. In effetti il numero misurato di eventi riconducibili ad elettroni è in buon accordo con questa valutazione. Al contrario il numero di muoni *up*, ossia diretti verso l'alto, è significativamente inferiore al numero di muoni *down*, diretti verso il basso: i dati sperimentali sul numero di muoni osservati in Super-Kamiokande

forniscono un rapporto $up/down = 0,54 \pm 0.04 \pm 0.01$. L'asimmetria $up/down$ osservata si spiega in modo naturale con le oscillazini del neutrino, in quanto neutrini provenineti da direzioni antiverticali attraversano distanze comprese tra $\sim 500\,\mathrm{km}$ e $\sim 13.000\,\mathrm{km}$, mentre quelli provenienti dall'alto attraversano distanze comprese tra $\sim 20\,\mathrm{km}$ e $\sim 500\,\mathrm{km}$.
Per questo motivo i neutrini diretti verso l'alto, che hanno attraversato distanze molto più grandi rispetto a quelli diretti verso il basso, dal luogo in cui tutti i neutrini sono stati prodotti (ossia gli strati alti dell'atmosfera) al luogo in cui vengono rivelati, scompaiono in parte a causa della loro oscillazione in altri tipi di neutrini non rivelabili.
I dati dell'esperimento super-Kamiokande e quelli di altri esperimenti per lo studio dei neutrini atmosferici possono essere interpretati come oscillazioni da neutrini ν_μ a neutrini ν_τ, con parametri di oscillazioni $\Delta m^2 = 2,5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{eV}^2$ e $\sin^2 2\vartheta = 1$.
Un'altra importante evidenza sperimentale a favore delle oscillazioni del neutrino è stata ottenuta, come già si è accennato, con gli esperimenti per la rivelazione dei *neutrini solari*. E' noto che l'energia prodotta nel Sole è generata nelle parti centrali, molto calde, del Sole in seguito alle reazioni termonucleari della catena *pp* (protone-protone), e in parte del ciclo CNO (Carbonio Azoto Ossigeno), che bruciano idrogeno producendo elio, neutrini elettronici ν_e e fotoni. Quindi l'energia prodotta nel Sole

non solo viene emessa sotto forma di radiazione elettromagnetica (luce e calore), ma anche come neutrini elettronici (e solo essi), il cui flusso a Terra è facilmente calcolabile conoscendo la luminosità del Sole e la sua distanza da Terra; si ottiene così $\sim 6 \cdot 10^{10} \nu_e \, \mathrm{cm}^{-2} \, \mathrm{s}^{-1}$.
Poiché la sezione d'urto di interazione dei neutrini con la materia è molto piccola, la rivelazione dei neutrini solari è stata una vera e propria sfida. Il primo esperimento fu fatto da R.Davis; per rivelare i neutrini solari utilizzò il metodo radiochimico proposto da Pontecorvo nel 1946 ossia la reazione:

$$\nu_e + {}^{37}\mathrm{Cl} \rightarrow \mathrm{e}^- + {}^{37}\mathrm{A} \tag{5.1}$$

Per ridurre il fondo dovuto alla radiazione cosmica, l'esperimento, consistente in un serbatoio contenente 615 tonnellate di tetracloroetilene, fu collocato in una miniera alla profondità di circa 1.4 km. Il primo risultato dell'esperimento di Davis, ottenuto negli anni 1969/70 fu inaspettato: il numero di eventi misurati era tra 2 e 3 volte inferiore a quello atteso per lo stesso tempo di misura. Questo deficit di neutrini solari fu ben presto chiamato "il problema dei neutrini solari". Venne subito naturale considerare le oscillazioni del neutrino come la spiegazione più immediata; furono però necessari oltre 30 anni di ricerche per confermare l'ipotesi di Pontecorvo sulle oscillazioni del neutrino.

Nel frattempo furono costruiti altri nuovi esperimenti per la rivelazione dei neutrini solari: Kamioka, SAGE (Soviet American Gallium Experiment nel Caucaso), Gallex/GNO (Gallium Experiment, poi ampliato e chiamato Gallim Neutrino Observatory, ai Laboratori del Gran Sasso), dal 2007 vi è la raccolta dati di BOREXINO (sempre nei Laboratori del Gran Sasso), Super-Kamiokande (in Giappone, come apliamento di Kamioka e con l'aggiunta di Nucleon Decay Experiment), SNO (Sudbury Neutrino Observatory, in una miniera di nichel in Canada). Usando metodi di rivelazione diversi, con soglie di rivelazioni diverse (Fig. 5.2) è stato possibile studiare parti diverse dello spettro dei neutrini solari. In tutti questi esperimenti il flusso misurato dei ν_e è sempre stato significativamente inferiore a quello atteso. Evidenze sperimentali importanti a favore delle oscillazioni del neutrino vennero ottenute con l'esperimento SNO all'inizio degli anni 2000; i neutrini solari sono rivelati mediante l'osservazione di tre diverse reazioni:

$$\nu_e + \mathrm{d} \rightarrow \mathrm{e}^- + \mathrm{p} + \mathrm{p} \tag{5.2}$$

$$\nu_x + \mathrm{d} \rightarrow \nu_x + \mathrm{n} + \mathrm{p} \tag{5.3}$$

$$\nu_x + \mathrm{e}^- \rightarrow \nu_x + \mathrm{e}^- \tag{5.4}$$

dove ν_x rappresenta neutrini di ogni specie, ossia ν_e, ν_μ o ν_τ. La rivelazione dei neutrini mediante correnti cariche (5.2) permette di determinare il flusso dei soli ν_e a terra, mentre la reazione

delle correnti neutre (5.3) permette di determinare il flusso a Terra di neutrini di ogni specie ν_e, ν_μ e ν_τ.
L'esperimento SNO ha ottenuto un'evidenza diretta e non dipendente dai modelli della transizione dei neutrini originali ν_e prodotti nel Sole ai neutrini ν_μ e ν_τ, che non sono prodotti nel Sole. Successivamente, dal 2007 anche BOREXINO, esperimento di fisica delle particelle situato nella Sala C dei Laboratori Nazionali del Gran Sasso e costituito da un rivelatore a scintillatore liquido di grandi dimensioni, ha apportato numerose informazioni e dati sulle proprietà di neutrini solari a bassa energia.
Il lavoro che viene proposto nei prossimi paragrafi riguarda l'estensione della teoria di Bruno Pontecorvo e della teoria CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) [37] sulle oscillazioni di sapore del neutrino studiando come cambiano le frequenze e lunghezze di oscillazione. *Per neutrini a massa quadrata negativa si sono trovate consistenti deviazioni dalle oscillazioni di sapore dei neutrini ordinari solo nella propagazione in materia.*
Nel 1986, i fisici sovietici Stanislav Mikheyev e Alexei Smirnov hanno aggiunto un tassello importante al complesso mosaico di conoscenze sul comportamento dei neutrini: sviluppando una teoria del fisico teorico Lincoln Wolfenstein, hanno formulato l'ipotesi, ora nota come effetto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW), secondo cui la presenza di un gran numero di elettroni negli oggetti densi come il Sole e la Terra avrebbe potuto influen-

zare i tassi di oscillazione dei neutrini tra sapori. In altre parole, secondo la previsione di Mikheyev, Smirnov e Wolfstein, il tasso di oscillazione di neutrini che viaggiano nello spazio sarebbe diverso rispetto al tasso di oscillazione di neutrini che attraversano materiali assai densi, ossia sarebbe diversa la velocità con cui i neutrini cambiano "sapore"; questo comporta che i neutrini nella materia abbiano masse efficaci diverse rispetto ai neutrini nel vuoto, e poiché le oscillazioni di neutrino dipendono dalla differenza delle masse al quadrato dei neutrini, le oscillazioni dei neutrini possono essere diverse nella materia rispetto al vuoto. L'effetto MSW si formalizza introducendo nella matrice di evoluzione temporale due potenziali efficaci V, uno elettronico V_e ed uno muonico V_μ, che descrivono, mediamente, l'interazione debole tra i rispettivi sapori e la materia. Il potenziale efficace V_e (V_μ) risulta proporzionale all'ampiezza di scattering in avanti del neutrino elettronico (muonico) e alla densità della materia con cui interagisce. Assumendo che l'interazione del fascio neutrinico con il mezzo attraversato sia descrivibile con il solo potenziale elettronico V_e ($V_\mu \sim 0$), si individua la relazione tra gli angoli di mixing nel vuoto e nella materia. Dalle relazioni ottenute si osserva che la "risonanza dell'angolo di mixing" ϑ, tipica dell'effetto MSW, è presente solo per i neutrini bradionici ($m^2 > 0$), mentre per quelli tachionici ($m^2 < 0$) l'angolo di mixing in materia è sempre minore di quello nel vuoto, decrescendo

al crescere dell'energia E e della densità elettronica del mezzo (via V_e). La probabilità di transizione in materia tra neutrino elettronico e muonico risulta diversa quindi per neutrini ordinari e non ordinari non solo tramite il fattore costante $\sin^2 2\vartheta$, ma anche per il fattore oscillante nel tempo. Inoltre, per neutrini ordinari, la frequenza di oscillazione in materia risulta minima alla risonanza, mentre per neutrini non ordinari risulta sempre maggiore rispetto al vuoto. Tutto questo nel caso di materia omogenea.

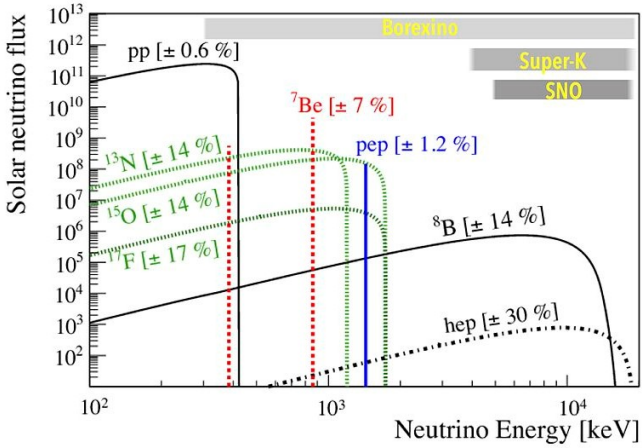


Figura 5.2: Flusso a terra di neutrini solari

5.1 Oscillazioni nel vuoto

Analizziamo il caso di oscillazioni di sapore nel vuoto, partendo dalle equazioni di Pontecorvo.
L'hamiltoniana "di massa" è quella usuale per i fermioni di Dirac:

$$H = m_1 \, \overline{\nu}_1 \nu_1 + m_2 \, \overline{\nu}_2 \nu_2 \, . \tag{5.5}$$

Se gli autostati di massa sono sovrapposizioni ortonormali degli autostati di sapore:

$$\begin{cases} |\nu_1\rangle = \cos\vartheta_{\rm v} |\nu_e\rangle - \sin\vartheta_{\rm v} |\nu_\mu\rangle \\ \\ |\nu_2\rangle = \sin\vartheta_{\rm v} |\nu_e\rangle + \cos\vartheta_{\rm v} |\nu_\mu\rangle \, , \end{cases} \tag{5.6}$$

allora l'hamiltoniana può essere riscritta come segue:

$$H = m_e \, \overline{\nu}_e \nu_e + m_\mu \, \overline{\nu}_\mu \nu_\mu + m_x \left(\overline{\nu}_\mu \nu_e + \overline{\nu}_e \nu_\mu \right) , \tag{5.7}$$

con le seguenti posizioni:

$$\begin{cases} m_x = (m_2 - m_1) \, \sin\vartheta_{\rm v} \cos\vartheta_{\rm v} \\ m_e = m_1 \cos^2\vartheta_{\rm v} + m_2 \sin^2\vartheta_{\rm v} \\ m_\mu = m_1 \sin^2\vartheta_{\rm v} + m_2 \cos^2\vartheta_{\rm v} \, . \end{cases} \tag{5.8}$$

Si ha anche:

$$\begin{cases} \sin 2\vartheta_{\rm v} = \dfrac{2m_x}{m_2 - m_1} \\ \\ \cos 2\vartheta_{\rm v} = \dfrac{m_\mu - m_e}{m_2 - m_1} \\ \\ \tan 2\vartheta_{\rm v} = \dfrac{2m_x}{m_\mu - m_e}\,, \end{cases} \tag{5.9}$$

ed ancora:

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = m_e + m_\mu \\ |m_1 - m_2| = \sqrt{(m_\mu - m_e)^2 + 4m_x^2}\,. \end{cases} \tag{5.10}$$

Definiamo secondo la convenzione standard la "differenza quadratica di massa": $\triangle m^2 \equiv m_1^2 - m_2^2$. Se, come in genere si assume, la massa del sapore muonico è maggiore di quella del sapore elettronico, $m_\mu > m_e$, allora dalla seconda delle (5.9) si ottiene

$$\triangle m^2 \cos 2\vartheta_{\rm v} < 0 \tag{5.11}$$

sempre, qualunque sia il valore di $\vartheta_{\rm v}$, sia che $m_1 > m_2$, sia che $m_1 < m_2$. Gli autostati di sapore si esprimono rispetto alla base $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$ come segue:

$$\begin{cases} |\nu_e\rangle = \cos\vartheta_{\rm v}|\nu_1\rangle + \sin\vartheta_{\rm v}|\nu_2\rangle \\ \\ |\nu_\mu\rangle = -\sin\vartheta_{\rm v}|\nu_1\rangle + \cos\vartheta_{\rm v}|\nu_2\rangle\,. \end{cases} \tag{5.12}$$

Se al tempo $t = 0$ il neutrino è prodotto o osservato via interazione debole come elettronico (ad es.)

$$|\nu(0)\rangle = |\nu_e\rangle = \cos\vartheta_{\rm v}|\nu_1\rangle + \sin\vartheta_{\rm v}|\nu_2\rangle\,, \tag{5.13}$$

al tempo generico t avremo:

$$|\nu(t)\rangle = {\rm e}^{-iE_1t}\,\cos\vartheta_{\rm v}|\nu_1\rangle + {\rm e}^{-iE_2t}\,\sin\vartheta_{\rm v}|\nu_2\rangle\,, \tag{5.14}$$

ovvero, sostituendovi le (5.12),

$$|\nu(t)\rangle = [{\rm e}^{-iE_1t}\,\cos^2\vartheta_{\rm v}+{\rm e}^{-iE_2t}\,\sin^2\vartheta_{\rm v}]\,|\nu_e\rangle+\sin\vartheta_{\rm v}\cos\vartheta_{\rm v}\,[{\rm e}^{-iE_2t}-{\rm e}^{-iE_1t}]\,|\nu_\mu\rangle\,. \tag{5.15}$$

L'energia $E \sim k \gg m$ per velocità vicine a c può essere così approssimata:

$$E = \sqrt{k^2 \pm m^2} \sim k \pm \frac{m^2}{2k}\,, \tag{5.16}$$

dove il segno superiore si riferisce ai neutrini ordinari bradionici (BR's) e quello inferiore ai neutrini pseudotachionici (PT's). Di conseguenza, la probabità di transizione $\nu_e \to \nu_\mu$ al tempo t, $|\langle\nu(t)|\nu_e\rangle|^2$, di un neutrino inizialmente elettronico sarà data da:

$$\boxed{P_{\nu_e\to\nu_\mu}(t) = \sin^2\vartheta_{\rm v}\,\sin^2\frac{\triangle m^2}{4k}t} \tag{5.17}$$

sia per i BR's *che per i* PT's. Identica espressione si ha per la $P_{\nu_\mu\to\nu_e}$ se lo stato iniziale è $(\psi(0) = |\nu_\mu\rangle$. Poiché $x \sim t$, al

punto x della traiettoria avremo:

$$P_{\nu_e \to \nu_\mu}(x) = \sin^2 2\vartheta_{\rm v} \, \sin^2 \frac{\pi}{L} x \,, \tag{5.18}$$

dove la "lunghezza caratteristica delle oscillazioni" è definita come

$$L = \frac{4\pi k}{\triangle m^2} \,. \tag{5.19}$$

Si possono riottenere gli stessi risultati anche "alla Heisenberg". Lo stato del neutrino si esprime rispetto alla base $|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle$ tramite le ampiezze relative:

$$\psi(t) \equiv a_e(t)|\nu_e\rangle + a_\mu(t)|\nu_\mu\rangle \equiv \begin{pmatrix} a_e(t) \\ a_\mu(t) \end{pmatrix} \,; \tag{5.20}$$

cosicché l'evoluzione temporale è governata dall'equazione

$$i\,\partial_t \psi = H\,\psi \,, \tag{5.21}$$

con la seguente matrice di evoluzione

$$H \equiv \begin{pmatrix} E_e & E_x \\ E_x & E_\mu \end{pmatrix} \,. \tag{5.22}$$

I coefficienti della matrice sono così definiti:

$$\begin{cases} E_x = (E_2 - E_1)\, \sin\vartheta_{\rm v} \cos\vartheta_{\rm v} \\ E_e = E_1 \cos^2\vartheta_{\rm v} + E_2 \sin^2\vartheta_{\rm v} \\ E_\mu = E_1 \sin^2\vartheta_{\rm v} + E_2 \cos^2\vartheta_{\rm v} \,. \end{cases} \tag{5.23}$$

I termini diagonali si riferiscono ai rispettivi sapori, mentre quelli antidiagonali esprimono l'energia dell'"interazione di mixing" dei due sapori. Dalle (5.23) si ha:

$$\begin{cases} \sin 2\vartheta_{\rm v} = \dfrac{2E_x}{E_2 - E_1} \\[2ex] \cos 2\vartheta_{\rm v} = \dfrac{E_\mu - E_e}{E_2 - E_1} \\[2ex] \tan 2\vartheta_{\rm v} = \dfrac{2E_x}{E_\mu - E_e}\,. \end{cases} \tag{5.24}$$

L'angolo $\vartheta_{\rm v}$ è praticamente uguale a quello che compare nelle (5.8-5.9) perché, essendo $E \sim k \pm m^2/2k$ e [per la prima delle (5.10)] $m_2 + m_1 = m_\mu + m_e$,

$$\cos 2\vartheta_{\rm v} = \frac{E_\mu - E_e}{E_2 - E_1} = \frac{m_\mu^2 - m_e^2}{m_2^2 - m_1^2} = \frac{(m_\mu + m_e)(m_\mu - m_e)}{(m_2 + m_1)(m_2 - m_1)} = \frac{m_\mu - m_e}{m_2 - m_1}\,, \tag{5.25}$$

cioé si riottiene la seconda delle (5.9). Risolvendo l'equazione del moto (5.21) otteniamo, in accordo con la (5.15) si ha che:

$$\begin{cases} |a_e(t)\rangle = [{\rm e}^{-iE_1 t}\cos^2\vartheta_{\rm v} + {\rm e}^{-iE_2 t}\sin^2\vartheta_{\rm v}]a_e(0) + \sin\vartheta_{\rm v}\cos\vartheta_{\rm v}[{\rm e}^{-iE_2 t} - {\rm e}^{-iE_1 t}]a_\mu(0) \\[2ex] |a_\mu(t)\rangle = \sin\vartheta_{\rm v}\cos\vartheta_{\rm v}[{\rm e}^{-iE_2 t} - {\rm e}^{-iE_1 t}]a_e(0) + [{\rm e}^{-iE_1 t}\sin^2\vartheta_{\rm v} + {\rm e}^{-iE_2 t}\cos^2\vartheta_{\rm v}]a_\mu(0). \end{cases} \tag{5.26}$$

5.2 Oscillazioni nella materia

L'effetto Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein si formalizza introducendo nella matrice di evoluzione temporale *in vacuum* due "potenziali efficaci", uno elettronico ed uno muonico, che descrivono, mediamente, l'interazione debole tra i rispettivi sapori e la materia

$$H^{\mathrm{m}} \equiv \begin{pmatrix} E_e^{\mathrm{m}} & E_x \\ E_x & E_\mu^{\mathrm{m}} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} E_e^{\mathrm{v}} + V_e & E_x \\ E_x & E_\mu^{\mathrm{v}} + V_\mu \end{pmatrix} \tag{5.27}$$

(dove $E_x^{\mathrm{m}} = E_x^{\mathrm{v}}$; "m" sta per "in materia", "v" sta per "in vacuum"). Si ha, di conseguenza:

$$H^{\mathrm{m}} \equiv \begin{bmatrix} E_1^{\mathrm{m}} \cos^2 \vartheta_{\mathrm{M}} + E_2^{\mathrm{m}} \sin^2 \vartheta_{\mathrm{M}} & (E_2^{\mathrm{m}} - E_1^{\mathrm{m}}) \sin \vartheta_{\mathrm{M}} \cos \vartheta_{\mathrm{M}} \\ (E_2^{\mathrm{m}} - E_1^{\mathrm{m}}) \sin \vartheta_{\mathrm{M}} \cos \vartheta_{\mathrm{M}} & E_1^{\mathrm{m}} \sin^2 \vartheta_{\mathrm{M}} + E_2^{\mathrm{m}} \cos^2 \vartheta_{\mathrm{M}} \end{bmatrix} \equiv$$

$$\begin{bmatrix} E_1^{\mathrm{v}} \cos^2 \vartheta_{\mathrm{v}} + E_2^{\mathrm{v}} \sin^2 \vartheta_{\mathrm{v}} + V_e & (E_2^{\mathrm{v}} - E_1^{\mathrm{v}}) \sin \vartheta_{\mathrm{v}} \cos \vartheta_{\mathrm{v}} \\ (E_2^{\mathrm{v}} - E_1^{\mathrm{v}}) \sin \vartheta_{\mathrm{v}} \cos \vartheta_{\mathrm{v}} & E_1^{\mathrm{v}} \sin^2 \vartheta_{\mathrm{v}} + E_2^{\mathrm{v}} \cos^2 \vartheta_{\mathrm{v}} + V_\mu \end{bmatrix}, \tag{5.28}$$

dove ϑ_{M} indica l'angolo di mixing in presenza di materia interagente con i neutrini. Il potenziale efficace V_e (V_μ) risulta proporzionale alla ampiezza di scattering "in avanti" del neutrino elettronico (muonico) e alla densità dei componenti della

materia che lo diffondono. Come al solito abbiamo:

$$\begin{cases} \sin 2\vartheta_{\mathrm{M}} = \dfrac{2E_x}{E_2^{\mathrm{m}} - E_1^{\mathrm{m}}} \\[2ex] \cos 2\vartheta_{\mathrm{M}} = \dfrac{E_\mu^{\mathrm{m}} - E_e^{\mathrm{m}}}{E_2^{\mathrm{m}} - E_1^{\mathrm{m}}} \\[2ex] \tan 2\vartheta_{\mathrm{M}} = \dfrac{2E_x}{E_\mu^{\mathrm{m}} - E_e^{\mathrm{m}}} \end{cases} \tag{5.29}$$

Poiché, per quanto sopra, si ha

$$E_\mu^{\mathrm{m}} - E_e^{\mathrm{m}} = (E_2^{\mathrm{m}} - E_1^{\mathrm{m}}) \cos 2\vartheta_{\mathrm{M}} = (E_2^{\mathrm{v}} - E_1^{\mathrm{v}}) \cos 2\vartheta_{\mathrm{v}} + V_\mu - V_e \,, \tag{5.30}$$

e, per la prima delle (5.24), $\frac{2E_x}{E_2^{\mathrm{v}} - E_1^{\mathrm{v}}} = \sin 2\vartheta_{\mathrm{v}}$, la relazione cercata tra gli angoli di mixing nel vuoto e nella materia è la seguente:

$$\tan 2\vartheta_{\mathrm{M}} = \frac{2E_x}{(E_2^{\mathrm{v}} - E_1^{\mathrm{v}}) \left(\cos 2\vartheta_{\mathrm{v}} + \dfrac{V_\mu - V_e}{E_2^{\mathrm{v}} - E_1^{\mathrm{v}}} \right)} = \frac{\sin 2\vartheta_{\mathrm{v}}}{\cos 2\vartheta_{\mathrm{v}} + \dfrac{V_\mu - V_e}{E_2^{\mathrm{v}} - E_1^{\mathrm{v}}}} \,. \tag{5.31}$$

Essendo $\sin\alpha = \tan\alpha / \sqrt{1 + \tan^2\alpha}$, possiamo scrivere anche

$$\sin 2\vartheta_{\mathrm{M}} = \frac{\sin 2\vartheta_{\mathrm{v}}}{\sqrt{\left(\cos 2\vartheta_{\mathrm{v}} + \dfrac{V_\mu - V_e}{E_2^{\mathrm{v}} - E_1^{\mathrm{v}}} \right)^2 + \sin^2 2\vartheta_{\mathrm{v}}}} \,. \tag{5.32}$$

In genere si assume che l'interazione del fascio neutrinico con il mezzo attraversato sia descrivibile approssimativamente con il solo potenziale elettronico: $V_\mu = 0$. Il potenziale efficace V_e è positivo, cioè di tipo repulsivo, perché descrive la diffusione dei ν_e da parte degli elettroni del mezzo. Nel caso considerato quasi-relativistico l'equazione (5.32) può porsi come segue:

$$\sin 2\vartheta_{\mathrm{M}} = \frac{\sin 2\vartheta_{\mathrm{V}}}{\sqrt{\left(\cos 2\vartheta_{\mathrm{V}} \pm 2k\dfrac{V_e}{\triangle m^2}\right)^2 + \sin^2 2\vartheta_{\mathrm{V}}}} \tag{5.33}$$

o anche come rapporto tra i seni ($r = 1$ nel vuoto)

$$r \equiv \frac{\sin 2\vartheta_{\mathrm{M}}}{\sin 2\vartheta_{\mathrm{V}}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\cos 2\vartheta_{\mathrm{V}} \pm 2k\dfrac{V_e}{\triangle m^2}\right)^2 + \sin^2 2\vartheta_{\mathrm{V}}}} \tag{5.34}$$

[il segno superiore si riferisce sempre ai neutrini ordinari bradionici e quello inferiore ai neutrini pseudotachionici]. Poiché per la (5.11) il segno relativo di $\cos 2\vartheta_{\mathrm{V}}$ e di $\triangle m^2$ è sempre negativo, la (5.34) può essere posta nel seguente modo:

$$r = \frac{1}{\sqrt{\left(|\cos 2\vartheta_{\mathrm{V}}| \mp 2k\dfrac{V_e}{|\triangle m^2|}\right)^2 + \sin^2 2\vartheta_{\mathrm{V}}}} \tag{5.35}$$

Avremo quindi la "risonanza dell'angolo di mixing", tipica dell'*effetto MSW*, solo per i neutrini ordinari, mentre per quelli pseudotachionici l'angolo di mixing in materia è sempre minore di quello

nel vuoto, decrescendo al crescere della densità elettronica del mezzo (via V_e). Per i bradioni la risonanza si ha per il "resonant potential":

$$V_{\rm res} = \frac{|\triangle m^2 \cos 2\vartheta_{\rm V}|}{2k} \,. \tag{5.36}$$

Poiché, come appare dalle (5.27-5.28), l'energia di mixing non dipende dall'ambiente attraversato

$$E_x = (E_2^{\rm m} - E_1^{\rm m}) \sin\vartheta_{\rm M} \cos\vartheta_{\rm M} = (E_2^{\rm V} - E_1^{\rm V}) \sin\vartheta_{\rm V} \cos\vartheta_{\rm V} \tag{5.37}$$

avremo, con la approssimazione $E \sim k \pm m^2/2k$,

$$\triangle m_{\rm m}^2 \sin 2\vartheta_{\rm M} = \triangle m_{\rm v}^2 \sin 2\vartheta_{\rm V} \,, \tag{5.38}$$

dove $\triangle m_{\rm m}^2 \equiv ({m_1}_{\rm m}^2 - {m_2}_{\rm m}^2)$, e $\triangle m_{\rm v}^2 \equiv ({m_1}_{\rm v}^2 - {m_2}_{\rm v}^2)$. Inoltre dalla (5.30) similmente si ottiene

$$\triangle m_{\rm m}^2 \cos 2\vartheta_{\rm M} = \triangle m_{\rm v}^2 \cos 2\vartheta_{\rm V} \pm 2kV_e \,. \tag{5.39}$$

Quadrando e sommando membro a membro le ultime due uguaglianze, si ottiene la relazione che lega la differenza quadratica di massa dei neutrini nella materia e nel vuoto

$$\triangle m_{\rm m}^2 = \sqrt{(|\triangle m_{\rm v}^2 \cos 2\vartheta_{\rm V}| \mp 2kV_e)^2 + (\triangle m_{\rm v}^2 \sin^2 2\vartheta_{\rm V})^2} \,. \tag{5.40}$$

Tenendo conto delle (5.33) e (5.40), abbiamo alla fine per la probabilità di transizione in materia $\nu_e \to \nu_\mu$ al tempo t di un

neutrino inizialmente elettronico:

$$P^{\mathrm{m}}_{\nu_e\to\nu_\mu}(t) = \sin^2 2\vartheta_{\mathrm{M}}\,\sin^2\frac{\triangle m^2_{\mathrm{m}}}{4k}t =$$

$$\frac{\sin^2\vartheta_{\mathrm{v}}}{\left(|\cos 2\vartheta_{\mathrm{v}}| \mp 2k\dfrac{V_e}{|\triangle m^2_{\mathrm{v}}|}\right)^2 + \sin^2 2\vartheta_{\mathrm{v}}}\,\sin^2\frac{\sqrt{(|\triangle m^2_{\mathrm{v}}\cos 2\vartheta_{\mathrm{v}}| \mp 2kV_e)^2 + (\triangle m^2_{\mathrm{v}}\sin 2\vartheta_{\mathrm{v}})^2}}{4k}t \tag{5.41}$$

Vediamo che tale probabilità risulta diversa per BR's e PT's non solo tramite il fattore costante $\sin^2 2\vartheta_{\mathrm{M}}$, ma anche per il fattore oscillante nel tempo: *per neutrini BR la frequenza di oscillazione risulta minima alla risonanza, mentre per neutrini PT essa nella materia risulta sempre maggiore che nel vuoto.* Infatti il rapporto f tra la frequenza in materia e la frequenza nel vuoto è dato da

$$f = \sqrt{\left(|\cos 2\vartheta_{\mathrm{v}}| \mp 2k\frac{V_e}{|\triangle m^2_{\mathrm{v}}|}\right)^2 + \sin^2 2\vartheta_{\mathrm{v}}}\,. \tag{5.42}$$

Ovviamente, la legge di evoluzione temporale (5.41) vale solo nel caso più semplice e non realistico di mezzo omogeneo e quindi potenziale efficace costante. Occorrerebbe studiare le differenze tra le oscillazioni dei neutrini BR e PT per densità del mezzo attraversato variabili da punto a punto, con $V = V(t)$.

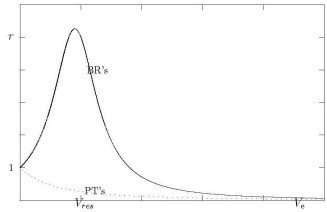


Figura 5.3: La "risonanza dell'angolo di mixing" ϑ, tipica dell'effetto MSW, è presente solo per i neutrini ordinari ($m^2 > 0$); per i neutrini non ordinari ($m^2 < 0$) l'angolo di mixing $\vartheta_m m < \vartheta_v$ decrescendo al crescere dell'energia E e della densità elettronica del mezzo (con V_e)

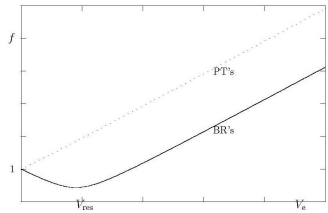


Figura 5.4: Per neutrini ordinari la frequenza in materia risulta minima alla risonanza; per neutrini non ordinari risulta sempre maggiore rispetto al vuoto

Capitolo 6

Conclusioni

La natura dei neutrini rimane oggi piuttosto controversa e merita ulteriori studi teorici e nuove indagini sperimentali.
Negli esperimenti che coinvolgono i neutrini sono state osservate deviazioni dalla cinematica ordinaria e dalla relatività speciale. In particolare, tali particelle sembrano, in alcuni casi, essere dotate di massa quadratica negativa.
Inoltre dati raccolti da numerosi esperimenti negli ultimi anni (Aseev, Kraus, Lobashev, Weinheimer, Belesev, Hiddemann, Stoeffl, Sun, Holzschuh, Kawakami, Robertson) sullo studio del decadimento β del trizio, come evidenziato dal più recente Particle Data Group danno come valore medio per la massa del

neutrino al quadrato una quantità negativa, $m_\nu^2 = (-0.6 \pm 1.9)$ eV^2.
La difficoltà di rilevare la differenza di velocità rispetto a c dipende dal fatto che, ad oggi, sperimentalmente, è possibile rivelare solo neutrini ad alta energia e quindi con velocità prossime a c. E'utile pertanto considerare altre grandezze cinematiche che potrebbero mostrare una netta differenza tra usuali masse quadratiche positive e la masse quadratiche negative dei neutrini. In particolare, possiamo teoricamente prevedere l'energia di neutrini emessi nel decadimento binario di pioni o kaoni in funzione dell'angolo di emissione.
I risultati dei nostri calcoli ci portano a delle importanti considerazioni: nel caso si abbia un'energia del pione $E_\pi < \widehat{E_\pi}$ (dove $\widehat{E_\pi}$ è un'energia di soglia che si è stimata essere per esempio circa uguale a 4.3 PeV per masse neutriniche dell'ordine di 1 eV) e una velocità $V < v_0$ si avrà una distribuzione angolare analoga per particelle bradioniche e tachioniche sia "in avanti" che "indietro" non permettendo, quindi, una discriminazione della natura delle particelle.
Questa teoria prevede stati finali con distribuzioni angolari differenti per i due regimi subluminale e superluminale quando l'energia del fascio pionico incidente supera una certa energia di soglia $\widehat{E_\pi}$; per i bradioni, con $V \geq v_0$ vi è un angolo limite che risulta essere minore di $\pi/2$. Oltre questo angolo i neutrini

bradionici non possono essere osservati; inoltre più sono alte le energie più l'angolo è piccolo e il fascio si allinea in avanti, cioè sulla direzione del fascio pionico.
Per particelle tachioniche, proprio per l'ipotesi fatta, avremo un unico caso da considerare: $V \leq v_0$; per qualunque energia del pione E_π sia minore che maggiore dell'energia di soglia $\widehat{E_\pi}$ si avrà una distribuzione angolare più concentrata in avanti con anche una presenza di neutrini superluminali all'indietro (backwards) essendo possibile una distribuzione angolare con $\vartheta \in [0; \pi]$ (tab.(4.3)).
Per rendere questo studio più quantitativo e quindi meglio confrontabile con i dati sperimentali sarebbe utile completare lo studio della determinazione della probabilità di distribuzione angolare con il calcolo della matrice di diffusione $\mathcal{M}_{fi}$ che dovrebbe permettere di quantificare il numero di eventi di neutrini ordinari e non ordinari.
Altro aspetto che sarebbe opportuno approfondire è l'espressione della distribuzione angolare dell'energia delle particelle emesse nel decadimeto non rispetto al sistema di riferimento del centro di massa, ma rispetto al sistema del laboratorio per poter avere quantità fisiche più direttamente misurabili.
Interessante risulterebbe inoltre considerare il decadimento binario del kaone dove la principale e sostanziale differenza risulta essere nel valore della massa della particella.

Appendice A

Pontecorvo il neutrino e le oscillazioni

"Come fisico, credo di aver avuto un po' di fantasia"
Bruno Pontecorvo

Bruno Pontecorvo, nato a Pisa nel 1903, in una famiglia di origine ebrea benestante, con una tendenza a produrre persone geniali, è il quarto di otto figli. A dicioitto anni, terminato il biennio di ingegneria a Pisa, decide di iscriversi alla facoltà di Fisica, e su suggerimento del fratello Guido, sostiene il colloquio a Roma, dove viene esaminato da Enrico Fermi e Franco Raset-

ti; questi vogliono organizzare un gruppo di lavoro sulla nuova fisica, e con il soprannome di "cucciolo" Bruno entra a far parte dei "ragazzi di via Panisperna".
E' ancora uno studente quando si imbatte per la prima volta nei neutrini. Si tratta di una ipotetica particella della cui esistenza, nel 1930, ha parlato il fisico teorico austriaco Wolfgang Pauli, associandola a un fenomeno radioattivo noto come "decadimento beta". Pauli la chiama "neutrone". Così quando, nel 1932 l'inglese James Chadwik annuncia di averlo scoperto il "neutrone", Pontecorvo e gli altri ragazzi che frequentano l'Istituto di Fisica lì, a Via Panisperna, chiedono a Fermi se quello dell'inglese sia il "neutrone" ipotizzato da Pauli. "No - risponde Fermi - i neutroni di Chadwick sono grandi e pesanti. I neutroni di Pauli sono piccoli e leggeri; essi devono essere chiamati neutrini"; ma Fermi non si limita a rinominare i piccoli e leggeri neutrini. Nel 1934 effettua quello che Bruno Pontecorvo chiamerà il "debutto nel campo della fisica nucleare pura" e pubblica la sua importantissima teoria del decadimento beta, con cui non solo "sistema" il neutrino nel suo giusto ambito fisico, ma dimostra l'esistenza di una nuova forza fondamentale della natura, l'interazione debole, accanto alle due fino ad allora note: la forza di gravità e la forza elettromagnetica. Il 1934 è anche l'anno in cui il gruppo di fisici inizia a bombardare i nuclei atomici con i neutroni di Chadwik. È la tecnica che farà di Roma, per almeno quattro anni, la "capi-

tale mondiale della fisica nucleare". E Bruno Pontecorvo è, con Fermi e Rasetti, ma anche con Edoardo Amaldi ed Emilio Segré, collaboratore della migliore fisica nucleare al mondo. Il gruppo ottiene anche la fissione dell'atomo di uranio, ma la interpreta diversamente. Pontecorvo e Fermi oltre al grande Majorana, sono gli unici a mostrare le doti e le attitudini dei (grandi) fisici teorici, oltre che dei (grandi) fisici sperimentali. Nell'estate successiva Bruno, insieme a Edoardo Amaldi, continua gli esperimenti. E si accorge che quando i neutroni attraversano un filtro di paraffina sono cento volte più efficaci del solito nel provocare la radioattività dell'argento. Fermi spiega che i neutroni sono moderati, ovvero *rallentati*, dagli atomi di idrogeno della paraffina e, quindi, hanno una maggiore probabilità di incontrare i nuclei dell'elemento irradiato e di renderlo attivo. Il motivo è che i neutroni lenti riescono a rimanere "nelle vicinanze del nucleo per un tempo sufficientemente lungo da aumentare la loro probabilità di essere riassorbiti". Di nuovo una grande scoperta. Bruno non ha ancora 21 anni ed è già entrato nella storia della fisica. Per la partecipazione al nuovo esperimento, Bruno ottiene un premio dal Ministero per l'Educazione Nazionale, grazie al quale nel 1936 si reca a Parigi, con una raccomandazione di Fermi, per lavorare con Frédéric e Irène Joliot-Curie, che si accingono a ricevere il premio Nobel per la scoperta della radioattività artificiale. A Parigi Bruno, oltre a farsi notare per

le sue doti di scienziato, si fa notare per il suo fisico sportivo da grande giocatore di tennis, e proprio nella capitale francese incontra la giovane svedese Marianne Nordblom che diviene dopo poco tempo sua moglie e da cui avrà presto il primo figlio Gil; a Parigi nel clima del Front Populaire e della guerra di Spagna comincia a interessarsi di politica. Dopo l'entrata in vigore delle leggi razziali del 1938 Pontecorvo, ebreo e comunista, deve restare (raggiunto dal fratello minore Gillo a cui più era legato) in Francia. Nel settembre del '39 scoppia la guerra e nel giugno del '40, contemporaneamente all'invasione di Parigi da parte delle truppe tedesche, l'Italia prende parte al conflitto mondiale. Per gente come Pontecorvo comincia ormai a non esserci più posto nel Vecchio Continente e così decide di lasciare la Francia; scappa prima in Spagna dove in seguito raggiunge gli Stati Uniti. Nell'agosto del 1940 è con la famiglia a Tulsa, nell'Oklahoma, dove lavora in una compagnia petrolifera in cui mette a punto una tecnica di introspezione dei pozzi petroliferi basata sul tracciamento di neutroni - il cosiddetto carotaggio neutronico dei pozzi di petrolio - che rappresenta la prima applicazione della scoperta delle proprietà dei neutroni lenti fatta all'Istituto di via Panisperna. Negli Stati Uniti, probabilmente a causa delle sue idee comuniste, non viene coinvolto nel Progetto Manhattan per la costruzione della bomba atomica e così nel '43 si trasfersce in Canada dove viene chiamato dai labora-

tori di Montreal e poi di Chalk River a partecipare a ricerche teoriche nel campo dei raggi cosmici, delle particelle elementari ad alta energia, in particolare dei neutrini e del decadimento del muone. Nel 1946 perfeziona un metodo radiochimico, basato sulla trasmutazione cloro-argon, per cercare di catturare i neutrini provenienti dal Sole, ma il neutrino è una particella estremamente elusiva e catturarlo non è semplice. La tecnica di Pontecorvo non è perfetta, ma partendo dalla reazione studiata dal fisico italiano, verso la fine degli anni Sessanta nella miniera di Homestake negli Stati Uniti, per iniziativa di Raymond Davis (premio Nobel per la Fisica nel 2002), ha inizio l'esperimento che porta alla cattura dei neutrini solari e per primo a una stima del loro numero. Fra il 1944 e il 1945 Marcello Conversi, Ettore Pancini e Oreste Piccioni portano a termine (in una cantina dell'Istituto di Fisica) un esperimento di estrema importanza - che da' il via alla cosiddetta Fisica delle particelle elementari - nel quale viene identificata una particolare particella presente nei raggi cosmici: il mesotrone (detto oggi mesone μ o muone). Il muone appare come un elettrone duecento volte più pesante, instabile e con una vita abbastanza corta (prodotto nell'alta atmosfera "vive" il tempo necessario per arrivare sulla Terra viaggiando quasi alla velocità della luce) che però una volta morto non si disintegra in un elettrone e un fotone ma solamente in un elettrone. Questo elettrone inoltre non possiede un'energia ben

definita ma assortita in un intervallo continuo, il che significa che il muone si deve dividere in un elettrone e in almeno altre due particelle neutre invisibili alle strumentazioni. In questo ambito, nel ′47 Pontecorvo è tra i primi a dedurre, servendosi delle teorie di Enrico Fermi che avevano introdotto i neutrini nelle interazioni deboli, che la cattura del muone da parte del nucleo atomico, proprio come la cattura dell'elettrone, produce neutrini. Dunque l'interazione debole scoperta da Fermi si rivolge ad un ambito molto più generale di quello del decadimento β. Inoltre Pontecorvo, sulla scia delle intuizioni di Ettore Majorana e Gian Carlo Wick, ipotizza che i due neutrini prodotti dal muone siano di natura diversa, uno come partner fisso del muone primario, l'altro come partner dell'elettrone. A questo punto Bruno Pontecorvo si propone come uno dei più grandi esperti al mondo di Fisica del neutrino. Nel 1948, dopo aver ottenuto la cittadinanza britannica, Pontecorvo, su invito del fisico John Cockcroft (che nel 1932, insieme all'irlandese Ernest Walton, ottiene la disintegrazione dei nuclei di litio e boro mediante protoni accelerati, esperimento che è valso loro il Nobel nel ′51) si trasferisce ad Harwell nei pressi di Oxford. Qui ha sede l'Atomic Energy Research Establishment, il principale centro di ricerche nucleari installato dal governo inglese, dove Pontecorvo partecipa al progetto per la costruzione della bomba atomica inglese e si dedica agli studi sui raggi cosmici. Nell'estate del 1950 lo

scienziato, insieme a sua moglie e ai suoi tre figli, lascia la casa di Abington, nei pressi di Harwell, senza avvertire nessuno. Ogni ricerca è vana e in Parlamento sono convinti che si trovi in Russia. Entrati in Unione Sovietica e giunti a Mosca, Pontecorvo (presto chiamato universalmente Bruno Maksimovich in URSS) dopo pochi mesi viene trasferito a Dubna, città a un centinaio di chilometri dalla capitale dove risiede l'aristocrazia della Fisica sovietica; qui gli viene affidata la direzione della divisione di Fisica sperimentale del Laboratorio dei Problemi Nucleari e qui maturano le sue fondamentali ricerche nella Fisica delle particelle elementari e, successivamente, in astrofisica. Dal $'54$ al $'57$ si dedica all'interazione di pioni (mesoni più leggeri) con i nuclei e, in una pubblicazione del 1959 per primo dimostra per via teorica l'esistenza di diversi tipi di neutrini (come ipotizzato nel $'47$) associati ai leptoni carichi (elettroni e muoni) le cui differenti proprietà sono rilevabili. Con questo risultato nasce la Fisica dei neutrini ad alta energia. Benché l'acceleratore di particelle di Dubna sia fra i più potenti al mondo, non è adatto a provare i risultati di Pontecorvo. Soltanto pochi anni dopo, agli inizi degli anni Sessanta, gli americani Leon Ledermann, Melvin Schwartz e Jack Steinberger confermano sperimentalmente le ipotesi del fisico italiano. Questa scoperta è valso ai tre fisici il premio Nobel per la Fisica nel 1988 per "il metodo del fascio di neutrini e la dimostrazione della struttura doppia dei

leptoni attraverso la scoperta del neutrino muone", suscitando lo scalpore di una parte della comunità scientifica internazionale per l'esclusione del fisico teorico che per primo ha effettuato la previsione. In questi anni Pontecorvo propone anche un metodo per rivelare gli antineutrini prodotti nei reattori nucleari; questa tecnica è utilizzata con successo nel 1956 a Savannah River negli Stati Uniti da Frederick Reines (che per questo esperimento ricevette nel 1995 il Nobel). Cittadino sovietico dal 1952, l'anno seguente riceve il Premio Stalin e dal '58 è ammesso all'Accademia sovietica delle scienze. Soltanto nel 1955 torna ad apparire in pubblico in occasione di una conferenza stampa nella sede dell'Accademia, in cui il fisico racconta la sua vicenda e le motivazioni dell'adesione al modello comunista. Tra il 1957 e il 1967 Pontecorvo pubblica sul Soviet Journal Experimental and Theoretical Physics l'articolo "Mesonium and Anti-Mesonium" in cui elabora la teoria del mescolamento leptonico. I leptoni sono particelle subatomiche suddivise in tre famiglie: gli elettroni, i muoni e i tauoni (quest'ultima sconosciuta da Pontecorvo perchè individuata soltanto nella seconda metà degli anni '70 da Martin Lewis Perl) a cui è associato un particolare neutrino. A ciascun doppietto di leptoni viene assegnato un numero leptonico - che tiene conto dei neutrini associati alle particelle - che viene rigorosamente conservato (cioè la somma dei numeri leptonici di ogni famiglia nello stato iniziale è uguale alla somma dei numeri

leptonici nello stato finale) in tutte le interazioni. Però secondo la teoria elaborata da Pontecorvo i diversi tipi di neutrini, nel vuoto, possono "oscillare" ossia trasformarsi gli uni negli altri e quindi avere una massa, seppure molto piccola. Questo fenomeno - noto come "oscillazione dei neutrini" - è stato verificato per i neutrini solari nel 1968 ed è stato fecondo di sviluppi. Parzialmente confermato nel '98 con l'esperimento Super-Kamiokande, svolto nella miniera giapponese di Kamioka, che ha mostrato con una certa attendibilità la presenza di trasformazioni di neutrini atmosferici μ, e confermato con gli esperimenti del 2010 condotti dai Laboratori dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare del Gran Sasso sui fasci di neutrini prodotti da acceleratori (si è osservata in particolare l'oscillazione dei neutrini muonici in neutrini τ) con l'esperimento Opera. Per molti anni Pontecorvo non può lasciare l'URSS e riesce a ritornare la prima volta in Italia nel 1978 in occasione del settantesimo compleanno di Edoardo Amaldi; in quello stesso anno sono comparsi i primi sintomi del morbo di Parkinson che progressivamente, senza mai togliergli lucidità, gli intralcerà i movimenti. Dopo qualche anno torna a stabilirsi a Roma a casa della sorella Laura; sono anni difficili per il Pontecorvo "comunista": una perdita di fiducia nei dogmi e negli ideali di una vita intera, la disillusione e il rammarico per la fine dell'Unione Sovietica. In un'intervista con Miriam Mafai alla domanda della giornalista se si fosse pentito

della scelta fatta quarant'anni prima, Pontecorvo risponde: "Ci ho pensato molto, a questa domanda. Puoi immaginare quanto ci ho pensato. Ma non riesco a dare una risposta". L'amore per la sua seconda patria non lo abbandona e così nel '93 vuole tornare a Dubna. Qui, a causa del Parkinson, subisce una brusca caduta dalla bicicletta e si rompe il femore; decide di curarsi a Roma, ma il suo fisico non regge lo stress e muore a Dubna il 24 settembre 1993. Bruno Pontecorvo è stato il massimo scienziato nel campo della Fisica dei neutrini e tutte le teorie e ipotesi da lui esposte si sono rivelate corrette; ma è stato anche un protagonista del Novecento, degli anni della guerra fredda, dominati da passioni ingenue e da certezze sfrontate. Anche dopo la sua morte il fisico non ha avuto una sola patria e per sua volontà metà delle ceneri sono state sepolte nel cimitero di Dubna e l'altra metà riposano nel cimitero acattolico di Roma.
Sulla pietra tombale di Bruno Pontecorvo nel Cimitero degli Inglesi a Roma compare la scritta: "$\nu_\mu \neq \nu_e$" .

Appendice B

Esperimenti Neutrini

B.1 Decadimento β

Negli otto decenni di ricerche sperimentali sulla massa del neutrino, il trizio è stato il nucleo β-attivo scelto dagli sperimentatori perché ha un'energia endpoint bassa e di consegenza rende più evidente, e quindi più facilmente rilevabile, la massa del neutrino che assume un valore, in percentuale, leggermente maggiore rispetto allo spettro totale. Nel decadimento β del trizio l'elettrone e il neutrino condividono l'energia disponibile in modo statistico, e in una piccola frazione dei decadimenti l'elettrone possiede quasi tutta l'energia a meno di alcuni eV riservati

alla massa a riposo del neutrino; lo spazio delle fasi, per l'elettrone vicino all'endpoint, viene quindi modificato dalla massa del neutrino. I risultati sperimentali sul decadimento del trizio sono ottenuti tramite spettrometri elettrostatici a focalizzazione magnetica.
Si ricorda che per massa a riposo s'intende la misura della massa di un corpo che risulta costante per qualsiasi sitema di riferimento; questa può essere determinata note la sua energia totale e la sua quantità di moto. Per definizione, la massa a riposo di un sistema di particelle è pari all'energia totale del sistema divisa per la costante c^2, solo se l'osservatore si trova in un sistema di riferimento inerziale, che "minimizza" l'energia totale del sistema di particelle; in questo sistema di riferimento, la velocità del centro di massa e la quantità di moto totale sono pari a zero (questo sistema prende anche il nome di "sistema di centro della quantità di moto").

B.1.1 Mainz

L'esperimento Mainz vuole individuare il valore della massa dell'antineutrino elettronico. Il periodo in cui si sviluppa l'esperimento va dal $1992 - 1993$ in cui si ha una prima campagna di raccolta di dati al $1999 - 2000$ con una seconda raccolta di dati; nell'intervallo tra i due periodi sono state apportate importanti modifiche alla strumentazione, che hanno permesso di raggiun-

gere una più alta sensibilità nelle misurazioni effettuate nella seconda batteria di raccolta dei dati (vedi Fig.B.1). Per poter

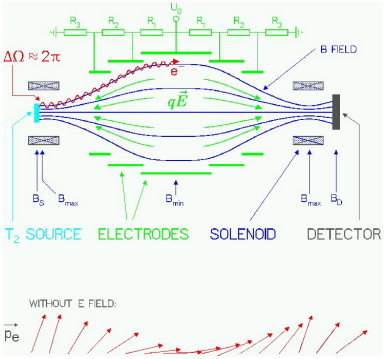


Figura B.1: Esperimento Mainz: schema della struttura nelle prima versione

rilevare la massa dell'antineutrino elettronico, misurando la regione del punto finale dello spettro di decadimento del trizio, è essenziale uno spettrometro che sia, tanto ad alta risoluzione energetica, quanto ad alta luminosità. A Mainz è stato sviluppato un tipo di spettrometro appositamente per questo scopo. Si chiama MAC-E-Filter dalla collimazione adiabatica magnetica seguita da un filtro elettrostatico. Le caratteristiche principali sono illustrate nella figura B.1: due solenoidi superconduttori

(contrassegnati come rettangoli con croci all'interno) producono un campo di guida magnetico. Gli elettroni, che partono dalla sorgente triticale (rettangolo blu chiaro) nel solenoide sinistro nell'emisfero anteriore, sono guidati magneticamente lungo un movimento ciclotronico attorno alle linee del campo magnetico (linee blu) nello spettrometro, risultando così un angolo solido di quasi 2 sterad. Mentre le particelle si dirigono verso il centro dello spettrometro, il campo magnetico cala di quasi 4 ordini. Pertanto la forza del gradiente magnetico trasforma la maggior parte dell'energia del ciclotrone in movimento longitudinale. Questo è illustrato nella parte inferiore della figura dal vettore di quantità di moto. A causa del campo magnetico che varia lentamente, la quantità di moto si trasforma adiabaticamente, quindi il momento magnetico rimane costante:

$$\mu = \frac{E_\perp}{B} = cost$$

Riassumendo questa trasformazione: gli elettroni, emessi isotropicamente alla fonte, vengono diffusi in modo che volano quasi parallelamente alle linee del campo magnetico. Questo fascio parallelo di elettroni attraversa una zona con un potenziale elettrostatico costituito da un sistema di elettrodi cilindrici (verde nella figura B.1). Tutti quegli elettroni, che hanno abbastanza energia per passare la barriera elettrostatica, sono riaccelerati e collimati su un rivelatore; tutti gli altri elettroni sono rifles-

si. Pertanto lo spettrometro funge da filtro di passaggio ad alta energia integrativo. La "nitidezza relativa" di questo filtro è data solo dal rapporto tra il campo magnetico minimo nel piano medio e il campo magnetico massimo tra la sorgente di elettroni e lo spettrometro:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{B_{min}}{B_{max}}$$

Scansionando il potenziale ritardante elettrostatico è possibile misurare lo spettro. Come fonte di trizio, il Mainz Neutrino Mass Experiment utilizza un film di trizio elettromagnetico condensato sul subtrato di grafite (HOPG). Il film ha un diametro di 17 mm su uno spessore tipico di 40 nm, che viene misurato mediante ellissiometria laser. Negli anni 1995 – 1997 l'installa-

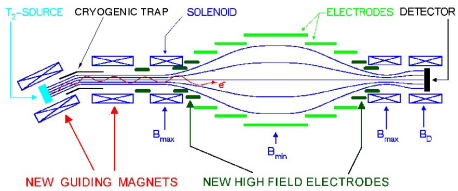


Figura B.2: Esperimento Mainz: schema della struttura nelle seconda versione

zione di Mainz è stata aggiornata. Una nuova coppia di solenoidi superconduttori è stata installata tra la sorgente di trizio e lo

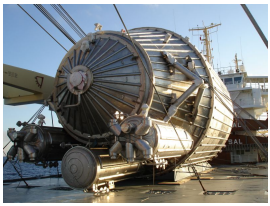
spettrometro (figura B.2). Con il suo criostato a LHe l'interno viene raffreddato, disaccoppia il vuoto di entrambe le parti del setup e gli elettroni della sorgente sono guidati magneticamente dietro l'angolo senza perdite. Al contrario, le molecole di trizio, che evaporano dalla sorgente e che prima producevano la maggior parte del fondo, ora sono congelate dalla criocamera. Come secondo miglioramento sostanziale, un nuovo criostato ora fornisce temperature del film triturato inferiori a 2 K per evitare una transizione di irruvidimento del film, che era un problema delle precedenti misurazioni di Mainz. Il processo di irruvidimento è un processo di diffusione superficiale attivato dalla temperatura, pertanto sono necessarie basse temperature per ottenere costanti di tempo molto più lunghe della durata della misurazione. Il film è mantenuto ad una temperatura di $1,86$ K in poche centinaia di Kelvin per diversi mesi. La totale automazione degli apparati e il controllo a distanza consente di eseguire misure a lungo termine osiia per diversi mesi all'anno. [39]

B.1.2 Katrin

KATRIN è un acronimo tedesco (Ka-rlsruhe Tri-tium Neutrino Experiment); l'obiettivo principale dell'esperimento è la misurazione della massa dell'antineutrino elettronico, con una precisione dell'ordine del sub-eV, esaminando lo spettro di elettroni emessi dal decadimento beta del trizio. KATRIN è stato

realizzata grazie al laboratorio TLK, il Karlsruhe Tritium Laboratory, che è il laboratorio prototipo per l'International Thermonuclear Experimental Reactor ITER. La struttura dell'esperimento si trova nell'ex Forschungszentrum Karlsruhe, ora Campus Nord di l'Istituto di tecnologia di Karlsruhe. Lo spettrometro, nucleo dell'apparato, è stato costruito dalla MAN DWE GmbH a Deggendorf, a soli 350 km da Karlsruhe, ma le dimensioni del serbatoio (ben 200 tonnellate) erano tali da rendere impossibile il trasporto via terra; fu spedito via acqua, lungo il Danubio fino al Mar Nero, attraverso il Mar Mediterraneo e l'Oceano Atlantico fino ad Anversa, quindi attraverso il Reno fino a Karlsruhe. Questa deviazione lunga ben 8600 km ha consentito di percorrere gli ultimi 7 km dai bacini di Leopoldshafen al laboratorio. La costruzione è proseguita bene con alcuni dei componenti principali in loco entro il 2010. Il programma di test dello spettrometro principale è stato effettuato nel 2013 e l'integrazione completa del sistema nel 2014. Nel 2015, le misurazioni di messa in servizio su questo spettrometro sono state completate, verificando con successo le proprietà di base del vuoto, della trasmissione e dello sfondo. L'esperimento ha iniziato a eseguire test a ottobre 2016, con misurazioni programmate nel 2017 ma, per problemi tecnici, ad oggi (estate 2018) non sono ancora iniziate le misurazioni.

STRUTTURA



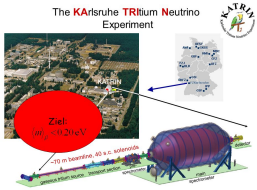


Tabella B.1: Katrin: Spettrometro struttura e trasporto

La struttura dell'esperimento KATRIN è formata da sette sottosistemi principali (vedi Fig.B.3), una fonte di trizio gassoso, il sistema di trattamento e ricircolo del trizio, una sezione di pompaggio differenziale, una sezione di pompaggio del gelo criogenico Ar, un pre-spettrometro, uno spettrometro principale e il sistema di rivelazione.

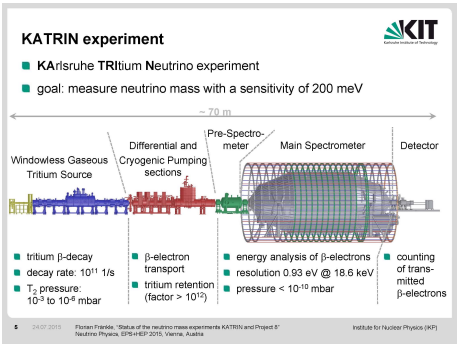


Figura B.3: Struttura dell'Esperimento Katrin

FONTE di TRIZIO La fonte molecolare gassosa è costituita da un tubo di 9 cm di diametro e 10 m di lunghezza mantenuto alla temperatura desiderata (27 K) mediante circolazione di Ne a due fasi. Un campo magnetico assiale di $3,6$ T guida gli elettroni verso gli spettrometri. Il sistema criogenico è stato costruito con

strumenti di ricerca per prestazioni termiche specifiche, compresa la regolazione della temperatura di circa 30 mK, e in effetti raggiunge circa i 4 mK. I solenoidi vengono forniti da Bruker Advanced Superconductors. I 10 kg di trizio isotopicamente e chimicamente purificati vengono immessi in un circolo chiuso.

SEZIONE DI POMPAGGIO DIFFERENZIALE Un'ulteriore riduzione della pressione del trizio si ottiene in questa sezione, che consiste in un tubo con una "chicane" in una serie di solenoidi superconduttori a foro caldo prodotti da Cryomagnetics Inc.

SEZIONE DI POMPAGGIO CRIOGENICO Ogni atomo di trizio che fuoriesce dalla sezione di pompaggio differenziale viene intrappolato nella parte detta "Ar frost", che forma un'efficiente area, chimicamente inerte e immune alle radiazioni di superficie. Il CPS è in fase di completamento presso Ansaldo Superconduttori.

PRE-SPETTROMETRO Ci sono due spettrometri in tandem in KATRIN, entrambi a potenziali ritardanti. Il pre-spettrometro funziona con un potenziale di cutoff tipicamente di 100 eV sotto l'endpoint, impedendo alla maggior parte degli elettroni di raggiungere lo spettrometro principale.

SPETTROMETRO PRINCIPALE Lo spettrometro principale è un grande recipiente in acciaio inossidabile di 10 m di diametro e 24 m di lunghezza lunghezza. La camera da 200 tonnellate è

stata fabbricata a Deggendorf da MAN-DWE e spedita tramite una lunga via d'acqua a Karlsruhe. Fu messa nel suo edificio il 29 novembre 2006. Per completare la struttura della griglia interna, sono state installate 1000 m di strisce NEG; l'installazione di deflettori raffreddati ad azoto liquido è avvenuta nel 2012, la messa in servizio del dispositivo è iniziato nel maggio 2013.

RIVELATORE Gli elettroni che superano le barriere di potenziale negli spettrometri entrano in una regione di campo magnetico e sono rilevati in un array di diodi PIN Si monolitici di 148 pixel da 10 cm di diametro. Due solenoidi superconduttori possono produrre fino a 6 T, definendo il diametro della traiettoria dell'elettrone e l'angolo di beccheggio massimo accettato dalla sorgente. I magneti sono stati prodotti da Cryomagnetics, Inc. e dal rilevatore di Canberra. Tra i solenoidi vi è una regione in cui i vari dispositivi di calibrazione – sorgenti gamma e un elettrone fotoemissivo pistola – possono essere inseriti. Selezione di materiali, schermatura e un "veto" attivo sono stati adottati per mantenere sufficientemente bassi i rumori non associati alla traiettoria [3, 40].

ESPERIMENTO

Il decadimento beta del trizio è uno dei decadimenti beta meno energetici. L'elettrone e il neutrino che vengono emessi condividono solo 18, 6 keV di energia tra di loro. KATRIN è progettato

per produrre uno spettro molto preciso del numero di elettroni emessi con energie molto vicine a questa energia totale (a pochi eV di distanza), che corrispondono a neutrini a energia molto bassa. Se il neutrino è una particella senza massa, non vi è limite inferiore all'energia che il neutrino può trasportare, quindi lo spettro di energia degli elettroni dovrebbe estendersi fino al limite di $18,6\,\mathrm{keV}$. D'altra parte, se il neutrino ha massa, allora deve sempre portare via almeno la quantità di energia equivalente alla sua massa di $E = mc^2$, e lo spettro di elettroni dovrebbe scendere al di sotto del limite di energia totale e avere un diverso valore. Nella maggior parte degli eventi di decadimento beta, l'elettrone e il neutrino portano via quantità di energia approssimativamente uguali. Gli eventi di interesse per KATRIN, in cui l'elettrone prende quasi tutta l'energia e il neutrino quasi nessuna, sono molto rari, accadendo all'incirca una volta in un trilione di decadimenti. Per filtrare gli eventi comuni in modo che il rilevatore non sia saturato, gli elettroni devono passare attraverso un potenziale elettrico che blocca tutti gli elettroni al di sotto di una certa soglia, che è impostata a pochi eV sotto il limite di energia totale. Vengono così rilevati e contati solo gli elettroni che hanno abbastanza energia per passare attraverso il potenziale.

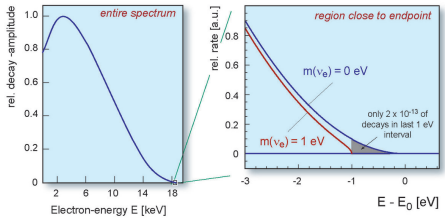


Figura B.4: Katrin: grafico intervallo di osservazione

B.2 Produzione e Rivelazione di neutrini

In laboratorio si possono produrre neutrini dal decadimento di particelle. Il pione carico $\pi^{\pm}$, per esempio, decade principalmente nel seguente modo:

$$\pi^+ \longrightarrow \bar{\mu}^+ + \nu_\mu \qquad\qquad \pi^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

dove π rappresenta il pione, l'esponente indica la carica elettrica, μ è il muone (negativo) e l'anti-muone (positivo) e ν i rispettivi neutrini. Per produrre pioni positivi π^+ si prende un fascio di protoni, lo si accelera e lo si fa collidere contro un bersaglio composto da una qualche sostanza (un metallo o un gas)

ottendendo una reazione del tipo:

$$p + p \longrightarrow p + n + \pi^+ + ...$$

dove p sta per protone, n per neutrone, π per pione e i puntini di sospensione stanno a indicare che spesso ci sono anche altre particelle (adroni, o magari fotoni), che non è essenziale considerare. Quindi graficamente si ottiene la fig.(B.5):

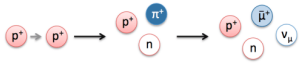


Figura B.5: collisione di protoni, produzione di pioni e loro decadimento

Il problema è che si vuole un fascio di soli neutrini, non un fascio di protoni, neutroni, muoni e neutrini, più magari qualche pione residuo che non è ancora decaduto oltre a eventuali antineutrini prodotti dal decadimento di pioni carichi negativamente, inoltre si vuole evitare che gli antimuoni a loro volta decadano in positroni e neutrini elettronici, contaminando il fascio di neutrini muonici con una frazione di neutrini di altro sapore. Non potendo deviare la traiettoria dei neutrini (i quali, per inerzia, tenderanno a proseguire nella direzione del fascio di protoni iniziale) si dovranno:

1) eliminare le particelle emerse dalla collisione cariche negativamente, che potrebbero decadere in muoni e antineutrini, deviandole con un campo magnetico rispetto alla direzione de fascio. Questo campo magnetico ha anche la funzione di focalizzare i pioni carichi positivamente, selezionando quelli con un'energia adatta a generare i neutrini dell'energia che interessa;
2) lasciare viaggiare il fascio per una distanza sufficiente a far decadere abbastanza pioni positivi in antimuoni e neutrini, ma allo stesso tempo non troppo lunga da permettere agli antimuoni di decadere a loro volta in positroni e neutrini elettronici.
3) quando si ha una quantità adeguata di pioni decaduti, far collidere il fascio contro un "muro" sufficientemente spesso da fermare tutte le particelle rimaste tranne i neutrini (protoni, neutroni, muoni, pioni e altri adroni).
Esiste una correlazione tra l'energia e il tempo di impatto dei protoni del fascio principale con l'energia e il tempo di "partenza" dei neutrini prodotti, questa correlazione non è banale e necessità di uno studio approfondito in merito.
Si può osservare il grafico sintetico del processo di generazione del fascio nella fig.(B.6).

B.2.1 Opera

OPERA (Oscillation Project with Emulsion-tRacking Apparatus) è un esperimento di fisica delle alte energie progettato

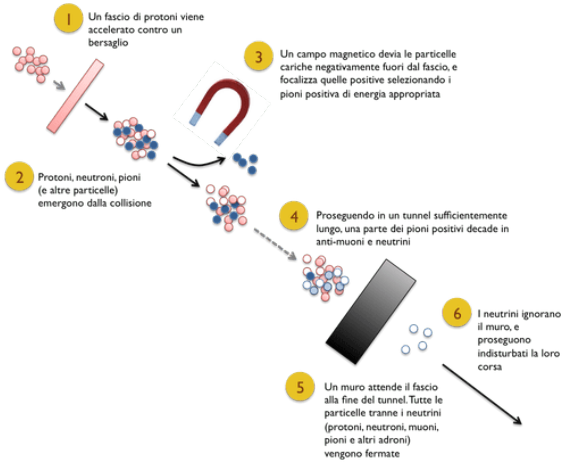


Figura B.6: Schema produzione fascio di neutrini

per studiare le oscillazioni dei neutrini muonici in neutrini tauonici. È una collaborazione tra il CERN di Ginevra e i Laboratori Nazionali del Gran Sasso e usa il fascio di neutrini CNGS (CERN Neutrinos to Gran Sasso). Il fascio di neutrini muonici viene prodotto nell'acceleratore SPS del CERN dove un fascio di protoni viene accelerato per poi colpire un bersaglio di carbonio. In questa fase vengono prodotti pioni e kaoni che, decadendo, danno origine a muoni e neutrini muonici. Per indirizzare i neu-

trini, il fascio di mesoni viene focalizzato mediante una tromba magnetica.
La collaborazione internazionale dell'esperimento OPERA ha presentato il 22 maggio scorso, nel corso di un seminario ai Laboratori Nazionali del Gran Sasso LNGS dell'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare INFN, i risultati finali (Phys.Rev.Lett. 120211801) dei suoi cinque anni di osservazione dei neutrini prodotti con il progetto CNGS Il progetti è stato realizzato per verificare il fenomeno della trasformazione dei neutrini muonici misurando con il rivelatore Opera l'apparizione di neutrini tau dopo il loro viaggio dal Cern ai Laboratori sotterranei del Gran Sasso. Nei suoi risultati finali Opera riporta un totale di dieci eventi significativi della trasformazione dei neutrini da muonici in tau. I neutrini muonici prodotti al CERN tra il 2008 e il 2012 con il fascio CNGS raggiungevano i Laboratori INFN del Gran Sasso dopo aver percorso 730 km attraverso la crosta terrestre, in $2,4$ millisecondi. Al loro arrivo erano rivelati dall'esperimento Opera, un apparato di circa 4.000 tonnellate di massa complessiva, situato nella Hall C dei laboratori sotterranei del Gran Sasso, è stato costruito tra il 2003 e il 2008. Il tauone che risulta dall'interazione di un neutrino tauonico viene osservato nelle emulsioni nucleari contenute in rivelatori (dal peso di $8,3$ kg) che sono intervallate da fogli di piombo. I due supermoduli di Opera contengono 150.000 rivelatori disposti su

muri paralleli intervallati da scintillatori plastici. Ogni supermodulo è seguito da uno spettrometro magnetico per misurare la quantità di moto e la carica della particella entrante. Durante la presa dati, l'interazione di un neutrino e il suo rivelatore corrispondente sono individuati in tempo reale dagli scintillatori e dagli spettrometri. Questi rivelatori vengono poi estratti dai muri per lo sviluppo delle emulsioni, la scansione e la ricerca topologica e cinematica dei decadimenti del tauone.
La collaborazione Opera ha osservato il primo evento di oscillazione di un neutrino muonico in uno tau nel 2010, seguito da quattro eventi rivelati tra il 2012 e il 2015; negli ultimi anni, grazie a una nuova strategia di analisi applicata all'intero campione di dati raccolto tra il 2008 e il 2012(il periodo in cui è stato attivo il fascio dal CERN ai Laboratori del Gran Sasso), sono stati identificati dieci eventi candidati.

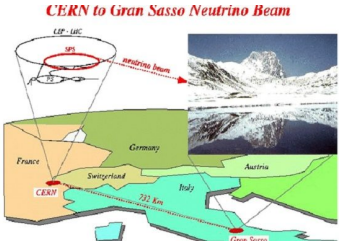


Figura B.7: Opera

B.2.2 Dune

Un esperimento di fisica delle particelle che mira a trasformare la comprensione dei neutrini e il loro ruolo nell'universo. Gli ultimi sviluppi nell'acceleratore di particelle e nella tecnologia dei rivelatori rendono possibili promettenti nuovi esperimenti nella scienza dei neutrini. La collaborazione Deep Neutrino Experiment Underground, che comprende circa 800 scienziati provenienti da 26 paesi, ha proposto di costruire un esperimento sui neutrini leader a livello mondiale che implichi la costruzione presso il Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab), situato a Batavia, Illinois, e la Sanford Underground Research Facility (Sanford Lab) a Lead, South Dakota. Si presume di utilizzare l'acceleratore del principale iniettore del Fermilab per produrre neutrini e inviarli attraverso la terra a un rivelatore di particelle situato a circa $1,5\,\mathrm{km}$ sotterraneo nel Sanford Underground Research Facility, nel South Dakota. I neutrini viaggerebbero per circa 1.290 km dall'Illinois al South Dakota dritto attraverso la terra. La linea del neutrino LBNF, già presente nei laboratori del Fermilab, guiderebbe i protoni dall'acceleratore Main Injector del Fermilab su una piccola collina per puntare il raggio nel terreno, verso il Laboratorio di Sanford. I protoni si schianterebbero in un pezzo di grafite. I neutrini che emergono da queste collisioni andrebbero in un tunnel lungo circa 200 m viaggiando nella stessa direzione dei protoni. Ci sarà

una sala sotterranea vicino al rivelatore del Deep Underground Neutrino Experiment per misurare la composizione del fascio di neutrini quando lascia il Fermilab. Viaggiando con una velocità prossima a quella della luce, i neutrini lascerebbero il Fermilab a una profondità di circa 60 m, continuando dritto e arrivando ai Laboratori di Sanford, in una frazione di un secondo. Il rivelatore sarebbe riempito con argon liquido che, per rimanere tale deve essere raffreddato, saranno necessarie apparecchiature criogeniche per mantenere l'argon ($\approx -200^o$ C). Il rivelatore di particelle registrerebbe l'arrivo dei neutrini misurando le rare interazioni tra i neutrini e gli atomi di argon, trasmettendo i segnali ai computer per la memorizzazione e l'analisi. Ci vorrà circa un decennio per raccogliere dati sufficienti per fare studi attendibili ed eventuali scoperte. DUNE ha importanti obiettivi: misurare le oscillazioni del neutrino, cercare neutrini provenienti dall'esplosione di stelle per scoprire, ad esempio, la formazione di un buco nero, cercare la particella di decadimento del protone interazioni che ci avvicinerebbero alla realizzazione di uno dei sogni di Einstein ossia di avere una grande teoria unificata.

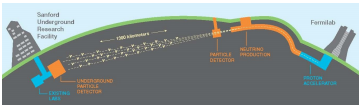


Figura B.8: DUNE

B.2.3 Kamiokande e la sua evoluzione

L'interazione di un neutrino con gli elettroni o i nuclei dell'acqua può produrre una particella carica che si muove più veloce della luce nell'acqua (ma ovviamente, più lentamente della luce nel vuoto). Questo fatto genera un lampo di luce dovuto alla radiazione Cherenkov, che è l'equivalente ottico del boom sonico. Questo lampo genera tracce distintive di luce che vengono registrate e forniscono informazioni sulla direzione e il sapore del neutrino incidente.
La costruzione dell'osservatorio sotterraneo di Kamioka, "Kamioka Observatory, Institute for Cosmic Ray Research" dell'Università di Tokyo iniziò nel 1982 e venne completata nell'aprile del 1983. Lo scopo dell'osservatorio era di investigare la stabilità della materia, una delle questioni fondamentali nel campo della fisica delle particelle elementari.
L'osservatorio era posto a 1.000 m sotto terra nella miniera Mozumi situata a Kamioka-Cho, Gifu, Giappone. Il rivelatore (KAMIOKANDE: Kamioka Nucleon Decay Experiment) era un serbatoio contenente 3.000 tonnellate di acqua pura corredato da circa 1.000 tubi fotomoltiplicatori (PMT) attaccati alla superficie interna. Le dimensioni del serbatoio erano di 16 m in altezza e $15,6$ m di diametro. I fotomoltiplicatori raccoglievano le luci blu tenue, chiamate luci di Cherenkov, emesse dalle particelle cariche che attraversano l'acqua a velocità superiori a quelle del-

la luce (nell'acqua).
Un aggiornamento del rivelatore venne eseguito nel 1985 per poter osservare i neutrini, di origine cosmica oltre che studiare il decacdimento dei protoni. Super-Kamiokande consiste di un ammasso di 50.000 tonnellate di acqua ultrapura, circondato da 11.146 tubi fotomoltiplicatori. La struttura cilindrica in acciaio misura $41,4\,\mathrm{m}$ di altezza e $39,3\,\mathrm{m}$ di diametro.
Come risultato, il rivelatore divenne altamente sensibile e riuscì a rivelare i neutrini provenienti dalla supernova $A1987$ esplosa nella Grande Nube di Magellano nel febbraio del 1987.
Hyper-Kamiokande (HK) sarà la prossima generazione di rivelatori di acqua Cherenkov su larga scala. Si prevede un ordine di grandezza maggiore rispetto al suo predecessore, il Super-Kamiokande (SK), con il design ottimale costituito da due serbatoi dotati di fotosensori ad altissima sensibilità. Il rivelatore Hyper-Kamiokande è sia un "microscopio", usato per osservare particelle elementari, sia anche un "telescopio" per osservare il Sole e le supernove, usando i neutrini. Il progetto Hyper-Kamiokande ha molti obiettivi di fisica: dallo studio della violazione di CP nel settore leptonico e dai parametri di miscelazione del neutrino al decadimento del protone, dai neutrini atmosferici e dai neutrini di origine astronomica. La collaborazione Hyper-Kamiokande è attualmente composta da membri di istituti provenienti da 13 paesi in 3 diversi continenti.

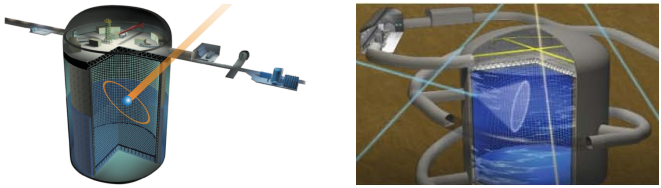


Figura B.9: Super-Kamiokande e Iper-Kamiokande

B.2.4 IceCube

L'IceCube Neutrino Detector è un rivelatore di neutrini costruito presso una installazione scientifica nel Polo Sud. Allo stesso modo del suo predecessore, l'AMANDA, IceCube viene costruito immergendo nel ghiaccio antartico, ad una profondità che varia tra $1,45\,\mathrm{Km}$ e $2,45\,\mathrm{km}$, dei rivelatori a geometria sferica nei quali sono alloggiati dei fotomoltiplicatori (PMT). Tali sensori sono disposti in pozzi verticali di sessanta moduli ognuno. I pozzi vengono costruiti usando un "trapano" a forma di cono che spruzza acqua calda.
Lo scopo del progetto consiste nella rivelazione di neutrini di alta energia. Come è noto i neutrini non sono rivelabili direttamente. Tuttavia, il raro, seppur possibile, evento di collisione tra un neutrino ed un atomo che compone il ghiaccio antartico, produce altre particelle che a loro volta vengono rivelate direttamente dai rivelatori dell'IceCube. Ciò permette, dopo

una faticosa elaborazione dei dati acquisiti, di poter ricostruire i parametri cinematici dei neutrini incidenti. Le stime attuali prevedono l'individuazione di circa un migliaio di eventi di questo tipo al giorno in tutto il sito del rivelatore. A causa della elevata densità del ghiaccio, quasi tutti i prodotti della collisione iniziale saranno muoni. Pertanto l'esperimento è più sensibile al flusso di neutrini muonici. La maggior parte di questi neutrini sono generati dall'interazione dei raggi cosmici con i nuclei dell'atmosfera terrestre, ma una frazione non nota di questi, potrebbe avere origini astronomiche. Per distinguere le due fonti si prendono in considerazioni analisi di natura statistica sulla direzione e l'angolo di entrata dei neutrini nel ghiaccio. Molto grossolanamente si può affermare che un neutrino proveniente dall'alto ha maggior probabilità di essere stato prodotto dalla penetrazione dello sciame di raggi cosmici nell'atmosfera; mentre, quei neutrini che provengono dal basso (dal fondo del mare) hanno una probabilità maggiore di avere una origine diversa.

Figura B.10: IceCube

Bibliografia

[1] Particle Data Group, Chin. Phys.: Aggiornamento **C40**, 100001 (2016 e 2017)

[2] S.Mertens et al. (KATRIN Collaboration): Physics Procedia **62** (2015) 267-273

[3] R.G.Hamish Robinson, physics.ins-det ArXiv 1307.5486

[4] J.M.Carmona, J.L. Cortes: Phys. Lett. **B494** (2000) 75-80

[5] E.Giannetto, G.D.Maccarrone, R.Mignani, E.Recami: Phys.Lett. **B178** (1986) 115-120

[6] M.Sisti: Incontri di Fisica delle Alte Energie Italian Meeting on High Energy Physics Napoli, 11-13 April 2007

[7] O.M.Bilaniuk - V.K.Deshpande - E.C.G.Sudarshan: Am.J.Phys. **30** (1962) 718; 1969 Proc. Indian Acad. Sci.,

69, 133; Ark. Fiz. **39**, (1969)585; in Symposia on Theoretical Physics and Mathematics **10**, (1970) 129 (New York, NY); Phys. Rev.**D1**, 2473; Proceedings of the VIII Nobel Symposium, ed. by N.Swartholm (New York, NY), (1970) 385; Reports NYO-3399-191/SU-1206-191 (Syracuse University) (1969), ORO-3992-5 (UT, Austin) (1970); 1970 CPT-81/AEC-30 (UT, Austin) and 1972 CPT-166 (UT, Austin); M.E.Arons and E.C.G.Sudarshan: Phys. Rev. **173**, (1968) 1622; J.Dhar and E.C.G.Sudarshan: Phys. Rev. **174**, (1968) 1808; O.M.Bilaniuk and E.C.G.Sudarshan: Nature **223**, (1969) 386; Phys. Today **22**, 43; E.C.G.Sudarshan and N.Mukunda: Phys. Rev.**D1**, (1970) 571; A.M.Gleeson and E.C.G.Sudarshan: Phys. Rev. **D1**, (1970) 474; A.M.Gleeson, M.G.Gundzig, E.C.G.Sudarshan and A.Pagnamenta: Phys. Rev.**A6**, (1972) 807; Fields Quanta **2**, (1972) 175; E.C.G.Sudarshan and J.V. Narlikar: Montly Notices of Royal Astron. Soc., **175**, (1976) 105; E.C.G.Sudarshan: Tachyons, Monopoles, and Related Topics, ed. by E.Recami (North-Holland; Amsterdam) (1978) pp.43-46.

[8] E.Recami, R.Mignani: Nuovo Cimento **4** (2) (1974) 209-398, e riferimenti ivi contenuti.

[9] E.Recami, M.Fracastoro Decker: Il Nuovo Saggiatore **2** (3) (1986) 20-29 e riferimenti ivi contenuti.

[10] E.Recami: Annuario 73, Enciclopedia EST, ed. E.Macorini (Mondadori-Milano) (1973) 20-29.

[11] E. Recami and R. Mignani: Rivista N. Cim. 4, **E398** (1974) 209-290. T. Alvager and M.N. Kreisler: Phys. Rev.**171**, (1968) 1357.

[12] E.Recami: Rivista Nuovo Cimento **9** (6) (1986) 1-178, e riff. ivi contenuti.

[13] G.Pagliaroli, F.L.Villante, F.Vissani: Il Nuovo Saggiatore **25** (3-4) (2009) 5-18.

[14] J.N.Bahcall "Neutrinos astrophysycs" (Cambridge, 1989); http://www.sns.ias.edu/∼ jnb

[15] Galeotti: Rivista Il Nuovo Saggiatore **11**,(5) (1985) 4.

[16] H.A.Bethe e J.R.Wilson: Astropys.J. **295** (1985) 14.

[17] G.Pagliaroli, F.Vissani, M.L.Costantini a A.Ianni: Astropart.Phys. **31** (2009) 163.

[18] W.Baade e F.Zwicky: Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **20** (1934) 259.

[19] V.L.Ginzburg e S.I.Syrovatskii "the original of cosmic rays" (Oxford) (1964).

[20] E.Fermi: Phys.Rev, **75** (1949) 1169; Astroph.J. **119** (1954) 1.

[21] M.A.Markov, “the neutrinos” (Dubna) 1963.

[22] OPERA Collaboration (T.Adams et al.): arXiv:1109.4897v4[hep-ex], (2011).

[23] E.Recami: Rivista Il Nuovo Saggiatore, **17** (1-2) (2001) 22-29.

[24] G.Salesi: Int.J.Mod.Phys.**A28** (1997) 5103 e riff. ivi contenuti.

[25] S.Tanaka Prog.Theor.Phys. **24** (1960) 171.

[26] A.Chodos, A.I. Hauser and V.A.Kostelecky: Phys.Lett. **B150** (1985) 431.

[27] L.D.Landau, E.M.Lifsits Fisica Teorica **2** (2010) 51

[28] L.D.Landau, E.M.Lifsits Fisica Teorica **4** (2010) 298

[29] L.D.Landau, E.M.Lifsits Fisica Teorica **1** (2010) 78

[30] B.Pontecorvo: Zh.Eksp.Teor.Fiz. **34** (1958) 247, (Sov.Phys. JEPT, **7** (1958) 172).

[31] Z.Maki, M.Nakagawa e M.Sakata: Prog.Ther.Phys. **28** (1962) 870.

[32]

[33] B.Pontecorvo: Zh.Eksp.Teor.Fiz. **53** (1967) 1717.

[34] S.M.Blenkey, C.Giunti, J.A.Grifols e E.Masso hep-ph/0211462, Phys.Rep. **379** (2003) 69.

[35] S.M.Blenkey, P.Galeotti, G.Piragino, G.Pontecorvo: Rivista Il Nuovo Saggiatore, **19** (3-4) (2003) 49-55.

[36] Q.R.Armand et al.: Phys.Rev.Lett, **89** (2002) 011301; hep-ex/0204008.

[37] G.Salesi: "Oscillazioni di sapore" articolo non pubblicato

[38] T.Chao and G.Ni: arXiv:hep-ph/0009291.

[39] www.physik.uni-mainz.de

[40] www.katrin.kit.edu

Ringraziamenti

Grazie al prof. Giovanni Salesi, che mi ha dato la possibilità di compiere questa “avventura scientifica” e con il suo continuo supporto mi ha permesso di approfondire ed ampliare le mie conoscenze.
Grazie al sostegno prezioso del prof. Luigi Lo Monaco.
Grazie a tutti coloro che con la loro disponibilità e pazienza hanno contribuito alla realizzazione di questo “piccolo-grande” traguardo.