

Determinazione degli effetti della gravità per modelli digitali del terreno

Maria Grazia D'Urso (*), Ilenia Bianchi (**), Giuseppina Costantino (***)

(*) DICeM – Università degli Studi di Cassino e del Lazio Meridionale, Via G. Di Biasio, 43 – 03043 Cassino (FR);
tel: +39-0776 2994309; fax:089 2580897; durso@unicas.it

(**) Ingegnere libero professionista, tel: 3298751383; ileniabianchi88@gmail.com

(***) Ingegnere j., Università degli Studi di Cassino e del Lazio Meridionale, tel: 3334322774; costgiusy@libero.it

Sommario

Obiettivo di questo lavoro è il calcolo del potenziale della gravità terrestre, della forza di gravità e della sua variazione su elementi di un modello digitale del terreno. La distribuzione delle masse terrestri attraenti viene divisa in “elementi finiti” di densità costante i cui effetti gravitazionali possono essere valutati analiticamente.

In particolare viene approfondito lo studio della modellazione prismatica e poliedrica di un modello digitale di terreno fornendo, altresì, un contributo alla identificazione delle singolarità nel calcolo del potenziale. Il lavoro si inserisce in un filone di ricerca più generale, tuttora in itinere, e la metodologia utilizzata si basa sull'applicazione del teorema di Gauss, in quanto esso rappresenta lo strumento teorico fondamentale per valutare in forma analitica gli effetti gravitazionali attraverso formule espresse unicamente in funzione delle coordinate dei vertici della frontiera della massa attraente.

L'efficienza delle formule proposte risiede nella capacità di valutare correttamente le singolarità che si presentano nei casi in cui i punti attratti occupano i vertici della massa attraente, i prolungamenti dei lati della frontiera e, infine, le facce degli elementi del DTM.

Le formule sono state implementate in un codice Matlab con il quale viene calcolato il potenziale gravitazionale in un generico punto P attratto da una massa terrestre rappresentata da un DTM del comune di Cassino, caratterizzato da un grigliato di 20 m x 20 m che ricopre un'area di 10 km x 10 km. Il punto attratto, in cui sono stati calcolati gli effetti del potenziale, è stato posizionato ora all'esterno del DTM ora al centro di esso; in vari casi esso è stato fatto coincidere con un vertice della frontiera, a varie quote; in altri casi il punto è stato posizionato lungo un lato o all'esterno ma in allineamento con esso.

Ogni test calcola il potenziale, il suo gradiente verticale e la sua derivata seconda rispetto a masse attraenti rappresentate da tutti i prismi che si formano sui 250000 punti che costituiscono il DTM in esame. Dai risultati ottenuti la differenza tra le due modellazioni prismatica e poliedrica è risultata trascurabile.

Abstract

Aim of this paper is the computation of the gravitational potential, of the gravity force and of its variation for elements of a digital terrain model. The distribution of the attracting terrestrial masses is partitioned into constant density “finite elements” with gravitational effects which can be analytically evaluated. Specificallyj prismatic and polyhedral modelling of a digital terrain model has been addressed with special emphasis to the singularities identification for computing the potential. The paper belongs to a more general research theme, currently in progress, in which the

adopted methodology is based on the application of the Gauss theorem; actually, it represents the fundamental theoretical method for evaluating the gravitational effects analytically as function of the co-ordinates of the vertices belonging to the boundary of the attracting mass. The efficiency of the proposed formulas lies in the capacity of correctly evaluating the singularities when the attracted points occupy the vertices of the attracting mass, the extensions of the boundary edges and, finally, the faces of the DTM elements.

The formulas have been implemented in a Matlab code by means of which the gravitational has been computed at a generic point P, attracted by a terrestrial mass represented by the DTM of the Cassino municipality, discretized by a grid 20 m x 20 m on an area of 10 km x 10 km.

The attracted point for which the potential effects have been computed has been set outside the DTM or inside it; in some cases the point is coincident with a boundary vertex, set up at different quotes, in other cases the point has been identified along a side or outside but in alignment with it. Every test computes the potential, its vertical gradient and its second derivative relative to attracting masses constituted from all prisms built up on the 250000 points of the DTM. Numerical tests have shown that the prismatic and polyhedral modelling exhibited negligible differences.

Introduzione

Uno dei principali problemi della geodesia è quello di stabilire un modello di approssimazione del potenziale gravitazionale e delle sue anomalie sulla superficie della terra e nello spazio esterno. Nel ventesimo secolo lo studio del campo gravitazionale terrestre è stato considerato un settore di ricerca avanzato nella geofisica, ma soprattutto nel campo della geodesia. Come è noto i dati gravitazionali sono ottenuti recentemente attraverso tecniche astro-geodetiche, che sfruttano i sistemi di posizionamento satellitari (GNSS) anziché i metodi tradizionali da terra o aerei.

Per la determinazione del campo gravitazionale con impiego dei dati da terra e da aerei possono essere utilizzate le formule del potenziale e della forza di gravità. Viceversa è indispensabile conoscere la variazione della forza di gravità nel caso in cui i dati provengano da missioni gradiometriche satellitari tipo GOCE (*Gravity field and steady Circulation Explorer*).

Soprattutto in questo caso è importante la riduzione degli effetti topografici e isostatici, che modificano il campo gravitazione della Terra, al fine di ottenere un modello "liscio" (*smoothed*). La conoscenza degli effetti della gravità sulla superficie terrestre (potenziale gravitazionale, forza di gravità, variazione della forza di gravità, ondulazione del geoide, ecc.) comporta molteplici applicazioni che spaziano in diversi ambiti con obiettivi differenti: ad esempio, da quello geologico-geotecnico che utilizza il monitoraggio gravimetrico per uno studio dei processi tettonici e come preavviso per probabili attività eruttive; alla determinazione di modelli per microzonazioni sismiche, ciò che rappresenta un approccio molto utile per la minimizzazione dei rischi geologici; dagli studi connessi alla propagazione delle onde sismiche, agli studi idrogeologici e ambientali per mappare l'andamento degli acquiferi o localizzare l'andamento delle discariche.

Date le ampie e numerose applicazioni nell'ambito dell'ingegneria civile ambientale l'obiettivo di questo lavoro è stato il calcolo del potenziale della gravità terrestre su elementi di un modello digitale del terreno (DTM). Poiché la distribuzione delle masse viene divisa in "elementi finiti" di densità costante in un numero fissato di corpi regolari i cui effetti gravitazionali possono essere valutati analiticamente, gli integrali sono valutati sommando gli effetti degli elementi che formano la distribuzione delle masse. La maggior parte dei domini che permettono di valutare analiticamente gli effetti della gravità in un determinato punto della superficie terrestre, con idonea applicazione del teorema di Gauss, è rappresentata da forme poliedriche di densità omogenea. In particolare è stato approfondito lo studio della modellazione prismatica e poliedrica di un DTM.

La modellazione gravimetrica nei modelli digitali del terreno

Il calcolo degli effetti della gravità di un punto nello spazio, con distribuzione di masse di densità nota attraverso la *forward modelling*, rappresenta un'applicazione di routine in geofisica e geodesia. La valutazione del campo gravitazionale avviene normalmente su una distribuzione di punti noti su una griglia regolare di un modello digitale del terreno, attraverso diverse modellazioni geometriche della superficie.

Per quanto concerne la valutazione del campo gravitazionale determinato da una distribuzione di masse definita attraverso un campione di altezze relative ad un modello digitale del terreno, esistono metodi analitici, numerici e misti. La scelta tra i vari metodi è determinata principalmente dall'accuratezza dei risultati e dai tempi di calcolo. I metodi analitici sono di gran lunga superiori, in termini di precisione, rispetto a quelli numerici; tuttavia questi ultimi risultano essere più efficienti per quanto riguarda i tempi di calcolo.

Nelle applicazioni in cui il calcolo degli effetti gravitazionali (potenziale della gravità, riduzione del campo di gravità, calcolo del geoide) è relativo a tutti i punti della griglia del DTM, l'impiego dei metodi analitici diventa impegnativo dal punto di vista computazionale. Questo aspetto ha portato alla nascita dei cosiddetti metodi combinati o semi-analitici (Tsoulis, 2001) che cercano di unire all'accuratezza dei metodi analitici l'efficienza di quelli numerici. I metodi analitici considerano il DTM diviso in "elementi finiti" di densità costante in un numero fissato di corpi regolari i cui effetti gravitazionali, espressi da integrali di volume, possono essere valutati analiticamente. Pertanto gli integrali sono valutati sommando gli effetti degli elementi che formano la distribuzione delle masse. I domini che permettono di valutare analiticamente gli effetti della gravità in forma chiusa, con idonea applicazione del teorema di Gauss, sono rappresentati da forme poliedrali.

L'impiego di approcci analitici, come riscontrato in letteratura, conduce al calcolo degli effetti della gravità in punti singolari. Tali punti, considerato un punto attratto e una massa attraiante (cfr Figura 1), sono localizzati nei vertici, lungo i bordi o lungo i loro prolungamenti e, infine, sulla faccia del corpo attraiante (cfr Figura 2).

Il presente lavoro ha seguito un approccio basato sulla "teoria della distribuzione" che permette di identificare e risolvere le singolarità, considerando un fattore correttivo che si ottiene da una doppia applicazione del teorema di Gauss. Esso trasforma, dapprima, gli integrali di volume in integrali di superficie e, successivamente, trasforma gli integrali 2D, estesi ad una generica faccia della massa poliedrale, in integrali ad una dimensione.

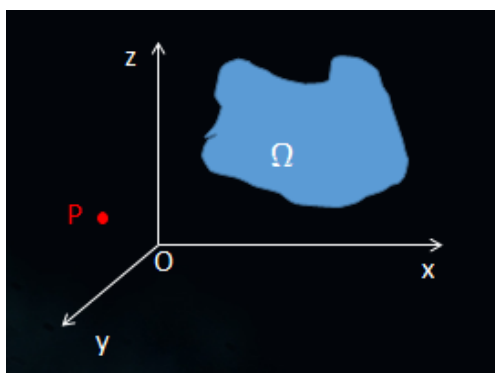


Figura 1. Punto attratto e massa attraiante.

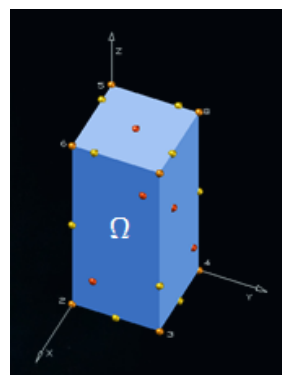


Figura 2. Punti singolari.

I dati del caso studio proposto sono stati ottenuti da un DTM relativo alla zona di Cassino Sud (cfr Figura 3), nella provincia di Frosinone, fornito dall'Istituto Geografico Militare (IGM), coprente un'estensione di 10 km x 10 km e rappresentato da una griglia con passo 20 m x 20 m.

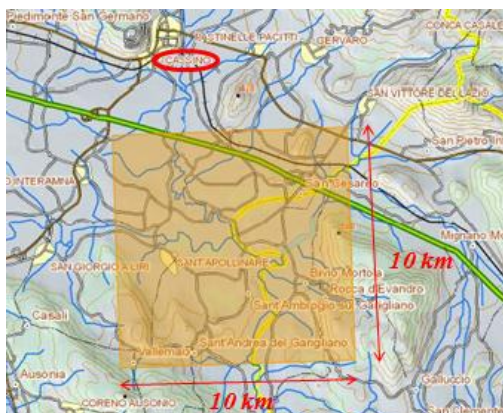


Figura 3. DTM Cassino Sud.

I punti che costituiscono la griglia sono definiti da coordinate piane (E, N, H), espresse in metri nel sistema di riferimento geodetico ED50 nella rappresentazione UTM. Tali coordinate vengono fornite dall'IGM in formato ASCII. La modellazione del terreno, ai fini del calcolo del potenziale, eseguita sia attraverso uno schema prismatico che poliedrico (cfr Figura 4), assume come sistema di riferimento il sistema OXYZ, con la coordinata X coincidente con quella Est, la coordinata Y con la Nord e la coordinata Z con la quota.



Figura 4. Modellazione prismatica e poliedrica.

Per il calcolo del potenziale gravitazionale è stato implementato, per entrambe le modellazioni, un codice Matlab ove sono definite la costante gravitazionale $G=6.67259 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1} \text{ sec}^{-2}$, la densità terrestre, per ipotesi considerata costante, pari a 2670 kg/m^3 , la dimensione della griglia lato_maglia=20 m e le coordinate del punto attratto dalla massa del DTM, che vengono di volta in volta variate nei test numerici. Successivamente, vengono caricati da file in formato ASCII le coordinate dei 250000 punti del DTM in esame e da file testo tutte le possibili facce dell'elemento scelto per la modellazione. Per la modellazione prismatica i vertici dei prismi sono stati considerati coincidenti con i nodi della griglia; viceversa la modellazione poliedrica si basa sul modello prismatico, con la differenza che in questa le facce sono divise in triangoli.

Metodo di calcolo e risultati

Punto centrale dell'applicazione è stato il calcolo del potenziale gravitazionale e il confronto dei risultati, numerici e in termini di tempi computazionali, ottenuti attraverso una duplice modellazione del terreno prismatica e poliedrica. Il calcolo del potenziale per entrambe le modellazioni è stato effettuato su n.20 punti attratti, caratterizzati dalle coordinate riportate nella seguente Tabella 1:

Punto	X	Y	Z
P1	400000	4589980	0
P2	400000	4584980	0
P3	400000	4580000	0
P4	405000	4580000	32
P5	409980	4580000	0
P6	409980	4584980	450
P7	409980	4589980	0
P8	405000	4589980	83
P9	405000	4584980	39
P10	400000	4589980	45
P11	400000	4580000	345
P12	409980	4580000	433
P13	409980	4589980	100
P14	406700	4587680	129
P15	409240	4581200	517
P16	400720	4581000	408
P17	402280	4587852	40
P18	402307	4584780	8
P19	404420	4581550	60
P20	406675	4584360	17

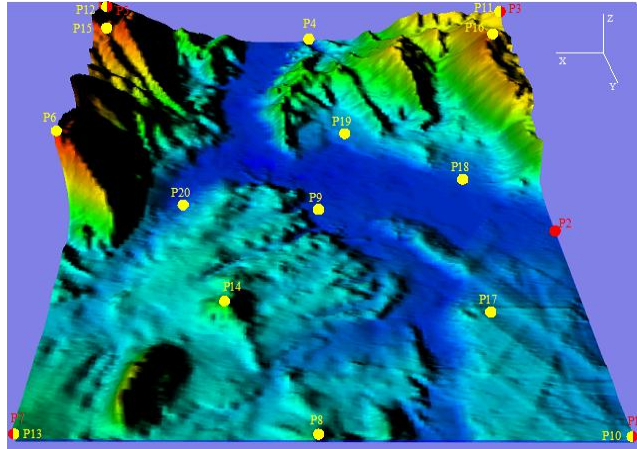


Figura 5. Posizione dei punti attratti sul DTM di Cassino Sud.

Tabella 1. Coordinate punti attratti.

Nella Figura 5 i punti in rosso sono caratterizzati da quota zero, quelli in giallo hanno quota pari al punto quotato del DTM, viceversa quelli con doppio colore coincidono con i gialli solo planimetricamente.

I prismi e i poliedri, generati dai 250000 punti del DTM, ottenuti incrementando il passo di 20 metri sia nella direzione dell'asse x che nella direzione dell'asse y, costituiscono la massa terrestre attraiante i singoli punti in cui è stato calcolato il potenziale gravitazionale. Tali valori sono stati sommati in un modo da valutare un potenziale determinato da una massa attraiante costituita da tutto il DTM. In particolare tale potenziale è stato valutato attraverso la nota formula:

$$U(P) = G \cdot \delta \cdot \int_{\Omega} \frac{dV}{(r \cdot r)^{3/2}} = \frac{1}{2} G \delta \int_{\Omega} \frac{div r}{(r \cdot r)^{3/2}} dV \quad [1]$$

ove G è la costante di gravitazione universale, δ è la densità (considerata costante), $\underline{r} = \underline{s} - \underline{p}$ è il vettore differenza tra \underline{s} vettore posizione di un punto arbitrario Ω (massa attraiante) e \underline{p} , vettore posizione di un generico punto P attratto come mostrato in Figura 6.

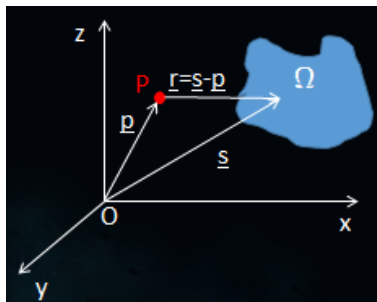


Figura 6. Sistema di riferimento adottato con origine nel punto attratto.

Attraverso una prima applicazione del teorema di Gauss l'integrale di volume è stato trasformato in una sommatoria di integrali di superficie ricavati dalla relazione:

$$U(P) = \frac{G\delta}{2} \sum_{i=1}^{N_f} \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\underline{r}_i \cdot \underline{r}_i)^{3/2}} = \frac{G\delta}{2} \sum_{i=1}^{N_f} d_i \int_{F_i} \frac{dA_i}{(\underline{\rho}_i \cdot \underline{\rho}_i + d_i^2)^{3/2}} \quad [2]$$

ove \underline{n} è il versore della normale uscente in un generico punto della frontiera $F_r(\Omega)$; N_F è il numero delle facce appartenenti alla $F_r(\Omega)$, \underline{p}_i il vettore di posizione 2D di ogni punto della faccia i -esima rispetto a P_i (proiezione del punto P sulla faccia) e $d_i = \underline{r}_i \cdot \underline{n}_i$.

Applicando una seconda volta il teorema di Gauss ogni integrale di superficie è stato trasformato in un integrale di linea attraverso la relazione:

$$U(P) = \frac{G\delta}{2} \sum_{i=1}^{N_F} \int_{F_r(F_i)} \left(\underline{r}_i \cdot \underline{r}_i + d_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\underline{r}_i}{\underline{r}_i \cdot \underline{r}_i} \right) \cdot \underline{v}_i ds_i - |d_i| \alpha_i \quad [3]$$

ove \underline{n}_i è il versore 2D della normale uscente in un generico punto della frontiera della faccia i -esima e il termine funzione di Dirac, $|d_i| \alpha_i$ rappresenta la correzione della singolarità. Seguendo questo approccio e caratterizzando le formule per entrambe le modellazioni sono stati ottenuti i valori riportati in Tabella 2.

Punto	Uprismi[m ² /s ²]	Upoliedri[m ² /s ²]	Uprismi-Upoliedri[m ² /s ²]
P1	0,22496560230470	0,22496560230300	1,69700E-12
P2	0,34528173528832	0,34528173528600	2,31504E-12
P3	0,41129026597882	0,41129026598434	-5,51698E-12
P4	0,39579406934684	0,39579406934366	3,17996E-12
P5	0,43754711236452	0,43754711237324	-8,71403E-12
P6	0,54351820378637	0,54351820379359	-7,22000E-12
P7	0,27075078712979	0,27075078713038	-5,90972E-13
P8	0,30929534231236	0,30929534230952	2,84500E-12
P9	0,29923952602606	0,29923952601906	7,00001E-12
P10	0,22496669890768	0,22496669890898	-1,29899E-12
P11	0,40927584863925	0,40927584864177	-2,52104E-12
P12	0,43492873526379	0,43492873526952	-5,73802E-12
P13	0,27068581101846	0,27068581102377	-5,30298E-12
P14	0,43425185928058	0,43425185928051	7,09988E-14
P15	0,65135453552144	0,65135453552148	-4,20775E-14
P16	0,62615791995258	0,62615791995237	2,09943E-13
P17	0,34759212752964	0,34759212752867	9,68003E-13
P18	0,41150091085048	0,41150091085167	-1,19499E-12
P19	0,53332258424726	0,53332258424635	9,09939E-13
P20	0,46264010082675	0,46264010082369	3,06000E-12

Tabella 2. Potenziali totali e la loro differenza.

Come si può notare dai risultati ottenuti la differenza tra il potenziale gravitazionale calcolato tra la modellazione prismatica e poliedrica è trascurabile, ossia dell'ordine di 10^{-12} ÷ 10^{-13} .

Altro parametro messo a confronto è il tempo di calcolo, che risulta uno dei parametri discriminanti per la scelta tra le due modellazioni. I valori ottenuti per i diversi punti attratti mostrano che i tempi computazionali richiesti nel caso di una modellazione poliedrica sono approssimativamente maggiori di 1.5 volte rispetto ai tempi computazionali necessari per una modellazione degli elementi di DTM prismatici. I valori dei tempi di calcolo minimi e massimi sono di 2964 secondi per i prismi e di 5163 secondi per i poliedri come mostrato in Tabella 3 e nella Figura 7.

Questi valori ottenuti sono funzione della componente hardware; nel caso in esame è stato utilizzato un processore dual core con una frequenza di 2.13 GHz. E' stato osservato che utilizzando un hardware con caratteristiche migliori i tempi di calcolo si riducono ma al tempo stesso viene mantenuta la proporzionalità tra i tempi di calcolo di entrambe le modellazioni.

Punto	t _{prismi} [s]	t _{poliedr} [s]
P1	3315	4990
P2	3353	5042
P3	3401	4952
P4	3374	4944
P5	3277	4804
P6	3229	4911
P7	3227	4838
P8	3140	4864
P9	3262	4862
P10	2964	4915
P11	3002	4948
P12	3114	4948
P13	3076	4949
P14	3073	5163
P15	3135	4706
P16	3235	4301
P17	3431	4568
P18	3242	4682
P19	3136	4324
P20	2986	4367

Tabella 3. Tempi di calcolo.

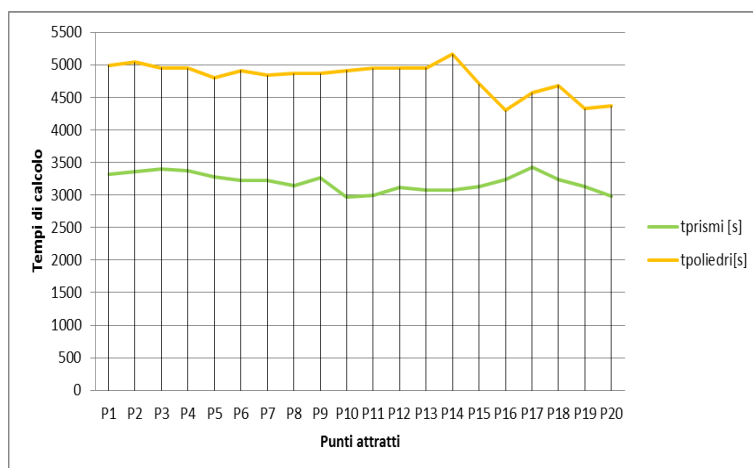


Figura 7. Diagramma dei tempi di calcolo

Considerazioni conclusive

Nel presente lavoro è stato illustrato e testato su un caso reale un metodo analitico ai fini del calcolo degli effetti della gravità in determinati punti della superficie terrestre. In particolare sono state prese in esame sia la modellazione prismatica che quella poliedrica, per elementi di un modello digitale del terreno per i quali sono state ricavate le formule del potenziale della forza di gravità (derivata prima del potenziale) e della variazione della forza di gravità (derivata seconda del potenziale). L'efficienza delle formule testate, rispetto a quelle presenti in letteratura, risiede nella capacità di risolvere le singolarità, che secondo autorevoli autori come Nagy, Tsoulis e Petrović si presentano nei casi in cui i punti attratti occupano i vertici della massa attrahente o la sua frontiera, i prolungamenti dei lati della frontiera e, infine, le facce degli elementi del DTM. Le formule qui proposte sono state successivamente implementate in un codice di calcolo Matlab con il quale è stato calcolato il potenziale gravitazionale in un generico punto P attratto da una massa terrestre rappresentata da un modello digitale del terreno del comune di Cassino, caratterizzato da un grigliato di 20 m x 20 m che ricopre un'area di 10 km x 10 km.

Su quest'area il punto P attratto è stato posizionato, in differenti test numerici, ora all'esterno del DTM ora al centro di esso; in vari casi è stato fatto coincidere con un vertice della frontiera, a varie quote, in altri il punto è stato posizionato lungo un lato o all'esterno ma in allineamento con esso. Ogni test calcola il potenziale, il suo gradiente verticale e la sua derivata seconda rispetto a masse attrahenti rappresentate da tutti i prismi che si formano sui 250000 punti che costituiscono il DTM. Dai risultati ottenuti la differenza tra le due modellazioni è stata pressoché nulla ossia, dell'ordine di 10^{-12} . Per quanto riguarda i valori del potenziale calcolato sull'intero DTM, i valori maggiori sono stati calcolati proprio in corrispondenza dei punti a quota maggiore.

Per quanto riguarda i tempi di calcolo si può notare che i valori ottenuti per la modellazione prismatica sono risultati inferiori di un coefficiente maggiore di 1.5 volte rispetto a quelli ottenuti per la modellazione poliedrica; infatti per gli elementi prismatici il tempo computazionale è stato di circa 3000 secondi, viceversa per gli elementi poliedri è stato di 5000 secondi. Tali valori sono funzione della potenza del computer impiegato nell'elaborazione. In questo caso si aveva a disposizione un hardware caratterizzato da un processore dual-core con velocità di 2.13 GHz e 4 GB di ram; viceversa, effettuando la simulazione solo per alcuni punti con un processore quad-core

con velocità 2.8GHz e 4 GB di ram si è ottenuta una riduzione dei tempi di calcolo di circa 1000 secondi.

Obiettivo futuro del lavoro è quello di confrontare i risultati della modellazione prismatica e poliedrica con quelli di una modellazione maggiormente flessibile rappresentata da una superficie bilineare, considerando, altresì, valori di densità della massa attraente, non più costanti, ma variabili linearmente, conformemente a pratiche correnti in geologia.

Bibliografia

- D'Urso M.G. (2012) *New Expression of the Gravitational Potential and Its Derivatives for the Prism*. In: Sneeuw N. e al. (eds), VII Hotine–Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, International Association of geodesy Symposia, Springer-Verlag Berlin, pp 251-256
- D'Urso M.G. (2012) *On the evaluation of the gravity effects of polyhedral bodies and a consistent treatment of related singularities*. Journal of Geodesy pp 239-252
- Folloni G. *Principi di topografia*(1994), Patron Editore
- Janák J., Wild Pfeiffer F., Heck B. (2012) *Smoothing the Gradiometric Observation Using Different Topographic-Isostatic Models: A Regional Case Study*. In: Sneeuw N. e al. (eds), VII Hotine–Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, International Association of geodesy Symposia, Springer-Verlag Berlin
- Jekeli C. (2007) *Potential Theory and Static Gravity Field of the Earth*. The Ohio State University Columbus, Ohio, pp 11-40
- Migliaccio F., Reguzzoni M., Sansò F. (2009) *Goce: stato della missione e possibili applicazioni*. Atti 13^a conferenza Nazionale ASITA-Bari
- Novák P., Grafarend (2005) *Ellipsoidal representation of the topographical potential and its vertical gradient*. J Geod 78:691-706
- Novák P (2012) *On Combination of Heterogeneous Gravitational Observables for Earth's Gravity Field Modelling*. In: Sneeuw N. e al. (eds), VII Hotine–Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, International Association of geodesy Symposia, Springer-Verlag Berlin
- Sansò F., Barzaghi R., Carrion D. (2012) *The Geoid Today: Still a Problem of Theory and Practice*. In: Sneeuw N. e al. (eds), VII Hotine–Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, International Association of geodesy Symposia, Springer-Verlag Berlin
- Smith D.A., Robertson D.S., Milbert D.G. (2000) *Gravitational attraction of local crustal masses in spherical coordinates*. Journal of Geodesy 74: 783-795
- Sneeuw N. e al. (eds), VII Hotine–Marussi Symposium on Mathematical Geodesy, International Association of geodesy Symposia, Springer-Verlag Berlin
- Tsoulis D. (2003) *Numerical investigations in the analytical and semi-analytical computation of gravimetric terrain effect*. Stud. Geophys, Geod 47:481-494, Prague
- Tsoulis D., Wziontek H., Petrović S. (2003) *A bilinear approximation of the surface relief in terrain correction computations*. Journal of Geodesy 77:338-344
- Tsoulis D. (2003) *Terrain modeling in forward gravimetric problems: a case study on local terrain effect*. Journal of Applied Geophysics 54, pp 145-160
- Tsoulis D. (2003) *Potential field determination due to given masses of Digital Terrain Model for a system of target points*. Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata, Vol 44, N.2, pp 129-138.
- Tsoulis D., Jamet O., Verdun Jerome, Gonindard N. (2009) *Recursive algorithms for the computation of the potential harmonic coefficients of a constant density polyhedron*
- Tsoulis D. (2012) *Analytical computation on the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals*. Geophysics, Vol.77, NO 2
- Wang Y.M. (2012) *On the Omission Error Due to Limited Grid Size in the Geoid Computations*. In: Wild Pfeiffer F. (2008) *A comparison of different mass elements for the use in gravity gradiometry*. J Geod 82:637-653
- Zhu L. (2007) *Gradient Modeling with Gravity and DEM*. Report No. 483 Geodetic science and Surveying, The Ohio State University Columbus, Ohio 43210