

IL DATO NELLA DIDATTICA DELLE DISCIPLINE

Il Seminario "I dati INVALSI:
uno strumento per la ricerca"

a cura di
Patrizia Falzetti

FrancoAngeli
OPEN  ACCESS


2014-2020


INVALSI

INVALSI PER LA RICERCA
STUDI E RICERCHE



INVALSI PER LA RICERCA

La collana Open Access INVALSI PER LA RICERCA si pone come obiettivo la diffusione degli esiti delle attività di ricerca promosse dall'Istituto, favorendo lo scambio di esperienze e conoscenze con il mondo accademico e scolastico.

La collana è articolata in due sezioni: "Studi e ricerche", i cui contributi sono sottoposti a revisione in doppio cieco, e "Percorsi e strumenti", di taglio più divulgativo o di approfondimento, sottoposta a singolo referaggio.

Direzione: Anna Maria Ajello

Comitato scientifico:

- Tommaso Agasisti (Politecnico di Milano);
- Cinzia Angelini (Università Roma Tre);
- Giorgio Asquini (Sapienza Università di Roma);
- Carlo Barone (Istituto di Studi politici di Parigi);
- Maria Giuseppina Bartolini (Università di Modena e Reggio Emilia);
- Giorgio Bolondi (Libera Università di Bolzano);
- Francesca Borgonovi (OCSE•PISA, Parigi);
- Roberta Cardarelo (Università di Modena e Reggio Emilia);
- Lerida Cisotto (Università di Padova);
- Patrizia Falzetti (INVALSI);
- Martina Irsara (Libera Università di Bolzano);
- Paolo Landri (CNR);
- Bruno Losito (Università Roma Tre);
- Annamaria Lusardi (George Washington University School of Business, USA);
- Stefania Mignani (Università di Bologna);
- Marcella Milana (Università di Verona);
- Paola Monari (Università di Bologna);
- Maria Gabriella Ottaviani (Sapienza Università di Roma);
- Laura Palmerio (INVALSI);
- Mauro Palumbo (Università di Genova);
- Emmanuele Pavolini (Università di Macerata);
- Donatella Poliandri (INVALSI);
- Roberto Ricci (INVALSI);
- Arduino Salatin (Istituto Universitario Salesiano di Venezia);
- Jaap Scheerens (Università di Twente, Paesi Bassi);
- Paolo Sestito (Banca d'Italia);
- Nicoletta Stame (Sapienza Università di Roma);
- Roberto Trincherò (Università di Torino);
- Matteo Viale (Università di Bologna);
- Assunta Viteritti (Sapienza Università di Roma);
- Alberto Zuliani (Sapienza Università di Roma).

Comitato editoriale:

Paola Bischetti; Ughetta Favazzi; Simona Incerto; Rita Marzoli (coordinatrice); Veronica Riccardi.



Il presente volume è pubblicato in open access, ossia il file dell'intero lavoro è liberamente scaricabile dalla piattaforma **FrancoAngeli Open Access** (<http://bit.ly/francoangeli-oa>).

FrancoAngeli Open Access è la piattaforma per pubblicare articoli e monografie, rispettando gli standard etici e qualitativi e la messa a disposizione dei contenuti ad accesso aperto. Oltre a garantire il deposito nei maggiori archivi e repository internazionali OA, la sua integrazione con tutto il ricco catalogo di riviste e collane FrancoAngeli massimizza la visibilità, favorisce facilità di ricerca per l'utente e possibilità di impatto per l'autore.

Per saperne di più:

http://www.francoangeli.it/come_publicare/publicare_19.asp

I lettori che desiderano informarsi sui libri e le riviste da noi pubblicati possono consultare il nostro sito Internet: www.francoangeli.it e iscriversi nella home page al servizio "Informatemi" per ricevere via e-mail le segnalazioni delle novità.

1. I costrutti di didattica della Matematica come chiave di lettura di alcune evidenze statistiche nelle prove INVALSI

di Federica Ferretti, Chiara Giberti, Alice Lemmo

La raccolta dei dati e l'analisi dei risultati effettuati dal Servizio nazionale di valutazione (SNV) per l'INVALSI mettono in luce macro-fenomeni che emergono a livello di sistema. In particolare, per quanto riguarda le prove standardizzate di Matematica, le risposte che gli studenti forniscono ad alcune domande dei test rivelano "fenomeni" di comportamento che permettono di ricavare informazioni in merito ad alcune specificità dell'apprendimento della disciplina e alcune cause che provocano difficoltà a livello nazionale. Questa ricerca nasce allo scopo di interpretare e analizzare alcune particolari evidenze messe in luce a livello nazionale dall'analisi statistica dei test INVALSI e che riguardano tutti i gradi scolastici coinvolti da tali indagini.

I risultati delle prove INVALSI sono analizzati a livello quantitativo facendo uso del modello di Rasch. Si tratta di un modello logistico a un parametro che appartiene alla categoria dell'*Item Response Theory* (IRT) e opera una stima congiunta tra il parametro di difficoltà per ogni domanda del test e il parametro di abilità per ogni studente. Tale modello permette di esprimere la probabilità di fornire la risposta corretta a una domanda di una prova in funzione della difficoltà della domanda stessa e dell'abilità dello studente misurata sull'intera prova. In generale, al crescere dell'abilità dello studente si dovrebbe osservare una probabilità maggiore che egli fornisca una risposta corretta mentre le opzioni di risposta errate dovrebbero mostrare un andamento decrescente al crescere dell'abilità degli studenti. Esistono però casi in cui l'andamento delle opzioni di risposta errate non seguono questo principio: in alcune domande può succedere che un'opzione di risposta errata risulti particolarmente attrattiva per livelli di abilità medi o medio-alti.

L'interpretazione di questo fenomeno è complessa poiché entrano in gioco diversi fattori didattici spesso già evidenziati dalla letteratura nazionale e internazionale in didattica della Matematica. Si tratta di fattori legati alle

norme implicite ed esplicite che regolano l'attività matematica in classe, in particolare nella risoluzione di compiti di Matematica, che determinano convinzioni e atteggiamenti degli studenti.

La ricerca mostra che si tratta di fenomeni evidenti su tutti i livelli scolastici e relativi a diversi ambiti di contenuto e competenze matematiche; una buona chiave di lettura di questi fenomeni la offrono alcuni costrutti noti in didattica della Matematica.

1. Introduzione

In questo articolo è presentato uno studio sulle domande INVALSI di Matematica a partire dai dati quantitativi raccolti dal Servizio nazionale di valutazione (SNV). Lo scopo della ricerca è quello di proporre un'analisi integrata delle domande che, a partire da risultati quantitativi, permetta di interpretare alcuni dei fenomeni che emergono attraverso un'analisi qualitativa.

L'introduzione, sia a livello internazionale sia a livello nazionale, di prove di valutazione standardizzate come OCSE-PISA, IEA-TIMSS e INVALSI, può fornire importanti informazioni a livello di sistema per la ricerca in didattica della Matematica. Anche se l'obiettivo principale di queste indagini risulta essere la valutazione del sistema educativo, delle abilità e delle competenze raggiunte dagli studenti nei diversi livelli scolastici, le analisi sui testi delle domande e sulle performance degli studenti forniscono dati rilevanti anche nel campo della ricerca.

In questa prospettiva, un "nodo critico, ancora parzialmente irrisolto, riguarda la "traduzione" del risultato statistico quantitativo del campione nazionale in informazioni e proposte che possano diventare motori di innovazioni fattive piuttosto che dati puri che lasciano spazio a interpretazioni, talvolta frettolose e non adeguatamente ponderate, che finiscono per snaturare profondamente gli scopi della valutazione stessa" (Bolondi *et al.*, 2016). In alcuni studi, però i risultati dei test hanno permesso di far emergere macro fenomeni molto interessanti, come per esempio nuovi effetti di contratto didattico (Ferretti, 2015); questi potranno poi essere studiati approfonditamente attraverso un approccio mixed-method, passando quindi da un'indagine quantitativa a una qualitativa (Johnson e Onwuegbuzie, 2004).

L'obiettivo principale del lavoro è quello di fornire del materiale per una riflessione sulle prove di valutazione nazionale a partire dalle analisi dei dati attraverso alcuni costrutti di didattica della Matematica.

2. Quadro teorico e metodologia

Nonostante la Teoria classica dei test (CTT) fornisca importanti strumenti statistici per lo studio dei test (Barbaranelli e Natali, 2005), le analisi che vengono presentate in questo contributo e nelle restituzioni dei risultati dei test INVALSI sono basate principalmente sulla più moderna Teoria di risposta all'item. Quest'ultima fa riferimento a diversi modelli matematici per la misurazione di variabili latenti e permette di superare le principali limitazioni della CTT tra cui per esempio la dipendenza tra la stima dell'abilità dei soggetti e la difficoltà delle domande del test.

In questo contesto prenderemo in considerazione il più semplice tra i modelli della IRT che viene anche utilizzato nelle principali analisi dei test INVALSI: il modello di Rasch (Rasch, 1960).

Il modello di Rasch è un modello logistico a un parametro ed è quindi il più semplice tra i modelli della IRT. Questo modello consente di calcolare la probabilità di rispondere correttamente a un determinato item, in funzione dell'abilità dello studente e delle caratteristiche psicometriche dell'item stesso (in particolare della difficoltà dell'item).

La relazione tra l'abilità del soggetto e la probabilità di rispondere correttamente all'item può essere rappresentata graficamente attraverso la curva teorica ipotizzata dal modello, detta anche curva caratteristica dell'item (*Item Characteristic Curve* – ICC). Una volta applicato il modello di Rasch, osservando specifici grafici, chiamati distractor plot, possono essere estrapolate informazioni molto utili riguardanti i singoli item. Nello stesso grafico in cui viene rappresentata la curva teorica ICC relativa alla risposta corretta, solitamente rappresentata da una linea continua blu (fig. 1), vengono rappresentati anche i dati empirici relativi alla risposta corretta e alle altre opzioni di risposta. In questo modo è possibile osservare quanto la curva empirica della risposta corretta sia coerente con la curva teorica e, inoltre, si può analizzare l'andamento di ogni distrattore (inteso come risposta non corretta) in funzione del livello di abilità degli studenti.

Il distractor plot (fig. 1), in ascissa, riporta il punteggio di Rasch in termini di abilità degli studenti sull'intera prova e, come già specificato, la linea continua rappresenta la curva teorica del modello che esprime la probabilità di rispondere correttamente in funzione del livello di abilità. Le spezzate tratteggiate rappresentano i dati empirici ricavati dalla somministrazione dell'item per ognuna delle opzioni di risposta. Per l'implementazione dei grafici, gli studenti sono divisi in decili in base al livello di abilità misurato sull'intera prova e, per ogni decile, è stata riportata la percentuale di studenti che ha scelto ciascuna opzione di risposta.

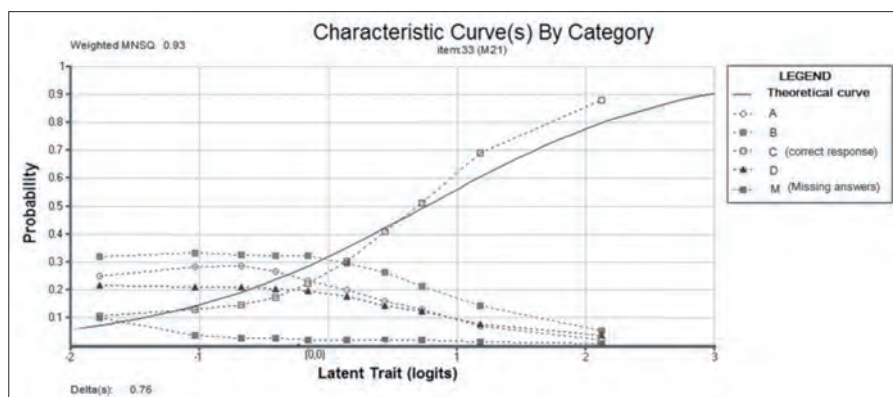


Fig. 1 – Esempio di distractor plot di un item

In questo item, il confronto tra l'andamento della risposta corretta empirica e la curva teorica risulta essere accettabile (weighted = 0,93); è possibile comunque osservare che, in questo caso, il modello tende a sovrastimare i livelli medio bassi e a sottostimare i livelli alti. Il distrattore più attrattivo risulta essere il B che viene scelto da una significativa percentuale di studenti anche nei livelli medi e medio-alti. Anche gli altri due distrattori comunque mostrano un “buon funzionamento” e vengono scelti da studenti con livelli di abilità bassi e medi. Infine si può notare che solo pochi studenti non rispondono all'item e tra questi sono quasi tutti appartenenti al decile più basso in termini di abilità.

Il modello di Rasch può essere applicato solo nel caso in cui siano verificate alcune assunzioni, che permettono l'applicazione del metodo e la stima dei parametri (Hambleton, Swaminathan e Rogers, 1991). In particolare, devono essere verificate le ipotesi di *unidimensionalità del test*, di *indipendenza locale* e di *monotonicità*. L'ipotesi di monotonicità richiede che, per ogni item, la probabilità di rispondere correttamente cresca monotonicamente all'aumentare del livello di abilità dei rispondenti e può essere verificata attraverso la rappresentazione grafica dei dati empirici, quindi osservando i distractor plot.

Da un punto di vista strettamente statistico ci si aspetterebbe quindi che, in un item, al crescere dell'abilità degli studenti crescesse la percentuale di risposte corrette e, al contempo, diminuisse la percentuale di risposte sbagliate. Osservando domande a risposta multipla, in cui la risposta corretta è unica ma dove sono proposte altre due/tre opzioni di risposta errate, si può notare che la percentuale di risposte errate (considerate nel loro complesso e tenendo conto anche delle risposte mancanti) è decrescente ma se si con-

siderano le curve relative ai singoli distrattori è possibile osservare anche andamenti non strettamente decrescenti (per esempio, la curva relativa all'opzione B, Item 24: 2, fig. 2).

Nell'esempio presentato in figura 2 la curva relativa all'opzione B (curva item 24: 2) presenta un andamento crescente, seguito da un andamento decrescente che d'ora in avanti indicheremo con andamento "a pancia": la percentuale di scelta di tale opzione da parte degli studenti cresce al crescere del livello di abilità per i decili bassi e medio-bassi e solo dal quinto decile in poi la curva assume un andamento decrescente.

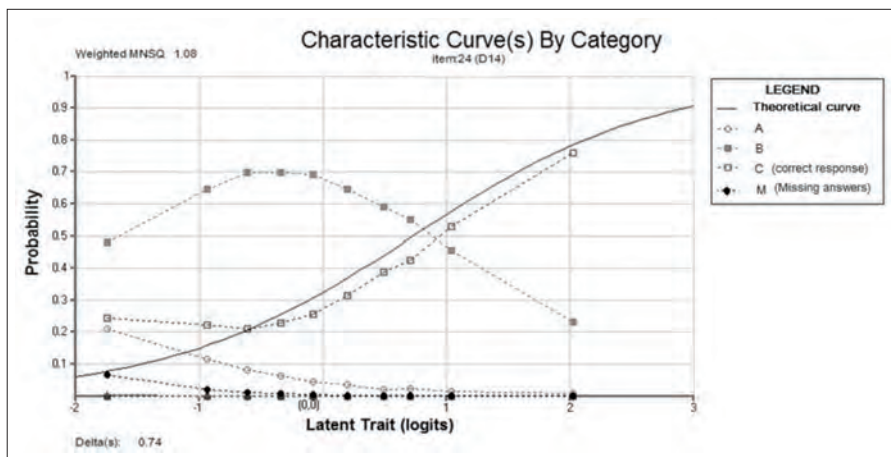


Fig. 2 – Esempio di distractor plot di un item con andamento “a pancia” della curva relativa a un’opzione errata

L’interpretazione di questo fenomeno (andamento “a pancia” di un distrattore) è complessa poiché entrano in gioco diversi fattori che interagiscono tra loro: studenti con livelli di abilità differenti possono incorrere in ostacoli diversi nell’affrontare una domanda, fornire risposte errate per motivazioni differenti e prediligere una risposta errata piuttosto che un’altra proprio come risultato di diversi approcci e di diverse difficoltà.

Possibili cause che conducono a risposte errate sono spesso riconducibili a fattori legati a norme implicite ed esplicite che si instaurano nei processi di apprendimento/insegnamento e che regolano l’attività matematica in classe, che determinano spesso convinzioni errate. Per comprendere in profondità i motivi che possono scatenare tali fenomeni è necessario svolgere un’analisi critica delle risposte alle singole domande attraverso alcuni costrutti di didattica della Matematica.

In questa ricerca verranno analizzati quesiti tratti da diversi livelli scolastici (dalla primaria alla secondaria di secondo grado) che mostrano buone proprietà misuratorie (INVALSI, 2017; Barbaranelli e Natali, 2005) e in cui almeno un distrattore evidenzia un andamento “a pancia” che può essere ricollegabile a fenomeni legati alla didattica. In particolare, negli esempi che verranno proposti di seguito, i due costrutti principali che forniscono una buona chiave di lettura dei fenomeni statistici di questo tipo che emergono a livello di sistema sono le misconcezioni e il contratto didattico.

Il concetto di misconcezione viene analizzato dettagliatamente in D’Amore (1999), in cui viene approfondito il processo di costruzione di un concetto da parte degli apprendenti. Per arrivare alla costruzione di un concetto, si passa necessariamente attraverso sollecitazioni ripetute di immagini del concetto, fino a quando lo studente si costruisce il suo modello di concetto. Spesso accade che il modello costruito dallo studente sia errato, quasi sempre perché esso si forma troppo presto. In questo caso si parla quindi di misconcezione, intesa non come una mancata conoscenza, ma come “concetto errato” (D’Amore, 1999).

Il contratto didattico si inserisce all’interno della Teoria delle situazioni didattiche di Guy Brousseau e si riferisce a “l’insieme dei comportamenti dell’insegnante che sono attesi dall’allievo e l’insieme dei comportamenti dell’allievo che sono attesi dall’insegnante” (Brousseau, 1988).

In particolare, “In una situazione di insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l’allievo ha generalmente come compito di risolvere il problema (matematico) che gli è presentato, ma l’accesso a questo compito si fa attraverso un’interpretazione delle domande poste, delle risposte fornite, degli obblighi imposti che sono costanti nel modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall’allievo e i comportamenti dell’allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico” (Brousseau, 1980). Questo costrutto fornisce chiavi di lettura a diverse situazioni che si instaurano durante le pratiche d’aula e si è rivelato uno strumento particolarmente idoneo per interpretare fenomeni che emergono mentre gli studenti fanno attività matematiche, anche in contesti di valutazioni standardizzate (Ferretti, 2015, Giberti, Bolondi e Zivelonghi, 2016).

Come si vedrà in seguito, alcuni fenomeni che emergono si interpretano con costrutti già noti in letteratura, come la clausola del contratto didattico denominata “delega formale”, altri con costrutti costruiti *ad hoc*, come l’effetto di contratto didattico “Età della Terra” (Ferretti, 2015).

3. Analisi qualitativa e quantitativa delle domande: alcuni esempi

Da una prima analisi qualitativa delle singole domande è emerso che nella maggior parte dei casi tra le opzioni di risposta se ne presenta una legata a difficoltà messe in evidenza dalla ricerca in didattica della Matematica e proprio rispetto a questa opzione si riscontra l'andamento "a pancia" di uno dei distrattori.

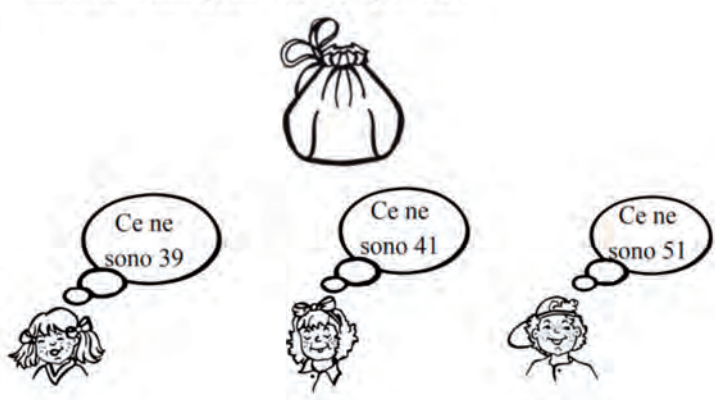
Di seguito presentiamo alcuni esempi di analisi delle domande riferiti a diversi ambiti della Matematica e diversi livelli scolastici.

Le domande selezionate sono tratte da prove INVALSI somministrate in diversi anni (dal 2011 al 2017) e in diversi gradi scolastici (dal grado 2 al grado 10). Le analisi statistiche presentate sono conformi a quelle operate dall'Istituto INVALSI in fase di validazione dei test e l'analisi dei risultati e sono basate sul campione INVALSI che comprende, per ogni prova, 30.000-40.000 studenti rappresentativi della popolazione nazionale. Tutti i quesiti selezionati sono a risposta multipla e mostrano buone proprietà misuratorie in termini di fit con il modello (weighted), discriminazione, percentuale di risposte corrette e di correlazione punto biseriale tra ogni risposta e l'abilità complessiva degli studenti (correlazione negativa per le risposte errate e positiva per la risposta corretta). Per effettuare le ricerche abbiamo utilizzato come strumento di ricerca il database GESTINV (www.gestinv.it) da cui abbiamo estrapolato tutti i risultati e i grafici presenti in seguito nel contributo.

Il primo esempio riportato (fig. 2) fa riferimento alla domanda D14 somministrata nella prova INVALSI di Matematica di grado 2 dell'anno scolastico 2010/2011 (fig. 3).

Inoltre sempre dall'analisi dei dati riportati in tabella e dall'osservazione del distractor plot (fig. 2) si può osservare che la domanda ha un buon funzionamento da un punto di vista psicometrico: il fit dei dati con il modello risulta accettabile (weighted = 1,08) e la domanda discrimina bene tra rispondenti con alti livelli di abilità e bassi livelli di abilità (discrimination = 0,29).

D14. Tre bambini cercano di indovinare quante palline ci sono in un sacchetto come quello che vedi qui sotto.



Anna **Moira** **Giovanni**

Aprono il sacchetto e vedono che ci sono 47 palline.

Chi è andato più vicino al numero delle palline contenute nel sacchetto?

A. Anna

B. Moira

C. Giovanni

Fig. 3 – Quesito D14 della prova di grado 2 del 2011

Tab. 1 – IRT del quesito D14 della prova di grado 2 del 2011

Item: 24 (D14)					
Cases for this item: 31.842		Discrimination 0,29			
Item Threshold(s): 0,73		Weighted MNSQ 1,08			
Item Delta(s): 0,74					
Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t(p)
1	0,00	2.087	6,55	-0,23	-42,98 (,000)
2	0,00	18.216	57,21	-0,13	-22,80 (,000)
3	1,00	11.104	34,87	0,29	54,58 (,000)
7	0,00	41	0,13	-0,03	-4,48 (,000)

Il quesito chiede allo studente di confrontare tre numeri naturali e identificare il numero più vicino a un numero dato. Si tratta dunque di un quesito che ha lo scopo di osservare la capacità degli studenti nella stima e confronto tra numeri naturali. La risposta corretta è la C; analizzando le altre due opzioni di risposta si può notare che entrambe sono legate a due note difficoltà. In particolare, gli studenti che hanno scelto l'opzione A potrebbero essersi concentrati solo sulla cifra delle decine del numero 47. In questa prospettiva, gli studenti potrebbero aver individuato il numero 39 come il numero più vicino al 40 rivelando delle difficoltà nell'ordinamento dei numeri naturali. La curva riferita all'opzione A è decrescente e mostra dunque che gli studenti che hanno scelto tale opzione (6% circa) appartengono al gruppo di studenti con un livello basso di abilità nella prova. La curva dell'opzione B, invece, presenta un andamento "a pancia" e risulta particolarmente attrattivo per studenti con livelli di abilità medi; inoltre tale opzione è scelta da un'alta percentuale di studenti anche per i decili alti della popolazione e solo negli ultimi due decili la percentuale di risposte corrette è maggiore rispetto alla percentuale di scelta del distrattore B. Il motivo che può aver portato molti studenti anche "bravi" a scegliere come risposta 41 (opzione B) potrebbe essere legata al fatto che, in effetti, tale numero è l'unico tra i proposti che possiede il valore delle decine uguale a quello del numero di palline nel sacchetto (47). Gli studenti che hanno scelto tale risposta potrebbero essere stati guidati da questa uguaglianza tra le decine senza riflettere sulla richiesta di identificare il valore "più vicino". In questo caso quindi si potrebbe presupporre che gli studenti hanno una parziale consapevolezza della notazione posizionale di un numero e quindi si sono soffermati solo sul confronto del valore delle decine senza confrontare quello delle unità. La percentuale di studenti che ha scelto tale opzione è del 50% e dall'analisi del distractor plot emerge che si tratta non solo di studenti che hanno mostrato di avere basse abilità nello svolgimento della prova, ma anche di studenti che hanno raggiunto un punteggio medio nel test. Questo fatto fa emergere un fenomeno interessante e cioè che la maggior parte degli studenti che mostrano una difficoltà nella stima e nell'ordinamento dei numeri naturali sono prevalentemente studenti che raggiungono performance medie nella prova.

Un fenomeno rilevante è costituito anche dal fatto che nelle prassi didattiche solitamente il concetto di stima viene affrontato nel senso di "avvicinarsi a qualcosa" sottintendendo quindi implicitamente la "stima per difetto". Le abitudini che si instaurano nelle situazioni d'aula hanno evidenze anche nelle performance degli studenti mentre fanno attività matematica, come conseguenza del contratto didattico (Brousseau, 1988); l'andamento a "pancia"

del distrattore che rappresenta la stima per difetto potrebbe confermare l'incidenza del contratto didattico nella scelta degli studenti.

Un ulteriore quesito che risulta interessante sempre nell'ambito Numeri è il D23 somministrato nella prova di Matematica del 2012 a studenti di grado 6.

Il quesito è legato alla stima del risultato di un'operazione; in particolare, nel quesito si chiede di individuare tra 4 operazioni quella che restituisce il risultato maggiore (fig. 4).

D23. Quale delle seguenti operazioni dà il risultato più grande?

A. $10 \times 0,5$

B. $10 \times 0,1$

C. $10 : 0,5$

D. $10 : 0,1$

Fig. 4 – Quesito D23 della prova di Matematica di grado 6 del 2012

Anche in questo caso si tratta di un quesito a risposta multipla; la risposta corretta è la D. Le altre opzioni sono state scelte in modo tale da individuare alcune difficoltà note in letteratura.

Tab. 2 – IRT del quesito D23 della prova di grado 6 del 2012

Item: 39 (D23)					
Cases for this item 39668		Discrimination 0,27			
Item Threshold(s): 2,44		Weighted MNSQ 1,01			
Item Delta(s): 2,44					
Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t(p)
1	0,00	28.208	71,11	-0,03	-6,00 (,000)
2	0,00	1.894	4,77	-0,13	-26,41 (,000)
3	0,00	4.005	10,10	-0,08	-15,10 (,000)
4	1,00	4.365	11,00	0,27	56,46 (,000)
7	0,00	60	0,15	-0,02	-4,23 (,000)
9	0,00	1.136	2,86	-0,12	-24,15 (,000)

Dai dati riportati in tabella (tab. 2), si nota che il 75% degli studenti risponde scegliendo una moltiplicazione e quindi una delle prime due opzioni (A e B). Ciò significa che la maggior parte degli studenti al termine del primo anno della scuola secondaria di I grado è convinta che la moltiplicazione sia un'operazione il cui risultato è sempre maggiore rispetto a una divisione con

gli stessi termini. Molto probabilmente questa convinzione deriva da una tipica misconcezione, ampiamente studiata in didattica della Matematica, per cui la moltiplicazione tra due numeri, ha come risultato un numero maggiore dei fattori. La misconcezione nasce dal fatto che gli studenti tendono a richiamare il *modello intuitivo* (Fischbein, 1985) della moltiplicazione tra naturali, estendendolo anche ai razionali. Questo richiamo potrebbe aver provocato l'insinuarsi di un modello parassita per cui "la moltiplicazione accresce", indipendentemente dall'insieme di appartenenza dei fattori (Fischbein, 1985; D'Amore, 1999). In particolare, l'opzione decisamente più attrattiva risulta essere la A (moltiplicazione con fattori maggiori), scelta dal 71% degli studenti e l'andamento "a pancia" di questa opzione nel distractor plot risulta essere molto marcato (fig. 5). La misconcezione è quindi molto forte su tutti i livelli di abilità ma agisce particolarmente sui livelli medi; anche per i livelli alti, in cui l'andamento del distrattore risulta essere decrescente, in questo caso si nota che questo distrattore risulta ancora più attrattivo rispetto alla risposta corretta.

In particolare, l'opzione C potrebbe essere stata scelta dagli studenti che hanno la consapevolezza che il quoziente tra numeri razionali non sempre è minore del prodotto ma credono che nella divisione maggiore è il divisore, minore è il quoziente. Tale opzione è stata scelta solo dal 10% degli studenti. Osservando il distractor plot (fig. 5) si può notare che tali studenti sono prevalentemente studenti che hanno raggiunto un punteggio basso nell'intera prova.

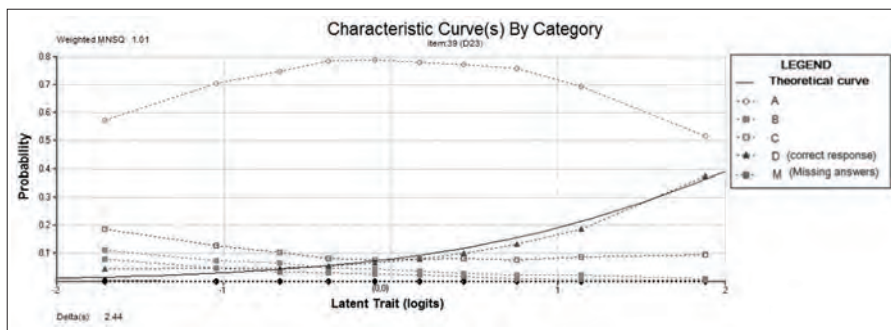


Fig. 5 – Distractor plot del quesito D23 somministrato nella prova di Matematica del livello 06 del 2012

Fino a ora abbiamo osservato due esempi di misconcezioni in ambito Numeri, di seguito invece, presentiamo un quesito di Numeri di cui una possibile interpretazione può essere fondata sul contratto didattico. Si tratta del

quesito D5 somministrato nella prova INVALSI di Matematica del grado 10 nell'anno 2011 (fig. 6).

D5. L'età della Terra è valutata intorno ai $4,5 \times 10^9$ anni. L'Homo Erectus è comparso circa 10^6 anni fa. Qual è la stima che più si avvicina all'età che la Terra aveva quando è comparso l'Homo Erectus?

A. $4,5 \times 10^9$ anni

B. $3,5 \times 10^9$ anni

C. $4,5 \times 10^6$ anni

D. $4,5 \times 10^3$ anni

Fig. 6 – Quesito D5 della prova di Matematica di grado 10 del 2011

Come leggiamo in figura 7, l'opzione di risposta corretta è A che viene scelta solo da poco più del 10% degli studenti.

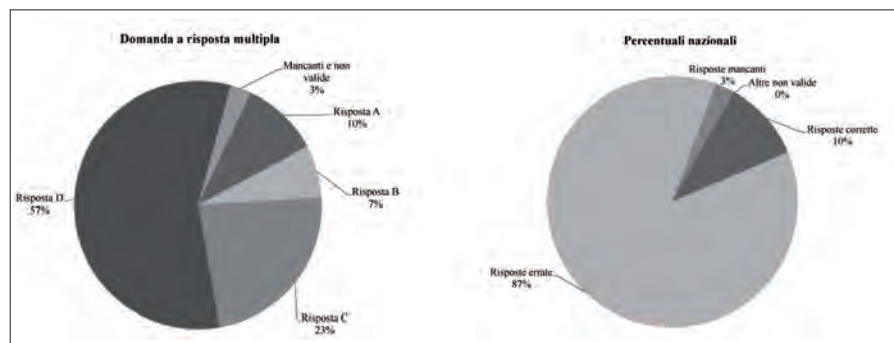


Fig. 7 – Percentuali di risposta del quesito D5 della prova di Matematica di grado 10 del 2011

La bassa percentuale di risposte corrette evidenzia le difficoltà che gli studenti hanno a gestire approssimazioni, stime numeriche e determinazioni di ordini di grandezza, già osservati nei livelli precedenti. Un fatto rilevante è che la risposta corretta è uno dei dati esplicitamente presenti nel testo e la non scelta della risposta corretta rientra in un fenomeno più ampio già analizzato in studi di Ferretti (2015) in cui emerge un nuovo effetto di contratto didattico, denominato l'effetto "Età della Terra". L'opzione B potrebbe essere stata scelta dagli studenti che hanno sottratto erroneamente 109 all'età della Terra senza considerare la differenza degli ordini di grandezza mentre l'opzione C potrebbe essere stata scelta dagli studen-

ti che hanno svolto erroneamente la sottrazione. Osservando il distractor plot (fig. 8), si può notare che tali scelte sono state fatte prevalentemente da studenti che hanno raggiunto scarse performance nella prova. Infatti, i grafici relativi alle scelte delle due opzioni sono decrescenti al crescere dell'abilità degli studenti.

L'opzione che in questo caso rivela un andamento interessante è la D che corrisponde all'opzione più scelta (hanno scelto l'opzione D quasi il 60% degli studenti del campione). Tale opzione potrebbe essere stata scelta dagli studenti che hanno sottratto all'esponente 9 presente nella stima dell'età della Terra, l'esponente 6 nel dato riferito alla stima della comparsa sulla Terra di Homo Sapiens. In questa prospettiva, gli studenti potrebbero aver applicato mnemonicamente schemi di calcolo legati alle proprietà delle potenze.

Le prime interpretazioni (cfr. per es. Impedovo, Orlandoni e Paola, 2011) del fenomeno evidenziato dalla domanda "Età della Terra" hanno collegato il comportamento degli allievi genericamente a effetti di contratto didattico nel senso di Brousseau (D'Amore, 2002). Dati due numeri espressi in potenze, effettuare la sottrazione degli esponenti per effettuare la sottrazione tra i numeri stessi rappresenta lo svolgimento di un'operazione familiare agli studenti per quanto riguarda i contenuti ma completamente errata da un punto di vista matematico. Questi comportamenti si possono ricondurre a una clausola ormai nota in letteratura del contratto didattico, chiamata clausola di "delega formale" (D'Amore e Martini, 1997).

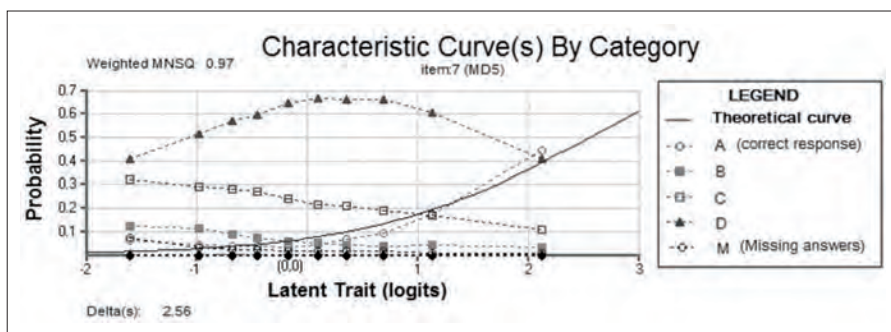


Fig. 8 – Distractor plot del quesito D5 somministrato nella prova di Matematica del livello 10 del 2011

Come possiamo osservare dal distractor plot (fig. 8) il distrattore D è preferito a tutti i livelli di competenza e la scelta del distrattore è massima per gli allievi situati nella parte medio alta della scala del carattere latente; ancora una volta, la curva relativa all'opzione rappresenta un "andamento a pancia".

Le difficoltà appena descritte fanno riferimento allo stesso ambito della Matematica (Numeri) anche se per diversi livelli scolastici. Però è possibile identificare quesiti con comportamenti simili anche in altri ambiti.

Nell'esempio successivo è presentato un quesito relativo all'ambito Relazioni e funzioni somministrato nella prova di Matematica del livello 05 nell'anno 2015 (fig. 9).

D7. Francesca prepara per il gatto due pasti al giorno utilizzando cibo in scatoletta.

Con il contenuto di una scatoletta Francesca prepara 3 pasti per il gatto.

Francesca ha comprato 8 scatolette di cibo per gatti. Per quanti giorni al massimo le bastano?

A. 24

B. 16

C. 8

D. 12

Fig. 9 – Quesito D7 della prova di Matematica di livello 05 del 2015

Tab. 3 – IRT del quesito D7 della prova di grado 5 del 2015

Item: 10 (D7)					
Cases for this item 22030 Item-Rest Cor, 0,30 Item-Total Cor, 0,35					
Item Threshold(s): 1,10 Weighted MNSQ 1,04 Item Delta(s): 1,10					
Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t(p)
1	0	10.058	45,66	-0,07	-9,98
2	0	2.407	10,93	-0,1	-15,22
3	0	2.969	13,48	-0,19	-28,09
4	1	6.363	28,88	0,3	46,42
7	0	22	0,1	-0,02	-3,14
9	0	211	0,96	-0,06	-8,97

Si tratta di un quesito a risposta multipla in cui la risposta corretta è l'opzione D che viene scelta da meno del 30% degli studenti. Per risolvere questo problema lo studente deve tenere sotto controllo l'intero testo, comprendere la situazione descritta e non concentrarsi semplicemente sui dati numerici presentati ma anche sui dati scritti in lettere. Come si osserva in tabella 3, il quesito risulta abbastanza difficile (delta = 1.10) e mostra un buon funzio-

namento in termini di fit con il modello ($\text{weighted} = 1.04$) e discriminazione ($\text{discrimination} = 0.35$).

L'opzione B potrebbe essere stata scelta dagli studenti che hanno moltiplicato il numero delle scatolette per il numero dei pasti al giorno. Mentre l'opzione C potrebbe far riferimento agli studenti che si sono concentrati solo sul numero di scatolette senza curarsi delle informazioni riferite al numero di pasti al giorno che Francesca prepara per il suo gatto. In riferimento al Distractor plot (fig. 10), possiamo notare che queste due opzioni presentano un comportamento standard come distrattori: entrambe si presentano monotone decrescenti. La curva relativa all'opzione A, invece, mostra un andamento completamente diverso dagli altri distrattori e risulta particolarmente attrattivo per rispondenti con livelli di abilità medi. Questo distrattore viene scelto da un'alta percentuale di studenti per ogni livello di abilità: nel decile più basso viene scelto da quasi il 40% degli studenti e solo per i due decili più alti gli studenti prediligono la risposta corretta a questo distrattore. Si può però notare che la percentuale maggiore di scelta del distrattore A si manifesta per livelli di abilità medi e in particolare dal terzo decile al settimo decile, più del 50% degli studenti sceglie questa opzione di risposta. L'interpretazione di questo fenomeno può essere riferita alla clausola di delega formale (D'Amore e Martini, 1997): è possibile che gli studenti che hanno scelto questa opzione, pur avendo individuato tutti e tre i dati presenti nel testo, abbiano perso il controllo della situazione problematica e abbiano moltiplicato i dati presentati nel testo senza controllare la plausibilità del calcolo svolto in riferimento al contesto presentato. Fenomeni di questo tipo sono probabilmente frutto di una didattica basata principalmente su procedure, agli studenti che devono risolvere un problema si tende a chiedere di concentrare l'attenzione sull'individuazione dei dati e quindi sull'operazione da applicare, senza richiedere una riflessione più approfondita sulla situazione problematica in oggetto. Gli studenti che vengono maggiormente influenzati da una didattica di questo tipo sono gli studenti con livelli di abilità medi, che riescono a individuare i dati presenti nel problema ma, nella risoluzione, si affidano a una procedura, all'individuazione di un'operazione che però può portare a una perdita di significato e alla mancata contestualizzazione del risultato.

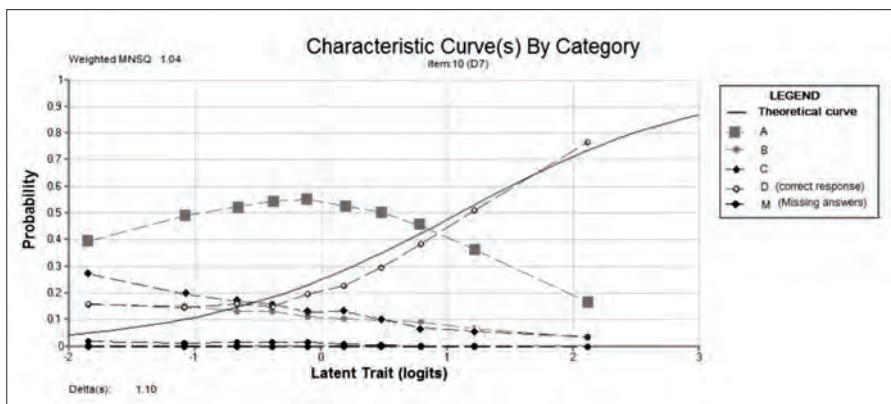


Fig. 10 – Distractor plot del quesito D7 somministrato nella prova di Matematica del livello 05 del 2015

D19. Osserva la figura.

Il cubo nell'immagine è formato da 8 cubetti.
Viene eliminato il cubetto nero: com'è la superficie totale del solido rimanente rispetto a quella del cubo di partenza?

A. Uguale a quella del cubo
B. Maggiore di quella del cubo
C. Minore di quella del cubo
D. Non si può sapere perché non si conosce la misura dello spigolo del cubo

Fig. 11 – Quesito D19 della Prova nazionale di Matematica del 2017

Come ultimo esempio presentiamo un quesito dell'ambito Spazio e figure. Si tratta del quesito D19 della Prova nazionale di Matematica dell'anno 2017 (fig. 11).

Il quesito chiede di visualizzare come si modifica la superficie di un solido composto togliendo una parte dello stesso. Il solido in questione è un cubo formato a sua volta da 4 cubi più piccoli e uguali tra loro; eliminando uno dei cubi che lo compongono il volume del solido di partenza diminuisce, ma non risulta altrettanto evidente comprendere come si modifica la superficie totale del solido, che in realtà rimane invariata. La risposta corretta è l'opzione A che viene scelta da solo il 34% degli studenti. Da un punto di vista misuratorio la domanda ha un ottimo comportamento: il fit è ottimale (weighted = 1.00) e discrimina bene tra rispondenti con diversi livelli di abilità (discrimination = 0.44) (tab. 4).

Tab. 4 – IRT del quesito D19 della Prova nazionale del 2017

Item: D19					
Cases for this item 28051 Item-Rest Cor, 0,39 Item-Total Cor, 0,44					
Item Threshold(s): 0,80 Weighted MNSQ 1,00 Item Delta(s): 0,80					
Label	Score	Count	% of tot	Pt Bis	t(p)
1	1	9629	34,33	0,39	71,31
2	0	1820	6,49	-0,07	-11,07
3	0	12614	44,97	-0,14	-24,47
4	0	3671	13,09	-0,26	-45,62
7	0	34	0,12	-0,01	-1,14

L'opzione D viene scelta dagli studenti che pensano che non sia possibile fare alcuna previsione in quanto non si hanno dati a sufficienza per rispondere; probabilmente indice di una poca abitudine nel ragionare su problemi di geometria in cui non sono presenti dati numerici e in cui non vengono richiesti calcoli. L'opzione B, invece, potrebbe essere scelta dagli studenti che svolgono un errore di conteggio nelle facce del solido. Come si può notare dalle percentuali riportate in tabella (tab. 4) quest'ultima opzione viene scelta solo da una bassissima percentuale di studenti (6%), l'opzione D risulta solo leggermente più attrattiva (13%) e le risposte mancanti sono pressoché nulle. Il distrattore che risulta decisamente più attrattivo risulta essere quindi il C che raggiunge una percentuale di scelta del 45%, maggiore anche della percentuale di scelta della risposta corretta. Quasi la metà degli studenti risponde affermando che la superficie del nuovo solido è minore di quella del cubo e probabilmente questa convinzione deriva proprio da una misconcezione legata alla relazione tra volume e superficie del solido: se il volume

del solido diminuisce allora anche la superficie diminuisce. Una misconcezione analoga, relativa al rapporto tra area e perimetro di una figura piana, è stata studiata da D'Amore e Fandiño Pinilla (2005); riprendendo anche altre ricerche analoghe, D'Amore ha evidenziato che la misconcezione secondo cui all'aumentare (diminuire) dell'area di una figura piana corrisponde un aumento (diminuzione) del suo perimetro e viceversa è fortemente radicata in tutti i livelli scolastici (dalla primaria all'università).

Anche dal Distractor plot (fig. 12), si nota quanto sia importante l'impatto del distrattore C; la scelta di tale distrattore influisce infatti molto su livelli bassi di abilità dove viene mitigato anche da una percentuale abbastanza alta di scelta del distrattore D. L'andamento dell'opzione C mostra che sono gli studenti con livelli medi di abilità a essere maggiormente attratti da questa opzione e anche per i livelli alti l'andamento è decrescente ma le percentuali di scelta continuano a essere abbastanza alte.

Se effettivamente, come ipotizzato, il distrattore C viene scelto da chi è influenzato dalla misconcezione sopra descritta possiamo quindi osservare che gli studenti che ne risentono maggiormente sono quelli con abilità medie che quindi faticano maggiormente a distaccarsi dagli esempi e dalle ripetute abitudini di classe.

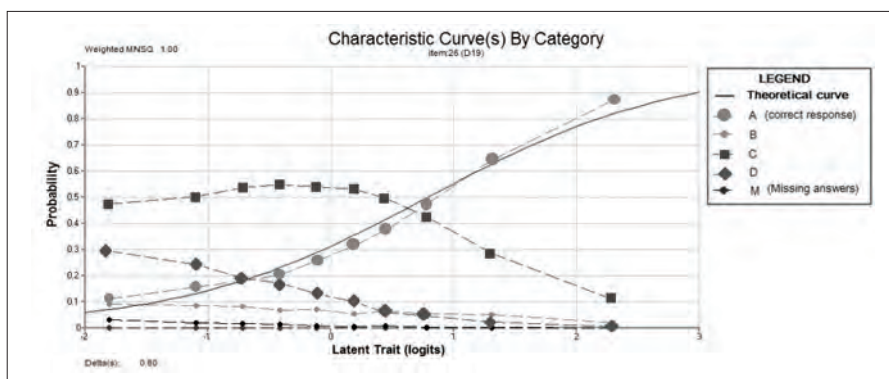


Fig. 12 – Distractor plot del quesito D19 somministrato nella Prova nazionale di Matematica del 2017

4. Conclusioni

Nel presente contributo sono state analizzate alcune domande INVALSI appartenenti a diversi ambiti di contenuto (Numero, Spazio e figure, Relazioni e funzioni) e tratte da prove di diversi livelli scolastici, dalla scuo-

la primaria alla scuola secondaria di secondo grado. Da un punto di vista statistico, tutti i quesiti analizzati presentano buone proprietà misuratorie e risultano coerenti con il modello di Rasch utilizzato per l'analisi delle prove. Analizzando i distractor plot di tutti i quesiti si può però osservare che in riferimento a ognuno di essi c'è almeno una curva di un distrattore che presenta un particolare andamento, definito "a pancia".

Effettuando un'analisi qualitativa delle domande, è emerso che questo particolare fenomeno statistico può essere ricondotto a fenomeni ben noti nella ricerca in didattica della Matematica, strettamente legati alle pratiche d'aula e alle specificità della disciplina. Gli esempi riportati sono stati analizzati utilizzando le lenti della didattica della Matematica e sono emerse evidenze riconducibili a due costrutti noti quali il contratto didattico e le misconcezioni.

Il parallelo tra analisi statistica e didattica dei quesiti ha permesso di verificare l'incidenza del contratto didattico e delle misconcezioni e di effettuarne una misura; analizzando l'andamento dei distractor plot si possono infatti evincere i livelli di abilità sui quali questi fenomeni agiscono maggiormente. In particolare si è notato che i fenomeni evidenziati risultano maggiormente evidenti quando si tratta di studenti con livelli di abilità "medi". Questa peculiarità è completamente in linea con la natura stessa dei costrutti utilizzati per interpretare i fenomeni, costrutti strettamente legati alle abitudini di classe e alla ripetitività di compiti e metodi risolutivi, in presenza di poca padronanza dei contenuti e dei concetti in gioco. Da questa prima ricerca emerge che, per quanto riguarda i quesiti analizzati, sia le misconcezioni, sia effetti del contratto didattico sembra influenzino particolarmente studenti con livelli di abilità medi a differenza di altri livelli di abilità: l'andamento "a pancia" dei distrattori rappresentanti i fenomeni indagati potrebbe essere dovuto proprio al fatto che studenti con livelli bassi di abilità non risultano molto legati alla pratica didattica, al contrario, gli studenti più bravi riescono a superare gli ostacoli posti dal legame con la pratica didattica e con l'insegnante. Inoltre, è importante notare che i fenomeni riscontrati sono spesso legati a conoscenze errate o risultanti di cattive pratiche didattiche; questo aspetto quindi si dissocia da assenza di conoscenza o non-partecipazione delle attività d'aula, caratteristiche spesso proprie dei livelli di abilità più bassi misurati nelle prove. Lo stretto legame che hanno questi costrutti con le pratiche d'aula sembrano confermare le analisi statistiche; ulteriori analisi da effettuare su altre tipologie di quesiti che coinvolgono uno spettro più ampio di conoscenze e competenze matematiche, potrebbero confermare questi primi risultati.

Riferimenti bibliografici

- Barbaranelli C., Natali E. (2005), *I test psicologici: teorie e modelli psicometrici*, Carocci, Roma.
- Bolondi G., Branchetti L., Ferretti F., Lemmo A., Maffia A., Martignone F., Matteucci M., Mignani S., Santi G. (2016), *Un approccio longitudinale per l'analisi delle prove INVALSI di Matematica: cosa ci può dire sugli studenti in difficoltà? Report concorso idee per la ricerca*, INVALSI, Roma, pp. 81-102.
- Brousseau G. (1980), "L'échec et le contrat", *Recherches*, 41, pp. 177-182.
- Brousseau G. (1988), "Le contrat didactique: le milieu", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9 (3), pp. 309-336.
- D'Amore B. (1999), *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.
- D'Amore B. (2002), "La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica", *Scuola & Città*, 4, pp. 56-82.
- D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005), "Area e perimetro Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti", *La matematica e la sua didattica*, 2, pp. 165-190.
- D'Amore B., Martini B. (1997), "Contratto didattico, modelli mentali e intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard", *La matematica e la sua didattica*, 2, pp. 150-175.
- INVALSI (2017), *Rilevazione nazionale degli apprendimenti 2015-2016*, Rapporto tecnico.
- Ferretti F. (2015), *L'effetto "età della Terra". Contratto didattico e principi regolativi dell'azione degli studenti in Matematica*, Dissertation thesis, Alma Mater Studiorum Università di Bologna, PhD in Mathematics http://amsdottorato.unibo.it/7213/4/Ferretti_Federica_Tesi.pdf, data di consultazione 14/11/2019.
- Fischbein E. (1985), "Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari", in L. Chini Artusi (a cura di), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli-UMI, Bologna, pp. 122-132.
- Hambleton R.K., Swaminathan H., Rogers H.J. (1991), *Fundamentals of item response theory*, Sage, Newbury Park (CA), vol. 2.
- Impedovo M., Orlandoni A., Paola D. (2011), *Quaderni SNV N.1-MAT. Guida sintetica alla lettura della prova di Matematica*, INVALSI, Frascati.
- Giberti C., Zivelonghi A., Bolondi G. (2016), "Gender differences and didactic contract: Analysis of two INVALSI tasks on power properties", *Proceeding of 40th International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 275.
- Gestinv 2.0. Archivio interattivo delle prove INVALSI, <http://www.gestinv.it> (ver. 15.20.2017), data di consultazione 14/11/2019.
- Johnson R.B., Onwuegbuzie A.J. (2004), "Mixed methods research: A research paradigm whose time has come", *Educational Researcher*, 33 (7), pp. 14-26.
- Rasch G. (1960), *Probabilistic Models for Some Intelligence and Attainment Tests*, Danmarks Paedagogiske Institut, Copenhagen.