

Università degli Studi di Bergamo

---

SID - Scuola Internazionale di Dottorato



Formazione della persona e diritto del mercato del lavoro

Ciclo XXV

# La matematica come occasione e stimolo per la formulazione di un giudizio critico

Tesi Dottorato di Ricerca

**Supervisore:**  
**Chiar.mo Prof.**  
**Mario Marchi**

**Candidata:**  
**Francesca Bonenti**  
**Matricola: 1014014**

**Anno Accademico 2011-2012**

*Il mistero non è un muro, ma un orizzonte.  
Il mistero non è una mortificazione dell'intelligenza,  
ma uno spazio immenso,  
che Dio offre alla nostra sete di verità.*

*Antoine de Saint-Exupery*

# Premessa: motivazioni di una scelta

La convinzione che la capacità di formulare giudizi critici sia un contributo essenziale allo sviluppo del pensiero costruttivo e la consapevolezza che la matematica è una disciplina capace di stimolare e guidare questa capacità in modo unico, costituiscono le principali motivazioni che mi hanno spinto ad approfondire il tema di ricerca sviluppato nella presente tesi.

In questo lavoro ho cercato in primo luogo di rispondere alla domanda “che cosa è la matematica?”, indagando sulle sue modalità d’azione e sui suoi oggetti d’indagine. Grazie alla riflessione svolta, sono riuscita ad inserire questa domanda, apparentemente semplicissima e forse banale, in un contesto capace di aprire nuovi orizzonti.

L’elaborato si apre con uno studio rivolto alla filosofia della scienza, alla storia e all’epistemologia della matematica, grazie al quale mi è stato possibile inquadrare il problema.

L’apparato teorico più significativo sviluppato nella tesi è dato però dal lavoro di ricerca vero e proprio e da un’analisi del metodo seguito, perchè credo che solo l’esperienza personale basata sullo studio e sulla creatività individuale permetta di comprendere a pieno cosa sia la disciplina matematica. A mio parere, essa è un’educazione formativa della mente che permette lo sviluppo di tutte le facoltà dell’intelletto (in particolare delle capacità logiche), e che insegna metodi di ragionamento ed espressione rigorosi. Il metodo matematico promuove i processi di astrazione e generalizzazione, delineando il

rapporto tra il concreto e l'astratto ed educando la persona alla familiarità con la costruzione dei concetti. Grazie al lavoro svolto, sono giunta alla conclusione che la matematica non può essere appresa attraverso una superficiale contemplazione: è necessario il coinvolgimento attivo del discente. Questa tesi nasce quindi dalla convinzione che non si può parlare di matematica senza prima aver operato direttamente sul campo, perchè la matematica, fin dai primi suoi approcci, offre le situazioni più stimolanti e formative per intraprendere la pratica euristica nella risoluzione dei problemi.

Il lavoro qui prodotto è dunque ispirato dal lavoro quotidiano di ricerca sul campo e da un'esperienza intellettuale che mira a una conoscenza sempre più alta, in grado di delineare orizzonti di ricerca sempre nuovi. Ho imparato a riconoscere l'importanza dell'influenza che lo studio della matematica può avere sul pensiero ed ho imparato ad apprezzare l'efficacia ed i misteri di tale disciplina. Le ho dedicato tempo, studio e fatica, scoprendo con stupore e piacere che ho imparato ad amarla.

Questo percorso si è dimostrato un'occasione di studio importante, ma si è anche rivelato un momento di crescita ancora più significativo; per questo affermo con gioia che la tesi che presento non è semplicemente il resoconto di un lavoro svolto, ma è la testimonianza di un'esperienza di ricerca!

Lo studio della matematica fa parte della mia vita da molto tempo, ma solo grazie a questi anni di approfondimento ho definitivamente realizzato che mi piacerebbe che essa diventi la mia principale attività.

# Indice

Prefazione	vi
<b>I L'esperienza intellettuale della matematica</b>	<b>1</b>
<b>1 Perchè la matematica</b>	<b>2</b>
1.1 Il fascino del mistero . . . . .	2
1.2 Elogio della matematica . . . . .	5
1.3 La matematica è bella, è utile, è facile . . . . .	7
1.3.1 La matematica è bella . . . . .	8
1.3.2 La matematica è utile . . . . .	9
1.3.3 La matematica è facile . . . . .	11
<b>2 La formazione del pensiero matematico</b>	<b>14</b>
2.1 La conoscenza scientifica . . . . .	14
2.2 Le procedure di astrazione e generalizzazione . . . . .	16
2.2.1 La procedura di astrazione . . . . .	16
2.2.2 La procedura di generalizzazione . . . . .	19
2.2.2.1 La costruzione della teoria degli insiemi . . . . .	20
2.2.2.2 La nozione di infinito . . . . .	22
2.2.2.3 I paradossi dell'infinito . . . . .	22
2.2.2.4 Il problema di Archimede . . . . .	23
2.3 La concettualizzazione matematica: il linguaggio formale . . . . .	26
2.4 Il ruolo delle immagini mentali: analisi critica e creatività . . . . .	31

---

<b>3</b>	<b>La matematica e il problema della conoscenza</b>	<b>37</b>
3.1	La ricerca della verità . . . . .	37
3.1.1	La verità in matematica . . . . .	38
3.1.2	La verità della matematica sulle scienze . . . . .	41
3.2	La modellizzazione matematica . . . . .	42
3.2.1	Il modello a garanzia della verità in matematica . . . . .	43
3.2.2	Il modello a garanzia della verità nella realtà . . . . .	44
<b>II</b>	<b>La matematica come linguaggio per la scienza</b>	<b>48</b>
<b>4</b>	<b>Il caso dell'aritmetica non standard</b>	<b>49</b>
<b>5</b>	<b>Il caso della geometria</b>	<b>53</b>
<b>6</b>	<b>Matematica applicata alle scienze economiche</b>	<b>57</b>
6.1	Equilibrio à la Cournot e Supply Function Equilibrio nei mercati elettrici con funzione di prezzo/domanda lineare e funzione dei costi quadratica . . . . .	59
6.2	Valutazione degli impatti dell'EU ETS sui profitti, gli investimenti e i prezzi del mercato elettrico italiano . . . . .	61
6.2.1	Il problema della CO <sub>2</sub> . . . . .	61
6.2.2	L'European Emissions Trading Scheme . . . . .	62
6.2.3	La problematica . . . . .	63
6.2.4	Struttura del mercato elettrico italiano . . . . .	64
6.2.5	Analisi del mercato elettrico italiano . . . . .	65
	<b>Bibliografia</b>	<b>67</b>
	<b>Nota A</b>	<b>73</b>
	<b>Nota B</b>	<b>95</b>
	<b>Nota C</b>	<b>123</b>

**Nota D**

**131**

# Prefazione

Il problema cruciale su cui si articola la Ricerca di Dottorato oggetto di questa tesi riguarda il senso e le modalità che competono, qualificano e caratterizzano le procedure cognitive della conoscenza scientifica. In questo ambito ci si interesserà in particolare dei problemi della conoscenza che riguardano il pensiero matematico.

La presente tesi intende sviluppare quindi anzitutto una prima analisi del processo di formazione della *conoscenza scientifica* basandosi su una descrizione psicologica delle procedure mentali che riconosciamo operare nella nostra mente per la costruzione del pensiero matematico. Tale pensiero si costituisce attraverso la *concettualizzazione* dell'esperienza, cioè attraverso quel processo che mediante le procedure di astrazione e generalizzazione elabora nella nostra mente, in modo critico e creativo, l'insieme di tutte le sensazioni, intuizioni e immagini che provengono dalla realtà empirica, producendo così idee e concetti astratti e generali.

Il lavoro di ricerca sviluppato durante questo percorso di Dottorato ha permesso di approfondire un'analisi critica inerente la formazione, la costruzione e lo sviluppo del *pensiero matematico*.

Tale lavoro ha quindi consentito un approfondimento del concetto di giudizio critico inteso come valutazione basata su presupposti riconosciuti ed esplicitamente individuati e ottenuta tramite un processo argomentativo razionale. Si potrebbe anche dire che la matematica rappresenta la storia dell'evoluzione della nozione di giudizio critico e che le componenti necessarie per raggiungerlo sono la *creatività di analisi* e la *razionalità di procedura*.

La prima è una modalità di pensiero che occupa una posizione centrale in tutta l'attività umana e qualifica l'uomo come essere spirituale, autonomo e originale<sup>1</sup>, inoltre essa costituisce una componente essenziale del pensiero scientifico e quindi in particolare occupa un ruolo fondamentale nella costruzione del pensiero matematico.

La seconda componente rappresenta un itinerario di conoscenza che viene raggiunto attraverso le procedure di *astrazione*, *generalizzazione* e infine *concettualizzazione* (procedure che saranno dettagliatamente esaminate nei Paragrafi 2.2 e 2.3 del Capitolo 2, Parte I). In particolare, come si è detto, per concettualizzazione si intende quel processo che, attraverso le procedure di astrazione e generalizzazione, nasce in modo creativo e critico nella nostra mente dall'insieme di tutte le sensazioni, intuizioni, memorie ed immagini al fine di produrre idee e concetti astratti e generali.

Queste tematiche, esposte nella Parte I, sono state ispirate, e successivamente approfondite, grazie ad un lavoro di ricerca quotidianamente svolto, riflettendo sull'esperienza intellettuale così maturata che per sua natura suggerisce un'attenta analisi critica e mira a una conoscenza sempre più alta, capace di aprire e delineare orizzonti di ricerca sempre nuovi. Tale incontro personale della scrivente con la disciplina matematica è stato quindi per lei occasione, spunto e stimolo di interrogazione sul significato stesso del pensiero matematico e sull'affidabilità delle sue procedure conoscitive. Inoltre le ha permesso un'indagine sul processo di apprendimento nei suoi aspetti costitutivi e metodologici, processo inteso sia come valutazione e riconoscimento di tutto ciò che direttamente si riferisce a tale procedura, sia come ricerca delle cause che lo influenzano.

Nella Parte II verranno descritti nei dettagli i risultati psicologici e cognitivi dell'esperienza di ricerca scientifica che hanno spinto e suggerito gli approfondimenti esaminati nella Parte I.

L'attività di ricerca, a cui si fa riferimento, si è sviluppata sia nel campo della matematica di base sia in quello della cosiddetta matematica applicata.

---

<sup>1</sup>Cfr. [34].

Le ricerche condotte sono state oggetto di diverse Note scientifiche apparse su riviste di livello nazionale e internazionale; alcune di esse sono raccolte nell'Appendice di questa tesi.

Un primo tema di ricerca che è stato approfondito riguarda l'analisi del processo di generalizzazione che conduce all'introduzione critica della nozione di *infinito*<sup>2</sup>. Da questo punto di vista la matematica appare, in modo distintivo e peculiare, come la *scienza dell'infinito* in grado di introdurre e confrontare gli infiniti attuali.

Un secondo tema affrontato riguarda il fondamentale problema del legame esistente tra la formazione del pensiero matematico e la nozione di *verità*. A questo fine si è individuata la modellizzazione matematica come strumento di valutazione e verifica per descrivere e comprendere il mondo reale e quindi agire su di esso.

Questa analisi è stata sviluppata secondo diversi filoni di indagine che riguardano sia la ricerca della verità in matematica, sia la verifica dell'efficacia della matematica nel descrivere e valutare diversi aspetti della realtà. Il primo aspetto è stato approfondito attraverso la costruzione di un modello non archimedeo di geometria non-euclidea ellittica, modello esibito a garanzia dell'esistenza e coerenza di tale struttura geometrica<sup>3</sup>. Il secondo aspetto, riguardante il rapporto tra matematica e realtà, è stato analizzato attraverso lo studio di modelli matematici che realizzano una vera e propria sostituzione della realtà mediante una costruzione matematica astratta e formale.

A questo scopo in un primo tempo è stata studiata la descrizione teorica di modelli che riguardano problemi di ottimizzazione legati alla produzione energetica<sup>4</sup>. Successivamente è stato analizzato un modello economico che rappresenta l'andamento del mercato italiano, relativo alla produzione di energia elettrica, mercato che opera sotto i condizionamenti dovuti alle politiche europee di riduzione dei fattori inquinanti<sup>5</sup>.

---

<sup>2</sup>Cfr. Parte II, Capitolo 4.

<sup>3</sup>Cfr. Parte II, Capitolo 5.

<sup>4</sup>Cfr. Parte II, Paragrafo 6.1.

<sup>5</sup>Cfr. Parte II, Paragrafo 6.2.

# Parte I

## L'esperienza intellettuale della matematica

# Capitolo 1

## Perchè la matematica

### 1.1 Il fascino del mistero

*All'inizio e alla fine abbiamo il mistero. Potremmo dire che abbiamo il disegno di Dio. A questo mistero la matematica ci avvicina, senza penetrarlo.*

(Ennio De Giorgi<sup>1</sup> in [15])

La scoperta della presenza del mistero nell'esperienza fattuale e nella vita dell'uomo è antichissima. Il mistero ci affascina, ci attrae, ci spaventa. Nell'opera di moltissimi poeti di tutti i tempi, da Omero ai romantici del nostro secolo, vediamo descritta e vissuta questa tensione dell'uomo che lo provoca nell'intelligenza e nel cuore. La storia insegna che l'impegno intellettuale dell'uomo è stato finalizzato da sempre a restringere i confini di tale arcano. Possiamo dire che la procedura intellettuale della generalizzazione è la risposta della mente razionale che vuole arginare questo fascino. Non so, non conosco, ho solo queste povere, piccole, limitate esperienze concrete ma ho nella mia mente, nella mia fantasia il desiderio, la speranza e quindi l'attesa di qualcosa che sia altro rispetto a queste esperienze e quindi mi prefiguro l'inconoscibile, anche senza vederlo o toccarlo, e quindi mi illudo che esista

---

<sup>1</sup>Il prof. Ennio De Giorgi (1928-1996), matematico di fama mondiale, fu ordinario di matematica alla Scuola Normale Superiore di Pisa.

e si possa raggiungere e conoscere.

La matematica nel contesto delle altre scienze, vede soggiacere uno sfondo misterioso ed enigmatico; scrive a tale proposito De Giorgi:

*Operando come matematico, sono portato ad ammettere che per parlare delle cose conosciute sono costretto a fare riferimento a cose sconosciute e umanamente inconoscibili; è sempre incerto il confine tra le cose conosciute o conoscibili e le cose sconosciute o inconoscibili<sup>2</sup>.*

La matematica è forse, più di ogni altra, la disciplina in cui le elaborazioni fantastiche del nostro patrimonio intellettuale diventano concrete. Il formalismo offre al cervello la possibilità di oggettivizzare il “pensiero del proprio pensiero”, di “concettualizzare” i propri concetti. Questa è la ragione profonda per cui la matematica è diventata il linguaggio pervasivo di tutte le scienze. Infatti, moltissime scienze hanno trovato nella precisazione dei dati quantitativi e nell’elaborazione mediante gli strumenti matematici le armi fondamentali di conquista della conoscenza. Oggi la matematica fornisce non solo il linguaggio e lo strumento di espressione esteriore per svariati pensieri scientifici, ma dà anche la struttura metodologica della ricerca e della loro costruzione teorica.

Nessuno quindi si meraviglia che alcuni studiosi delle procedure di insegnamento e apprendimento, abbiano usato concetti matematici per analizzare e classificare diverse attività mentali. Valga per tutti l’esempio di Piaget che ha utilizzato il concetto di *gruppo* per classificare alcune attività mentali<sup>3</sup>. Si ha qui una ulteriore dimostrazione della potenza conoscitiva di una scienza che diventa giorno dopo giorno ispiratrice e modello di gran parte del sapere umano.

*Riflettiamo ora su cos’è la matematica. Di per sè è un sistema astratto, un’invenzione dello spirito umano, che come tale nella sua purezza non esiste. È sempre realizzato approssimativamente, ma - come tale - è un*

---

<sup>2</sup>Cit. [15] in [14].

<sup>3</sup>Cfr. [36].

*sistema intellettuale, è una grande, geniale invenzione dello spirito umano. La cosa sorprendente è che questa invenzione della nostra mente umana è veramente la chiave per comprendere la natura, che la natura è realmente strutturata in modo matematico e che la nostra matematica, inventata dal nostro spirito, è realmente lo strumento per poter lavorare con la natura, per metterla al nostro servizio attraverso la tecnica.*

(Papa Benedetto XVI, Colloquio con i giovani, 6 aprile 2006)

Sembra di rileggere Galileo<sup>4</sup> eppure in modo paradossale si può affermare che *l'idea che la matematica sia il regno delle certezze assolute, di ciò che è vero sempre e dovunque, è condivisa da tutti, tranne che dai matematici*<sup>5</sup>.

La matematica è una scienza viva, nata dall'uomo, con l'uomo e per l'uomo, è frutto di un lavoro di costruzione duro, faticoso, senza certezze, continuamente messo in dubbio, esposto al rischio del paradosso e della contraddizione. In effetti Bertrand Russell<sup>6</sup> in un ironico e suggestivo aforisma afferma che *la matematica è quella scienza in cui non sappiamo di cosa stiamo parlando, nè se sia vero quello che diciamo.*

Eppure esiste una *irragionevole efficacia della matematica* nel descrivere, modellizzare la natura in tutti i suoi aspetti operativi, fattuali<sup>7</sup>. Non esiste scienza che non usi la matematica come linguaggio, mediante il quale potersi esprimere.

La radice del problema, del mistero forse, si trova in un altro problema, in

---

<sup>4</sup>Galileo Galilei (1564-1642) nell'opera del 1623 *Il Saggiatore* sostiene che “la filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'Universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, nè quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto”.

<sup>5</sup>Cfr. [4].

<sup>6</sup>Bertrand Arthur William Russell (1872-1970) fu un matematico, logico e filosofo di primissimo piano; fu anche Premio Nobel per la letteratura “quale riconoscimento ai suoi vari e significativi scritti nei quali egli si leva in alto a campione degli ideali umanitari e della libertà di pensiero”.

<sup>7</sup>Cfr. [25], [53], [17].

un altro mistero ancora più profondo e radicale. Possiamo esprimerlo con una domanda: cosa effettivamente conosce la scienza e come e perchè possiamo dire di *conoscere il mondo* o, almeno, possiamo tentare di formulare delle procedure intellettuali che hanno come obiettivo finale il possesso di tale conoscenza? Non è obiettivo di questo lavoro abbracciare una tematica così ampia e, per giunta, sostanzialmente non risolta. Cercheremo solo di svolgere alcune riflessioni che offrano qualche contributo per rispondere alla domanda globale *cosa è la matematica*. Non dedicheremo attenzione a una descrizione disciplinare, anche se per altro solo sommaria, di questa scienza. Esiste a questo proposito una ampia ed esauriente bibliografia (cfr. per esempio Courant e Robbins<sup>8</sup>). Il nostro obiettivo, adombrato anche nel titolo della presente ricerca, è sviluppare alcuni appunti che contribuiscano ad un'analisi del pensiero matematico: come si forma, come si presenta nell'esperienza intellettuale dello studioso, attraverso quali procedure esso può diventare patrimonio costitutivo della nostra mente.

## 1.2 Elogio della matematica

*Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty - a beauty cold and austere, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show. The true spirit of delight, the exaltation, the sense of being more than man, which is the touchstone of the highest excellence, is to be found in mathematics as surely as in poetry<sup>9</sup>.*

La matematica, come prodotto astratto della nostra mente è una disciplina che riflette la volontà attiva, la ragione contemplativa e il desiderio di perfezione estetica. I suoi elementi fondamentali sono la logica e l'intuizione,

---

<sup>8</sup>Vedi [13].

<sup>9</sup>Cfr. [48], pag. 73.

l'analisi e la costruzione, la generalità e l'individualità<sup>10</sup>.

Il suo studio educa all'elasticità mentale, alle diverse prospettive, ad una logica rigida ed indiscutibile. Chi è in grado di entusiasinarsi di fronte a tale fascino e ad amare questa materia troverà quelle energie che lo accompagneranno in un mondo misterioso e affascinante<sup>11</sup>.

Studiare la matematica abitua al ragionamento e alla riflessione, stimola le capacità di intuizione e lo spirito di ricerca, ha funzione educativa di pensiero, abitua alla chiarezza espositiva e precisione del linguaggio, sviluppa le capacità logiche e di astrazione, affina le capacità di sintesi, abitua a descrivere e razionalizzare la realtà nei suoi vari aspetti e a considerare criticamente informazioni e ipotesi. La matematica ha profondi legami con l'arte, la musica e altre forme espressive, altresì è una disciplina indispensabile per tutta la ricerca scientifica e tecnologica, è uno strumento di modellazione e di calcolo per le scienze applicate e teoriche<sup>12</sup>.

La matematica costituisce anche un episodio, un frammento di quell'indagine dell'infinito e dell'ignoto che l'uomo svolge nel quotidiano del suo esistere; è un percorso psicologico continuo, che passo dopo passo ci porta ad ampliare le nostre conoscenze del mondo e della vita. Ma questo processo verso l'ampliamento dello scibile umano non è lineare: anche il matematico è condannato a scontrarsi con la contraddizione e l'errore. Quali sono i limiti conoscitivi dell'uomo? Fino a che punto è possibile leggere e comprendere la natura? Quanto può essere coerente l'intelletto? Queste domande, e le loro risposte, possono provocare smarrimento nel nostro pensiero e quindi anche nella mente del matematico. Eppure il matematico è artefice delle condizioni della propria ricerca: definisce i presupposti e gli assiomi su cui costruire le proprie teorie; per lui la contraddizione non è un limite, è solo un passaggio necessario per poter ridefinire i parametri di partenza. Diversa è la condizione dell'uomo che ha come verifica il mondo: le sue teorie e le sue ipotesi sono soggette alla verifica implacabile del dato sensibile. Ne deriva

---

<sup>10</sup>Cfr. [42].

<sup>11</sup>Cfr. [4].

<sup>12</sup>Cfr. [42].

che la contraddizione ha valenze diverse in questi due ambiti di ricerca: se nel primo caso è uno stimolo per un nuovo sviluppo, un'indicazione per una nuova via, nel secondo caso è segno di fallimento.

Concludendo, che cos'è la matematica? È un viaggio affascinante in un mondo misterioso, è l'incarnazione del mitico logos<sup>13</sup>.

Ma qual è il senso di tanto mistero? Il senso che ci appare della matematica non si trova solo nella ricerca della *verità*, che è la radice più profonda del mistero, ma anche nella *spiegazione*, cioè per dirla in termini matematici, nella dimostrazione. È quest'ultima infatti che assegna un valore di verità alla matematica. Possiamo quindi forse concludere che la matematica è l'arte della dimostrazione.

### 1.3 La matematica è bella, è utile, è facile

Dobbiamo ad Alessandro Padoa, allievo di Giuseppe Peano, questo luminoso *elogio della matematica*.

*Nessuna scienza mi sembra più utile, più bella e più facile della matematica, quei tali (quelli che ostentano disprezzo per la matematica) forse commentano argutamente questi tre aggettivi, così: Utile? E quale professore non ritiene utile più di ogni altra la dottrina che egli insegna? Bella? Bello è quel che piace e, se la matematica piace a lei, non piace a noi. Facile? Questo poi rasenta la canzonatura!*

(Alessandro Padoa<sup>14</sup> in [42])

*Come matematici dobbiamo trasmettere agli altri l'amore per la nostra disciplina come componente essenziale della saggezza umana e far capire che la matematica è qualcosa di più della semplice abilità di calcolo, della pura manipolazione di numeri<sup>15</sup>.*

---

<sup>13</sup>Questo tema è ampiamente analizzato da P. Zellini in [54] e [55].

<sup>14</sup>Alessandro Padoa (1868-1937), matematico italiano, fece parte della scuola italiana di logica matematica, sorta nell'ultimo decennio del secolo XIX attorno a Giuseppe Peano.

<sup>15</sup>Cfr. [15].

In moltissimi casi la matematica è definita brutta e difficile; anche se spesso è ritenuta utile poichè rappresenta uno strumento necessario per moltissime discipline scientifiche, tecniche ed economiche. Obiettivo dell'analisi che stiamo svolgendo è mostrare e convincere che la matematica è facile, bella e utile da un punto di vista essenzialmente culturale e umanistico, così come lo sono l'arte e la letteratura e non è solo importante per le sue applicazioni.

### 1.3.1 La matematica è bella

*Ho detto che la matematica è più bella d'ogni altra scienza; ed invero in quale altra meglio rifulge lo splendore del vero?*

(Alessandro Padoa citato in [21])

La matematica è una forma d'arte, paragonabile alla letteratura, alla pittura, alla musica e ad altre espressioni artistiche.

La domanda che sorge ora spontanea è dove si manifesti questa sua artisticità? La matematica è, come le altre arti, una creazione dell'animo umano, il cui scopo principale è la soddisfazione profonda che porta al suo creatore, e ai suoi "ascoltatori", cioè a chi la incontra e la impara. La soddisfazione deriva dalla contemplazione di un mondo di idee semplice, elegante, armonico, e dalla concatenazione logica delle deduzioni. Per chi non lo credesse, si suggerisce di leggere senza pregiudizi la dimostrazione di Euclide sull'esistenza di infiniti numeri primi e di provare ad apprezzarne la bellezza<sup>16</sup>. Il fatto è che non c'è nulla di così fantastico e poetico, nulla di così radicale e sovversivo quanto la matematica. Essa è tanto spiazzante quanto la cosmologia o la fisica (i matematici concepirono teoricamente i buchi neri molto prima che gli astronomi ne trovassero realmente qualcuno), e consente maggiore libertà di espressione della poesia, dell'arte o della musica (che dipendono dal punto di vista espressivo dalle proprietà dell'universo materiale). La Matematica è la più pura delle arti, ed è anche la più incompresa.

Per esempio si immagini un triangolo inscritto in un rettangolo, la domanda

---

<sup>16</sup>Cfr. [12].

è: il triangolo quanta parte occupa della superficie del rettangolo? La cosa importante da capire è che non si sta parlando di qualche triangolo di legno nel sistema di travi che sorregge il tetto di una abitazione, non c'è alcun secondo fine pratico. Si sta solo giocando. Proprio in questo consiste la matematica: porre delle domande, giocare, divertirsi con la propria immaginazione.

L'obiezione che ci si aspetta immediatamente è: quale forma d'arte si riesce a vedere nelle regole per trattare i prodotti notevoli, la trigonometria, i logaritmi, ...? La risposta consiste nel fatto che la matematica, come ogni forma d'arte, richiede anche conoscenza tecnica, che forse non è sempre bella in sé, ma è finalizzata alle costruzioni dell'artista<sup>17</sup>.

Ci sono momenti in cui la matematica è uno strumento per comprendere il mondo e altri in cui è un'affascinante avventura dell'immaginazione. Accettare che apprendere è anche faticoso e non solo entusiasmante e divertente, è un modo per prepararsi ad assumere le proprie responsabilità da persone adulte che vivono e si devono muovere in una società civile.

### 1.3.2 La matematica è utile

*La matematica è davvero inutile? In un certo senso è chiaro che non lo è, poichè, per esempio, procura un gran piacere a moltissime persone. La matematica è "utile", direttamente utile, al pari di altre scienze come la chimica e la fisiologia? La domanda è tutt'altro che semplice e si presta a controversie. La mia risposta definitiva sarà NO, anche se alcuni matematici non esisterebbero a rispondere SI'.*

(Godfrey Harold Hardy<sup>18</sup> in [23])

Alcuni autori come Hardy, appena citato, hanno fatto un elogio della matematica inutile, della matematica pura, della matematica bella. Ma, siamo certi che la matematica bella sia sempre matematica inutile? Se una cosa è

---

<sup>17</sup>Cfr. [12], [32].

<sup>18</sup>Godfrey Harold Hardy (1877-1947) fu un matematico britannico noto anche per il suo saggio "Apologia di un matematico" sull'estetica della matematica.

bella, essa può essere anche utile, almeno per il piacere che provoca la sua visione agli esseri umani; la matematica in questo senso diventa una scuola d'arte e di umiltà, in quanto l'uomo viene a contatto con la complessità del reale e capisce di non essere in grado di dominare il mondo e neanche un'astrazione costruita con lo specifico scopo della semplicità.

Non è assurdo interrogarsi su ciò che può essere utile e necessario per una persona che si affaccia al mondo matematico. Sarebbe troppo diminutivo pensare alla matematica come divertimento in un mondo bello e non necessariamente utile a se stesso e alla società.

A. Padoa<sup>19</sup> afferma che qualunque sviluppo della matematica ha, senza dubbio, le sue radici psicologiche in esigenze più o meno pratiche, ma, una volta iniziato sotto la pressione della necessità di tali esigenze, esso inevitabilmente acquista valore in se stesso e trascende i confini dell'utilità immediata.

Non si può negare che la matematica sia una delle basi della tecnologia, a cui il benessere della nostra civiltà deve molto. Il metodo matematico è un pilastro degli imponenti progressi di tutta la scienza moderna, cioè di quelle dottrine o di quelle tecnologie che esplicitamente si servono dei suoi strumenti. Ma la matematica è anche da considerarsi come patrimonio di tutti gli uomini di cultura. Scrive a tal proposito Ennio De Giorgi:

*la matematica non serve tanto all'ingegnere, al fisico, all'economista come strumento per risolvere determinati problemi, ma serve piuttosto come quadro ideale fuori del quale non sarebbe nemmeno possibile impostare bene molte questioni di ingegneria, fisica, economia,...*<sup>20</sup>

La matematica è utile da un punto di vista empirico, oltre che per le verità a cui ci fa avvicinare, per il metodo di ricerca che essa utilizza ed utilizzando insegna. Non esiste alcuna disciplina che come questa sviluppi nell'uomo una meditazione più attenta: niente aiuta a procedere cautamente, ad argomentare ordinatamente e logicamente, ad affermare pacatamente, a valorizzare la creatività, l'intuizione, la fantasia e a sviluppare un giudizio critico. Il

---

<sup>19</sup>Cfr. [42].

<sup>20</sup>Cfr. [14].

suo ruolo educativo mira alla capacità di giudizio autonomo, non soggetta a condizionamenti, da raggiungere affinando la razionalità.

L'influenza della matematica che si esercita nel fornire alle altre scienze gli strumenti per esprimere le osservazioni e per dedurre dalle ipotesi assunte le conseguenze che ne derivano, giunge anche ad ispirare i procedimenti nel loro lavoro. Ad esempio tale influenza suggerisce di non accettare mai come sicure conclusioni di argomentazioni che vengano raggiunte basandosi solo su una presunta evidenza intuitiva. La matematica ci insegna infatti che la verifica della validità di un risultato, anche se riscontrata in moltissimi casi particolari, non potrà mai sostituire una dimostrazione rigorosa, che invece deve essere l'unico criterio di giudizio definitivo.

### 1.3.3 La matematica è facile

*Resulta que vocabulos de Mathematica, et in generale, de omni scientia, es internationale, vel commune ad linguas de Europa, ab Italo ad Anglo, ab Hispano ad Russo.*

(“Prefazione” di Giuseppe Peano<sup>21</sup> in [43])

Definire la matematica come la più semplice di tutte le discipline intellettuali, è un'affermazione che farà sorridere la maggior parte delle persone che stanno leggendo. Ma si provi a pensare quale altra scienza si occupa di verità più elementari. La matematica, infatti, non presuppone la conoscenza di nessuna altra scienza mentre le altre presuppongono la matematica!

---

<sup>21</sup>Giuseppe Peano (1858-1932) fu un grande matematico e logico, che ebbe fama anche per le sue proposte di linguista. La sua scuola di logica raggiunse risultati scientifici universalmente riconosciuti. Scrive a questo proposito Bertrand Russell nella sua *Autobiografia*: “Il Congresso (si riferisce al Congresso Internazionale dei Matematici, Parigi 1900) fu il punto di svolta della mia vita intellettuale, perchè vi incontrai Peano. Lo conoscevo già di nome e avevo visto qualche suo lavoro, ma non mi ero preso la briga di imparare il suo formalismo. Al Congresso notai che era sempre il più preciso di tutti, e che sistematicamente aveva la meglio in ogni discussione in cui si imbarcava. Col passare dei giorni, decisi che questo era l'effetto della sua logica matematica. Capii che il suo formalismo era lo strumento di analisi logica che avevo cercato per anni”.

La matematica è stata costruita con l'obiettivo della semplicità. Essa è nata con il fine di costruire un mondo artificiale, semplificato e ridotto rispetto al mondo reale in cui si svolgono argomentazioni persuasive ed esaurienti. Infatti, ci si può chiedere quale altra scienza conduce a risultati più sicuri e più agevolmente controllabili? La semplicità, la facilità, l'immediatezza del controllo attribuiscono a tale disciplina una criticità che non permette a nessuno di procedere in contraddizione.

La matematica è estremamente facile perchè si occupa volutamente di un mondo ideale formato da enti astratti, che in qualche misura riprendono oggetti del mondo reale, ma riportandoli ad astrazioni schematiche. Oltre ad aver così ristretto il suo campo d'azione, essa ha anche creato dei metodi specifici di descrizione e di verifica, come sono ad esempio i linguaggi formali. Essi sono stati ideati come strumento di controllo effettivo delle proprietà logiche di una struttura.

Si può affermare che l'astrazione matematica depura gli oggetti reali di tutte le loro varianti, eccezioni ed imprecisioni, costruendo appunto un mondo astratto in cui tutto sembra essere perfetto. Questa facilità è riconducibile anche alla bellezza prima descritta, la matematica descrive cioè un mondo che appare armonico, abbastanza accessibile all'intelletto umano e ragionevolmente appagante dal punto di vista logico. La matematica risulta dunque estremamente semplice perchè si concentra su pochissimi enti astratti che rappresentano la moltitudine del reale. La matematica potrebbe essere espressa con un limitatissimo linguaggio formale, contenente solo i termini primitivi costituenti il lessico con cui sono espressi gli assiomi. Un esempio è il testo euclideo *Elementi* in cui l'Autore premette l'elenco dei termini che userà nel trattato: *punto, linea, linea retta, piano, . . .*, cercando di dare una spiegazione opportuna ad ogni parola<sup>22</sup>.

---

<sup>22</sup>Sulla natura di questi enti Euclide è convinto che non vi siano dubbi. I primi due termini descritti nel testo euclideo sono:

1. il punto è ciò che non ha parte;
2. la retta è la linea che giace ugualmente rispetto a tutti i suoi punti.

In conclusione, lo studio della matematica disciplina bella, utile, facile e affascinante concorre alla formazione dell'uomo in quanto favorisce l'abitudine all'analisi ed alla sintesi, sviluppa la capacità di ragionamento coerente ed argomentato, favorisce ed educa l'intuizione e la fantasia stimolando lo spirito critico.

Si può affermare<sup>23</sup> che “la matematica è oggi uno strumento di lavoro d'importanza vitale. L'umanità non può rispondere alle difficoltà del proprio ambientamento e affrontare i problemi sempre più gravi della propria organizzazione senza ricorrere alla matematica. La spiegazione ultima della matematica va però cercata oltre gli aspetti strumentali. Essa ha sede nel cuore più che nel cervello dell'uomo, perchè nasce da una tensione infinita alla conoscenza assoluta, alla comunione con gli uomini e con il mondo”.

---

<sup>23</sup>Cfr. [41], pag. 4.

## Capitolo 2

# La formazione del pensiero matematico

### 2.1 La conoscenza scientifica

*Ogni conoscenza umana parte da intuizioni, procede attraverso i concetti e culmina in idee<sup>1</sup>.*

Intendiamo qui per *conoscenza scientifica* la capacità di emettere giudizi che abbiano valore interpersonale e ambito di validità univocamente individuato, riguardanti una realtà oggettiva concreta o tangibile del mondo reale con il quale entriamo in contatto, in tutti i suoi aspetti, cioè attraverso le nostre esperienze materiali, empiriche, fisico-sperimentali. Non prenderemo dunque in considerazione, in questa sede, la realtà umana interiore (psicologica, poetica o altro). La costruzione del pensiero matematico fa parte di questa attività di conoscenza e costituisce un prodotto finale della procedura di *concettualizzazione*.

Non intendiamo certo elaborare qui una *teoria della conoscenza*: ci limiteremo solamente ad una descrizione qualitativa delle fasi a nostro parere più significative di questo itinerario mentale, sottolineando gli aspetti che ci appaiono più importanti per quanto riguarda l'argomento che è oggetto della

---

<sup>1</sup>E. Kant citato in D. Hilbert come epigrafe di *Grundlagen der Geometrie* (cfr. [26]).

presente ricerca. In altre parole, l'itinerario che intendiamo qui delineare non vuole in nessun modo costituire un programma fondazionale riguardante lo studio della fenomenologia della conoscenza scientifica. Quello che ci interessa è seguire i primi passi di questo atto del conoscere, e quindi è osservare nella nostra mente il sorgere della intuizione di quelle nozioni primitive che, successivamente elaborate, porteranno alla enunciazione concettuale teorica. È nostra convinzione che in questa fase di formazione iniziale del pensiero si collochi il momento più importante in cui si esercitano le capacità di analisi critica e creativa messe in atto dalla fantasia e dalla acutezza mentale dello studioso.

È questo il momento delle scelte fondamentali che la fantasia e il cuore<sup>2</sup> suggeriscono allo studioso, il quale poi su di esse edificherà la propria dottrina astratta. L'analisi critica e lo studio fondazionale razionalmente condotto seguiranno dopo, e avranno sostanzialmente il compito di convalidare con rigore argomentativo le scelte che il cuore, appunto, e la libera creatività hanno fatto.

Sarebbe interessante analizzare da vicino, studiando le biografie di illustri scienziati e grandi matematici, la fenomenologia di questo atto creativo mentale, libero e gratuito che, per altro, fonda la conoscenza umana, e quindi, in ultima analisi, la scienza<sup>3</sup>.

Si può pensare qui, ad esempio, alle intuizioni che devono aver spinto il pensiero di un grandissimo studioso come G. Frege a partire da ciò che appariva intuitivamente plausibile per giungere infine a ciò che è poi risultato razionalmente inconsistente. Ricordiamo ancora, per fare un altro esempio, il progetto, il sogno, inseguito da G. Saccheri<sup>4</sup> che basandosi sulla sua fiducia certa nella verità e nella unicità della descrizione euclidea del mondo fisico,

---

<sup>2</sup>Cfr. [41], pag. 1.

<sup>3</sup>Spunti e motivazione per un'analisi di questo tipo si possono trovare anche in [11], pag. 183-185.

<sup>4</sup>Giovanni Girolamo Saccheri (1667-1733), gesuita e matematico italiano, può essere considerato il padre, seppure inconsapevole, delle geometrie non euclidee.

ne ha tentato una coraggiosa e geniale dimostrazione razionale<sup>5</sup>. Per la realizzazione di questo progetto, che oggi però sappiamo essere inconsistente, Saccheri si è quindi visto obbligato a forzare proprio quelle stesse argomentazioni razionali sulle quali il procedimento argomentativo era appoggiato, spingendo il proprio pensiero anche oltre il limite che la logica stessa gli poneva.

## 2.2 Le procedure di astrazione e generalizzazione

Ci proponiamo ora di descrivere, guardando all'esperienza intellettuale del singolo studioso, le procedure che conducono alla formazione dei concetti matematici. Come abbiamo già anticipato, non intendiamo enunciare un particolare progetto fondazionale ma ci proponiamo di analizzare quella elaborazione dei dati sensoriali operata dalla mente che ha come esito finale la formulazione dei concetti matematici.

Le fasi cruciali di questo itinerario di acquisizione di conoscenze si possono sintetizzare<sup>6</sup> nelle procedure di *astrazione* e *generalizzazione*; da queste si forma nella nostra mente un complesso patrimonio di sensazioni, suggestioni, intuizioni che costituiscono il bagaglio intellettuale (razionale e figurale) sul quale si costruiscono poi immagini e concetti astratti e generali.

### 2.2.1 La procedura di astrazione

La percezione della realtà sensibile che costituisce il mondo in cui si svolge la nostra esistenza, è l'ineludibile punto iniziale di ogni nostra conoscenza. Questo è un dato di fatto che in sè non presenta alcuna valenza epistemologica. Le riflessioni filosofiche e metodologiche avvengono successivamente e attengono al prodotto dell'elaborazione fantastica che la nostra mente opera

---

<sup>5</sup>Cfr. [49].

<sup>6</sup>Cfr. [35].

sul patrimonio intellettuale desunto dall'esperienza, cioè riguardano la procedura della concettualizzazione e le modalità di concezione delle idee.

L'inevitabile necessità della raccolta dei dati sensibili è testimoniata implicitamente o anche enunciata esplicitamente da tutti gli studiosi. Ci limiteremo a due esempi. Euclide inizia la sua opera *Elementi* analizzando ed elencando le immagini mentali che suggeriscono gli elementi costitutivi della disciplina geometrica che, passo dopo passo, sta costruendo. Peano teorizza esplicitamente le esperienze e i riferimenti sperimentali che suggeriscono la scelta e la formulazione degli assiomi enunciati a base dei fondamenti della geometria<sup>7</sup>. Viceversa chi esibisce una dottrina matematica che non fa riferimenti a suggestioni empiriche primitive (per esempio Bourbaki<sup>8</sup>) presenta una disciplina autoreferenziale che ha per oggetto solo se stessa e il linguaggio in cui essa si esprime. Qualche studioso avrebbe la tentazione di dire che ci si trova di fronte ad una tautologia, ma l'incredibile e inspiegabile efficacia della matematica<sup>9</sup> ci induce a pensare che ci troviamo di fronte ad un problema, ad un *mistero* molto più profondo di quanto ogni nostra analisi razionale può immaginare.

Sui dati empirici che provengono da una realtà complessa che offre molteplici esperienze sensibili di diversi livelli di rilevanza e significatività, è necessario poi operare, come primo atto del processo della conoscenza, mediante una opportuna *procedura di astrazione*. Questa permette di selezionare gli aspetti della realtà, e quindi i dati empirici che da questi provengono, individuando quelli che riteniamo possano essere rilevanti a certi determinati fini che interessano il processo conoscitivo in atto. Selezionare significa quindi distinguere tra ciò che interessa e ciò che non interessa, mettendo in evidenza i dati significativi e scartando gli altri. Si tratta dunque di estrarre, dal complesso patrimonio di sensazioni indistinte che si presentano ai nostri sensi, una famiglia di dati che appaiono interessanti. Un esempio in questo caso può essere offerto da quegli attributi intuitivi dei corpi fisici che chiamiamo nel

---

<sup>7</sup>Cfr. [44].

<sup>8</sup>Cfr. [10], pag 191 e successive.

<sup>9</sup>Cfr. per esempio [53], [25].

linguaggio comune “forma” oppure “colore”. Ai fini di studiare un oggetto geometrico ci interessa dunque, in questo esempio la *forma*, non il colore. La *forma geometrica*, nel suo significato scientifico, è dunque la famiglia, l’insieme, l’astratto si usa appunto dire, costituito da tutti quegli oggetti distinti che hanno in comune certi attributi che concorrono a determinare una stessa fattura esteriore ma possono per altri aspetti differire tra loro. Un qualunque oggetto di tale insieme può essere assunto come suo rappresentante, cioè come rappresentante di tutti gli elementi dell’insieme stesso. Dunque con questa procedura di matematizzazione si restringe la totalità degli oggetti sui quali si svolge l’analisi e il confronto: *astrazione come estrazione*.

Selezionare può però anche significare che si raggruppano diversi aspetti della realtà che si prestano ad essere raccolti insieme e, in particolare, matematizzati allo stesso modo. L’astrazione in questo caso significa identificare oggetti diversi che presentano aspetti funzionali uguali. L’esempio classico più naturale, in questo caso, è costituito da diversi modelli materiali (il bastone, il filo teso, il raggio luminoso, ...) formalizzabili mediante la stessa nozione geometrica di “segmento”. Parliamo in questo caso di *astrazione come identificazione*.

Dalla procedura di astrazione discende dunque quella straordinaria ricchezza della matematica che permette ad uno stesso oggetto matematico di rappresentare realtà svariate e anche molto diverse tra loro.

Può essere illuminante un esempio preso dalla geometria. La geometria nasce, come dice il suo nome, dall’arte di misurare: gli oggetti, una regione, la terra. Questo è il complesso dei primi dati empirici da cui muoviamo. Quando l’analisi sui casi particolari costituiti da tali dati acquista valore interpersonale e di più ampio ambito, si forma nella nostra mente l’intuizione della nozione di *figura geometrica*. Come si è già rilevato ogni figura è l’astratto costituito da diversi casi particolari tra loro distinti che però presentano certi particolari attributi comuni. È questo un primo livello di astrazione,

mirabilmente descritto anche, e prima di tutti, da Platone<sup>10</sup> ed è un primo risultato di quella *elaborazione fantastica* di cui si è parlato. La procedura di astrazione può però essere nuovamente applicata alla totalità dei dati mentali che costituiscono le figure. Si tratta allora di selezionare figure che hanno alcuni elementi in comune (per esempio qualche caratteristica numerica, come per esempio *misura* o altro) ma differiscono per altri (per esempio per la *posizione*). Si giunge così a considerare nuovi “astratti” che, negli esempi considerati, sono costituiti identificando figure diverse che occupano la stessa “posizione”. Iterando questo procedimento si possono generare nuovi oggetti mentali che costituiscono l’astratto di quelli su cui si è operato nel passo precedente. Si forma così a partire dai dati primitivi iniziali un processo di crescita che presenta livelli sempre maggiori di complessità e astrattezza per giungere infine agli oggetti mentali che di tali radici sensoriali costituiscono l’inquadramento e la caratterizzazione concettuale.

Rimane importante rilevare che questo itinerario di crescita non è avvenuto una volta per tutte nel profondo della storia del pensiero, ma si ripete e si rinnova di continuo nello sviluppo della disciplina e in ogni atto del conoscere che appartiene all’esperienza intellettuale di ogni studioso.

È su questa base e per queste ragioni che si riconosce alla matematica la natura di *disciplina in continua evoluzione* tra le sue radici empiriche concrete e le strutture concettuali più astratte e riposte che dalle prime hanno origine.

### 2.2.2 La procedura di generalizzazione

La *procedura* detta di *generalizzazione* riguarda quel processo mentale che attribuisce validità universale alle esperienze empiriche, necessariamente li-

---

<sup>10</sup>Ricordiamo a questo proposito le illuminanti parole scritte da Platone. *I geometri si servono di figure visibili e ragionano su di esse, ma non ad esse pensando, bensì a ciò di cui esse sono le immagini, ragionando sul quadrato in sè, sulla diagonale in sè, e non su quelle che disegnano. Lo stesso si dica per tutte le figure che essi modellano o disegnano, di cui si servono come immagini (a guisa di ombre o di immagini riflesse sulle acque) cercando di vedere certe verità che non si possono vedere se non col pensiero* (Platone, *Repubblica*).

mitate nel tempo e nello spazio. Si tratta quindi di un passaggio conoscitivo cruciale perchè ci permette di uscire dal contingente dei nostri singoli e momentanei dati sperimentali, per portare il pensiero al livello di concettualizzazione scientifica. Come è evidente, questo processo comporta una modifica cosciente degli aspetti della realtà che sono oggetto della nostra analisi sensoriale e che sono quindi anche oggetto della procedura di astrazione precedentemente analizzata. Ad esempio, la nozione di linea retta che in Euclide è modellizzata come *retta terminata* e che costituisce quindi un esempio intuitivo di infinito potenziale, in Hilbert è considerata come un oggetto illimitato e quindi pensata come un esempio di infinito in atto.

Due esempi emblematici della procedura di generalizzazione possono essere i seguenti.

### 2.2.2.1 La costruzione della teoria degli insiemi

Si può pensare che la nozione di insieme si formi a partire dall'*esperienza materiale* (peraltro del tutto comune) di considerare aggregati, collezioni di oggetti distinti riuniti in un'unica totalità. Si parla allora di una *molteplicità* di oggetti e con questo termine si può intendere, secondo la descrizione intuitiva offerta da Cantor<sup>11</sup>, *ogni riunione di oggetti determinati dalla nostra intuizione o del nostro pensiero, ben distinti tra loro e che vengono chiamati elementi dell'insieme*.

La *procedura di astrazione* ci suggerisce di non prendere in considerazione la natura di questi oggetti ma solo il fatto che “vengano considerati assieme”, cioè formano un'unità. Abbiamo descritto in questo modo un'introduzione verosimile e plausibile della nozione di insieme e in tale contesto il *principio di comprensione*<sup>12</sup> risulta accettabile e giustificabile.

È naturale che l'esperienza materiale, di cui abbiamo parlato, ci porti a considerare collezioni di oggetti la cui numerosità può essere controllata in modo operativo empirico. Parliamo allora di un numero limitato, o *finito*, di og-

---

<sup>11</sup>Cfr. [11], pag. 19 e successive.

<sup>12</sup>Cfr. [11], pag. 23.

getti.

La *procedura di generalizzazione* permette però alla nostra mente, alla nostra fantasia, di immaginare numerosità sempre più grandi. Si pone allora il problema se si intenda accettare, insieme alle molteplicità che l'esperienza sensoriale può suggerire, anche altre molteplicità la cui estensione è maggiore di quanto si possa pensare. Cantor stesso suggerisce una terminologia per distinguere questi due tipi di molteplicità. Parleremo nel primo caso di *molteplicità consistenti*, per indicare quelle che si possono considerare come un'unità, mentre indicheremo come *molteplicità inconsistenti* quelle che intuitivamente risultano "troppo grandi" per essere abbracciate anche intuitivamente come una unità. Un esempio di molteplicità inconsistente, che ci è offerto dallo stesso Cantor, è quello della "totalità delle cose pensabili". La ragione che spinge a distinguere in modo definitivo tra i due tipi di molteplicità è che, nell'ambito di quelle denominate *inconsistenti*, è possibile costruire delle antinomie e quindi, in ultima analisi, delle contraddizioni. L'esempio classico è quello offerto dalla *antinomia di Russel*<sup>13</sup>.

Per poter costruire un sistema logico occorre limitare la nozione di insieme alle molteplicità consistenti, individuando dei criteri intrinseci a priori, che permettano di effettuare la distinzione che si è richiesta. Questa esigenza ha portato a riconoscere la necessità di enunciare una *teoria astratta degli insiemi*. Ciò è stato fatto con diverse modalità da vari studiosi come ad esempio: B. Russel, E. Zermelo, A. A. Frankel, Th. Skolem, J. Von Neumann e altri. Per concludere si può affermare che la procedura di generalizzazione ha portato alle sue estreme conseguenze la nozione intuitiva di aggregato, collezione, molteplicità di oggetti. Un successivo esame critico delle immagini intuitive che si erano così formate, sollecitato dalla scoperta delle antinomie, ha permesso poi di riconoscere la necessità logica di imporre limiti a quella generalizzazione e ha portato in ultima analisi alla costruzione delle moderne *teorie degli insiemi*.

---

<sup>13</sup>Cfr. [11], pag. 30.

### 2.2.2.2 La nozione di infinito

L'intuizione primordiale di molteplicità, intesa come numerosità di una totalità di oggetti distinti, porta, attraverso la procedura di generalizzazione, alla formulazione della nozione di *infinito*. L'immagine intuitiva dell'infinito che così si raggiunge, attraverso una progressione successiva che considera un "tanto" e poi ancora "più tanto" e poi ancora "sempre più tanto", è sostanzialmente quella di un infinito potenziale.

Ci può aiutare, come già accennato, l'immagine suggestiva della *retta terminata* così come è introdotta da Euclide. Questa retta, pur essendo terminata dai suoi due estremi, si può sempre estendere (in termini intuitivi potremmo dire "allungare") perchè il primo postulato euclideo assicura che due punti distinti definiscono sempre una sola retta.

Si può ora affermare che se si applica il processo di astrazione alla famiglia di tutte le rette terminate che hanno almeno due punti in comune, si ottiene un astratto che è costituito dalla totalità di rette terminate che hanno in comune almeno quei certi due punti. Questo astratto è composto da infinite rette (terminate), perchè a tale totalità si può sempre aggiungere un altro elemento, che è a sua volta sempre una retta perchè soddisfa il primo postulato. Abbiamo costruito in qualche modo ancora una retta, che ha infiniti punti ma che, come ci suggerisce l'intuizione e la fantasia, presenta in modo complessivo tutti i suoi punti, senza che se ne possano o debbano aggiungere altri. Otteniamo in tal modo l'immagine intuitiva di un infinito in atto. Questa è la nozione di retta che introduce Hilbert nel suo sistema di assiomi. Un' *analisi critica* di questo processo di crescita che abbiamo indicato con l'espressione "sempre più tanto" ci spinge a riflettere ulteriormente sui seguenti fatti.

### 2.2.2.3 I paradossi dell'infinito

Consideriamo le tappe della procedura fantastica sopra descritta che per generalizzazione, a partire da una famiglia composta da un numero finito di elementi, considera famiglie sempre più numerose. Possiamo in altre parole

pensare ad una totalità (infinita)  $\mathcal{F}$  di insiemi finiti. L'intuizione ci suggerisce che, considerando l'astratto di tutti gli insiemi di  $\mathcal{F}$ , otteniamo un insieme infinito  $F$  a cui però appare naturale attribuire tutte le proprietà insiemistiche degli insiemi finiti che di tale astratto fanno parte. L'immagine mentale che la nostra intuizione ci suggerisce presenta quindi caratteristiche che risultano tra loro contraddittorie perchè si ottengono dalla sovrapposizione di proprietà tipiche degli insiemi finiti e di altre che si riscontrano negli insiemi infiniti. Si parla dei cosiddetti *paradossi dell'infinito*.

Tra tali paradossi il più noto è forse quello che riguarda le relazioni di inclusione tra sottoinsiemi propri di un insieme  $U$  assegnato e la possibile esistenza di biiezioni definite tra questi. La nozione primitiva e intuitiva di biiezione ci induce ad affermare che “non è possibile stabilire una biiezione tra un insieme  $U$  e un suo sottoinsieme proprio  $V$ ”, e in effetti nel caso di insiemi finiti ogni verifica sperimentale ci conferma questo fatto. Viceversa, nel caso di insiemi infiniti, facili contro-esempi ci mostrano che tale affermazione non è più valida.

Questo significa che l'immagine mentale di insieme infinito, ottenuto per generalizzazione di insiemi finiti, deve essere sottoposta ad un attento esame critico e abbiamo un'ulteriore conferma che in matematica nessuna proposizione può essere accettata se basata solo sulle categorie della naturalezza, della plausibilità e della intuibilità<sup>14</sup>.

#### 2.2.2.4 Il problema di Archimede

Come abbiamo già rilevato la nozione di insieme che contiene infiniti elementi (*insieme infinito*) nasce intuitivamente come *generalizzazione* della nozione di insieme che contiene un numero finito di elementi (*insieme finito*). Si tratta in sostanza del procedimento che abbiamo descritto con l'espressione suggestiva: *tanti elementi* e poi *ancora più tanti*. La fantasia però non precisa alla nostra intuizione come si realizza questo processo di generalizzazione che ci porta a dire *ancora più tanti*. Tuttavia quando si deve attribuire ad

<sup>14</sup>Cfr. tra gli altri [11], pag. 109.

un insieme infinito  $X$  una struttura di ordinamento “ $>$ ” risulta necessario precisare le condizioni di compatibilità che si vuole riconoscere esistenti tra la relazione di ordine e il processo di accrescimento. Si tratta in sostanza di precisare se l’accrescimento avviene un passo alla volta all’interno dell’ordinamento prefissato, immaginando di poter occupare alla fine in questo modo l’intero insieme, oppure se l’accrescimento avviene al di fuori e quindi la struttura di ordine “ $>$ ” è tale che esistono elementi  $a$  che non sono mai raggiungibili per accrescimento a partire da un prescelto elemento  $b$ , che pure risulta confrontabile con  $a$  nell’assegnata relazione d’ordine “ $>$ ”.

L’*assioma di Archimede* costituisce una formulazione precisa della situazione intuitivamente descritta. Nel caso in cui, ad esempio, l’insieme  $X$  sia l’insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali e la procedura di accrescimento sia la funzione *successore* definita nel sistema assiomatico di Peano, le due eventualità che abbiamo ipotizzato, riguardo le modalità di accrescimento, corrispondono rispettivamente agli insiemi cosiddetti *standard* oppure *non-standard* dei numeri naturali<sup>15</sup>.

In conclusione, considerato un insieme ordinato, ipotizzare la validità dell’assioma di Archimede per tale insieme equivale a supporre che a partire da un qualsiasi elemento  $b$  si possa raggiungere e superare per accrescimento un qualsiasi altro elemento  $a$  dell’insieme. Questa ipotesi ha un profondo significato nel caso della formalizzazione di fatti geometrici perchè descrive con precisione ciò che è realizzabile mediante operazioni materiali empiricamente eseguibili. Ciò significa, in ultima analisi, riportare le proposizioni della geometria ad essere coerenti con quanto è materialmente riconoscibile nella realtà sensibile. Questo obiettivo è quanto Peano richiede che accada affinché sia lecito chiamare correttamente *geometria* il contenuto di un qualsiasi studio astratto formalmente condotto<sup>16</sup>. Tuttavia può avere ugualmente

---

<sup>15</sup>Cfr. Parte II, Capitolo 4.

<sup>16</sup>Si ricordi quanto scrive Peano in [44], pag. 141: *...prima di abbandonare questo soggetto, sarà ancora utile un’osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati. Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinché questo lavoro meriti il nome di*

un effettivo significato logico anche la costruzione e lo studio di un modello geometrico per il quale si assuma l'ipotesi della non validità dell'assioma di Archimede. Questo fatto invero ci permette di valutare le conseguenze degli assiomi della geometria anche al di là delle immagini intuitive che sono state alla radice della loro ispirazione.

L'assioma di Archimede risulta allora, da questo punto di vista, una sorta di spia concettuale che valuta in tutta la loro ampiezza le conseguenze logiche degli assiomi della geometria. Questi infatti, enunciati per descrivere in modo formale le osservazioni sperimentali desunte dalla realtà empirica, risultano avere di fatto una molteplicità di conseguenze concettuali che la semplice intuizione ingenua e a-critica non poteva prevedere. In altre parole, come suggerisce Peano, gli assiomi sono frutto di osservazioni empiriche ma una analisi critica rivela che la portata delle loro conseguenze è più ampia delle radici che li hanno suggeriti. La validità o meno dell'assioma di Archimede è dunque un possibile strumento di valutazione di quanto le implicazioni di una deduzione razionale logicamente condotta possano differire da un'immagine intuitiva ingenua suggerita in modo a-critico dalla nostra fantasia.

---

*Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche. La Geometria di posizione, o proiettiva, poi, è una parte della Geometria generale; quindi i suoi postulati si debbono trovare fra quelli assunti per la Geometria generale.*

*In conseguenza, sotto il punto di vista pratico, non parmi lecito l'assumere ad es. come postulato su cui fondare la Geometria proiettiva il seguente: "Due rette giacenti in uno stesso piano hanno sempre un punto in comune", poichè questa proposizione non si verifica coll'osservazione, ed è anzi in contraddizione coi teoremi di Euclide.*

*La Geometria proiettiva parte dai postulati della Geometria elementare, e, con opportune definizioni, introduce nuovi enti, detti punti ideali (sia nella geometria Euclidea, che nella non Euclidea), e ne risulta così che i nuovi enti ottenuti soddisfano alle proposizioni precedenti.*

## 2.3 La concettualizzazione matematica: il linguaggio formale

Operando mediante le procedure di astrazione e generalizzazione precedentemente analizzate viene a crearsi nella nostra mente un patrimonio di sensazioni, intuizioni, immagini e memorie, che rimane a disposizione e può essere elaborato in modo fantasioso, critico e creativo, al fine di produrre idee e concetti astratti e generali. Indicheremo questo processo, che è alla base di ogni conoscenza razionalmente intesa, *elaborazione fantastica*.

I concetti astratti formulati nel modo descritto costituiscono essenzialmente l'insieme delle *nozioni primitive* su cui è basato il processo di conoscenza scientifica e possono essere applicati a svariati oggetti materiali rimanendo però sempre distinti da ciascuno di essi.

In tale processo di concettualizzazione scientifica è di particolare importanza l'esame e il confronto degli strumenti utilizzati per rappresentare e trasmettere tali concetti nonché le elaborazioni razionali operate su di essi. Se questa rappresentazione vuole essere riconosciuta come una forma di conoscenza effettivamente scientifica, con valore oggettivo ed interpersonale, deve essere *univoca e convenzionale*. Deve essere *univoca*, cioè non deve spiegare il significato dei contenuti che intende trasmettere, attraverso il contesto del discorso in cui è inserita. Inoltre la stessa necessità di univocità semantica tipica del linguaggio scientifico richiede necessariamente il ricorso ad espressioni, o a simboli, di natura convenzionale. Tale obiettivo può essere raggiunto in due modi: mediante l'introduzione di simboli formali specifici, oppure utilizzando parole ed espressioni desunte dal linguaggio comune, a cui sono attribuiti in modo esplicito significati circoscritti e chiaramente designati.

La scelta del linguaggio con cui rappresentare i concetti appare di ancora maggiore importanza nel caso delle scienze matematiche, in vista del peculiare ruolo che la matematica occupa nell'arco di tutto il sapere scientifico. Infatti, dall'adeguatezza di tale linguaggio dipende l'univocità e la correttezza stessa del concetto espresso e, in ultima analisi, dal linguaggio dipende

anche l'applicabilità del concetto stesso all'universo scientifico che la matematica formalizza.

Va tuttavia ricordato che in alcuni casi può essere opportuno abbandonare il linguaggio formale in favore di un linguaggio naturale, soprattutto in situazioni in cui è decisiva una buona comunicazione interpersonale (come ad esempio nel campo educativo), o quando non esiste un linguaggio formale appropriato pre-esistente. Quando questo accade, bisogna provvedere ad un'attenta analisi critica delle espressioni utilizzate, al fine di evitare possibili ambiguità e per liberarsi da suggestioni verbali o psicologiche. Tali ambiguità possono nascere dalla molteplicità di sinonimi che sono presenti e possibili nel lessico comune, oppure dalla ricchezza di significati che una stessa espressione può assumere in relazione al contesto in cui è utilizzata (nella lingua italiana sono numerosi i casi di omonimia). Ne consegue che se si sceglie di utilizzare parole del linguaggio comune in qualità di termini tecnici<sup>17</sup>, i relativi significati devono essere esplicitamente rilevati e riconosciuti mediante opportune definizioni.

Per assicurare definitivamente univocità, astrattezza e non-ambiguità, il linguaggio matematico si è evoluto a *linguaggio formale*. Tale formalizzazione (che in ultima analisi risulta essere l'aspetto più astratto del processo di concettualizzazione) si realizza attraverso l'introduzione di un sistema di simboli artificiali e convenzionali (ma non arbitrari) dotati di proprie leggi di comportamento (*regole sintattiche*) in grado di rappresentare in modo generale, astratto e non ambiguo i concetti matematici. In questo modo, se le leggi sintattiche del formalismo introdotto vengono rispettate, le operazioni di elaborazione e di calcolo effettuate sui simboli assumono il significato di una deduzione logica le cui conclusioni sono certe. Si ripete in questo modo ciò che accade nel caso delle operazioni aritmetiche dove il rispetto delle regole formali di calcolo assicura l'attendibilità dei risultati ottenuti. In altre pa-

---

<sup>17</sup>L'esempio più illuminante in questo caso è offerto dalla parola *uguale* con tutti i suoi significati presenti nel linguaggio comune e con tutte le sue possibili utilizzazioni in qualità di termine tecnico: per esempio identico, congruente, simile, equivalente, ...

role, per quanto riguarda l'argomentazione matematica, si realizza quanto teorizzato in modo vago ma suggestivo da G.W. Leibniz, il quale scrive a proposito dell'ideale di un ragionamento formale totalmente affidabile:

*...pertanto, quando vi fossero delle divergenze di opinione, non sarà necessario fare delle discussioni tra dotti, non più di quanto esse siano necessarie tra due esperti di computesteria. Basterà infatti sedersi ad un tavolo con la penna in mano (chiamando, se si vuole, un amico ad assistere) e dire: **calcoliamo** ...*<sup>18</sup>

Abbiamo presentato in questo modo una descrizione psicologica e operativa delle procedure mentali che a partire dall'esperienza sensoriale, e attraverso i processi di astrazione e generalizzazione, portano alla formazione delle nozioni primitive. Tali nozioni oggetto dell'elaborazione fantastica in precedenza descritta, conducono poi all'enunciazione concettuale in quanto tale. Sebbene tali procedure di astrazione e generalizzazione, in tutte le loro fasi operative, siano il fondamento operativo del pensiero conoscitivo (matematico in particolare), esse non ne costituiscono il fondamento teorico e neppure ne forniscono la spiegazione metafisica. Si tratta tuttavia di momenti operativi fondamentali, in quanto offrono stimoli psicologici che creano nella nostra mente l'intuizione e l'immagine degli oggetti concettuali costruiti. Nel caso specifico della concettualizzazione matematica, attraverso questo processo di elaborazione possiamo assistere alla formazione di *immagini mentali* in relazione a quelle nozioni primitive che costituiscono le radici del pensiero alla base delle costruzioni dei sistemi assiomatici.

L'oggetto della descrizione ora presentata non ha dunque la pretesa di costituire un'analisi fondazionale teorica, ma vuole rappresentare l'ambito mentale in cui si esercita il pensiero critico e la spinta originale della *creatività*, che sono vere modalità di pensiero artefici della formazione della riflessione scientifica e, in particolare, di quella matematica.

Il passaggio dalle sensazioni ai concetti, che abbiamo denominato *elaborazione fantastica*, è preso in considerazione ed analizzato da tutta la tradizione

<sup>18</sup>G. W. Leibniz (1646-1716) in [30].

filosofica, da Aristotele a Kant; esso è abitualmente riconosciuto come il momento decisivo, squisitamente individuale, creativo e gratuito, del pensiero. Solo successivamente alla formulazione dei concetti sarà poi possibile introdurre quelle valutazioni e analisi critiche di natura fondazionale che la riflessione epistemologica e psicologica suggeriscono.

I concetti nascono dunque per elaborazione operata a partire dalle “esperienze” (chiamate da Kant “intuizioni”) che sono, in ultima analisi, sintesi astratte di complessi di “astrazioni”. I concetti astratti li troviamo in matematica, come anche in filosofia: pensiamo ad esempio al concetto di “numero”, oppure a quello di “persona”, oppure di “bene”. Queste due discipline condividono dunque l’oggetto della loro riflessione, ma sviluppano metodi di analisi ed elaborazione estremamente diversi. Sebbene la filosofia cerchi di applicare un metodo teoreticamente coerente e linguisticamente preciso, ogni autore declina tale tendenza in modo singolare. Non esistono limiti intrinseci al pensiero filosofico e la contraddizione può sempre rivelarsi occasione per il superamento e l’arricchimento del pensiero stesso<sup>19</sup>. Le dimostrazioni filosofiche avvengono attraverso analisi argomentative, metodi genealogici e sillogismi concettuali determinati di volta in volta dallo studioso o dal contesto storico culturale.

La novità originale presentata dalla matematica consiste invece nell’uso di un linguaggio, rappresentato attraverso un *formalismo* che è dotato di una capacità operativa intrinseca. Infatti i simboli matematici componenti tale formalismo operano tra loro secondo regole, o leggi, interne ai simboli stessi. Le procedure secondo cui ciò avviene sono i *calcoli matematici* (algebrici, analitici o quant’altro) che assumono così, come si è già rilevato, lo stesso valore di un ragionamento deduttivo. Il calcolo matematico, in altre parole, non è altro che una particolare realizzazione di un procedimento di deduzione logica. La conseguenza profondamente innovativa di questo fatto è che tale procedimento logico, poichè si svolge nel contesto delle relazioni

---

<sup>19</sup>In questo contesto basta pensare ad esempio alla dialettica hegeliana strutturata secondo la triade tesi-antitesi-sintesi.

formali operanti sui simboli, di fatto è come se non avvenisse più nella stessa cornice mentale che inizialmente aveva elaborato i concetti e i relativi simboli, ma avvenisse ad un diverso livello di pensiero. Il calcolo rappresenta allora certamente una forma del ragionamento matematico: si potrebbe dire un *ragionamento oggettivato*, in qualche misura automatico, sul quale si può quindi agevolmente riflettere “dal di fuori”. In altre parole siamo in presenza di due ragionamenti distinti e di due diversi linguaggi che li esprimono. Il ragionamento matematico formale e rigoroso, eventualmente espresso in modo simbolico seguendo regole sintattiche esplicitate: è questa l’argomentazione razionale che rende la matematica stessa *linguaggio della scienza*. C’è poi una seconda forma di ragionamento, che potremmo chiamare *naturale*, che costituisce una sorta di meta-linguaggio rispetto al primo in quanto lo definisce, lo individua, lo descrive e, in ultima analisi, lo giudica. È compito di tale meta-linguaggio individuare le nozioni primitive, fissare la scelta dei simboli e stabilire le regole sintattiche che li caratterizzano. Lo sviluppo del meta-linguaggio è dunque del tutto indipendente dalle analisi e dallo svolgimento del linguaggio e anzi, il primo permette di controllare l’adeguatezza del secondo senza interferire con esso.

Linguaggio e meta-linguaggio sono entrambi frutto di un’attività della nostra mente, della sua razionalità deduttiva e anche della sua creatività e fantasia, ma sono accuratamente distinti e nelle loro procedure argomentative non interferiscono tra loro. Ne risulta la possibilità da parte della mente di “osservare” e dare giudizi critici autonomi e indipendenti riguardanti le sue stesse procedure argomentative e deduttive. In altre parole potremmo dire che la matematica è una disciplina che permette un’attività mentale unica e di eccezionale importanza: essa permette alla mente di ragionare su se stessa, come se fosse un’altra mente.

Possiamo considerare due esempi emblematici in cui è possibile riconoscere l’esplicarsi di questa capacità che la matematica possiede di offrire ragionamenti a due livelli distinti, indipendenti ma che si coinvolgono a vicenda. Il primo esempio è offerto da un esame, anche solo in via di principio, del

*programma fondazionale di Hilbert*<sup>20</sup>. Per la realizzazione di tale programma si richiedeva che le varie teorie matematiche fossero presentate come *sistemi formali*, cioè come teorie assiomatiche nelle quali erano completamente esplicitati sia il linguaggio, sia le regole di deduzione. Il progetto hilbertiano prevedeva poi che per tali sistemi formali si potesse dare una dimostrazione diretta di non contraddittorietà nell'ambito di quella che Hilbert stesso chiama *teoria della dimostrazione*. Per riferirci all'analisi prima accennata relativa a *linguaggio e meta-linguaggio*, è evidente che il ruolo di linguaggio è ricoperto dal sistema formale mentre le regole con le quali tale sistema è definito e costituito sono descritte mediante il corrispondente meta-linguaggio. Un secondo esempio di questa capacità di ragionamento a due livelli distinti ma autoreferenziati è dato dalla possibilità che la matematica offre di analizzare e risolvere una vasta classe di antinomie, in particolare le cosiddette *antinomie semantiche o linguistiche*. Nelle espressioni verbali che esprimono tali antinomie, è solo mediante un'accurata analisi critica del linguaggio che le esprime, che è possibile operare la distinzione e la separazione dei diversi livelli concettuali coinvolti, permettendo così di risolvere l'apparente contraddizione che l'antinomia stessa sembrava contenere. Un esempio significativo di questa situazione è offerto dalla cosiddetta *antinomia del mentitore*, dove è presente un linguaggio che si auto-definisce mendace e un meta-linguaggio che lo controlla, lo giudica, affermando con verità, la sua natura di linguaggio che dice il falso. Ne risulta la possibilità di *affermare con verità che si afferma il falso* senza che questa espressione, apparentemente contraddittoria, perda di fatto di significato.

## 2.4 Il ruolo delle immagini mentali: analisi critica e creatività

Nell'ambito della concettualizzazione matematica che abbiamo in precedenza esaminato, un posto particolare è occupato dal caso della geometria.

---

<sup>20</sup>Cfr. [10], pag. 139.

Risulta infatti da numerosi studi svolti nel campo della psicologia dell'apprendimento<sup>21</sup> ed è confermato dalla esperienza personale di ogni studioso, che i concetti astratti riguardanti la geometria presentano due componenti ben distinte, anche se strettamente collegate tra loro.

La prima componente, esplicitamente astratta, è costituita dagli *aspetti razionali*, rappresentabili formalmente, presenti nel concetto (intendendo la parola nel senso comune del termine), aspetti che permettono di inserirlo, di considerarlo come un elemento di una teoria astratta più generale. Ad esempio: in geometria euclidea, per “triangolo” intendiamo una figura poligonale caratterizzata da tre punti distinti (chiamati vertici) . . . e così via con le altre analoghe caratterizzazioni. Questa prima componente inserisce quindi, come si è detto, la figura geometrica in una particolare teoria astratta logicamente costituita entro la quale si può poi operare con gli strumenti della deduzione razionale.

La seconda componente presenta invece nella nostra mente immagini, ovvero figure, che costituiscono la traccia, la memoria, le suggestioni lasciate dagli oggetti materiali che sono origine delle sensazioni che si trovano all'inizio della lunga catena di procedure descritte come sorgente e provocazione per la nascita del concetto stesso. Questa seconda componente può essere chiamata *figurale* e assieme alla prima costituisce la nozione di *concetto figurale*<sup>22</sup>, nozione che descrive completamente l'oggetto mentale corrispondente all'ente geometrico considerato. Le due componenti che abbiamo considerato sono strettamente collegate, anche se nettamente distinte tra loro, e si sollecitano e si integrano continuamente a vicenda. Precisamente sono le immagini che sollecitano e provocano la fantasia e la creatività mentre è la sistemazione rigorosa razionale del concetto che controlla la sua coerenza logica e la sua affidabilità. Questo aspetto della concettualizzazione geometrica è conseguenza diretta del peculiare legame che intercorre, nella nascita e nello sviluppo della geometria, tra il mondo delle sensazioni reali (tattili o visive)

---

<sup>21</sup>Cfr. per esempio [19], [20], [39].

<sup>22</sup>Cfr. [20].

e l'astrattezza concettuale che dalle prime prende origine.

Nell'ambito dell'educazione matematica è questa certamente una importante ragione del fascino e della difficoltà della geometria.

La geometria, *prima razionalizzazione del mondo fisico*<sup>23</sup>, è la palestra ideale dove incontrare e sperimentare il metodo di conoscenza detto *modellizzazione matematica*. La cosiddetta *geometria analitica*, cioè la rappresentazione algebrica del *metodo delle coordinate*, costituisce per tutti i ragazzi in età scolare il primo e più facile esempio di *modello matematico*.

Nello studio della geometria, in particolare a livello elementare, questo legame tra realtà e astrazione concettuale, che si realizza attraverso la componente razionale e quella figurale dei concetti, è certamente origine delle difficoltà che si incontrano nel distinguere tra oggetti reali e figure geometriche che li rappresentano. Esiste su questo argomento una vastissima letteratura<sup>24</sup>. Ci limitiamo a ricordare, nel caso della geometria elementare del piano, la differenza concettuale che si può (e si dovrebbe) chiaramente istituire tra la nozione di *figura* (geometrica) e quella di *disegno*. Con il primo termine possiamo intendere di indicare la componente razionalmente definita dell'oggetto geometrico che viene considerato, mentre il secondo termine si riferisce essenzialmente alla componente figurale del medesimo oggetto, al suo aspetto visivo, a quella che chiamiamo anche "forma", specie nel caso particolare di oggetti spaziali. L'importanza di una tale distinzione dipende dal fatto che l'elaborazione fantastica che la nostra mente opera sul concetto figurale presenta caratteristiche sostanzialmente diverse trattando le due distinte componenti che abbiamo indicato.

L'analisi della figura, cioè della componente razionalmente caratterizzata, avviene attraverso procedimenti logicamente definiti, attraverso catene deduttive rigorose, all'interno di una teoria razionalmente costituita. Si potrebbe compromettere l'uso della parola *verità* per esprimere il livello di certezza che

---

<sup>23</sup>Si vedano i Programmi di Insegnamento della scuola media (D.M. 9-2-1979). Indicazioni per la matematica, Temi.

<sup>24</sup>Cfr. per esempio [38], [40].

accompagna le conclusioni argomentative a cui questo processo conduce<sup>25</sup>.

L'analisi della componente figurale, che riecheggia in modo astratto le manipolazioni materiali che si potrebbero idealmente compiere sull'oggetto concreto, fa appello invece a categorie mentali quali l'*evidenza intuitiva*, la *verosimiglianza*, la *plausibilità*.

Nella fase euristica del pensiero scientifico la mente dello studioso opera mediante un'elaborazione continua e contemporanea di tutte le procedure che ora abbiamo elencato<sup>26</sup>. L'intuizione della verosimiglianza di una determinata affermazione spinge la mente a costruire un processo razionale che permetta di dedurre quella stessa affermazione come conseguenza di una proposizione la cui validità è già stata riconosciuta. Abbiamo descritto, in questo modo, un'analisi psicologica di una procedura dimostrativa che ha il compito di assicurare la *verità* di una proposizione *verosimile*. Appare evidente che le modalità di pensiero che presiedono in modo essenziale a queste elaborazioni mentali sono la *creatività*, la *fantasia* e la capacità di formulare una *analisi critica*. Esse operano, ciascuna a suo modo, su entrambe le componenti concettuali.

La *creatività*, la *fantasia* costituiscono la spinta che genera prodotti di sempre maggiore generalizzazione, agendo sulle diverse immagini mentali a cui il pensiero può fare riferimento. Si pensi ad esempio a come la nozione, e quindi il concetto, di numero naturale si è allargata a quello di numero intero, poi di numero razionale, reale, complesso. A questo punto una attenta *analisi critica* ha permesso di individuare nella struttura dei numeri altre strutture più profonde, che generano l'intero campo numerico: pensiamo per esempio alla struttura di gruppo, caratterizzata dalle sue proprietà formali. Successivamente, ancora, la creatività ha suggerito le generalizzazioni che hanno portato ad indebolire le proprietà formali dei gruppi giungendo così

---

<sup>25</sup>Ricordiamo le parole, già riportate nella nota 10 a piè pagina del Capitolo 2, scritte da Platone riguardanti il ruolo della figura nel ragionamento geometrico.

<sup>26</sup>Ricordiamo ad esempio il confronto tra le diverse argomentazioni che hanno contrapposto G. Peano e G. Veronese nella nota polemica che li ha coinvolti dettagliatamente analizzata in [37].

alle diverse nozioni di monoidi. Un esame critico di tutte queste strutture ha permesso poi di inquadrarle in un'unica teoria che è l'*algebra astratta*, modernamente intesa.

Appare evidente da questo schizzo che ogni analisi critica condotta sul prodotto di una generalizzazione, produce altre nozioni ancora più generali. Viceversa ciascuna di queste nozioni generali richiede criticamente di essere certificata attraverso rigorose dimostrazioni che vengono formulate, nella mente dello studioso, dalla fantasia con cui il suo pensiero opera. Da questo punto di vista si può concordare con l'affermazione di A. De Morgan: *La facoltà che mette in moto l'invenzione matematica non è il ragionamento ma l'immaginazione.*<sup>27</sup>

L'esigenza di un'analisi critica nell'esame di un concetto figurale è particolarmente viva in due momenti cruciali. Il primo è, ovviamente, quello in cui si svolge la procedura logica della dimostrazione razionale, eventualmente formale, che riguarda quindi la componente più propriamente razionale del concetto. Il secondo momento, non meno importante, è quello in cui la mente confronta, con un atto di fantasia, la componente figurale del concetto con l'oggetto reale che l'ha ispirata. È ovvio che tale confronto dovrà essere fatto non con l'oggetto reale dotato di tutte le sue particolarità empiriche occasionali, ma con l'astratto di cui l'oggetto stesso è elemento rappresentativo. Ma in ogni caso si pone la domanda riguardante quali aspetti della realtà, pur se astratta, sono presenti nell'immagine mentale che accompagna il concetto. Nel rispondere a tale domanda sarà necessario anche controllare se in questa procedura di trasposizione dell'oggetto fisico all'oggetto astratto, e quindi al concetto, non sono stati introdotti elementi contraddittori che richiedono quindi ulteriori precisazioni razionali nella formulazione del concetto stesso. Un esempio di una situazione siffatta si può ritrovare nella concettualizzazione delle geometrie non-euclidee. Infatti, mentre nel caso della cosiddetta *geometria iperbolica* la nozione (cioè il *concetto*) di *segmento iperbolico* si sovrappone completamente a quella di *segmento euclideo*, nel caso della co-

---

<sup>27</sup>Citato in [3], pag. 89.

siddetta *geometria ellittica* questo non avviene. Invero, i modelli figurali di quest'ultima geometria risultano fortemente a-intuitivi e quindi vanno esaminati con una analisi critica particolarmente accurata. Se si riprende ancora la nozione di segmento, si deve riconoscere che l'immagine figurale di *segmento ellittico* non si riconduce direttamente a quella di *segmento euclideo* ma, con un opportuno atto di generalizzazione, si traspone a quello di porzione limitata (in senso proiettivo) di retta proiettiva. Se ci si vuole ricondurre ad una immagine figurale più vicina alla nostra intuizione, immersa cioè in un piano assoluto, è necessario modificare il quadro generale dell'ambiente geometrico negando l'*assioma di Archimede*. L'assioma di Archimede è una proposizione che nello spazio euclideo, e anche in quello assoluto, è del tutto coerente con l'intuizione e quindi ammette una concettualizzazione del tutto naturale. La sua negazione, invece, comporta nozioni che sono completamente contrarie all'intuizione e non sono raffigurabili con nessun processo di astrazione o generalizzazione<sup>28</sup>. Tuttavia è estremamente interessante rilevare che la nostra mente è in grado di mettere in atto procedure di tipo intuitivo completamente astratte e immateriali, capaci di operare su oggetti formali astratti come se fossero il prodotto di una generalizzazione effettivamente e correttamente realizzabile. Quindi noi riusciamo a immaginarci i segmenti non-archimedei come se fossero segmenti concreti e riusciamo anche ad immaginarci di effettuare con essi manipolazioni operative. Dobbiamo però svolgere sempre un'attenta analisi critica per impedire che una fantasia incontrollata, che risente troppo delle suggestioni dello spazio fisico in cui viviamo, porti ad ipotizzare come verosimili conclusioni che sono invece logicamente contraddittorie con le ipotesi inizialmente fissate.

---

<sup>28</sup>Si ricordi quanto detto al Paragrafo (2.2.2.4) e si veda anche la Nota A riportata in Appendice.

## Capitolo 3

# La matematica e il problema della conoscenza

### 3.1 La ricerca della verità

Il problema della verità costituisce un tema centrale nella riflessione e nella ricerca dell'uomo. È un problema che trova quindi declinazione in tutti gli ambiti relativi alla persona, dalla più banale quotidianità al più profondo sentimento religioso, dalle relazioni interpersonali alla conoscenza. L'immensità e la centralità di tale tema sono dimostrate da saggi, trattati, libri che su di esso sono stati scritti.

Non si intende, in questa sede, affrontare il tema in tutti i suoi ambiti ma ci si limiterà a circoscriverlo attorno alla verità scientifica.

Innanzitutto, la domanda che subito sorge è se il processo di costruzione del pensiero matematico, descritto nel Capitolo 2, porti a delle *verità*, dove per *ricerca della verità* si intende la ricerca dell'uomo al fine di sapere o di poter effettuare affermazioni in modo certo, cioè senza paura di essere smentito. La verità in matematica, di cui ci si interesserà in particolare, può essere considerata da due punti di vista differenti: dall'interno della matematica (quindi quando quest'ultima viene vista come teoria formale in cui gli oggetti sono definiti implicitamente da una lista di assiomi) o dall'esterno (cioè

considerando la matematica come un prodotto della mente umana realizzato con l'obiettivo di capire, rappresentare e indagare oggetti informali esplicitamente individuati e che in qualche misura sono già presenti nella nostra intuizione).

### 3.1.1 La verità in matematica

Se consideriamo la matematica dall'interno, il problema della verità è il problema riguardante tutta la ricerca fondazionale, problema che peraltro è ancora aperto, perchè non esiste una scuola che possa dire definitivamente cosa si debba intendere per verità. Le varie scuole infatti risultano sempre in forte contrasto tra loro, senza che nessuna presenti una risposta soddisfacente per tutti.

Si pensi ad esempio alle osservazioni critiche reciprocamente scambiate tra i matematici di ispirazione platonista e i matematici costruttivisti, intuizionisti, o delle altre numerose scuole di pensiero. Infatti, la posizione definita platonista considera la matematica come un campo di pensiero oggettivo esistente di per sè, dove gli enti che si considerano sono realtà oggettive. Queste ultime esistono già in sè prima della loro scoperta; il matematico, tramite la sua attività di ricerca definitoria e dimostrativa, studia le proprietà degli oggetti matematici e in questo modo scopre le verità che li riguardano. La difficoltà principale di questa impostazione di pensiero consiste nel fornire un'accettabile caratterizzazione degli strumenti attraverso i quali si acquisisce la percezione degli oggetti matematici.

D'altra parte ad esempio, secondo il costruttivismo, l'intuizionismo<sup>1</sup> e il convenzionalismo la matematica è un'opera umana fondata rispettivamente sulla

---

<sup>1</sup>L'intuizionismo è un tipo particolare di costruttivismo formulato esplicitamente da Luitzen E.J Brouwer (1891-1966). Le sue idee, però, sono state precedute dal pensiero di numerosi altri matematici non organizzati in un'unica scuola, ma di idee tra loro molto simili; per esempio va ricordato L. Kronecker (1823-1891). L'intuizionismo sostiene che i fondamenti della matematica stanno nell'intuizione dello studioso, la matematica quindi diventa un'attività intrinsecamente soggettiva creata *da una libera azione, indipendente dall'esperienza.*

nostra intuizione, costruzione o invenzione. La verità intuizionista non è una verità platonica, non risiede cioè nel mondo astratto delle idee da cui può, in taluni casi, essere calata nella realtà quotidiana. La verità dell'esistenza di un oggetto matematico non si ricava quindi semplicemente dalla non contraddizione del sistema, ma è ottenuta dalla costruzione effettiva o dalla reale individuazione dell'ente che esiste (per quanto riguarda questo aspetto l'intuizionismo coincide con il costruttivismo).

La critica che i matematici di matrice platonista rivolgono a queste posizioni consiste in un'accusa di ingenuità. Mentre viceversa dall'altra parte viene denunciata una mancanza di spirito critico presente nella chiarezza e linearità del pensiero formulato dal matematico platonista<sup>2</sup>.

Oltre a queste correnti vanno ricordate anche posizioni significative di matematici che non aderiscono pienamente ad una di queste scuole: si pensi ad esempio a Wittgenstein<sup>3</sup>, il quale ha avuto con l'intuizionismo un rapporto di simpatia e insieme di conflittualità. Infatti, secondo la tesi fondamentale dell'intuizionismo, *esistere* in matematica significa *essere costruito* oppure essere costruibile nell'intuizione. Come già detto, l'atteggiamento degli intuizionisti è cioè assolutamente antiplatonista. Poichè la matematica, nella loro prospettiva, ha per oggetto delle costruzioni mentali: tutti gli oggetti della matematica sono delle costruzioni mentali. Allora, nella misura in cui lo stesso Wittgenstein è un avversario del platonismo matematico, egli prova una certa simpatia per la critica formulata dagli intuizionisti contro questa concezione. È questo l'elemento che tende ad avvicinarlo agli intuizionisti, ma al tempo stesso c'è un aspetto che egli non è assolutamente disposto ad accettare: il ricorso costante all'intuizione. Infatti per Wittgenstein l'uso che gli intuizionisti fanno del termine *intuizione* per spiegare la certezza e insieme la verità delle proposizioni matematiche è del tutto inammissibile. invece quello che avvicina Wittgenstein agli intuizionisti è la tendenza a collegare

---

<sup>2</sup>Cfr. [11], pag. 139.

<sup>3</sup>Ludwig Josef Johann Wittgenstein (1889-1951), filosofo e logico austriaco, fu autore di contributi di significativa importanza alla fondazione della logica e alla filosofia del linguaggio.

molto più strettamente dei realisti l'idea di verità in matematica all'idea di dimostrabilità.

Va ricordato infine che nella storia della filosofia della matematica, numerosi studiosi si sono posti ripetutamente la domanda se la matematica consideri vere le sue conclusioni. Si pensi per esempio alla polemica tra Aristotele e Platone<sup>4</sup> oppure molto più recentemente alla critica fatta da Hume e Berkeley al moderno razionalismo scientifico<sup>5</sup>. Non va dimenticato, a tal proposito, anche B. Russel, che affronta la questione con gli strumenti propri dell'epoca<sup>6</sup>, oppure I. Lakatos<sup>7</sup>, il quale sostiene che tutti gli studiosi, suoi predecessori, hanno ricollegato la nozione di verità ad una intuizione. Lo stesso Lakatos scrive a tal proposito che, a suo parere, anche B. Russel ha seguito *lo stesso modello dei classici tentativi del XVII secolo di salvare il dogmatismo*<sup>8</sup>.

Il distacco tra la matematica (e più in particolare la geometria) intesa come teoria formale e la conferma della sua verità attraverso l'esperienza del dato sensibile è reso evidente con la nascita delle geometrie non-euclidee. Infatti in tali geometrie agli assiomi, e quindi all'intero sistema assiomatico, non si richiede di essere *verosimili* e di costituire una base per fondare una teoria rispondente all'apparenza della realtà fisica, ma semplicemente di essere non contraddittori, cioè di essere *coerenti*.

Discende da questa breve panoramica che appare difficile trovare un metodo

---

<sup>4</sup>Diversamente da Platone che sostiene il metodo dialettico per il raggiungimento della verità, Aristotele ritiene che il metodo corretto sia la logica deduttiva basata sul sillogismo.

<sup>5</sup>George Berkeley e David Hume furono i maggiori esponenti dell'*empirismo*, la corrente filosofica, nata nella seconda metà del Seicento in Inghilterra, secondo cui la conoscenza umana deriva esclusivamente dai sensi e che nulla si può conoscere a prescindere dall'esperienza. L'empirismo si sviluppò in contrapposizione al razionalismo vero sostenitore dell'introspezione e del ragionamento deduttivo a priori.

<sup>6</sup>In *An Inquiry into Meaning and Truth* (1940) egli difende la nozione di verità come corrispondenza al fatto, contro i fautori neopositivisti della nozione di verità intesa come coerenza e contro le tesi pragmatiste di Dewey.

<sup>7</sup>Imre Lakatos (1922-1974), filosofo della scienza e della matematica di origine ebrea ungherese, fu allievo di Karl Popper e divenne suo successore alla London School of Economics.

<sup>8</sup>Cfr. [29], pag. 13.

universalmente condiviso che individui la nozione di verità in matematica o, più in generale, in una teoria scientifica. L'unica condizione, comunemente riconosciuta, che garantisca la sensatezza del discorso, e quindi una sorta di verità, è costituita dall'assenza di contraddizioni tra le conseguenze delle proposizioni enunciate.

È noto che il progetto di Hilbert era quello di poter dimostrare formalmente che all'interno della matematica non potevano esserci contraddizioni. Tuttavia, dopo i risultati dovuti a Gödel<sup>9</sup>, si riconosce che non è possibile dimostrare la non contraddittorietà di un'intera teoria formale dall'interno della teoria stessa. Ci si dovrà dunque limitare a dimostrare solamente la non contraddittorietà di una parte parziale della teoria, conseguente da una assegnata lista di proposizioni. La procedura più comunemente seguita per raggiungere questa finalità è il ricorso alla costruzione di un appropriato *modello sintattico*. Si tratta dunque di una dimostrazione di non contraddittorietà relativa poichè certificata dalla supposta non contraddittorietà della teoria nella quale il modello stesso è enunciato.

### 3.1.2 La verità della matematica sulle scienze

Dal punto di vista esterno, se si analizza la verità di una proposizione assertiva della matematica sulle scienze, si stabilisce una corrispondenza tra quanto essa afferma e quanto è confermato dalla realtà empirica, cioè si introduce il problema del confronto con la realtà. Viene naturale a questo proposito ricordare il pensiero di Galileo: egli infatti afferma nell'opera *Il Saggiatore* che *la matematica è la chiave per interpretare la realtà*. Allo stesso modo F. Enriques sostiene che

*[...] il difetto dello spirito matematico [...] è di non comprendere che un pensiero, il quale si appaghi di costruzioni astratte, senza la speranza, pur*

---

<sup>9</sup>Kurt Gödel (1906-1978), matematico, logico e filosofo, noto per i suoi lavori sull'incompletezza delle teorie matematiche, è ritenuto uno dei più importanti logici della storia umana insieme a Frege e Aristotele.

*vaga, di cogliere in esse il quadro di una qualche realtà, sarebbe uno sterile strumento dialettico.*<sup>10</sup>

D'altra parte bisogna prendere atto, con stupore, dell'inattesa *efficacia* della matematica nel descrivere la realtà naturale<sup>11</sup>. E. Wigner osserva inoltre che la struttura matematica di una teoria fisica può addirittura indirizzare verso previsioni empiriche nella fisica stessa. Dopo di lui R. W. Hamming<sup>12</sup> sostiene che certe importanti scoperte nel mondo della scienza siano avvenute non con esperimenti ma con semplici riflessioni matematiche. A questo proposito egli cita Galileo oppure ricorda che Einstein era così sicuro della correttezza delle sue teorie tanto da disinteressarsi dei risultati delle osservazioni progettate per convalidarli.

La matematica entra quindi a fare parte delle scienze come linguaggio e per potere utilizzare una teoria matematica nella costruzione per esempio di una teoria fisica occorre poter istituire un isomorfismo tra l'universo di oggetti della teoria fisica e quello della teoria matematica. Il controllo finale richiede che i risultati matematici che si ottengono devono corrispondere a fatti veri nel nostro universo fisico. Se non lo fossero, vuol dire che la teoria matematica impiegata non si adegua<sup>13</sup> alle esigenze della fisica e quindi bisogna cambiare tale teoria.

### 3.2 La modellizzazione matematica

Come si è detto l'ultimo passo nel percorso di costruzione di un pensiero matematico che porti alla verità, è la ricerca di quella garanzia di coerenza e adeguatezza di cui si è parlato. A tal fine, l'utilizzo di *modelli matematici* è un

---

<sup>10</sup>Cfr. [18].

<sup>11</sup>Cfr. [53].

<sup>12</sup>Cfr. [25].

<sup>13</sup>Vale a tal proposito l'affermazione di Poincaré, che *una geometria non può essere considerata più vera di un'altra, ma solo più comoda o adeguata* (cfr. [45], pag. 57-59).

passaggio strategico nel processo di riconoscimento della verità. Si possono considerare due tipi di modelli: da una parte vi sono i modelli che assicurano la non contraddittorietà di una teoria matematica e quindi garantiscono nel senso che si è precisato l'esistenza e la verità di quest'ultima. Dall'altra parte si trovano i modelli che realizzano una vera e propria sostituzione della realtà mediante una costruzione matematica astratta e formale, e servono quindi per convalidare l'efficacia dello stesso strumento matematico nel descrivere e dominare i fatti empirici.

### 3.2.1 Il modello a garanzia della verità in matematica

La nozione di modello di una teoria formalizzata è di grande importanza sul piano metateorico. In primo luogo, essa consente di dare una definizione soddisfacente del nesso semantico di conseguenza logica fra proposizioni. Una proposizione  $P$  è detta *conseguenza logica* di un insieme di proposizioni  $M$ , se e solo se essa è vera in ogni modello di  $M$ , intendendo con ciò che ogni interpretazione, la quale fornisca su un dato universo un modello di  $M$ , fornisce sullo stesso universo, e alle stesse condizioni, anche un modello di  $P$ . Il fatto di possedere un qualsiasi modello, della cui coerenza si ritiene di poter essere certi, assicura la non contraddittorietà a un sistema  $\mathbf{A}$  di assiomi. Infatti se  $\mathbf{A}$  fosse contraddittorio (posti  $\neg P$  la negazione di una proposizione  $P$  e  $\wedge$  la congiunzione "e") si potrebbe per deduzione ottenere correttamente un'espressione del tipo  $(P \wedge \neg P)$ . Quest'ultima, essendo conseguenza logica di  $\mathbf{A}$ , dovrebbe essere vera in ogni modello di  $\mathbf{A}$ , ma  $(P \wedge \neg P)$  non può essere vera in alcun modello. Quindi non può essere conseguenza logica di  $\mathbf{A}$  e neppure derivabile con alcun calcolo corretto.

Va precisato che la non contraddittorietà, che si auspica a garanzia della verità, è raggiunta attraverso l'utilizzo di un modello: ossia una teoria è vera a proposito di quel suo modello. Ma c'è di più, essa può risultare vera a proposito anche di ulteriori modelli; si pensi, ad esempio, alle geometrie non-euclidee. Esse sono vere a proposito di certi modelli geometrici che si possono costruire per mostrare la loro non contraddittorietà, ma anche a pro-

posito di modelli fisici come quelli della meccanica relativistica. (qui si può fare l'osservazione che teorie tra loro incompatibili possono essere tuttavia simultaneamente vere perchè riferite a modelli diversi<sup>14</sup>).

Lo strumento matematico quindi può servire a strutturare un modello (astratto) della teoria, che la rappresenta in modo così efficace da potersi sostituire ad essa garantendo la non contraddittorietà. Per fare un esempio elementare: la *geometria analitica* studiata nella scuola pre-universitaria costituisce un modello esaustivo della geometria euclidea elementare e, in realtà, spesso anche la sostituisce, dal punto di vista educativo, come linguaggio concettuale oltre che come strumento euristico. In questo senso lo studio scolastico della *geometria analitica* acquista un valore educativo esemplare e diventa scuola emblematica di modellizzazione.

### 3.2.2 Il modello a garanzia della verità nella realtà

Intendiamo per *modellizzazione matematica della realtà* quel processo che consente di selezionare particolari aspetti empirici di una situazione (un fenomeno fisico, una situazione in campo economico, un fenomeno naturale, ...) e di descriverli attraverso il linguaggio scientifico, che viene rappresentato utilizzando il formalismo matematico.

L'utilizzo della modellizzazione matematica è strategico nel processo di comprensione della realtà sia per verificarne leggi e comportamenti, sia, a volte, per ottenere l'indicazione di nuovi spunti di ricerca.

Un modello matematico, da questo punto di vista, è una rappresentazione, formale e semplificata, di una porzione di realtà che si intende assumere come oggetto di studio. La costruzione di modelli concettuali è una parte essenziale della nostra interazione con il mondo e la base della indagine scientifica. In particolare, un modello matematico è una descrizione che mette in luce, in termini formali, determinati aspetti caratteristici del fenomeno considerato, con particolare attenzione alla logica del processo che viene analizzato. La descrizione che offre il modello non è dunque una rappresentazione che fa

---

<sup>14</sup>Cfr. [1], pag. 307.

riferimento ai contenuti intrinseci dell'oggetto rappresentato, ma documenta piuttosto le loro relazioni formali, facendo uso del linguaggio simbolico e astratto per eccellenza: il linguaggio della matematica.

Prima della costruzione di ogni modello matematico, c'è dunque la realtà, e in particolare quel suo frammento che si vuole studiare. La sua complessità, la molteplicità dei suoi aspetti, costringono però ad una iniziale semplificazione. La scienza sperimentale, come ogni altra descrizione (ingenua e non) della realtà, è un filtro tra noi e il mondo: i sistemi di rappresentazione propri di tale scienza, fondati sul rilevamento dei dati sperimentali, e quindi sulla spiegazione non metafisica dei fenomeni, hanno permesso e tuttora permettono il vantaggio di credere ma anche di dubitare, e di farlo con strumenti concettuali che allargano, anziché restringerlo, il campo del sapere teorico e dell'esperienza.

Un modello, essendo una visione astratta di un oggetto complesso, opera inevitabili, nonché opportune, semplificazioni. Scrivono a questo proposito A. Rosenblueth e N. Wiener:

*Nessuna parte costitutiva dell'universo è talmente semplice da lasciarsi afferrare senza astrazione. Quest'ultima consiste nel prendere la porzione di universo considerata e nel sostituirla con un modello avente struttura analoga, ma più semplice. I modelli, dunque, tanto quelli formali (o intellettuali) quanto quelli materiali, rappresentano una necessità imprescindibile del procedimento scientifico<sup>15</sup>.*

Questa lettura semplificata della realtà deve, infine, essere formalizzata, cioè trascritta in un linguaggio simbolico utile per consentire l'intervento del matematico e dei suoi calcoli.

Il modello astratto permette, eliminando i dettagli concreti e particolari, di semplificare lo studio di un sistema considerato, evidenziando gli aspetti di maggiore interesse.

Le fasi di costruzione di un modello possono essere così descritte<sup>16</sup>:

---

<sup>15</sup>Cfr. [46], pag. 316-321.

<sup>16</sup>Cfr. [24].

1. *analisi del problema concreto*, svolta nel linguaggio corrente, con gli strumenti della logica ordinaria e il concorso di tutte le competenze specialistiche fornite dalle discipline coinvolte nel problema;
2. *costruzione del modello formale* partendo dal problema concreto precedentemente analizzato, introducendo opportune ipotesi semplificatrici e passando quindi dal linguaggio ordinario al linguaggio simbolico. La costruzione del modello rappresenta il momento più impegnativo. Non ci sono regole precise, prestabilite, da seguire. Ci sono solo l'intuizione e l'esperienza che entrano in gioco. La costruzione del modello non è dunque unica e non è imposta oggettivamente ed esclusivamente dalla natura del problema;
3. *studio del modello*: è il momento del calcolo, degli algoritmi, della verifica della loro efficacia, della ricerca delle soluzioni;
4. *verifica empirica* della correttezza dei risultati trovati. Questi risentono inevitabilmente delle semplificazioni impiegate e del particolare linguaggio formale prescelto nella costruzione del modello.

Le difficoltà che si possono incontrare nella costruzione e nell'uso di un modello matematico possono essere:

- mancanza di una sufficiente correttezza dei dati sperimentali;
- eventuale eccessiva complicazione del modello matematico (con conseguente impossibilità o difficoltà per la trattazione algoritmica del formalismo matematico stesso);
- problemi operativi nell'elaborazione della risoluzione numerica (simulazione su calcolatore).

Come si può procedere dalla descrizione verbale di un fenomeno alla sua implementazione in linguaggio matematico? Come semplificare la complessità del fenomeno studiato? Innanzi tutto si deve identificare una o più variabili

che descrivono lo stato del fenomeno, considerando gli aspetti fondamentali che si devono analizzare. Nella formulazione del modello occorre introdurre delle ipotesi per semplificare la complessità del fenomeno, ma cogliendone l'essenza. Tali ipotesi semplificatrici qualificano l'attendibilità del modello. La matematica infine costituisce il linguaggio, la scienza ideale per la formulazione di ogni tipo di modellizzazione. Per questa ragione la matematica presta linguaggi e tecniche valutative alle altre scienze e partecipa più in generale e in modo essenziale alla funzione euristica, analogica, qualitativa e quantitativa tipica e caratteristica di ogni genere di questi modelli. La matematica descrive in termini quantitativi e qualitativi una semplificazione del reale, infatti come si è notato il modello non esprime necessariamente l'essenza reale del problema ma ne fornisce una sintesi utile almeno per i fini per cui è stato costruito.

Questa procedura di modellizzazione matematica realizza come si è detto, in ultima analisi, una sostituzione della realtà con una costruzione concettuale astratta e formale che risulta significativa e legittima, appunto ai fini per i quali essa è effettuata.

Il problema centrale di questi modelli è quindi in conclusione effettuare il confronto diretto con la realtà. D'altra parte quest'ultima è molteplice e quindi, a seconda di ogni diverso aspetto della realtà, ci possono e ci devono essere modelli diversi.

## Parte II

# La matematica come linguaggio per la scienza

## Capitolo 4

# Il caso dell'aritmetica non standard<sup>1</sup>

In una Nota sui Fondamenti della Geometria<sup>2</sup>, G. Peano rivendica la *natura pratica o sperimentale* che, a suo parere, devono presentare i postulati affinché sia lecito considerarli relativi alla geometria. Egli afferma precisamente: *è certo permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinché questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche*. Si può facilmente confermare la verità di questa affermazione esaminando alcuni dei classici sistemi di assiomi della geometria elementare, come per esempio il sistema di Euclide, quello di Hilbert o quello dello stesso Peano. Le nozioni primitive e le relazioni fondamentali che costituiscono la struttura di base di ciascuno di questi sistemi, rappresentano infatti la razionalizzazione di diverse “intuizioni elementari” che costituiscono il patrimonio di ispirazioni empiriche che ha suggerito la costruzione di questo ramo della disciplina geometrica.

Per esempio la nozione di linea retta, o di segmento, costituiscono la for-

---

<sup>1</sup>Cfr. [6].

<sup>2</sup>Cfr. [44], pag. 141 oppure nota 16 a piè pagina Capitolo 2.

malizzazione della intuizione approssimativa ma empiricamente evidente di “diritto”, intuizione che fa parte del patrimonio comune dell’esperienza universale. Analoghe considerazioni si possono fare a proposito dell’ordinamento e della congruenza.

Un ruolo diverso, ancorchè particolarmente delicato, è occupato dalla nozione intuitiva di “infinito”. Come abbiamo già osservato nel Paragrafo 2.2.2.2 della Parte I, in termini imprecisi ma suggestivi si può affermare che la nozione di “infinito” nasce dalla concettualizzazione delle esperienze empiriche materiali di “numerose”, “tanto”, “sempre più tanto” oppure di “illimitato”, “processo che non termina mai”. In questo senso appare intuitivamente accettabile l’idea hilbertiana di “retta infinita”, perché illimitata, come evoluzione della nozione di “retta terminata” di euclidea memoria.

Nella costruzione assiomatica hilbertiana ciascuna delle idee intuitive fondamentali di cui si è parlato dà luogo ad uno specifico gruppo di assiomi che la definiscono implicitamente e la caratterizzano: precisamente gli assiomi di *allineamento* o di *incidenza* per la nozione di punto, retta e la relazione di “giacere su”, gli assiomi di *ordinamento* che descrivono lo “stare tra” di punti e retta e gli assiomi di *congruenza* per l’equivalenza di coppie di punti. La nozione di infinito è, come si è detto, la più delicata. In Euclide coincide con la stessa intuizione primordiale perché, in riferimento alle rette terminate, il II Postulato afferma che “si possono allungare a piacere” senza ulteriori precisazioni. Nel sistema di Hilbert il problema è analizzato a fondo mediante la enunciazione di uno specifico assioma: l’assioma cosiddetto di *Archimede*. Quest’ultimo si può enunciare nel seguente modo: dati due segmenti  $(a, b)$  e  $(a, d)$ , di cui il primo minore del secondo, esiste un numero naturale  $n$  tale che  $n$  copie di  $(a, b)$  giustapposte lungo la semiretta  $\overrightarrow{a, d}$  superano il punto  $d^3$ .

L’opportunità di esprimere esplicitamente questa proprietà in realtà era già stata velatamente intuita da Euclide che nella Definizione IV del Libro V afferma: *Si dice che hanno fra loro rapporto grandezze le quali possono, se*

---

<sup>3</sup>Cfr. [28], pag. 128.

*moltiplicate, superarsi reciprocamente.*

Inoltre questa problematica era stata già analizzata, senza essere portata alle sue estreme conseguenze, da Zenone di Elea attorno al 500 a.C., il quale aveva considerato il cosiddetto *paradosso di Achille e la tartaruga*. È possibile enunciare quest'ultimo nel seguente modo: il velocissimo Achille ed una tartaruga si sfidano in una gara di corsa. Per rendere la contesa meno impari, Achille offre un vantaggio alla tartaruga. Zenone (che voleva dimostrare che i sensi sono ingannevoli e che il movimento è impossibile) conclude che Achille non potrà mai raggiungere la tartaruga, argomentando che per quanto Achille correndo possa avvicinarla, in ogni momento gli rimarrà sempre una certa distanza (anche se piccolissima) che deve ancora percorrere. Questo stato di fatto continua a verificarsi, anche se la distanza da coprire è sempre più piccola, e dunque Achille non potrà mai (logicamente!) raggiungere la tartaruga.

Ci sono voluti circa duemila anni per chiarire e risolvere tale paradosso! Tutte le soluzioni esposte sono ricondotte all'idea matematica di serie numerica convergente. Quest'idea consiste nella applicazione di algoritmi propri dell'analisi matematica che permettono di calcolare la somma di un numero infinito di addendi e di ottenere eventualmente come risultato un numero finito. Quindi dal punto di vista dell'analisi la spiegazione consiste nel fatto che il limite della somma degli infiniti intervalli di spazio coperti da Achille per raggiungere la tartaruga, sempre più piccoli, converge ad un numero finito in forza delle proprietà della serie. Ma non solo l'analisi offre una spiegazione a questo paradosso, anche la geometria ci fornisce ulteriori informazioni. Anzi ci presenta una duplice argomentazione. È qui dove viene introdotto l'assioma cosiddetto di Archimede. La geometria ci spiega infatti che, a seconda delle proprietà del mondo in cui mi trovo, Achille può o meno raggiungere la tartaruga: se il *mondo è archimedeo* (cioè in quello spazio vale l'assioma di Archimede) allora Achille la raggiungerà, altrimenti potrà essere sempre secondo alla sua sfidante.

Scopo del lavoro presentato nella Nota A è analizzare il significato e i limiti di applicabilità dell'assioma di Archimede valutando in particolare il suo ruolo nella caratterizzazione assiomatica del piano assoluto.

Nella prima sezione viene valutato il significato della proposizione di Archimede in generale, e in particolare nel caso della geometria, e vengono esaminate le implicazioni logiche della sua assunzione. Si analizza in particolare l'eventuale possibilità di immergere una geometria non archimedea in una archimedea e le conseguenze logiche di tale immersione.

Nella seconda sezione si introducono le basi assiomatiche della geometria elementare al fine di caratterizzare l'ambiente nel quale si intende analizzare il significato dell'assioma di Archimede; a questo scopo viene introdotta la nozione di *piano assoluto* secondo D. Hilbert.

Nella terza sezione si mostra come la validità di tale assioma possa dar luogo a una contraddizione nel sistema di assiomi di una particolare classe di piani assoluti. L'enunciazione di questo fatto è un risultato classico che risale sostanzialmente a Saccheri<sup>4</sup> e compare dimostrato in molte opere<sup>5</sup> anche se spesso in modo approssimativo. Di tale fatto viene qui presentata una dimostrazione rigorosamente condotta che, a nostra conoscenza, appare completamente originale nella presente forma. Sottolineiamo che la dimostrazione riportata si caratterizza per una accurata analisi delle basi assiomatiche e per il procedimento deduttivo formalmente precisato in ogni suo aspetto, senza fare alcun riferimento a suggestioni intuitive o grafiche.

---

<sup>4</sup>Cfr. G. Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Milano, 1733. Trad. it. in [49].

<sup>5</sup>Cfr. per esempio [1].

## Capitolo 5

# Il caso della geometria<sup>1</sup>

Nella prolusione che Felix Klein<sup>2</sup> tenne all'Università di Erlangen nel 1872, in occasione del conseguimento della libera docenza, prolusione nota come *Programma di Erlangen (Erlanger Programme)*<sup>3</sup>, la geometria è descritta come lo studio delle proprietà che sono invarianti rispetto ad un particolare gruppo di trasformazioni. Ad esempio la *geometria euclidea* del piano è lo studio delle proprietà che sono invarianti per trasformazioni ortogonali (traslazioni, rotazioni e simmetrie) del piano in sé. Analogamente la *geometria affine* è lo studio delle proprietà delle figure che sono invarianti rispetto alle cosiddette trasformazioni affini (tra queste proprietà ad esempio vi è quella di trasformare una conica in se stessa) e nello stesso modo la *geometria proiettiva* è lo studio delle proprietà che sono invarianti per trasformazioni proiettive. In questo modo qualsiasi classificazione delle trasformazioni di un piano in gruppi e sottogruppi, diventa una classificazione delle diverse geometrie. In particolare, si deve a Klein l'interpretazione delle diverse geo-

---

<sup>1</sup>Cfr. [5].

<sup>2</sup>Felix Christian Klein (1849-1925), matematico tedesco, ha dato fondamentali contributi allo studio della geometria non-euclidea, ai collegamenti tra geometria e teoria dei gruppi e ha ottenuto importanti risultati nella teoria delle funzioni.

<sup>3</sup>Una traduzione in italiano venne fatta alla fine del XIX secolo dal matematico italiano Gino Fano (titolo della traduzione italiana: *Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti*).

metrie non euclidee, iperbolica o ellittica, assieme alla geometria euclidea, nell'ambito della geometria proiettiva.

Per distinguere i diversi tipi di geometria non euclidea si può utilizzare anche una classica configurazione dovuta a G. Saccheri<sup>4</sup>. Egli infatti, nel tentativo di dimostrare l'assioma delle parallele di Euclide, aveva introdotto una particolare configurazione piana costituita da una quaterna di punti distinti  $(a, b, c, d)$  complanari, a tre a tre non allineati, tali che  $\overline{d, a} \perp \overline{a, b} \perp \overline{b, c}$  e le due coppie  $(a, d)$  e  $(b, c)$  siano congruenti e dalla stessa parte rispetto ad  $\overline{a, b}$ . Per tale configurazione, già nella sua opera citata, egli aveva dimostrato che  $\delta := \widehat{(a, d, c)} = 1R$ , oppure  $\delta < 1R$ , o anche  $\delta > 1R$  e inoltre che se tale risultato vale in un particolare quadrilatero del piano, allora vale per ognuno di essi. Si può quindi parlare di *caso dell'angolo retto, acuto o ottuso*.

Le ipotesi e i postulati del piano utilizzati da Saccheri per le sue argomentazioni sono in sostanza quelli esposti negli *Elementi* di Euclide e comprendono quindi implicitamente anche le ipotesi che (dopo D. Hilbert) vengono chiamate *assioma di continuità* e *assioma di Archimede*. In queste ipotesi classiche, il caso  $\delta = 1R$  risulta essere equivalente al postulato delle parallele di Euclide, la condizione  $\delta < 1R$  corrisponde alla cosiddetta geometria non-euclidea iperbolica, mentre il caso  $\delta > 1R$  porta ad una contraddizione.

D'altra parte è possibile classificare senza incontrare contraddizioni i piani che soddisfano rispettivamente una delle tre condizioni indicate, purchè si assuma la non validità dell'assioma di Archimede<sup>5</sup>. In questa classificazione, i piani sono caratterizzati dal punto di vista della congruenza che è chiamata, nei tre differenti casi del quadrangolo di Saccheri, rispettivamente *singolare* o *iperbolica* o *ellittica*. Mentre il piano euclideo rientra tra i piani a congruenza singolare, si può dimostrare<sup>6</sup> che il classico caso del piano non euclideo iperbolico rientra nella condizione caratteristica del piano a congruenza iperbolica. Il caso ellittico porta invece effettivamente a una contraddizione che si può eliminare solo assumendo la non validità dell'assioma di Archimede.

<sup>4</sup>Cfr. G. Saccheri, *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Milano, 1733. Trad. it. in [49].

<sup>5</sup>Cfr. [5].

<sup>6</sup>Cfr. [26].

Nella Nota B, presentata in Appendice, viene illustrata la costruzione di un modello non archimedeo di geometria a congruenza ellittica immerso in un piano proiettivo definito su un campo non archimedeo. L'obbiettivo che ci si è posto è stato quello di garantire l'esistenza matematica del particolare caso di geometria non euclidea che viene definita implicitamente dal sistema assiomatico considerato<sup>7</sup>.

La nozione classica di piano ellittico è stata precisata in modo completo da K. Sørensen<sup>8</sup> che ne ha fornito una esauriente caratterizzazione assiomatica. È noto che un piano ellittico  $\Sigma$  dal punto di vista della struttura di incidenza risulta essere un piano proiettivo  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  e non è quindi direttamente riconducibile alla nozione di piano assoluto. In forza degli assiomi che vengono introdotti per caratterizzare la struttura di congruenza del piano  $\Sigma$  si può dimostrare che  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  è rappresentabile nel modo classico mediante uno spazio vettoriale 3-dimensionale  $\Pi$  su un opportuno campo  $\mathbb{K}$  che risulta essere pitagorico.

In  $\Pi$  la nozione di congruenza risulta quindi essere subordinata da una opportuna polarità definita mediante una forma bilineare simmetrica e anisotropa. Se si introduce l'ipotesi che il campo  $\mathbb{K}$  sia non archimedeo<sup>9</sup>, esso ammette un *anello di valutazione* non banale  $\mathbb{A}$  con ideale massimale  $\mathbb{M}$ . Per ogni punto  $a \in \mathcal{P}$  si può considerare l'insieme dei punti  $x \in \mathcal{P}$  la cui distanza da  $a$  è in  $\mathbb{M}$ . Si dimostra che l'insieme  $[a]$  di tali punti  $x$ , detto *nano intorno* di  $a$ , è immerso in un piano affine, derivazione affine di  $\mathcal{P}$  rispetto alla retta polare di  $a$ . Tale insieme soddisfa tutti gli assiomi che caratterizzano un piano assoluto a congruenza ellittica. Si dimostra facilmente che l'unione disgiunta  $\bigcup\{[a] \mid a \in \mathcal{P}\}$  ricopre  $\mathcal{P}$  e che per ogni  $a, b \in \mathcal{P}$  i nano intorni  $[a], [b]$  sono isomorfi. Dunque ogni nano intorno  $[a]$  costituisce una copia di modello di geometria non archimedeo a congruenza ellittica.

La costruzione di questo modello, che può anche essere visto come una sorta di generalizzazione del ben noto classico modello di Klein relativo alla geome-

---

<sup>7</sup>Cfr. [1], pag. 310.

<sup>8</sup>Cfr. [6],[7].

<sup>9</sup>Cfr. [22].

tria non euclidea iperbolica, è risultata una preziosa occasione per riflettere criticamente sul ruolo della modellizzazione nelle questioni di coerenza delle strutture geometriche definite assiomaticamente. Per sviluppare tale analisi critica sono stati di particolare importanza gli approfondimenti riguardanti le condizioni di archimedicità sviluppate in 2.2.2.4.

## Capitolo 6

# Matematica applicata alle scienze economiche

*L'Economia è una dottrina difficile, perchè riguarda il comportamento dei soggetti umani, per la intricatezza degli influssi e delle interdipendenze, per la presenza della libertà umana, che spesso rende vane anche le previsioni più accurate e sagaci.*

*In presenza di queste difficoltà pensiamo quindi che lo spirito metodologico di chiarezza e rigore, portato dall'impiego della matematica, possa essere di grande utilità per i costruttori di teorie economiche e per gli utilizzatori di queste.*

(Carlo Felice Manara in [33])

Così scriveva C. F. Manara nell'Introduzione di uno dei suoi contributi riguardanti l'utilizzazione della disciplina matematica, con i propri algoritmi e le proprie metodologie, nella trattazione e nello studio delle dottrine economiche.

La matematica, essendo una scienza del linguaggio, è in grado di condurre le trattazioni che riguardano l'economia alla massima generalità, sia nelle formulazioni di ipotesi che nelle deduzioni, che risultano quindi essere ineccepibili e rigorose.

Matematizzare l'economia attraverso la formulazione rigorosa delle sue leggi,

introducendo quindi definizioni precise e proposizioni dimostrate formalmente, risulta essere un naturale complemento alla ricerca del rigore.

Le applicazioni della matematica all'economia che sono state di maggiore successo ne hanno esaltato il ruolo di strumento conoscitivo. Numerose teorie economiche sono state enunciate e perfezionate proprio grazie all'uso sistematico della matematica. Per esempio:

- la teoria dell'equilibrio economico generale, basata su strumenti matematici simili a quelli utilizzati dalla meccanica razionale e sviluppata successivamente utilizzando i metodi della topologia differenziale e algebrica;
- la teoria delle aspettative razionali, fondata sull'inferenza statistica e sulla programmazione dinamica;
- la teoria dei giochi, che ha generato addirittura un capitolo nuovo della matematica;
- l'economia in condizioni di incertezza, basata sulla stessa teoria dei giochi e sul calcolo delle probabilità;
- la teoria delle scelte sociali, fondata sui metodi dell'algebra astratta;
- la finanza matematica, che ha arricchito la teoria dei processi stocastici in tempo continuo;
- la teoria dell'allocazione ottima delle risorse, da cui si è sviluppata la programmazione lineare e più in generale la ricerca operativa<sup>1</sup>

Secondo F. Y. Edgeworth, *il metodo matematico è utile per liberarsi della spazzatura che ingombra le fondamenta della scienza economica*<sup>2</sup>, ma nonostante tutto non si devono dimenticare gli abusi e i difetti cui esso è esposto: *uno di questi è il rischio di essere sopravvalutato*. Infatti, un'eccessiva matematizzazione può anche non contribuire positivamente all'analisi economica.

---

<sup>1</sup>Cfr. [31].

<sup>2</sup>Cfr. [16].

Ad esempio è opportuno ricordare che una conseguenza dei successi nell'applicazione del metodo e degli strumenti matematici all'economia è la diffusione del linguaggio matematico come mezzo retorico. In tal modo, proposizioni banali enunciate in modo formale sotto forma di teorema possono sembrare argomentazioni scientifiche mentre in realtà non lo sono.

## 6.1 Equilibrio à la Cournot e Supply Function Equilibrio nei mercati elettrici con funzione di prezzo/domanda lineare e funzione dei costi quadratica<sup>3</sup>

La liberalizzazione del mercato elettrico è stata stabilita dalla Direttiva Europea 96/92/CE, che ha introdotto norme comuni per il mercato interno dell'energia elettrica, finalizzate a realizzare una graduale liberalizzazione della domanda e a creare condizioni favorevoli per lo sviluppo della concorrenza, nella generazione e nella vendita di energia elettrica. In Italia la liberalizzazione del mercato elettrico è stata avviata mediante il Decreto Bersani<sup>4</sup> che sancisce l'inizio del processo di liberalizzazione delle attività di produzione, importazione, esportazione, acquisto e vendita di energia elettrica. Dal 1962 invece, in Italia, vigeva un mercato di tipo monopolistico dove l'*Ente Nazionale per l'Energia Elettrica* (ENEL) gestiva tutte le attività legate alla produzione, al trasporto e alla vendita di energia elettrica.

Oggi, a causa della struttura dell'offerta, il mercato elettrico italiano può essere visto come un oligopolio nel quale un numero limitato di produttori detiene una quota significativa di mercato. In presenza di oligopolio, le teorie classiche basate sul modello di concorrenza perfetta non sono valide e la

---

<sup>3</sup>Cfr. [8].

<sup>4</sup>Decreto Legislativo 16 Marzo 1999, n. 79, *Attuazione della Direttiva 96/92/CE recante norme comuni per il mercato interno dell'energia elettrica*, pubblicato nella Gazzetta Ufficiale n. 75 del 31 Marzo 1999, [www.gurite.it](http://www.gurite.it).

predizione dell'andamento del mercato deve passare necessariamente attraverso l'analisi del comportamento strategico dei diversi produttori. Peraltro, è proprio nel caso degli oligopoli che la previsione attraverso modelli matematici dell'andamento dei mercati risulta particolarmente importante. In questo contesto è utile studiare e definire opportuni modelli di mercato per analizzare il comportamento strategico degli operatori di mercato.

Nel modellizzare gli oligopoli si possono fare due ipotesi alternative: i comportamenti dei produttori possono essere modellizzati sulla base del prezzo e della quantità oppure sulla base della funzione di offerta. Tra queste modellizzazioni, il modello di Cournot, il modello di Bertrand, le Conjured Supply Function e le Supply Function Equilibria sono le più largamente applicate ed utilizzate nell'analisi dei mercati elettrici. In particolare, i modelli di Cournot (CE) e le Supply Function Equilibria (SFE) si fanno concorrenza come strumenti pratici per studiare l'oligopolio nei mercati elettrici. L'analisi degli equilibri in questi mercati attraverso modelli CE e SFE costituisce l'oggetto della presente ricerca.

Nell'opinione generale, i modelli di equilibrio "à la Cournot" sono considerati i più appropriati per lo studio dei mercati energetici nel caso di competizione imperfetta<sup>5</sup>. Invero, il primo ricercatore che ha studiato comportamenti non cooperativi tra due produttori, il cosiddetto *problema di duopolio*, è stato A. A. Cournot nel 1838. In questo caso si dice che le decisioni prese dai due produttori sono in equilibrio se non è possibile che un produttore modifichi la sua decisione senza che l'altro cambi la propria. Successivamente, solo nel 1950-1951, J. Nash ha generalizzato la nozione di equilibrio per un modello comportamentale costituito da  $n$  giocatori, che agiscono ognuno nel proprio interesse.

Dall'altra parte vi sono i modelli Supply Function Equilibria. Il principale vantaggio di questi modelli, rispetto a quelli CE, consiste nella maggiore flessibilità ed aderenza alla realtà nella descrizione del comportamento degli agenti di mercato. Nei modelli SFE ogni generatore offre al gestore di mer-

---

<sup>5</sup>Cfr. [26].

cato una quantità ad un certo prezzo secondo il programma di produzione previsto per un certo orizzonte temporale. Tale approccio si propone come alternativa valida al modello oligopolistico CE che presuppone una fissazione delle quantità. Tuttavia esso presenta forti limitazioni per quanto riguarda la trattabilità numerica, anche perchè in questo caso esiste un'infinità di equilibri e questo fatto limita di molto il valore predittivo di questo approccio. L'obiettivo della ricerca è il confronto tra i differenti approcci SFE e CE a partire da risultati già noti in letteratura<sup>6</sup>, che fanno riferimento a specifiche ipotesi riguardanti la funzione di domanda e le funzioni di costo dei singoli operatori.

## 6.2 Valutazione degli impatti dell'EU ETS sui profitti, gli investimenti e i prezzi del mercato elettrico italiano<sup>7</sup>

### 6.2.1 Il problema della CO<sub>2</sub>

Ogni anno, nel mondo, vengono emesse nell'atmosfera circa 28 miliardi di tonnellate di anidride carbonica, prodotta massicciamente dalle attività umane attraverso i processi di combustione legati ai motori delle auto-vetture, al riscaldamento delle case e alle attività industriali. La CO<sub>2</sub> è la massima responsabile dell'*effetto serra* che sta inesorabilmente incidendo sui cambiamenti climatici del globo. Per effetto serra si intende la capacità dell'atmosfera di trattenere calore; il fenomeno è dovuto a una variazione del contenuto atmosferico di vapore acqueo, anidride carbonica e metano; un'atmosfera più ricca di questi gas trattiene più calore con conseguente innalzamento della temperatura del pianeta, a parità di altre condizioni.

L'effetto serra è un fenomeno del tutto naturale che però alcune attività dell'uomo hanno aumentato. La situazione diventa preoccupante solo quando

---

<sup>6</sup>Si vedano [2], [47], [9].

<sup>7</sup>Cfr. [7].

la capacità di adattamento del sistema non è, o non sarà, più in grado di eseguire una retroazione che ristabilisca l'equilibrio termico.

### 6.2.2 L'European Emissions Trading Scheme

Il problema del cambiamento climatico è oggi riconosciuto a livello mondiale, anche se i provvedimenti finora attuati per contrastarlo hanno validità solo regionale. Nell'ambito del Protocollo di Kyoto, l'Europa ha assunto un ruolo leader nella politica ambientale attraverso l'introduzione dell'European Emissions Trading Scheme (EU-ETS) entrato in vigore in Europa nel gennaio 2005 con la Direttiva 2003/87/CE (ora modificata dalla Direttiva 2009/29/CE) emanata con lo scopo di ridurre le emissioni di CO<sub>2</sub> generate da certe categorie di installazioni industriali. L'EU-ETS è, al momento, il più esteso sistema "cap-and-trade" mondiale e regola circa la metà delle emissioni annuali di CO<sub>2</sub> europee. Questo sistema è stato inizialmente suddiviso in due fasi: una prima fase di sperimentazione, la cosiddetta *learning by doing phase* che ha ricoperto il periodo 2005-2007; la seconda, più allineata con il Protocollo di Kyoto, è iniziata nel 2008 e si concluderà nel 2012. Durante la prima fase, si è notato che l'applicazione dell'EU-ETS creava alcune distorsioni economiche dovute sia ai metodi di allocazione a carattere gratuito, o *grandfathering*, dei permessi di emissione di CO<sub>2</sub> sia ai cosiddetti profitti inattesi o *windfall profit* del settore di produzione d'energia. Tali profitti scaturiscono dalla possibilità dei generatori di energia di trasferire buona parte dei loro costi di emissione nei prezzi pagati dai consumatori finali pur ricevendo permessi a titolo gratuito.

Per sopperire alle carenze della legislazione introdotta, entrerà in vigore nel 2013, fino al 2020, la Direttiva 2009/29/CE, che regolerà la terza fase dell'EU-ETS. Tale direttiva amplia il numero di settori coinvolti, impone l'allocazione dei permessi di emissione di CO<sub>2</sub> mediante un sistema progressivo ad aste o *auctioning*, promuove l'investimento in tecnologie rinnovabili e tutela i settori industriali esposti alla concorrenza internazionale. In termini di politiche, l'intervento pubblico è quindi basato su due pilastri fondamentali: efficien-

za energetica e energie rinnovabili. Particolare attenzione sarà posta agli investimenti in nuove tecnologie, quali quelli che si riferiscono ai sistemi di cattura e stoccaggio del carbonio, e all'incentivazione delle fonti energetiche rinnovabili, che rappresentano due punti chiave nel processo di decarbonizzazione del sistema energetico europeo.

In base alla Direttiva 2009/29/CE diventa di vitale importanza migliorare l'efficienza e l'eco-sostenibilità dei settori coinvolti, tenendo conto anche dei cosiddetti target *20-20-20*, che l'Unione Europea intende raggiungere entro il 2020. Tali obiettivi sono: la riduzione delle emissioni di gas ad effetto serra del 20% rispetto al livello del 1990; la riduzione del consumo di energia del 20% mediante un miglioramento dell'efficienza energetica dei processi produttivi ed infine l'aumento della produzione di energia rinnovabile volta a coprire almeno il 20% del fabbisogno totale di energia. L'obiettivo finale che l'Unione Europea si prefigge è l'abbattimento delle emissioni di CO<sub>2</sub> del 50% rispetto al livello del 1990 entro il 2050, ed intende raggiungerlo mediante un processo di decarbonizzazione del sistema energetico. Al fine di evitare wind-fall profit, il settore elettrico dovrà provvedere all'acquisto di tutti i permessi di emissione mediante il sistema ad aste.

### 6.2.3 La problematica

Negli ultimi anni si è assistito ad un crescente interesse da parte degli operatori del settore energetico ed industriale verso l'adozione di strumenti quantitativi in grado di fornire un adeguato supporto nell'affrontare e risolvere problemi decisionali complessi. Tale interesse trova la sua motivazione principale nei profondi cambiamenti che hanno interessato la maggior parte dei Paesi ad economia avanzata. L'avvio dei processi di liberalizzazione congiuntamente alla crescente attenzione verso le tematiche di inquinamento ambientale, ha introdotto nuove problematiche importanti. In questo panorama, il ricorso a strumenti metodologici avanzati in grado di fornire soluzioni efficaci nel rispetto dell'economicità e sostenibilità rappresenta un evidente vantaggio competitivo.

Le imprese produttrici e consumatrici di energia potranno adottare i risultati ottenuti con i metodi quantitativi per definire scelte ottime nella composizione e nel dimensionamento del futuro portafoglio degli impianti, oltre che nel controllo del rischio economico e finanziario dei processi produttivi. I modelli che si possono sviluppare forniscono significative indicazioni sulle variabili economiche e tecnologiche che maggiormente condizionano le decisioni produttive a livello microeconomico. Il monitoraggio e il controllo di tali grandezze costituiscono un notevole valore aggiunto a favore di uno sviluppo del territorio, coerente con i diversi obiettivi di crescita e di tutela dell'ambiente perseguiti a livello regionale, nazionale ed europeo. Per poter analizzare queste tematiche, si possono studiare modelli e metodi innovativi per risolvere problemi di ottimizzazione e di equilibrio; in particolare:

- modelli e metodi per sistemi di mercati d'aste distribuiti nello spazio;
- metodi per la soluzione di disequazioni variazionali e per lo studio di equilibri di Nash generalizzati;
- modelli di equilibrio deterministici e stocastici per la valutazione dell'impatto economico delle normative ambientali;
- modelli per la valutazione dell'eco-efficienza dei processi produttivi e per le scelte d'investimento in fonti energetiche rinnovabili nell'ambito del processo di decarbonizzazione del sistema energetico europeo;
- metodi di simulazione delle variabili economiche legate ai mercati energetici e delle emissioni.

#### **6.2.4 Struttura del mercato elettrico italiano**

Il mercato elettrico in Italia nasce per effetto del decreto legislativo 16 marzo 1999, n. 79 (d.lgs. n. 79/99), nell'ambito del processo di recepimento della direttiva comunitaria sulla creazione di un mercato interno dell'energia

(96/92/CE)<sup>8</sup>. Tale mercato è nato per promuovere, secondo criteri di neutralità, trasparenza ed obiettività, la competizione nelle attività di produzione e di compravendita di energia elettrica attraverso la creazione di una *piazza del mercato* e per assicurare la gestione economica di una adeguata disponibilità dei servizi di dispacciamento.

Il mercato elettrico nazionale dell'Italia è suddiviso in 6 zone geografiche (Nord, Centro Nord, Centro Sud, Sud, Sicilia, Sardegna), 5 poli di produzione limitata (Monfalcone, Foggia, Brindisi, Rossano, Priolo) e zone virtuali estere (Francia, Svizzera, Austria, Slovenia, Grecia), sulla base di quanto disposto dalla disciplina del dispacciamento elaborata dall'AEEG e del Codice di Rete. In ciascuna di queste zone, per ciascuna ora, si determina un prezzo in genere differente. Tale prezzo è uguale, per ciascuna ora, nell'insieme delle zone non separate da congestioni (che insieme formano una cosiddetta zona di mercato) ed è determinato dall'incrocio di domanda ed offerta relative all'insieme di dette zone. Il prezzo è determinato univocamente da una offerta di vendita o da una di acquisto, a seconda che sulla zona di mercato si determini un eccesso di offerta o di domanda. È quindi sempre possibile identificare l'unità marginale responsabile della fissazione del prezzo, sia essa di produzione o di consumo.

### 6.2.5 Analisi del mercato elettrico italiano

Scopo del presente lavoro è analizzare l'impatto dell'applicazione dell'EU-ETS sul settore elettrico. L'importanza dello studio di tale settore nasce dal ruolo che il settore stesso ricopre nella maggior parte dei processi produttivi. Tenendo conto dell'interazione tra i diversi operatori di mercato, si è adottata una rappresentazione su base tecnologica del mercato energetico per

---

<sup>8</sup>Cfr. il sito web del Gestore dei Mercati Energetici S.p.A. (GME), la società, costituita dal Gestore della Rete di Trasmissione Nazionale (attualmente Gestore dei Servizi Energetici - GSE), a cui è affidata l'organizzazione e la gestione economica del mercato elettrico; website: <http://www.mercatoelettrico.org/It/Mercati/MercatoElettrico/IlMercatoElettrico.aspx>

valutare l'incidenza dei costi legati alle emissioni di CO<sub>2</sub> sulla determinazione dei prezzi del bene finale e sulle scelte di investimento, quali il passaggio da tecnologie inquinanti a tecnologie pulite.

È stato studiato sia il caso in cui i produttori competano in un mercato oligopolistico, sia quello in cui essi operino in competizione perfetta. I modelli di equilibrio deterministici sviluppati consentono di analizzare contemporaneamente l'azione di diversi operatori di mercato e di determinare in modo endogeno il prezzo dell'energia (influenzato dalla struttura dei costi e dai margini di efficienza degli impianti di generazione utilizzati) e dei permessi di emissione di CO<sub>2</sub> in base alla Direttiva 2009/29/CE. I risultati ottenuti sono stati analizzati paragonando differenti scenari. L'analisi svolta mostra che nel caso di concorrenza perfetta gli operatori di mercato investono maggiormente in nuove tecnologie rispetto che nel caso oligopolistico.

Dal punto di vista matematico, i modelli sono stati implementati come problemi di complementarità e sono stati risolti in GAMS usando il solver PATH.

# Bibliografia

- [1] E. Agazzi, D. Palladino. Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria. *Editrice La Scuola*, Brescia, 1998.
- [2] E. J. Anderson and X. Hu. Finding supply function equilibria with asymmetric firms. *Operation Research*, 56, 2008, 697-711.
- [3] F. Baresi. La Geometria tra intuizione e rigore: occasione per l'educazione della persona. Dottorato di Ricerca in Scienze Pedagogiche, ciclo XXIII. Tesi di Dottorato. Università degli Studi di Bergamo, a.a. 2010/2011.
- [4] E. Baroncelli. Gli Editoriali. La Bella Matematica. *Integra Humanitas*, 2001, <<http://digilander.libero.it/integrahumanitas/bellamatematica.htm>>.
- [5] F. Bonenti, H. Karzel, M. Marchi. Absolute planes with elliptic congruence. *Mitt. Math. Ges. Hamburg*, 31, 2012, 1-21.
- [6] F. Bonenti, M. Marchi. La nozione intuitiva di infinito e le sue possibili precisazioni. Il caso dell'aritmetica e della geometria. *Seminario Matematico di Brescia*, 12, 2010.
- [7] F. Bonenti, G. Oggioni, E. Allevi, G. Marangoni. Evaluating the EU ETS impacts on profits, investments and prices of the Italian electricity market (Presentato per la pubblicazione).

- [8] F. Bonenti, M. E. Zuanon. Equilibrium à la Cournot and Supply Function Equilibrium in electricity markets under linear price/demand and quadratic costs. *International Mathematical Forum*, 7, n. 40, 2012, 1993 - 1998.
- [9] F. Bonenti, M. E. Zuanon. On Cournot models for electricity markets under linear price/demand and quadratic costs. *Quaderni dell'Università degli Studi di Brescia*, 353, 2010.
- [10] M. Borga, D. Palladino. Oltre il mito della crisi. *La Scuola*, Brescia, 1997.
- [11] E. Casari. Questioni di filosofia della matematica. *Feltrinelli Editore*, Milano, 1964.
- [12] L. Corgnier. Articoli. La sublime inutilità della Matematica. *Progetto Polymat, Istituto Superiore Mario Boella*, <<http://areeweb.polito.it/didattica/polymath/ICT/Htmls/Interventi/Articoli/Italia/RealiCorgnier/RealiCorgnier.htm>>.
- [13] R. Courant, H. Robbins. What Is Mathematics? *Oxford University Press*, 1941 (trad. it. di L. Ragusa Gilli, *Edizioni Bollati Boringhieri*, 2000).
- [14] G. De Cecco. Ennio De Giorgi e il valore sapienziale della matematica (in Visioni del mondo nella storia della scienza). *Quaderno I. P. E.*, 10, Napoli, 1999, 73-87.
- [15] E. De Giorgi. Riflessioni su Matematica e Sapienza, (a cura di A. Marino e C. Sbordone). *Quaderni dell'Acc. Pontaniana*, Napoli, 1996.
- [16] F. Y. Edgeworth. Mathematical method in political economy. *Palgrave's Dictionary of Political Economy, Macmillan*, Londra, 1894-1899.
- [17] F. Enriques. Philosophie et histoire de la pensée scientifique. *Hermann & C<sup>e</sup> Éditeurs*, Paris, 1934.

- [18] F. Enriques. Problemi della scienza. *Zanichelli*, 1984.
- [19] E. Fischbein. Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 1983, 9-24 (Trad. it. di L. Copercini. Intuizione e dimostrazione. Matematica a scuola: teoria ed esperienze. *Pitagora*, 1992, Bologna, 1-24).
- [20] E. Fischbein. The theory of figural concepts. *Educational studies in Mathematics*, 24(2), 1993, 139-162.
- [21] R. Fortini, L. Cateni, C. Bernardi. Il mondo geometrico. *Le Monnier*, 1983.
- [22] M. Girardi, G. Israel. Teoria dei campi. *Feltrinelli Editore*, Milano, 1976.
- [23] H. Hardy Godfrey. Apologia di un matematico. *Garzanti Libri*, 2002, ISBN 88-11-68527-3.
- [24] A. Guerraggio. Articoli. Il mestiere del matematico. *Università Bocconi, Matematica*, <<http://matematica-old.unibocconi.it/guerraggio/mestiere2.htm>>.
- [25] R. W. Hamming. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics. *The American Mathematical Monthly* (87), 2, 1980.
- [26] D. Hilbert. Grundlagen der Geometrie. Teubner, Leipzig (Trad. it. della X edizione, Fondamenti della geometria con i supplementi di Paul Bernays. *Feltrinelli*, Milano, 1970).
- [27] H. Karzel, M. Marchi. Classification of general absolute geometries with Lambert-Saccheri quadrangles. *Le Matematiche*, LXI Fascicolo I, 2006, 27-36.
- [28] H. Karzel, H.J. Kroll. Geschichte der geometrie seit Hilbert. *Wissenschaftliche Buchgesellschaft*, Darmstadt, 1988.

- [29] I. Lakatos. *Mathematik, empirische Wissenschaft und Erkenntnistheorie. Philosophische Schriften II*, Braunschweig-Wiesbaden, 1982.
- [30] G. W. Leibniz. *Scientia generalis-characteristica. Philosophical Writings, Correspondence between Leibniz and Clarke*, Appendix to Band 1-3, 1890.
- [31] M. Li Calzi, A. Basile. *Economisti e matematica dal 1494 fino al 1969. Oltre l'arte del far di conto*. In *Convegno Matematica e Cultura*, Venezia, 1999.
- [32] P. Lockhart. *A Mathematician's Lament. Mathematical Association of America*, 2008.
- [33] C. F. Manara. *L'economia e il metodo matematico. Economia Politica (III)*, 2, 1986, 179-186.
- [34] C. F. Manara. *La creatività in matematica. Emmeciquadro*, 1, 1998, 7-13.
- [35] C. F. Manara. *La Geometria. Problemi logici e didattici. Scuola e didattica*, 1984, 49-64.
- [36] C. F. Manara. *Pedagogia della Matematica. L'educazione scientifica. Atti del VI Convegno di Scholè. La Scuola*, Brescia, 1962.
- [37] C. F. Manara, M. Spoglianti. *La idea di iperspazio. Una dimenticata polemica tra G. Peano, C. Segre e G. Veronese. Accad. Sci. Modena. Atti Mem. (6)*, 19, 1977, 109-129.
- [38] M. Marchi. *Geometria: verità o verosimile? Nuova Secondaria*, 9, 1997, 81-83.
- [39] M. A. Mariotti. *Interazioni fra immagini e concetti nel ragionamento geometrico*. 1990.

- 
- [40] M. A. Mariotti. La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria. *Pitagora Editrice*, Bologna, 2005.
- [41] G. Melzi. Perchè la matematica. *Editrice La Scuola*, Brescia, 1978.
- [42] A. Padoa. Elogio alla matematica, discorso in Pinerolo, 28 marzo 1908.
- [43] G. Peano. Formulaire de mathématiques. *Royal Library of Turin*, 1895.
- [44] G. Peano. Sui fondamenti della geometria. *Opere Scelte III*, U.M.I., Bologna, 1959.
- [45] H. Poincarè. La scienza e l'ipotesi (Trad. it. di F. Albergamo. *La Nuova Italia*, Firenze, 1949).
- [46] A. Rosenblueth, N. Wiener. The role of the Models in Science. *Philosophical Science*, 12, 1945.
- [47] C. Ruiz, A. J. Conejo and R. García-Bertrand. Some analytical results pertaining to Cournot models for short-term electricity markets. *Electric Power System Research*, 78, 2008, 1672-1678.
- [48] B. Russell. The Study of Mathematics: Philosophical Essays. *New Quarterly*, London, 1, 1910, 29-44.
- [49] G. Saccheri. Euclide liberato da ogni macchia, saggio introduttivo di I. Toth e E. Cattanei. *Bompiani, Il pensiero occidentale*, Milano, 2001.
- [50] K. Sörensen. *Elliptische Ebenen*. Mitt. Math. Ges. Hamburg, 10, 1976, 277-296.
- [51] K. Sörensen. *Elliptische Räume*. Mitt. Math. Ges. Hamburg, 18, 1999, 159-167.
- [52] M. Ventosa, A. Baillo, A. Ramos, M. Rivier. Electricity market modeling trends. *Energy Policy*, 33, 2005, 897-913.

- [53] E. Wigner. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. *Communications in Pure and Applied Mathematics (13)*, 1, 1960.
- [54] P. Zellini. La ribellione del numero. *Adelphi*, Milano, 1985.
- [55] P. Zellini. Numero e Logos. *Adelphi*, Milano, 2010.

# Nota A

Quad. del Seminario Matematico di Brescia, n. 12, 2010.

## La nozione intuitiva di infinito e le sue possibili precisazioni. Il caso dell'aritmetica e della geometria.

Francesca Bonenti e Mario Marchi

Dipartimento di Matematica e Fisica,  
Università Cattolica di Brescia,  
Via Musei 41, 25121 Brescia, Italy.

**Abstract.** Scopo del presente lavoro è analizzare a fondo i significati e i limiti del cosiddetto assioma di Archimede che gioca un ruolo fondamentale nel sistema assiomatico di D. Hilbert. In particolare ci si è interessati al ruolo svolto da tale assioma nella fondazione dell'aritmetica e nello studio delle proprietà del piano assoluto, con particolare attenzione al caso delle geometrie non-euclidee. L'analisi così condotta ha portato in evidenza le relazioni che legano gli aspetti intuitivi a quelli razionali relativi alla nozione di infinito, la cui introduzione costituisce una delle più frequenti difficoltà per gli studenti di ogni età che si trovano ad affrontare lo studio della matematica.

## Introduzione

La nozione di infinito svolge un ruolo fondamentale nella costruzione assiomatica delle geometrie euclidea e non-euclidea e delle strutture ordinate ad esse associate. La condizione di compatibilità tra la nozione di infinito e le nozioni di ordinamento così introdotte sono precisate dal cosiddetto assioma di Archimede.

Scopo di questo lavoro è analizzare a fondo il significato e i limiti di tale assioma valutando in particolare il suo ruolo nella caratterizzazione del piano assoluto.

Nella prima sezione viene analizzato il significato della condizione di Archimede enunciata per un insieme ordinato qualunque e quindi, in particolare, per l'insieme  $\mathbb{N}$  dei numeri naturali. Viene quindi richiamata, in forma schematica, la costruzione di  $\mathbb{N}$  secondo gli assiomi di Peano (*numeri naturali standard*) e successivamente quella dei *numeri naturali non standard*.

Nella seconda sezione si introducono le basi assiomatiche della geometria elementare al fine di caratterizzare l'ambiente nel quale si vuole analizzare il significato dell'assioma di Archimede; verrà introdotta la nozione di *piano assoluto* secondo D. Hilbert.

Nella terza sezione si mostrerà come tale assioma possa dar luogo a una contraddizione nel sistema di assiomi di una particolare classe di piani assoluti.

## 1. Archimede e i Naturali

### 1.1 L'assioma di Archimede

**Definizione 1.** Sia  $\mathbb{N}$  l'insieme dei *numeri naturali*, sia  $\mathcal{I}$  un insieme non vuoto e sia  $(\mathcal{I}, >, +)$ , insieme totalmente ordinato, con una legge di composizione “+” che chiamiamo *somma* tale che  $\forall a, b \in \mathcal{I}$ , esiste  $(a + b) \in \mathcal{I}$  e  $(a + b) > a$ .

*Osservazione 1.*  $\forall a \in \mathcal{I}, \forall n \in \mathbb{N}$ , si può definire  $na := (a + (a + (a + \dots))) \in \mathcal{I}$ , essendo la somma *ripetuta successivamente* per “n-volte”.

Per l'insieme  $\mathcal{I}$  assumiamo che valga il seguente:

**Assioma 1.** (di Archimede **A**)  $\forall a, b \in \mathcal{I}$  con  $a < b$ ,  $\exists n \in \mathbb{N} : na > b$ .

*Osservazione 2.* L'assioma di Archimede dipende dal significato che si intende dare dall'espressione "somma ripetuta n-volte" e quindi, in ultima analisi, dalla *nozione intesa* di numero naturale.

## 1.2 I numeri naturali

Analizziamo la definizione assiomatica classica di "insieme dei numeri naturali"  $\mathbb{N}$  secondo Peano (cfr. [3], pag. 175 e successive).

Si considerano tre concetti primitivi:

*numero*,

*uno* (simbolo 1),

*successore* (Peano usa la parola *successivo*)

i quali soddisfano i seguenti cinque assiomi:

**P<sub>1</sub>.** 1 è un numero;

**P<sub>2</sub>.** il successore di un numero è un numero, univocamente determinato;

**P<sub>3</sub>.** 1 non è il successore di alcun numero;

**P<sub>4</sub>.** numeri con successori uguali<sup>9</sup> sono uguali;

**P<sub>5</sub>.** sia  $I$  un insieme qualsiasi. Supponiamo che 1 appartenga ad  $I$ ; e che ogni volta che un numero appartiene a questo insieme, anche il successore vi appartenga; allora ogni numero appartiene ad  $I$ .

**Definizione 2.** Un insieme che soddisfa gli assiomi **P<sub>1</sub>**, **P<sub>2</sub>**, **P<sub>3</sub>**, **P<sub>4</sub>** e **P<sub>5</sub>** si definisce *insieme dei naturali* e lo si indica con  $\mathcal{N}$ .

Si indichi con  $n'$  il successore del numero  $n$ .

**Teorema 1.** *Sia  $a$  un numero tale che  $a \neq 1$ , allora esiste un naturale  $n$  tale che  $n' = a$ .*

<sup>9</sup>L'uguaglianza di cui si parla va intesa come identità logica.

*Dimostrazione.* Sia

$$I := \{x \in \mathcal{N} \mid \exists y \in \mathcal{N} \text{ con } y' = x\} \cup \{1\} :$$

$1 \in I$ , se  $i \in I$  allora, detto  $j \in \mathcal{N}$  tale che  $i = j'$ , si ha  $i' = (j')' \in \mathcal{N}$  per  $\mathbf{P}_2$  e quindi  $i' \in I$ . Allora per  $\mathbf{P}_5$ ,  $\mathcal{N} \subset I$  cioè l'insieme dei naturali è contenuto in  $I$ . Dunque, poichè per definizione  $I \subset \mathcal{N}$ , consegue che ogni numero  $\neq 1$  è successore di un altro numero.  $\square$

Da questo Teorema discende che i naturali soddisfano l'assioma di Archimede.

Dunque l'applicazione

$$' : \begin{cases} \mathcal{N} & \longrightarrow \mathcal{N} \setminus \{1\} \\ x & \longrightarrow x' \end{cases}$$

è biunivoca.

**Teorema 2.** *Se  $a, b$  sono naturali tali che  $a \neq b$ , allora  $a' \neq b'$ .*

*Dimostrazione.* Se per assurdo fosse  $a' = b'$ , allora per  $\mathbf{P}_4$  si avrebbe:  $a = b$  che è contro l'ipotesi.  $\square$

**Teorema 3.** *Il successore di un numero è diverso dal numero stesso.*

*Dimostrazione.* Sia

$$I := \{x \in \mathcal{N} \mid x' \neq x\} :$$

per  $\mathbf{P}_3$ ,  $1 \in I$ ; se  $i \in I$ , allora  $i' \neq i$  e dunque  $i' \in I$ . Quindi per  $\mathbf{P}_5$  l'insieme dei naturali è contenuto in  $I$ .  $\square$

In  $\mathcal{N}$  si definisce una legge di composizione interna che si chiama addizione e si indica “+”.

**Definizione 3.** Siano  $a, b$  due naturali qualsiasi, si definisce in modo induttivo l'addizione:

- (1)  $a + 1 := a'$ ,
- (2)  $a + b' := (a + b)'$ .

**Teorema 4.** *Siano  $a, b$  due naturali, allora  $a + b$  è un naturale.*

*Dimostrazione.* Per ogni  $a \in \mathcal{N}$  sia

$$I_a := \{x \in \mathcal{N} \mid a + x \in \mathcal{N}\}.$$

Per la definizione (1),  $1 \in I_a$ , poichè  $a \in \mathcal{N}$  implica per  $\mathbf{P}_2$   $a' \in \mathcal{N}$  quindi  $a + 1 := a' \in \mathcal{N}$ .

Sia ora  $x \in I_a$  cioè  $a + x \in \mathcal{N}$ . Quindi  $x \in \mathcal{N}$  implica per  $\mathbf{P}_2$ ,  $x' \in \mathcal{N}$  e dunque per definizione  $a + x' = (a + x)' \in \mathcal{N}$ . Ne consegue che  $x \in I_a$  implica  $x' \in I_a$  e allora per  $\mathbf{P}_5$ ,  $\mathcal{N} \subset I_a$  cioè  $I_a = \mathcal{N}$ .

In conclusione  $\forall a, x \in \mathcal{N}$  si ha  $a + x \in \mathcal{N}$ .  $\square$

**Teorema 5.** *Siano  $a, b$  due naturali, la somma  $a + b$  è univocamente determinata.*

*Dimostrazione.* Sia

$$I := \{x \in \mathcal{N} \mid \forall a \in \mathcal{N} : a + x \text{ è univocamente determinata}\} :$$

per  $\mathbf{P}_2$ ,  $1 \in I$ ; se  $i \in I$ , allora  $a + i' \stackrel{\text{per(2)}}{=} (a + i)'$  è univocamente determinata, cioè  $i' \in I$ . Quindi per  $\mathbf{P}_5$  l'insieme dei naturali è contenuto in  $I$ .  $\square$

*Osservazione 3.* Per il Teorema (4) e il Teorema (5) si ha che l'addizione è una legge di composizione interna.

**Definizione 4.** Siano  $a, b$  due naturali qualsiasi, si definisce in modo induttivo la *moltiplicazione*:

$$(1) a \cdot 1 := a,$$

$$(2) a \cdot b' := a \cdot b + a.$$

Il segno  $\cdot$  verrà sottinteso nel seguito.

**Teorema 6.** *Siano  $a, b$  due naturali, allora  $ab$  è un naturale.*

*Dimostrazione.* Sia

$$I := \{x \in \mathcal{N} \mid \forall a \in \mathcal{N} : ax \in \mathcal{N}\} :$$

per (1),  $1 \in I$ ; se  $i \in I$ , allora  $ai' \stackrel{\text{per(2)}}{=} ai + a$  è un naturale; pertanto  $i' \in I$ . Quindi per  $\mathbf{P}_5$  l'insieme dei naturali è contenuto in  $I$ .  $\square$

**Teorema 7.** *Siano  $a, b$  due naturali, il prodotto  $ab$  è univocamente determinato.*

*Dimostrazione.* Sia

$$I := \{x \in \mathcal{N} \mid \forall a \in \mathcal{N} : ax \text{ è univocamente determinato}\} :$$

$1 \in I$  (ovvio); se  $i \in I$ , allora  $ai$  è univocamente determinato e così pure lo è  $ai + a$ , cioè per (2)  $ai'$ . Quindi per  $\mathbf{P}_5$  l'insieme dei naturali è contenuto in  $I$ .  $\square$

*Osservazione 4.* Per il Teorema (6) e il Teorema (7) si ha che la moltiplicazione è una legge di composizione interna.

**Definizione 5.** L'insieme  $\mathcal{N}'(+)$  risulta ordinato ( $>$ ) ponendo

$$\forall a \in \mathcal{N} : a' > a.$$

Si scrive  $\mathcal{N}'(+, >)$ .

**Teorema 8.** 1.  $\mathcal{N}'(+, >)$  è totalmente ordinato;

$$2. \forall a, b \in \mathcal{N} : a > b \iff a' > b'.$$

È possibile estendere l'insieme  $\mathcal{N}$  all'insieme  $-\mathcal{N}$  dei *numeri naturali negativi* con il *numero nullo* 0 (per maggiori dettagli cfr. per es. [3], pag. 202 e successive).

**Definizione 6.**  $-\mathcal{N} := \{-a \mid a \in \mathcal{N} \setminus \{0\}\}.$

**Definizione 7.** Si estende a  $-\mathcal{N}$  la nozione di successore ponendo

$$(-a')' = -a,$$

dove per definizione  $-0 := 0$ .

*Osservazione 5.* La Definizione (5) estende la relazione di ordinamento ( $>$ ) anche a  $-\mathcal{N}$ .

**Definizione 8.**  $\mathcal{Z}(' , >) := -\mathcal{N} \dot{\cup} \{0\} \dot{\cup} \mathcal{N}$  prende il nome di *insieme di numeri interi*<sup>10</sup>.

Aggiungiamo ora ai concetti primitivi di  $\mathcal{N}$  un nuovo simbolo di costante individuale  $\omega$ , che indica un elemento esterno all'insieme dei naturali  $\mathcal{N}$  (per maggiori dettagli si veda [10], pag. 136 e successive).

Consideriamo la nuova teoria che, oltre agli assiomi di Peano, ha in aggiunta l'assioma: “ $\omega$  è un numero”. Precisamente:

**Definizione 9.** Si definisce *ampliamento dell'insieme dei naturali  $\mathcal{N}$*  un insieme che soddisfa, oltre gli assiomi  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_3$ ,  $\mathbf{P}_4$  e  $\mathbf{P}_5$ , anche l'ulteriore assioma:

$$\omega \text{ e' un numero.}$$

Tale ampliamento si indicherà con  $\widehat{\mathcal{N}} := \overline{\mathcal{N} \cup \{\omega\}}$ .

L'elemento  $\omega$  ha un successore per l'assioma  $\mathbf{P}_2$  ed essendo diverso da 1 anche un predecessore, che non è 1 perchè  $\omega$  è diverso da  $1'$ , e non appartiene a  $\mathcal{N}$  perchè altrimenti anche  $\omega$  apparterrebbe a  $\mathcal{N}$ . Quindi  $\omega$  appartiene necessariamente a un insieme di numeri che rispetto all'ordinamento introdotto con la Definizione (5) viene detto avere “tipo d'ordine degli interi  $\mathcal{Z}$ ”.

Dopo  $\omega$  ci sono tutti i numeri del tipo  $\omega + n$ , ottenuti iterando l'applicazione successore; tra i successori di  $\omega + n$  c'è  $2\omega - n$  e poi  $2\omega$ ,  $2\omega + n$ ...

Precisamente:

<sup>10</sup>L'ordinamento introdotto nella Definizione (5) viene esteso anche a  $\mathcal{Z}$  e quindi risulta che 0 è il successore di  $-(0')$ . La relazione d'ordine così ottenuta non crea contraddizioni poichè  $\mathcal{Z}$  non soddisfa gli assiomi di Peano.

**Definizione 10.**  $\forall a, b \in \widehat{\mathcal{N}}$ , con  $a < b$ , si dice che  $a$  è *congiungibile* a  $b$  se  $b$  si può ottenere iterando  $n$  volte (con  $n \in \mathcal{N}$ ) la funzione successore, cioè  $b = (((a')')' \dots)'$ .

**Teorema 9.** *La relazione di congiungibilità è una relazione di equivalenza “ $\sim$ ”.*

*Osservazione 6.* Ogni classe di quivalenza  $\mathcal{N} / \sim$  è isomorfa a  $\mathcal{Z}$ , quindi è archimedea su  $\mathcal{N}$ .

*Osservazione 7.* L'insieme  $\widehat{\mathcal{N}} := \overline{\mathcal{N} \cup \{\omega\}}$  soddisfa gli assiomi di Peano e quindi tutti i teoremi che da questi derivano. Dunque  $\widehat{\mathcal{N}}$  è un insieme di naturali e allora, per il Teorema (1),  $\widehat{\mathcal{N}}$  è archimedeo su sè stesso.

*Osservazione 8.* E' evidente che  $\widehat{\mathcal{N}}$  non può essere isomorfo all'insieme dei naturali  $\mathcal{N}$  perchè contiene l'elemento  $\omega$  che è maggiore di ogni  $n$  appartenente a  $\mathcal{N}$ .

Quindi  $\widehat{\mathcal{N}}$  non è archimedeo su  $\mathcal{N}$ .

Possiamo quindi stabilire la congettura: ogni insieme ordinato non archimedeo sull'insieme dei naturali  $\mathcal{N}$  si può rendere archimedeo su un opportuno ampliamento di  $\mathcal{N}$ .

$\omega$  viene detto “infinito”, o non standard.

**Definizione 11.** Chiamiamo *insieme dei numeri naturali standard* e lo indicheremo con  $\mathbb{N}$  il più piccolo (a meno di isomorfismi) sottoinsieme dell'insieme dei naturali  $\mathcal{N}$ .

**Definizione 12.** L'insieme dei naturali  $\widehat{\mathbb{N}} := \overline{\mathbb{N} \cup \{\omega\}}$  è detto *insieme dei numeri naturali non standard*.

*Osservazione 9.* In  $\widehat{\mathbb{N}}$  sono veri tutti gli enunciati veri in  $\mathbb{N}$  (cioè  $\widehat{\mathbb{N}} \supset \mathbb{N}$ ).

Si osserva che gli elementi di un modello della teoria dei numeri naturali non sono distinguibili dalla struttura di  $\mathbb{N}$  mediante il linguaggio, anche se il modello costruito non è isomorfo ai naturali standard.

Ugualmente si può osservare che la proprietà archimedea di una certa struttura ordinata non è precisabile mediante il linguaggio perchè la nozione di

“somma ripetuta n-volte” è una espressione che si può interpretare solo dall'esterno di una struttura, è in sostanza un meta-linguaggio perchè è solo esternamente che si può precisare quante volte bisogna iterare una operazione che è nella struttura (cfr. [2]).

## 2. Il piano assoluto

Per la nozione di piano assoluto secondo D. Hilbert e le relative principali proprietà si veda per esempio [9], citato in Bibliografia.

**Definizione 13.** Sia  $\mathcal{P}$  un insieme di elementi detti *punti*.

Sia  $\mathcal{R}$  un sottoinsieme dell'insieme delle parti di  $\mathcal{P}$ :  $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{P}(\mathcal{P})$ , che chiamiamo *insieme delle rette*.

Diciamo che  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  è uno *spazio di rette* se valgono le condizioni:

**I1.**  $\forall a, b \in \mathcal{P}, a \neq b: \exists! R \in \mathcal{R}$  tale che  $a, b \in R =: \overline{a, b}$ .

**I2.**  $\forall R \in \mathcal{R}: |R| \geq 2$ .

Consideriamo inoltre le condizioni:

**I3.**  $|\mathcal{R}| \geq 2$ .

**I'2.**  $\forall R \in \mathcal{R}: |R| \geq 3$ .

**Definizione 14.** (Enunciato di Playfair del c.d. Assioma di Euclide)

**P.**  $\forall R \in \mathcal{R}, \forall a \in \mathcal{P} \setminus R, \exists! S \in \mathcal{R}: a \in S, R \cap S = \emptyset$ .

**Definizione 15.**  $\forall R, S \in \mathcal{R}, R \parallel S \iff (R = S \iff R \cap S \neq \emptyset)$ .

Diremo  $R$  *parallela* a  $S$ .

**Definizione 16.**  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \parallel)$ , con gli assiomi  $I1, I'2, I3, \mathbf{P}$ , è detto *piano affine*.

**Definizione 17.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  uno spazio di rette con gli assiomi  $I1, I'2, I3$ .

Su ogni retta  $R \in \mathcal{R}$  definiamo una relazione fondamentale detta *relazione “tra”*.

Posto  $\mathcal{P}'^3 := \{(a, b, c) \in \mathcal{P}^3 \mid a \neq b, c; c \in \overline{a, b}\}$ .

Sia

$$\alpha : \begin{cases} \mathcal{P}'^3 & \longrightarrow \{-1, +1\} \\ (a, b, c) & \longrightarrow (a|b, c) \end{cases} .$$

Lo spazio di rette  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \alpha)$ , dotato di tale applicazione, lo chiameremo *spazio di rette con relazione "tra"* se valgono le seguenti proprietà.

$\forall (a, b, c), (a, b, d), (a, c, d) \in \mathcal{P}'^3$  si ha:

**T1.**  $(a|b, c) = (a|c, b)$

**T2.**  $(a|b, c)(a|c, d) = (a|b, d)$

**T3.** esattamente uno dei valori  $(a|b, c), (b|a, c), (c|a, b)$  è uguale a  $-1$ .

L'applicazione  $\alpha$  prende il nome di *funzione tra*.

**Teorema 10.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R})$  uno spazio di rette con gli assiomi **I1**, **I'2**, **I3** tale che  $\forall R \in \mathcal{R}, R$  è un insieme totalmente ordinato  $(R, \geq)$ .

Allora, posto  $\forall a, b, c \in R$  con  $a \neq b, c$ :

$$(a|b, c) := \begin{cases} -1 & \iff b < a < c \text{ oppure } c < a < b \\ +1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

l'applicazione  $(a, b, c) \rightarrow (a|b, c)$  è una funzione "tra" che soddisfa **T1**, **T2**, **T3**.

Introduciamo un ulteriore assioma:

**T4.**  $\forall a, b, a \neq b : \exists c \in \overline{a, b}$  tale che  $(b|a, c) = -1$ .

**Definizione 18.** Siano  $a, b \in \mathcal{P}, a \neq b$ :

(1)  $]a, b[ := \{x \in \overline{a, b} \mid (x|a, b) = -1\}$  è detto *segmento aperto di estremi a, b*.

(2)  $]a, a[ := \emptyset$ .

(3)  $\overrightarrow{a, b} := \{x \in \overline{a, b} \setminus \{a\} \mid (a|b, x) = +1\}$  è detta *semiretta (aperta) di origine a dalla parte di b*.

(4)  $\overleftarrow{a, b} := \{x \in \overline{a, b} \setminus \{a\} \mid (a|b, x) = -1\}$ .

**Definizione 19.** Siano  $a, b, c \in \mathcal{P}$  con  $a \neq b, c$ .

Chiamiamo *angolo di vertice a e lati  $\overrightarrow{a, b}$  e  $\overrightarrow{a, c}$*  la coppia  $(\overrightarrow{a, b} \widehat{ } \overrightarrow{a, c}) =: (\widehat{b, a, c})$ .

**Assioma 2.** (di Pasch) Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \geq)$  uno spazio di rette dotato di funzione tra  $\alpha$  con gli assiomi **I1**, **I'2**, **I3** e che soddisfa **T1**, **T2**, **T3**, **T4**.  $\forall a, b, c \in \mathcal{P}$  non allineati,  $\forall R \in \mathcal{R}$  con  $a, b, c \notin R$  se  $R \cap ]b, c[ \neq \emptyset$  si ha:  $R \cap ]a, c[ \neq \emptyset$  oppure  $R \cap ]a, b[ \neq \emptyset$ .

**Definizione 20.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \geq)$  uno spazio di rette con gli assiomi I1, I'2, I3 e  $\alpha$  che soddisfa **T1**, **T2**, **T3**, **T4**. Se vale l'assioma di Pasch, allora lo spazio è detto *piano ordinato*.

**Definizione 21.** In un piano ordinato, posto  $\mathcal{R} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}' := \{(R, a, b) | R \in \mathcal{R}, a, b \in \mathcal{P}\}$ , chiamiamo *funzione d'ordine* l'applicazione:

$$\omega : \begin{cases} \mathcal{R} \times \mathcal{P} \times \mathcal{P}' & \longrightarrow \{-1, +1\} \\ (R, a, b) & \longrightarrow (R|a, b) := \begin{cases} -1 & \iff b \in \overrightarrow{R, a} \\ +1 & \iff b \in \overleftarrow{R, a} \end{cases} \end{cases}$$

$\forall R \in \mathcal{R}$  e  $\forall a, b, c \in \mathcal{P} \setminus R$  si dimostrano le proprietà della funzione d'ordine:

- (1)  $(R|a, b) = (R|b, a)$ ;
- (2)  $(R|a, b)(R|b, c) = (R|a, c)$ .

**Teorema 11.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega)$  un piano ordinato.

(1)  $\forall R \in \mathcal{R}, \forall a, b \in \mathcal{P} \setminus R$  distinti si ha:

- $R \cap \overline{a, b} = \emptyset \implies (R|a, b) = +1$ ,
- $R \cap \overline{a, b} =: \{c\} \implies (R|a, b) = (c|a, b)$ .

(2)  $\forall R \in \mathcal{R}, \forall a, b, c \in R$  distinti,  $\forall A, B, C \in \mathcal{R} \setminus \{R\}$  con  $a \in A, b \in B, c \in C$  esattamente uno dei valori  $(A|b, c), (B|a, c), (C|a, b)$  è uguale a  $-1$ .

(3)  $\forall R \in \mathcal{R}, \forall a, b \in \mathcal{P} \setminus R$  distinti si ha:  $(R|a, b) = -1 \implies R \cap \overline{a, b} \neq \emptyset$ .

**Teorema 12.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega)$  un piano ordinato.

$\forall R, R' \in \mathcal{R}, R \neq R'; \forall a, b, c \in R, \forall a', b', c' \in R'$ , tali che  $a \neq b, c$  e  $a' \neq b', c'$ ; siano  $A, B, C \in \mathcal{R} \setminus \{R, R'\}$  rispettivamente distinte tali che  $a, a' \in A, b, b' \in B, c, c' \in C, A \cap B = A \cap C = \emptyset$ .

Allora si ha:  $(a|b, c) = (a'|b', c')$ .

**Definizione 22.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega)$  un piano ordinato. Chiamiamo *congruenza* una relazione di equivalenza “ $\equiv$ ” definita in  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  tale che  $\forall a, b, c \in \mathcal{P}$ :

$$\mathbf{K1.} \quad (a, b) \equiv (b, a)$$

$$\mathbf{K2.} \quad (a, b) \equiv (c, c) \Leftrightarrow a = b.$$

**Definizione 23.**  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  è detto *piano assoluto* se valgono le seguenti condizioni:

**C1.**  $\forall a, b, c \in \mathcal{P}$  con  $a \neq b$  e  $\forall R \in \mathcal{R}$  con  $c \in R$ :  $\exists! x', x'' \in R$  distinti tali che:

$$(c, x') \equiv (c, x'') \equiv (a, b).$$

**C2.**  $\forall a, b, c \in \mathcal{P}$  distinti e allineati, se

$$(a, b) \equiv (a, c),$$

allora

$$(a|b, c) = -1.$$

**C3.**  $\forall a, b, c \in \mathcal{P}$  e  $\forall a', b', c' \in \mathcal{P}$  rispettivamente distinti e allineati, se

$$(a, b) \equiv (a', b'), \quad (a, c) \equiv (a', c') \quad \text{e} \quad (a|b, c) = (a'|b', c'),$$

allora

$$(b, c) \equiv (b', c').$$

**C4.**  $\forall a, b, c \in \mathcal{P}$  non allineati e  $\forall a', b' \in \mathcal{P}$  tali che  $(a, b) \equiv (a', b')$ ,  $\exists! c', c'' \in \mathcal{P}$  tali che

$$(a', c') \equiv (a, c) \equiv (a', c'') \quad \text{e} \quad (b', c') \equiv (b, c) \equiv (b', c'').$$

**C5.**  $\forall a, b, c \in \mathcal{P}$ ,  $\forall a', b', c' \in \mathcal{P}$  rispettivamente non allineati, tali che

$$(a, b) \equiv (a', b'), \quad (a, c) \equiv (a', c'), \quad (b, c) \equiv (b', c') \quad \text{e} \quad \forall d \in \overline{a, b},$$

$\forall d' \in \overline{a', b'}$  tali che

$$(a, d) \equiv (a', d'), (b, d) \equiv (b', d')$$

si ha:

$$(c, d) \equiv (c', d').$$

**C6.**  $\forall a, b, c', c'' \in \mathcal{P}$  distinti con

$$(a, c') \equiv (a, c''), (b, c') \equiv (b, c'')$$

si ha:

$$c', c'' \notin \overline{a, b} \text{ e } (\overline{a, b} | c', c'') = -1.$$

**Definizione 24.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Siano  $a, b, c \in \mathcal{P}$  tre punti allineati e distinti tali che  $(a|b, c) = +1$ . Poniamo allora:

$$(a, b) < (a, c) \Leftrightarrow (b|a, c) = -1.$$

**Definizione 25.** (cfr. [6]). Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Siano  $\alpha := (\overrightarrow{a, b} \hat{\ } \overrightarrow{a, c})$  e  $\alpha' := (\overrightarrow{a', b'} \hat{\ } \overrightarrow{a', c'})$  due angoli.  $\alpha$  e  $\alpha'$  si dicono *congruenti* ( $\alpha \equiv \alpha'$ ) se, scelti  $b_0 \in \overrightarrow{a, b}$ ,  $c_0 \in \overrightarrow{a, c}$ ,  $b'_0 \in \overrightarrow{a', b'}$ ,  $c'_0 \in \overrightarrow{a', c'}$  tali che  $(a, b_0) \equiv (a', b'_0)$  e  $(a, c_0) \equiv (a', c'_0)$ , ne segue che  $(b_0, c_0) \equiv (b'_0, c'_0)$ .

**Definizione 26.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Siano  $R, S \in \mathcal{R}$  distinte. Diciamo che  $R$  è *perpendicolare* a  $S$  e scriveremo  $(R \perp S)$  se:

(i)  $\emptyset \neq R \cap S =: \{a\}$

(ii)  $\forall r \in R \setminus S, s \in S \setminus R$  si ha:  $(\overrightarrow{a, r} \hat{\ } \overrightarrow{a, s}) \equiv (\overrightarrow{a, s} \hat{\ } \overrightarrow{a, r})$ .

L'angolo  $(\overrightarrow{a, r} \hat{\ } \overrightarrow{a, s})$  è detto *angolo retto* e si dimostra (cfr. [9], 17.16) che tutti gli angoli retti sono congruenti. Indichiamo con  $\mathbf{R}$  un angolo congruente ad un angolo retto.

**Teorema 13.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

$\forall a, b, c; a', b', c' \in \mathcal{P}$  rispettivamente distinti si ha:

- (1) se  $c \in \overrightarrow{a, b}$ ,  $c' \in \overrightarrow{a', b'}$  allora poniamo  $(\widehat{b, a, c}) \equiv (\widehat{b', a', c'}) =: 2R$  che viene detto angolo piatto;
- (2) se  $c \in \overrightarrow{a, b}$ ,  $c' \in \overrightarrow{a', b'}$  allora poniamo  $(\widehat{b, a, c}) \equiv (\widehat{b', a', c'}) = 0$  che viene detto angolo nullo.

**Definizione 27.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Siano  $\alpha = (\overrightarrow{b, a} \hat{;} \overrightarrow{b, c})$  e  $\beta = (\overrightarrow{b', a'} \hat{;} \overrightarrow{b', c'})$  due angoli tali che  $\overrightarrow{b, c} = \overrightarrow{b', a'}$  e  $(\overline{b, c}|a, c') = -1$ . Allora  $\overrightarrow{b, a}$ ,  $\overrightarrow{b, c}$  e  $\overrightarrow{b', c'}$  sono tre semirette distinte e possiamo definire la seguente somma:  $\alpha + \beta := (\overrightarrow{b, a} \hat{;} \overrightarrow{b, c'})$ .

**Teorema 14.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

$\forall R \in \mathcal{R}, \forall p \in \mathcal{P}: \exists! S \in \mathcal{R}$  tale che  $p \in S, S \perp R$ .

Scriveremo:  $(p \perp R) := S$ .

**Definizione 28.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Siano  $\alpha := (\widehat{a, o, c})$ ,  $\beta := (\widehat{b, o, c})$  due angoli propri (cioè che non rientrano nei casi previsti dal Teorema (13)) tali che  $(\overline{o, c}|a, b) = +1$ . Diciamo che  $\alpha > \beta$  se si ha  $(\overline{o, a}|b, c) = +1$ .

**Teorema 15.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Siano  $\alpha, \beta, \gamma$  tre angoli tali che  $\alpha = (\overrightarrow{b, a} \hat{;} \overrightarrow{b, c})$ ,  $\beta = (\overrightarrow{b', a'} \hat{;} \overrightarrow{b', c'})$  e  $\gamma = (\overrightarrow{b'', a''} \hat{;} \overrightarrow{b'', c''})$ . Si ha: se  $\alpha > \beta$ ,  $\beta > \gamma$ , allora  $\alpha > \gamma$ .

**Teorema 16.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Siano  $\alpha, \beta$  due angoli come indicato nella Definizione (27). Si ha quindi:  $\gamma := \alpha + \beta = \beta + \alpha$ .

**Definizione 29.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Siano  $a, b \in \mathcal{P}$  distinti. Chiamiamo  $m := \text{punto medio}$  della coppia  $(a, b)$  se è:

- (1)  $m \in \overline{a, b}$
- (2)  $(a, m) \equiv (m, b)$ .

**Definizione 30.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

$\forall a, b \in \mathcal{P}$  distinti, poniamo

$$\text{asse}(a, b) := \{x \in \mathcal{P} \mid (a, x) \equiv (x, b)\}.$$

**Teorema 17.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Due punti distinti  $a, b$  hanno esattamente un punto medio  $m$  e una retta  $M$  tali che  $(m|a, b) = (M|a, b) = -1$ , cioè  $m \in ]a, b[$  e  $M = (m \perp \overline{a, b})$ .

**Definizione 31.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Sia  $a \in \mathcal{P}$ . Definiamo l'applicazione:

$$\tilde{a} : \begin{cases} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ x \longrightarrow x' := \begin{cases} x \Leftrightarrow x = a \\ \tilde{a}(x) \neq x \Leftrightarrow x \neq a \end{cases} \end{cases}$$

tale che:

- (1)  $\tilde{a}(x) \in \overline{a, x} \setminus \{x\}$
- (2)  $(a, x) \equiv (a, \tilde{a}(x))$ .

Allora  $\tilde{a}$  è una biiezione involutoria. Chiamiamo  $\tilde{a}$  *riflessione* o *simmetria* di punto.

**Definizione 32.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Sia  $R \in \mathcal{R}$ . Definiamo l'applicazione:

$$\tilde{R} : \begin{cases} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P} \\ x \longrightarrow \tilde{x}_R(x) \end{cases}$$

dove  $x_R := ((x \perp R) \cap R)$ .

Allora  $\tilde{R}$  è una biiezione involutoria tale che:

- (1)  $x = \tilde{R}(x) \Leftrightarrow x \in R$
- (2) se  $x \notin R$  allora  $x, \tilde{R}(x) \perp R$  cioè  $R = \text{asse}(x, \tilde{R}(x))$  e quindi  $(R|x, \tilde{R}(x)) = -1$ .

**Teorema 18.** (*Teorema delle tre riflessioni*). Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

$\forall A, B, C, D \in \mathcal{R}$  distinte,  $\forall p \in \mathcal{P}$  si ha:

- (1) se  $p := A \cap B \cap C$  allora esiste  $M \in \mathcal{R}$  con  $p \in M$  tale che  $\tilde{A} \circ \tilde{B} \circ \tilde{C} = \tilde{M}$ ;
- (2) se  $A, B, C \perp D$  allora esiste  $M \in \mathcal{R}$  con  $M \perp D$  tale che  $\tilde{A} \circ \tilde{B} \circ \tilde{C} = \tilde{M}$ ;
- (3) se  $p \in A \cap B$ ,  $\tilde{A} \circ \tilde{B} \circ \tilde{C} \in \mathcal{I}$  allora  $p \in C$  e  $\tilde{A} \circ \tilde{B} \circ \tilde{C} \in \tilde{\mathcal{R}}$ ;
- (4) se  $A \perp D \perp B$ ,  $\tilde{A} \circ \tilde{B} \circ \tilde{C} \in \mathcal{I}$  allora  $C \perp D$  e  $\tilde{A} \circ \tilde{B} \circ \tilde{C} \in \tilde{\mathcal{R}}$ .

**Assioma 3.** (di Archimede) Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

$\forall a, b \in \mathcal{P}, a \neq b; \forall x \in \overline{a, b} \setminus \{a\}$  tali che  $(a|b, x) = +1; \forall m \in \mathbb{N}$ , posto  $b_{m+1} := \widetilde{b}_m(b_{m-1})$  essendo  $b_0 := a, b_1 := b, b_2 := \widetilde{b}(a), \dots$ , si ha:  $(a|b_2, x) = (a|b_2, b_1)(a|b_1, x) = +1$  poichè  $(b_1|b_2, a) = -1$  e poi per induzione si ottiene  $(a|x, b_{m+1}) = (a|x, b_m)(a|b_m, b_{m+1}) = +1$ .

Allora  $\exists n \in \mathbb{N}$  tale che  $(b_n|a, x) = +1$  e quindi  $(x|a, b_n) = -1$ .

### 3. Il ruolo dell'Assioma di Archimede nella geometria del piano assoluto

**Definizione 33.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Una quaterna  $(a, b, c, d)$  di punti distinti e non allineati è detta *quadrilatero birettangolo isoscele* o *configurazione di Saccheri* e si indicherà con  $\mathcal{S}(a, b, c, d)$  se  $\overline{d, a} \perp \overline{a, b} \perp \overline{b, c}, (a, d) \equiv (b, c)$  e  $(\overline{a, b}|c, d) = +1$ .

**Definizione 34.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Una quaterna  $(a, b, c, d)$  di punti distinti e non allineati è detta *quadrilatero trirettangolo* o *configurazione di Lambert–Saccheri* e si indicherà con  $\mathcal{LS}(a, b, c, d)$  se  $\overline{d, a} \perp \overline{a, b} \perp \overline{b, c} \perp \overline{c, a}$ .

In questo caso posto  $a' := ((a \perp \overline{c, d}) \cap \overline{c, d})$ , si possono avere i tre casi:

$$\mathcal{LS}_r := \{(a, b, c, d) \in \mathcal{LS} | a' = d\};$$

$$\mathcal{LS}_h := \{(a, b, c, d) \in \mathcal{LS} | a' \in ]c, d[ \};$$

$$\mathcal{LS}_e := \{(a, b, c, d) \in \mathcal{LS} | d \in ]c, a' [ \}.$$

Indicheremo con  $\mathcal{LS}$  la totalità delle configurazioni di Lambert-Saccheri di un assegnato piano assoluto.

Valgono allora i seguenti teoremi.

**Teorema 19.** Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto.

Se  $\mathcal{LS}_r \neq \emptyset$  allora si ha che  $\mathcal{LS} = \mathcal{LS}_r$ . Allora il piano  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  è chiamato *singolare* e la congruenza è detta *singolare* o *euclidea*.

Sia ora  $\mathcal{LS}_r = \emptyset$ ; si ha allora:

$$\mathcal{LS}_h \neq \emptyset \implies \mathcal{LS} = \mathcal{LS}_h$$

oppure

$$\mathcal{LS}_e \neq \emptyset \implies \mathcal{LS} = \mathcal{LS}_e.$$

Se  $\mathcal{LS} = \mathcal{LS}_h$  diciamo che la congruenza è iperbolica, se  $\mathcal{LS} = \mathcal{LS}_e$  diciamo che è ellittica.

**Teorema 20.** (cfr. [8]) In una configurazione di Lambert-Saccheri  $(a, b, c, d)$ , posto  $\delta := \widehat{(c, d, a)}$ , si ha:

$\delta = 1R$  se e solo se la congruenza è singolare;

$\delta < 1R$  se e solo se la congruenza è iperbolica;

$\delta > 1R$  se e solo se la congruenza è ellittica.

In forza del (20) se è  $\delta = 1R$  diremo che per il piano assoluto  $\mathcal{A} := (\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  vale “il caso dell’angolo retto”; se è  $\delta < 1R$  diremo che per il piano assoluto  $\mathcal{A}$  vale “il caso dell’angolo acuto”; se è  $\delta > 1R$  diremo che per il piano assoluto  $\mathcal{A}$  vale “il caso dell’angolo ottuso”.

**Teorema 21.** (cfr. [8]) Sia  $(a, b, c, d) \in \mathcal{LS}$ , allora:

$$(1) (a, b, c, d) \in \mathcal{LS}_r \Leftrightarrow (a, b) \equiv (c, d);$$

$$(2) (a, b, c, d) \in \mathcal{LS}_h \Leftrightarrow (a, b) < (c, d);$$

$$(3) (a, b, c, d) \in \mathcal{LS}_e \Leftrightarrow (a, b) > (c, d).$$

**Teorema 22.** (cfr. [1], pag. 68) Sia  $(\mathcal{P}, \mathcal{R}, \alpha, \equiv)$  un piano assoluto.

Siano  $\triangle(a, b, c)$  un triangolo con  $\overline{b, c} \perp \overline{a, b}$ ,  $m = \text{medio}(a, c)$ ,  $h = ((m \perp \overline{a, b}) \cap \overline{a, b})$  e  $k := ((m \perp \overline{b, c}) \cap \overline{b, c})$ . Allora:

$$(1) \mathcal{LS}_e \neq \emptyset \Rightarrow (a, h) < (h, b),$$

$$(2) \mathcal{LS}_e \neq \emptyset \Rightarrow (k, c) > (k, b) > (m, h) \text{ e quindi } (b, c) > 2(m, h).$$

Dimostriamo ora che nel piano assoluto  $\mathcal{A} := (\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$ , se vale l’assioma di Archimede, l’ipotesi dell’angolo ottuso (introdotta da G. Saccheri) porta a una contraddizione.

**Teorema 23.** *Sia  $\mathcal{A} := (\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto. Si ha:  $\mathcal{LS}_e \neq \emptyset \Rightarrow \text{nonP}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $(a, b, c, d) \in \mathcal{LS}_e$ ; si ha dunque  $(d \perp \overline{c, d}) \neq \overline{a, d}$  e  $(d \perp \overline{c, d}) \cap \overline{c, b} = \emptyset$  e inoltre  $\overline{a, d} \cap \overline{c, b} = \emptyset$ . Per il punto  $d$  passano dunque due rette distinte,  $\overline{a, d}$  e  $(d \perp \overline{c, d})$ , che non incontrano la retta  $\overline{b, c}$  e questo contraddice **P**.  $\square$

Dimostriamo ora, viceversa, che: nel caso in cui  $\mathcal{LS}_e \neq \emptyset$ , l'assioma di Archimede implica la validità dell'assioma delle Parallele **P**, in evidente contraddizione col risultato del Teorema (23).

**Teorema 24.** *Sia  $\mathcal{A} := (\mathcal{P}, \mathcal{R}, \omega, \equiv)$  un piano assoluto tale che  $\mathcal{LS}_e \neq \emptyset$  e in cui vale l'assioma di Archimede. Siano  $G \in \mathcal{R}$ ,  $c \in \mathcal{P} \setminus G$ ,  $A := (c \perp (c \perp G))$ .*

*Allora per ogni  $C \in \mathcal{R}$  con  $c \in C$  e  $C \neq A$ , si ha  $C \cap G \neq \emptyset$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $a_1 \in C \setminus \{c\}$ ,  $B := (c \perp G)$ ,  $g := (G \cap B)$ ,  $f_1 := ((a_1 \perp B) \cap B)$ ,  $b_1 := ((a_1 \perp A) \cap A)$ .

Allora  $(b_1, c, f_1, a_1) \in \mathcal{LS}$  e per il Teorema (19)  $\in \mathcal{LS}_e$ ; quindi

$$(1) \quad \left( \widehat{b_1, a_1, f_1} \right) =: \alpha_1 > R.$$

Sia  $(a_1 \perp \overline{a_1, b_1}) =: \overline{a_1, l_1}$  e quindi  $\left( \overrightarrow{a_1, l_1} \widehat{\ } \overrightarrow{a_1, b_1} \right) =: \beta_1 = R$ .

Allora  $(\overline{a_1, l_1} | b_1, f_1) = (\overline{a_1, l_1} | c, f_1) = -1$  perchè  $\beta_1 < \alpha_1$ , quindi  $\emptyset \neq (a_1 \perp \overline{a_1, b_1}) \cap \overline{c, f_1} =: d_1$  con  $(d_1 | c, f_1) = -1$ . Per il Teorema (19) otteniamo che anche la configurazione  $(a_1, b_1, c, d_1) \in \mathcal{LS}_e$  ed è  $\left( \widehat{c, d_1, a_1} \right) > R$ .

D'altra parte è pure  $(f_1, c, b_1, a_1) \in \mathcal{LS}$  e quindi per (1) e il Teorema (21) segue (1),  $(b_1, a_1) < (c, f_1)$ .

Sia ora  $M_1 := \text{asse}(b_1, c)$ , allora

$$\widetilde{M}_1(b_1) = c,$$

$$\widetilde{M}_1(c) = b_1,$$

$$\widetilde{M}_1(a_1) =: h_1,$$

$$\widetilde{M}_1(\overline{a_1, b_1}) = \widetilde{M}_1(b_1 \perp \overline{b_1, c}) = \left( \widetilde{M}_1(b_1) \perp \widetilde{M}_1(\overline{b_1, c}) \right) = (c \perp \overline{b_1, c}) = B.$$

Quindi:  $-1 = (M_1|b_1, c) = (M_1|b_1, a_1)(M_1|a_1, d_1)(M_1|d_1, c)$  e siccome  $M_1, \overline{a_1, b_1}, B \perp A$ , si ha che  $(M_1|b_1, a_1)(M_1|d_1, c) = +1$  consegue

$$(M_1|a_1, d_1) = -1 \Rightarrow \emptyset \neq M_1 \cap \overline{a_1, d_1} =: e_1.$$

Dunque  $\widetilde{M}(\overline{e_1, a_1}) = \widetilde{M}(e_1 \perp \overline{a_1, b_1}) = \left( \widetilde{M}(e_1) \perp \widetilde{M}(\overline{a_1, b_1}) \right) = (e_1 \perp B) = \overline{e_1, h_1}$ .

Di conseguenza  $(b_1, a_1) \equiv (c, h_1) < (c, f_1)$ .

Siano ora  $a_2 \in C$  tale che  $(c, a_1) \equiv (a_1, a_2)$ ,  $f_2 := ((a_2 \perp B) \cap B)$ ,  $b_2 := ((a_2 \perp A) \cap A)$ .

Allora  $(b_2, c, f_2, a_2) \in \mathcal{LS}$  e per il Teorema (19)  $\in \mathcal{LS}_e$ ; quindi

$$(2) \left( \widehat{b_2, a_2, f_2} \right) =: \alpha_2 > R.$$

Sia  $(a_2 \perp \overline{a_2, b_2}) =: \overline{a_2, l_2}$  e  $(\overline{a_2, l_2}; \widehat{a_2, b_2}) =: \beta_2 = R$ .

Allora  $(\overline{a_2, l_2}|b_2, f_2) = (\overline{a_2, l_2}|c, f_2) = -1$  perchè  $\beta_2 < \alpha_2$ , quindi  $\emptyset \neq (a_2 \perp \overline{a_2, b_2}) \cap \overline{c, f_2} =: d_2$  con  $(d_2|c, f_2) = -1$ . Per il Teorema (19) otteniamo che anche la configurazione  $(a_2, b_2, c, d_2) \in \mathcal{LS}_e$  ed è  $\left( \widehat{c, d_2, a_2} \right) > R$ .

Siccome  $\mathcal{LS}_e \neq \emptyset$  ed essendo  $(c, a_1) \equiv (a_1, a_2)$ ,  $b_2 := ((a_2 \perp A) \cap A)$  per il Teorema (22) in  $\Delta(b_2, c, a_2)$  si ha  $(c, b_1) < (b_1, b_2)$ .

Sia ora  $M_2 := asse(b_2, c)$ , allora

$$\widetilde{M}_2(b_2) = c,$$

$$\widetilde{M}_2(c) = b_2,$$

$$\widetilde{M}_2(a_2) := h_2,$$

essendo  $f_2 := ((a_2 \perp B) \cap B)$  segue

$$\widetilde{M}_2(\overline{a_2, b_2}) = \widetilde{M}_2(b_2 \perp \overline{b_2, c}) = \left( \widetilde{M}_2(b_2) \perp \widetilde{M}_2(\overline{b_2, c}) \right) = (c \perp \overline{b_2, c}) = B.$$

Quindi:

$$-1 = (M_2|b_2, c) = (M_2|b_2, a_2)(M_2|a_2, d_2)(M_2|d_2, c),$$

e siccome  $M_2, \overline{a_2, b_2}, B \perp A$ , implica  $(M_2|b_2, a_2) = (M_2|d_2, c) = +1$  si conclude

$$(M_2|a_2, d_2) = -1 \Rightarrow \emptyset \neq M_2 \cap \overline{a_2, d_2} =: e_2.$$

Dunque  $\widetilde{M}_2(\overline{e_2, a_2}) = \widetilde{M}_2(e_2 \perp \overline{a_2, b_2}) = (\widetilde{M}_2(e_2) \perp \widetilde{M}_2(\overline{a_2, b_2})) = (e_2 \perp B) =: \overline{e_2, h_2}$

e per il Teorema (21) si ha:  $(b_2, a_2) \equiv (c, h_2) < (c, f_2)$ .

Siccome  $\mathcal{LS}_e \neq \emptyset$  ed essendo  $(c, a_1) \equiv (a_1, a_2)$ ,  $f_2 := ((a_2 \perp B) \cap B)$  per il Teorema (22) applicato al  $\Delta(f_2, c, a_2)$  consegue  $(c, f_1) < (f_1, f_2)$ .

Sempre per il Teorema (22) applicato al  $\Delta(c, a_2, b_2)$ , otteniamo che:  $(a_2, b_2) > 2(a_1, b_1)$ ; anche  $(c, h_2) > 2(c, f_1)$ .

Posto ora  $i_2 := \widetilde{h}_1(c)$ , segue

$$2(c, h_1) \equiv (c, i_2) < (c, h_2) < (c, f_2).$$

Per induzione posto  $i_{m+1} := \widetilde{i}_m(i_{m-1})$ , essendo  $i_0 = c$ ,  $i_1 = h_1$ , con  $(c, i_{m+1}) < (c, h_{m+1}) < (c, f_{m+1})$ . Sia  $a_{m+1} \in C$  tale per cui  $f_{m+1} = ((a_{m+1} \perp B) \cap B)$ .

Poichè  $(c, h_1) \equiv (h_1, i_2)$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 1$  e  $(c|h_1, g) = +1$ ,  $(i_{m-1}, i_m) \equiv (i_m, i_{m+1})$ , allora posso applicare l'assioma di Archimede alla successione  $c, h_1, i_2, i_3, \dots$

Assegnati dunque  $c, h_1, g$  con  $(c|h_1, g) = +1 \exists n \in \mathbb{N}$  con  $(i_n|g, c) = +1$ , quindi  $(g|i_n, c) = -1$ ; ma siccome vale  $(c, i_{m+1}) < (c, f_{m+1})$  si avrà anche  $(g|f_n, c) = -1$ .

In conclusione

$$-1 = (g|f_n, c) = (G|f_n, c) = (G|f_n, a_n)(G|a_n, c).$$

Ma  $(G|f_n, a_n) = +1$  poichè  $G \perp B \perp \overline{f_n, a_n}$  e quindi

$$(G|a_n, c) = -1 \Rightarrow G \cap \overline{a_n, c} = G \cap C \neq \emptyset.$$

Allora la retta  $A$  è l'unica retta  $R \in \mathcal{R}$  passante per  $c$  tale che  $R \cap G = \emptyset$ .  $\square$

Nell'ipotesi dell'angolo ottuso abbiamo dunque dimostrato che  $\forall G \in \mathcal{R}$  e  $\forall c \in \mathcal{P} \setminus G$  se  $C \in \mathcal{R} \setminus \{(c \perp (c \perp G))\}$ ,  $c \in C$ , vale  $C \cap G \neq \emptyset$ . D'altra parte per il fatto che **P** valga in un punto  $p$ , implica che vale  $\forall p \in \mathcal{P}$  (cfr. [9], 21.3). Dunque in  $\mathcal{A}$  vale l'assioma **P**. Allora dai Teoremi (23) e (24) si giunge, come si è già affermato, a una contraddizione.

# Bibliografia

- [1] E. Agazzi-D. Palladino, *Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria*, Editrice La Scuola, Brescia 1998.
- [2] S. Baratella-R. Ferro, *Non Standard Regular Finite Set Theory*, Math. Log. Quart., 41 (1995), 161-172.
- [3] M. Dedò, *Matematiche Elementari*, vol. II, Liguori Editore, Napoli 1971.
- [4] D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, Stuttgart 1968.
- [5] H. Karzel-H.J. Kroll, *Geschichte der geometrie seit Hilbert*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1988.
- [6] H. Karzel-M. Marchi-S. Pianta, *Introduction of measures for segments and angles in a general absolute plane*, Discrete Mathematics, 308 (2008), 220-230.
- [7] H. Karzel-M. Marchi-S. Pianta, *Legendre-like theorems in a general absolute geometry*, Results in Math., 51 (2007), 61-71.
- [8] H. Karzel-M. Marchi, *Classification of general absolute geometries with Lambert-Saccheri quadrangles. Le Matematiche Volume LXI 2006-Fascicolo I*, pag. 27-36.
- [9] H. Karzel-K. Sörensen-D. Windelberg, *Einführung in die Geometrie*, UTB Vandenhoeck, Göttingen 1973.
- [10] G. Lolli, *Guida alla teoria degli insiemi*, Springer, Milano 2008.

- 
- [11] G. Peano, *Sui fondamenti della geometria*, Opere Scelte vol. III, pag. 141 U.M.I., Bologna 1959.
- [12] G. Saccheri, *Euclide liberato da ogni macchia*, saggio introduttivo di I. Toth e E. Cattanei, Il pensiero occidentale, Bompiani Milano 2001.
- [13] K. Sörensen, *Elliptische Ebenen*, Mitt. Math. Ges., Hamburg **10**, (1976) 277-296.

# Nota B

Mitt. Math. Ges. Hamburg, 31, 2012, 1-21.

## Absolute planes with elliptic congruence

Francesca Bonenti, Mario Marchi

Dipartimento di Matematica e Fisica,  
Università Cattolica di Brescia,  
Via Musei 41, 25121 Brescia, Italy.

Helmut Karzel

Zentrum Mathematik, T.U. München  
D-80290 München, Germany.

**Abstract.** If  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  is an elliptic plane with mobility and if the corresponding Pythagorean field  $\mathbb{K}$  has a non archimedean ordering  $<$ , then to each point  $p \in \mathcal{P}$  there exists a subset  $[p] \subseteq \mathcal{P}$  with  $p \in [p]$ , also called *nano disc* or *nano domain*, such that:

1.  $\{[p] : p \in \mathcal{P}\}$  is a partition of  $\mathcal{P}$ ;
2. if for  $p \in \mathcal{P}$  we consider on  $[p]$  the trace structure  $([p], \mathcal{G}_{[p]}, \equiv_p)$ , one can define with the ordering  $<$  of the field  $\mathbb{K}$  a betweenness function  $\mathfrak{b}_p$  such

that  $([p], \mathcal{G}_{[p]}, \equiv_p, \mathbf{b}_p)$  becomes an *absolute plane* where the congruence  $\equiv_p$  is *elliptic*;

3.  $\forall p, q \in \mathcal{P}$  with  $[p] \neq [q]$ , the absolute planes  $([p], \mathcal{G}_{[p]}, \equiv_p, \mathbf{b}_p)$  and  $([q], \mathcal{G}_{[q]}, \equiv_q, \mathbf{b}_q)$  are isomorphic.

## 1. Introduction

Four distinct points  $a, b, c, d$  of an absolute plane  $\mathbf{A}$  are called *Lambert Saccheri quadrangle* if  $\overline{d, a} \perp \overline{a, b} \perp \overline{b, c} \perp \overline{c, d}$ ; let  $\delta := \angle(c, d, a)$ . It is well known (cf. for example [2]) that if  $\mathbf{A}$  satisfies the continuity axiom and also the Archimedes' axiom, then  $\delta \leq 2\mathbf{R}$  and  $\mathbf{A}$  is either the Euclidean ( $\delta = 2\mathbf{R}$ ) or hyperbolic plane ( $\delta < 2\mathbf{R}$ ). Without claiming the continuity axiom there are absolute planes with  $\delta > 2\mathbf{R}$  as M. Dehn (cf. [1]) showed. Without using the notion of “angle” we get the same classification by considering the point  $a' := (a \perp \overline{c, d}) \cap \overline{c, d}$ . We say that the Lambert Saccheri quadrangle is *singular* if  $a' = d$ , *hyperbolic* if  $a' \in ]c, d[$  and *elliptic* if  $d \in ]a', c[$ . The result that “the existence of one singular Lambert Saccheri quadrangle implies that all Lambert Saccheri quadrangles are singular” known since a long time (cf. [5] §21), was recently supplemented to the statement, “if in an absolute plane  $\mathbf{A}$  there is one elliptic (hyperbolic) Lambert Saccheri quadrangle then all Lambert Saccheri quadrangles are elliptic (hyperbolic)” (cf. [3]). We say that an absolute plane  $\mathbf{A}$  has *elliptic congruence* if the Lambert Saccheri quadrangles are elliptic.

In this paper we shall consider *elliptic planes*  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  in the sense of K. Sørensen (cf. [6], [7]). For each point  $a \in \mathcal{P}$ , we define a subset  $[a] \subseteq \mathcal{P}$  with  $a \in [a]$  and we consider elliptic planes where  $[a]$  contains more points as just the point  $a$ . If  $\mathcal{G}_{[a]}$  is the restriction of  $\mathcal{G}$  on  $[a]$ , a suitable betweenness function  $\mathbf{b}_{[a]}$  is introduced so that  $([a], \mathcal{G}_{[a]}, \mathbf{b}_{[a]})$  is an ordered incidence space. The subset  $[a]$  is called *nano disc* of  $a$ , or *nano domain*, and it will be proved that for two points  $a, b \in \mathcal{P}$ , the ordered spaces  $([a], \mathcal{G}_{[a]}, \mathbf{b}_{[a]})$  and  $([b], \mathcal{G}_{[b]}, \mathbf{b}_{[b]})$  are isomorphic. Here we consider the nano domains  $[a]$  of a

non Archimedean elliptic plane  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  and it will be proved (cf. Theorem 27) that each nano domain, with respect to the restriction of the congruence relation  $\equiv$  of the elliptic plane, is an *absolute plane with elliptic congruence*.

By results of K. Sörensen [6], [7] and others we know:

**Theorem 1.** *If  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  denotes an elliptic plane then there corresponds a commutative field  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  such that:*

1.  *$(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  is the projective plane over the field  $\mathbb{K}$ , i. e.  $\mathcal{P} = \mathbb{V}^*/\mathbb{K}^*$  where  $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$  is the 3-dimensional vector space over  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{V}^* := \mathbb{V} \setminus \{\mathbf{o}\}$ ,  $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ,  $\mathbb{V}^*/\mathbb{K}^* := \{\mathbb{K}^* \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{V}^*\}$ . Moreover let  $\kappa : \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{V}^*/\mathbb{K}^*$ ;  $\mathbf{x} \mapsto \mathbb{K}^* \cdot \mathbf{x}$ .*
2. *There are  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  such that the equation  $x_0^2 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 = 0$  has the only solution  $x_0 = x_1 = x_2 = 0$  and so if  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  is a base of  $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$  then  $f : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{K}$ ;  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_0 y_0 + \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2$  where  $\mathbf{x} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{y} = y_0 \mathbf{e}_0 + y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2$ , is a symmetric anisotropic bilinear form.*

*Hence  $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, f)$  is a quadratic space and denoting by  $\mathbf{x}^2 := f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ , we can form the metric functions*

$$\rho : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{K}; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2}{\mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2} \text{ and}$$

$$\delta : \mathbb{V}^* \times \mathbb{V}^* \rightarrow \mathbb{K}; (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto 1 - \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2}{\mathbf{x}^2 \mathbf{y}^2}.$$

*For two pairs of points  $(a, b), (c, d)$ , if  $\mathbf{a} \in \kappa^{-1}(a)$ ,  $\mathbf{b} \in \kappa^{-1}(b)$  and  $\mathbf{c} \in \kappa^{-1}(c)$ ,  $\mathbf{d} \in \kappa^{-1}(d)$ , we have:*

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff \rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \rho(\mathbf{c}, \mathbf{d}) \iff \delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \delta(\mathbf{c}, \mathbf{d}).$$

3. *If any two points of  $\mathcal{P}$  have a midpoint then  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  is a Pythagorean field, we can set  $\alpha = \beta = 1$  and for each point  $a \in \mathcal{P}$  there is a vector  $\mathbf{a} \in \kappa^{-1}(a)$  with  $\mathbf{a}^2 = 1$ .*

In this paper we consider elliptic planes  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  with midpoints. Then their corresponding fields  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  are *Pythagorean* and if  $(o, e_1, e_2)$  is a polar

triangle of such an elliptic plane then there are vectors  $\mathbf{e}_0 \in \kappa^{-1}(o)$ ,  $\mathbf{e}_1 \in \kappa^{-1}(e_1)$ ,  $\mathbf{e}_2 \in \kappa^{-1}(e_2)$  such that  $\mathbf{e}_0 \cdot \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1$ ; hence  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  form an orthonormal basis of the quadratic space  $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, f)$ . Moreover, since  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  is Pythagorean,  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  can be endowed with an order relation “ $<$ ” such that  $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$  becomes an ordered field and so we can form the valuation ring  $\mathbb{A} := \{\alpha \in \mathbb{K} \mid \exists n \in \mathbb{N} : |\alpha| < n\}$  and consider the maximal ideal  $\mathbb{M}$  of  $\mathbb{A}$ . We recall,  $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$  is an *Archimedean ordered field* if  $\mathbb{A} = \mathbb{K}$  or equivalently if  $\mathbb{M} = \{0\}$ .

We consider the following structures.

1. Let  $\mathbb{W} := \mathbb{K}\mathbf{e}_1 + \mathbb{K}\mathbf{e}_2$ , for  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{W}$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , let  $\overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^a := \{\lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ ,  $] \mathbf{a}, \mathbf{b} [ := \{\lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} \mid \lambda \in ]0, 1[ \}$ . We set  $\mathcal{L} := \{\overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^a \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{W}, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}\}$ ,  $\mathbb{W}^{3'} := \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbb{W}^3 \mid \mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{c} \in \overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^a\}$  and let

$$\mathfrak{b} : \begin{cases} \mathbb{W}^{3'} & \longrightarrow \{1, -1\} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) & \longmapsto (\mathbf{a} | \mathbf{b}, \mathbf{c}) \end{cases}$$

with

$$(\mathbf{a} | \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1 \iff \mathbf{a} \in ] \mathbf{b}, \mathbf{c} [$$

and

$$(\mathbf{a} | \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1 \iff \mathbf{a} \notin ] \mathbf{b}, \mathbf{c} [.$$

Then  $(\mathbb{W}, \mathcal{L}, \mathfrak{b})$  is an ordered affine plane.

2. Let  $\mathbb{M} := \mathbb{M}\mathbf{e}_1 + \mathbb{M}\mathbf{e}_2$ , for  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{M}$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , let  $\overline{\overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}}}$  :=  $\{\lambda\mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} \mid \lambda \in \mathbb{A}\}$  and  $\mathcal{L}_{\mathbb{M}} := \{\overline{\overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}}} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{M}, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}\}$ . Then  $\mathbb{M}$  is a subgroup of  $\mathbb{W}$  and an  $\mathbb{A}$ -modul. If  $\mathfrak{b}'$  is the restriction of  $\mathfrak{b}$  on  $\mathbb{M}$ , then  $(\mathbb{M}, \mathcal{L}_{\mathbb{M}}, \mathfrak{b}')$  is an ordered incidence space.

3. For  $a, b \in \mathcal{P}$  we set  $\delta(a, b) := \delta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  where  $\mathbf{a} \in \kappa^{-1}(a)$ ,  $\mathbf{b} \in \kappa^{-1}(b)$ . Let  $[o] := \{x \in \mathcal{P} \mid \delta(o, x) \in \mathbb{M}\}$  - called *nano disc* of  $o$  or *nano domain* - and let  $\mathcal{G}_{[o]} := \{G \cap [o] \mid G \in \mathcal{G} \wedge G \cap [o] \neq \emptyset\}$  be the trace of the incidence on the nano domain  $[o]$ . We show the embedding function  $\kappa' : \mathbb{W} \rightarrow \mathcal{P} ; \mathbf{x} \mapsto \kappa(\mathbf{e}_0 + \mathbf{x})$  of the affine plane  $(\mathbb{W}, \mathcal{L})$  into

the projective plane  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  maps  $\mathbf{M}$  bijectively to the nano domain  $[o]$  where each line of  $\mathcal{L}_{\mathbf{M}}$  is mapped to a line of  $\mathcal{G}_{[o]}$ , i.e.  $\kappa'_{|\mathbf{M}}$  is a collineation from the incidence space  $(\mathbf{M}, \mathcal{L}_{\mathbf{M}})$  to the incidence space  $([o], \mathcal{G}_{[o]})$ .

4. Since  $(\mathbf{M}, \mathcal{L}_{\mathbf{M}}, \mathbf{b}')$  is an ordered incidence space we can transfer the betweenness function  $\mathbf{b}'$  to a betweenness function  $\mathbf{b}''$  of  $([o], \mathcal{G}_{[o]})$  such that  $([o], \mathcal{G}_{[o]}, \mathbf{b}'')$  becomes an ordered incidence space.
5. Finally we consider the trace  $\equiv'$  of the congruence  $\equiv$  on  $[o]$  and our main result tells us that  $([o], \mathcal{G}_{[o]}, \mathbf{b}'', \equiv')$  is an absolute plane with elliptic congruence (cf. section 4, in particular Theorem 27).

## 2. The Elliptic Plane

### 2.1 The Elliptic Plane

A definite axiomatization of an elliptic plane  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  was given by K. Sørensen in [6]. In this paper we start from Sørensen's definition. Then  $\mathcal{P}$  denotes the set of *points*,  $\mathcal{G}$  the set of *lines* and  $\equiv$  the *congruence relation* defined on  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ ; hence  $\equiv$  is an equivalence relation such that for all  $a, b \in \mathcal{P}$ ,  $(a, b) \equiv (b, a)$  and if  $a, b, c \in \mathcal{P}$ ,  $(a, a) \equiv (b, c)$  implies  $b = c$ . Moreover if  $k, o \in \mathcal{P}$  are two distinguished distinct points, from Sørensen's axioms follows:

**Theorem 2.** *If  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  is an elliptic plane then:*

1.  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  is a projective plane (for any  $a, b \in \mathcal{P}$ ,  $a \neq b$ , let  $\overline{a, b} \in \mathcal{G}$  denote the uniquely determined line containing  $a, b$ ).
2. The map

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{P}) \\ x & \longmapsto & \pi(x) := \{y \in \mathcal{P} \mid (x, y) \equiv (k, o)\} \end{cases}$$

is an anisotropic polarity, i.e.  $\pi$  has the following properties (for any  $a, b, c \in \mathcal{P}$ ):

$$(a) \quad b \in \pi(a) \implies a \in \pi(b);$$

$$(b) \quad c \notin \pi(c) \text{ (i.e. } \pi \text{ is anisotropic);}$$

$$(c) \quad a \neq b \implies |\pi(a) \cap \overline{a, b}| = 1;$$

$$(d) \quad a \neq b \implies |\pi(a) \cap \pi(b)| = 1 \text{ and } \pi(\pi(a) \cap \pi(b)) = \overline{a, b}.$$

3. For  $G \in \mathcal{G}$  the set of points  $\pi'(G) := \bigcap \{\pi(x) \mid x \in G\}$  consists of a single point and  $(\pi \circ \pi')|_{\mathcal{G}} = id_{\mathcal{G}}$ ,  $(\pi' \circ \pi)|_{\mathcal{P}} = id_{\mathcal{P}}$ ; hence:  $\pi$  maps the set  $\mathcal{P}$  of points bijectively onto the set  $\mathcal{G}$  of lines i.e.  $\mathcal{G} = \{\pi(p) \mid p \in \mathcal{P}\}$  and  $\pi'$  maps the set  $\mathcal{G}$  of lines bijectively onto the set  $\mathcal{P}$  of points.

Two points  $x, y$  are called *conjugate* if  $(x, y) \equiv (k, o)$  or equivalently if  $y \in \pi(x)$ ; thus  $o$  and  $k$  are conjugate points. The point  $x$  is called the *pole* of the line  $\pi(x)$  and the line  $\pi(x)$  the *polar* of  $x$ . Three points  $\{a, b, c\}$  are called *polar triangle* if they are pairwise conjugate.

Let now be  $G, H \in \mathcal{G}$  with  $G \cap H =: \{a\}$ . If there is a  $c \in H$  such that  $(c, a) \equiv (k, o)$  then  $H$  is called *perpendicular* to  $G$  and we write  $H \perp G$  if  $\forall b \in G \setminus \{a\} : (c, b) \equiv (c, a)$ . Then by ([6], (1.8), (1.9), (1.14), (1.15)), (1.16), (1.17)) we have:

**Theorem 3.** Let  $G, H, K \in \mathcal{G}$  and  $a \in \mathcal{P}$ ; then:

$$1. \quad H \perp K \text{ if and only if } \pi'(H) \in K \text{ or } \pi'(K) \in H.$$

$$2. \quad \pi(a) \neq G \implies \exists! H \in \mathcal{G} \text{ such that } a \in H, H \perp G \text{ (we shall write } (a \perp G) := H).$$

$$3. \quad \pi(a) = G \implies \forall K \in \mathcal{G} \text{ with } a \in K \text{ it follows } K \perp G.$$

$$4. \quad \text{If } \{h, b, b'\} \subset G \text{ such that } (b, h) \equiv (h, b') \not\equiv (k, o), b \neq b', \text{ then: } \\ \{x \in \mathcal{P} \mid (x, b) \equiv (x, b')\} = (h \perp G).$$

$$5. \quad \text{If } a \in \mathcal{P} \setminus G \text{ and } \{b_1, b_2, b_3\} \subset G \text{ with } |\{b_1, b_2, b_3\}| = 3; \text{ then:}$$

$$(a, b_1) \equiv (a, b_2) \equiv (a, b_3) \implies \forall x \in G : (a, x) \equiv (k, o).$$

**Theorem 4.** Let  $a, b \in \mathcal{P}, a \neq b$ ; if  $m \in \overline{a, b}$  is such that  $(a, m) \equiv (m, b)$ , then, if  $n \in \overline{a, b} \setminus \{m\}$  we have  $(a, n) \equiv (n, b)$  if and only if  $n \in \pi(m)$ .

*Proof.* “ $\implies$ ”. By ([6], (1.18)) the condition  $(m, a, n) \equiv (m, b, n)$  holds if  $(m, n) \equiv (k, o)$  i.e.  $n \in \pi(m)$ .

“ $\impliedby$ ”. By ([6], **W4**) there exists exactly one  $n' \in \overline{a, b} \setminus \{m\}$  such that  $(m, a, n) \equiv (m, b, n')$  with  $(m, n) \equiv (m, n')$ . Since the condition  $(k, o) \equiv (m, n) \equiv (m, n')$  implies by ([6], **W2(b)**)  $n = n'$  it follows  $(a, n) \equiv (b, n)$ .  $\square$

The points  $m, n$  are called *midpoints* of  $(a, b)$ .

## 2.2 Motions of the elliptic plane $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$

Let  $a \in \mathcal{P}$  be a point; then if  $x$  is a point with  $x \in (\{a\} \cup \pi(a))$ , let  $\tilde{a}(x) := x$ ; if  $x \notin (\{a\} \cup \pi(a))$  let  $\tilde{a}(x)$  be the point uniquely determined by  $\tilde{a}(x) \in \overline{a, x} \setminus \{x\}$  and  $(x, a) \equiv (a, \tilde{a}(x))$  (according to axiom **W2(a)** of [6]).

Then the map:

$$\tilde{a} : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ x & \longmapsto & \tilde{a}(x) \end{cases} \quad (1)$$

is called *reflection* in the point  $a$  and in the line  $\pi(a)$ ;  $\tilde{a}$  is an involutory permutation with  $Fix(\tilde{a}) = (\{a\} \cup \pi(a))$ .

We set  $\tilde{\mathcal{P}} := \{\tilde{a} \mid a \in \mathcal{P}\}$  and if  $\tilde{m}(a) = b$  then  $m$  is a *midpoint* of  $a$  and  $b$ .

For  $G \in \mathcal{G}$  we set

$$\tilde{G} := \widetilde{\pi'(G)}.$$

Let  $x \in \mathcal{P} \setminus (G \cup \{\pi'(G)\})$  then by ([7], (3.2)) there is a uniquely determined point  $x' \in \mathcal{P} \setminus \{x\}$  such that for all  $c \in G$ ,  $(x, c) \equiv (c, x')$  and it holds  $x' = \tilde{G}(x)$ .

Let  $\mathcal{M} := Aut(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  be the group of all *motions* of  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$ , i.e. the set of all permutations  $\varphi$  of  $\mathcal{P}$  such that  $\varphi$  is a collineation of  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  and such that for any  $a, b \in \mathcal{P}$  we have  $(a, b) \equiv (\varphi(a), \varphi(b))$ . Moreover let

$\mathcal{I} := \{\varphi \in \mathcal{M} \mid \varphi^2 = id \neq \varphi\}$  be the set of all *involutory motions*.

By definition, for any  $\varphi \in \mathcal{M}$  and  $a \in \mathcal{P}$  it follows:  $\pi(\varphi(a)) = \varphi(\pi(a))$  and furthermore for any  $G, H \in \mathcal{G}$  it holds:  $G \perp H \iff \varphi(G) \perp \varphi(H)$ .

By ([6], (2.1)) and ([7], (3.4), (3.5), (3.6)) we have:

**Theorem 5.** *Let  $G \in \mathcal{G}$  and let  $x, x', c \in \mathcal{P}$  be non collinear, then:*

1.  $\tilde{G} \in \text{Aut}(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$ .
2.  $\tilde{G}$  is a central collineation with the centre  $\pi'(G)$ ; and, if  $H \in \mathcal{G} \setminus \{G\}$ , we have:  

$$\tilde{G}(H) = H \iff \pi'(G) \in H \text{ i.e. } H \perp G.$$
3. If  $(c, x) \equiv (c, x') \not\equiv (k, o)$  then  $H := \overline{c, \pi'(x, x')} = (c \perp \overline{x, x'})$  and  $\tilde{H}(x) = x'$ .

By ([6], (2.2), (2.3), (2.4), (2.5)) the following is proved.

**Theorem 6.** *Let  $\varphi \in \mathcal{M}$  and  $a, b, c \in \mathcal{P}$  such that  $a \neq b$  and  $(a, b) \not\equiv (k, o)$ . Then:*

1. If  $c \notin \overline{a, b}$ ,  $(a, c) \not\equiv (k, o)$  and  $\varphi(a) = a$ ,  $\varphi(b) = b$ ,  $\varphi(c) = c$  then  $\varphi = id$ .
2. If  $\varphi \neq id$  and  $\varphi(a) = a$ ,  $\varphi(b) = b$  then  $\varphi = \widetilde{a, b}$ .
3. If  $\varphi \neq id$  and  $\varphi(a) = a$  then there are lines  $G, H, K$  such that  $a \in G$  and  $\varphi = \tilde{G}$  or  $\{a\} = H \cap K$  and  $\varphi = \tilde{H} \circ \tilde{K}$ . If  $H \not\perp K$  then  $\{a\} = \text{Fix } \varphi$ .

**Theorem 7.** *Let  $H, K \in \mathcal{G}$ ,  $H \neq K$ . Then:*

1.  $\text{Fix}(\tilde{H} \circ \tilde{K}) = H \cap K \iff H \not\perp K$ .
2.  $\tilde{H}(K) = K$  and also  $\tilde{H} \circ \tilde{K} \in \mathcal{I} \iff H \perp K$ , i.e.:  $\pi'(K) \in H$ .
3. If  $\tilde{H} \circ \tilde{K} \in \mathcal{I}$  then  $\tilde{H} \circ \tilde{K} = \widetilde{H \cap K} = (\pi(H \cap K))$ .

Furthermore, by ([7], (3.9), (3.11), (3.12)) and ([6], (2.7)) we have the following.

**Theorem 8.** *Let  $\varphi \in \mathcal{M}$  and  $G \in \mathcal{G}$ ; then  $\widetilde{\varphi(G)} = \varphi \circ \widetilde{G} \circ \varphi^{-1}$ .*

**Theorem 9.** *Let be  $A, B, C \in \mathcal{G}$ ; then  $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} = id$  implies  $C = \pi(A \cap B)$ .*

**Theorem 10.** *(Three reflections theorem). Let be  $A, B, C \in \mathcal{G}$  with  $z \in A \cap B \cap C$ ; then there is  $M \in \mathcal{G}$  such that  $z \in M$  and  $\widetilde{A} \circ \widetilde{B} \circ \widetilde{C} = \widetilde{M}$ .*

Since  $\widetilde{\mathcal{G}} = \widetilde{\mathcal{P}}$ , then by (6) and (7) (see [6], (2.7), (2.8) and [7], (3.8)) the following is proved.

**Theorem 11.**  $\widetilde{\mathcal{G}}^2 := \widetilde{\mathcal{G}} \circ \widetilde{\mathcal{G}}$  is a group,  $\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{I} \cap \widetilde{\mathcal{G}}^2$ ,  $\widetilde{\mathcal{G}}^2 = \widetilde{\mathcal{G}}^3$  and  $\mathcal{I} = \widetilde{\mathcal{G}}$ .

### 2.3 Coordinatization of the elliptic plane $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$

By ([6], (3.5), sec. 4), to  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  there correspond a commutative field  $\mathbb{K}$  (with  $\text{char}\mathbb{K} \neq 2$ ), the 3-dimensional vector space  $(\mathbb{V}, \mathbb{K})$  with  $\mathbb{V} := \mathbb{K}^3$  and an anisotropic symmetric bilinear form

$$f : \begin{cases} \mathbb{V} \times \mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & \longmapsto & f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \end{cases}$$

(hence if  $q(\mathbf{a}) := f(\mathbf{a}, \mathbf{a})$  denotes the associated quadratic form, then:  $q(\mathbf{a}) = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{o}$ ), such that both the set  $\mathcal{P}$  of points and the set  $\mathcal{G}$  of lines can be identified with the set  $\mathbb{V}^*/\mathbb{K}^* := \{\mathbb{K}^*\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{V}^*\}$ , where  $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} \setminus \{0\}$  and  $\mathbb{V}^* := \mathbb{V} \setminus \{\mathbf{o}\}$ . Let  $\mathbb{K}^{(2)} := \{\lambda^2 \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$  be the set of all squares and let

$$\kappa : \begin{cases} \mathbb{V}^* & \longrightarrow & \mathbb{V}^*/\mathbb{K}^* \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \mathbb{K}^*\mathbf{x} \end{cases}$$

be the canonical map. The incidence between a line  $\mathbb{K}^*\mathbf{a}$  and a point  $\mathbb{K}^*\mathbf{x}$  is given by

$$f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0.$$

Then for any two distinct points  $a := \mathbb{K}^*\mathbf{a}$ ,  $b := \mathbb{K}^*\mathbf{b}$  we have  $\overline{a, b} = (\mathbb{K}^*\mathbf{a} + \mathbb{K}^*\mathbf{b})^*/\mathbb{K}^*$

and by ([6], (4.4), (4.5)) and ([7], sec. 5) the *congruence*  $\equiv$  and the *polarity*  $\pi$  (see Theorem (2.2)) can be described by means of the anisotropic symmetric bilinear form  $f$ .

**Theorem 12.** *Let  $a := \mathbb{K}^*\mathbf{a}$ ,  $b := \mathbb{K}^*\mathbf{b}$ ,  $c := \mathbb{K}^*\mathbf{c}$ ,  $d := \mathbb{K}^*\mathbf{d} \in \mathcal{P}$ ,  $\rho(a, b) := \frac{[f(\mathbf{a}, \mathbf{b})]^2}{q(\mathbf{a})q(\mathbf{b})}$  and  $\delta(a, b) := 1 - \rho(a, b)$ . Then:*

1.  $(a, b) \equiv (k, o) \iff f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ .
2.  $\rho(a, b) = \rho(c, d) \implies (a, b) \equiv (c, d)$ .
3.  $\pi(a) = \{x := \mathbb{K}^*\mathbf{x} \in \mathbb{V}^*/\mathbb{K}^* \mid f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0\}$ .
4. *If  $\varphi \in \mathcal{M}$  is a motion then  $\rho(\varphi(a), \varphi(b)) = \rho(a, b)$ .*

If  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  then also the bilinearform  $\lambda \cdot f$  describes the *incidence*, the *congruence*  $\equiv$  and the *polarity*  $\pi$ . Therefore we can assume that for the distinguished polar triangle  $\{o, k, l\}$  with  $\{l\} := \pi(o) \cap \pi(k)$  there are vectors  $\mathbf{e}_0 \in \kappa^{-1}(o)$ ,  $\mathbf{e}_1 \in \kappa^{-1}(k)$  and  $\mathbf{e}_2 \in \kappa^{-1}(l)$  with  $q(\mathbf{e}_0) = 1$  and  $f(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_2) = f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$ . Hence  $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  is an orthogonal basis of the metric vector space  $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, f)$  and if we set  $\alpha_i := q(\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) then, for any  $x := \mathbb{K}^*\mathbf{x}$ , with  $\mathbf{x} := \sum_i \xi_i \mathbf{e}_i$  and  $y := \mathbb{K}^*\mathbf{y}$  with  $\mathbf{y} := \sum_i \eta_i \mathbf{e}_i$  we have:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_i \alpha_i \xi_i \eta_i \quad \text{and} \quad q(\mathbf{x}) = \xi_o^2 + \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2.$$

**Theorem 13.** *To any elliptic plane  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  there correspond a commutative field  $\mathbb{K}$  (with  $\text{char } \mathbb{K} \neq 2$ ) and elements  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$  such that  $\forall \xi, \eta \in \mathbb{K} : 1 + \alpha_1 \xi^2 + \alpha_2 \eta^2 \neq 0$ .*

**Theorem 14.** *In a 3-dimensional metric vector space  $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, f)$ , for any  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}^*$  let:*

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$$

and

$$\mathbf{a}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{V} \mid f(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 0\}.$$

Then if  $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, f)$  is anisotropic, i.e.  $f$  is an anisotropic form, we have:

1.  $\mathbf{a}^\perp$  is a 2-dimensional vector subspace.
2.  $\mathbb{V} := \mathbb{K} \mathbf{a} \oplus \mathbf{a}^\perp$  is a direct orthogonal sum.
3. If  $q(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = f(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = q(\mathbf{b})$  then  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ .

For the reflection in the point  $a$  or in the line  $\pi(a)$  we have the following representation.

**Theorem 15.** Let  $\mathbf{a} \in \mathbb{V}^*$  and let

$$\tilde{\mathbf{a}} : \begin{cases} \mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{V} \\ \mathbf{x} & \longmapsto & -\mathbf{x} + 2 \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{q(\mathbf{a})} \mathbf{a} \end{cases},$$

then if  $a := \kappa(\mathbf{a})$ ,

$$\tilde{a} : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ x := \kappa(\mathbf{x}) = \mathbb{K}^* \mathbf{x} & \longmapsto & \kappa(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) = \mathbb{K}^* \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \end{cases}$$

is the reflection in the point  $a = \mathbb{K}^* \mathbf{a}$  and in the line  $\pi(a)$  and we have:

1. If  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$  :  $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{y})$  and  $\tilde{\mathbf{a}}$  has the representation

$$\tilde{\mathbf{a}} : \begin{cases} \mathbb{V} = \mathbb{K} \mathbf{a} \oplus \mathbf{a}^\perp & \longrightarrow & \mathbb{K} \mathbf{a} \oplus \mathbf{a}^\perp \\ \xi \mathbf{a} + \mathbf{x} & \longmapsto & \xi \mathbf{a} - \mathbf{x} \end{cases}.$$

2.  $q(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) = q(\mathbf{x})$  and  $a$  is one midpoint of the points  $\kappa(\mathbf{x})$  and  $\kappa(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))$ .
3. Two points  $a := \mathbb{K}^* \mathbf{a}$  and  $b := \mathbb{K}^* \mathbf{b}$  have a midpoint  $\iff q(\mathbf{a}) \cdot q(\mathbf{b}) \in \mathbb{K}^{(2)}$ ;
4. If  $q(\mathbf{a}) = q(\mathbf{b})$  then  $a, b$  have exactly the two midpoints  $m_1 := \mathbb{K}^*(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  and  $m_2 := \mathbb{K}^*(\mathbf{a} - \mathbf{b})$  and we have  $\rho(m_1, m_2) = 0$ .

*Proof.* (1) and (2) follow from the definition of  $\tilde{a}$ .

(3) and (4). If  $m := \mathbb{K}^* \mathbf{m}$  is a midpoint of  $a, b$ , hence  $\tilde{m}(a) = b$ , i.e.  $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^*(\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{a}))$  then there is a  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  with  $\mathbf{b} = \lambda(\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{a}))$  and so by step 2.,  $q(\mathbf{b}) = q(\lambda\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{a})) = \lambda^2 q(\tilde{\mathbf{m}}(\mathbf{a})) = \lambda^2 q(\mathbf{a})$ .

Let  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  such that  $q(\mathbf{a}) = \lambda^2 q(\mathbf{b}) = q(\lambda\mathbf{b})$ . Since  $\kappa(\lambda\mathbf{b}) = \kappa(\mathbf{b})$  we may assume  $q(\mathbf{b}) = q(\mathbf{a})$  and then by Theorem (14.3):  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \perp (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ . Thus, since  $2\mathbf{a} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b})$  and  $2\mathbf{b} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) - (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ , by definition and by Theorem (14) we have  $\widetilde{(\mathbf{a} + \mathbf{b})}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$  and  $\widetilde{(\mathbf{a} - \mathbf{b})}(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$  i.e.  $m_1 := \kappa(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  and  $m_2 := \kappa(\mathbf{a} - \mathbf{b})$  are the midpoints of  $a = \kappa(\mathbf{a})$  and  $b = \kappa(\mathbf{b})$ .

By  $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$  we have  $m_1$  and  $m_2$  are conjugated and  $\rho(m_1, m_2) = 0$ .  $\square$

From now on we shall denote for any  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}$ :  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := f(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  and  $\mathbf{a}^2 := q(\mathbf{a})$ .

**Theorem 16.** *Let  $(a, b, c)$  and  $(a', b', c')$  be rectangular triangles with  $\overline{a, b} \perp \overline{a, c}$  ( $b, c \notin \pi(a)$ ) and  $\overline{a', b'} \perp \overline{a', c'}$  ( $b', c' \notin \pi(a')$ ). Then:*

1.  $\rho(b, c) = \rho(a, b) \cdot \rho(a, c)$  and  $\delta(b, c) = \delta(a, b) + \delta(a, c) - \delta(a, b) \cdot \delta(a, c)$ .
2. If  $(a, b) \equiv (a', b')$  and  $(a, c) \equiv (a', c')$  then  $(b, c) \equiv (b', c')$ .

*Proof.* (1). Let  $b_\pi := \overline{a, b} \cap \pi(a)$ ,  $c_\pi := \overline{a, c} \cap \pi(a)$  and  $\mathbf{a} \in \kappa^{-1}(a)$ . Then since  $b, c \notin \pi(a)$ ,  $a, b_\pi, b$  and  $a, c_\pi, c$  are three distinct collinear points respectively and so there exist  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \kappa^{-1}(\pi(a))$  with  $\kappa(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = b$  and  $\kappa(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = c$ . We have  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$  and by  $\overline{a, b} \perp \overline{a, c}$ ,  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 0$ . This implies:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2$ ,  $(\mathbf{a} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2$ ,  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \mathbf{a}^2$  and therefore  $\rho(a, b) = \frac{(\mathbf{a}^2)^2}{\mathbf{a}^2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)} = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2}$ ,  $\rho(a, c) = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2}$  and  $\rho(b, c) = \frac{(\mathbf{a}^2)^2}{(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2)(\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2)} = \rho(a, b) \cdot \rho(a, c)$ .

(2). Since  $(a, b) \equiv (a', b') \iff \rho(a, b) = \rho(a', b')$ , (2) is a consequence of (1).  $\square$

A pair  $(p, G) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{G})$  where the point  $p$  is incident with the line  $G$  is called *flag*.

**Theorem 17.** *Let  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  be an elliptic plane and let  $\mathbb{K}$  be the corresponding commutative field.*

*Then the following statements are equivalent.*

1. *Any two points have a midpoint.*
2. *Any two lines  $A, B \in \mathcal{G}$  have a midline, i.e. there is a line  $M \in \mathcal{G}$  with  $\widetilde{M}(A) = B$ .*
3.  *$\mathbb{K}$  is a Pythagorean field, i.e.  $\forall \lambda \in \mathbb{K} : 1 + \lambda^2 \in \mathbb{K}^{(2)}$ .*
4.  *$(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  satisfies the following “free mobility” axiom:*  
**(F)** *Let be  $a, b, c \in \mathcal{P}$  with  $a \neq b$ ,  $(a, b) \neq (k, o)$  and let be  $G \in \mathcal{G}$  with  $c \in G$ , then there are exactly two distinct points  $x', x'' \in G$  such that  $(a, b) \equiv (c, x') \equiv (c, x'')$ .*
5. *The motion group  $\mathcal{M}$  is flag-transitive, more precisely, if  $(a, A)$  and  $(b, B)$  are flags then there are exactly two motions  $\varphi_i \in \mathcal{M}$  ( $i = 1, 2$ ) with  $\varphi_i(A) = B$  and  $\varphi_i(a) = b$ .*
6. *For  $a, b, c, d \in \mathcal{P}$  with  $(a, b) \equiv (c, d)$ ,  $\exists \varphi \in \mathcal{M}$  with  $\varphi(a) = c$  and  $\varphi(b) = d$ .*

*Proof.* If  $m$  is a midpoint of two points  $a, b \in \mathcal{P}$  then  $A := \pi(a), B := \pi(b)$  and  $M := \pi(m)$  are lines with  $\widetilde{m} = \widetilde{M}$  and  $\widetilde{M}(A) = \widetilde{m}(\pi(a)) = \pi(\widetilde{M}(a)) = \pi(b) = B$ . Hence (1) and (2) are equivalent.

“(1)  $\implies$  (3)”. Let  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  and  $b := \kappa(\mathbf{e}_0 + \lambda \mathbf{e}_1)$ . By Theorem (15.3),  $o$  and  $b$  have a midpoint if  $q(\mathbf{e}_0) \cdot q(\mathbf{e}_0 + \lambda \mathbf{e}_1) = 1 \cdot (1 + \lambda^2) = (1 + \lambda^2) \in \mathbb{K}^{(2)}$ .

“(3)  $\implies$  (1)”. It is enough to show that for all  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $1 + \lambda^2 + \mu^2 \in \mathbb{K}^{(2)}$ . Since  $\mathbb{K}$  is a Pythagorean field there is a  $\nu \in \mathbb{K}^*$  such that  $\nu^2 = 1 + \lambda^2$  hence  $1 + \lambda^2 + \mu^2 = \nu^2 \left(1 + \left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2\right) \in \mathbb{K}^{(2)} \cdot \mathbb{K}^{(2)} = \mathbb{K}^{(2)}$ .

“(1)  $\implies$  (4)”. By (1) we may assume  $c = a$  and by (2) that the lines  $G$

and  $A := \overline{a, b}$  have a midline  $M$ . Then  $\widetilde{M}(c) = c$  and for  $x' := \widetilde{M}(b)$  and  $x'' := \widetilde{c}(x')$  we have  $(a, b) \equiv (c, x') \equiv (c, x'')$ .

“(4)  $\implies$  (1)”. Follows from ([6], (4.6)). □

**Theorem 18.** *Let  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  be an elliptic plane such that the corresponding field  $\mathbb{K}$  is Pythagorean and let  $(b, u, v)$  be a polar triangle,  $a \in \overline{b, u} \setminus \{b, u\}$ ,  $c \in \overline{b, v} \setminus \{b, v\}$ ,  $\{d\} := \overline{a, v} \cap \overline{u, c}$ ,  $\{w\} := \overline{b, v} \cap \pi(c)$  and  $\{a'\} := \overline{a, w} \cap \overline{c, u}$  then for  $\delta(a, b) := 1 - \rho(a, b)$  we have:*

$$\delta(c, a') - \delta(c, d) \in \mathbb{K}^{(2)}.$$

*Proof.* Let  $\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{V}$  such that  $\kappa(\mathbf{b}) = b$ ,  $\kappa(\mathbf{u}) = u$ ,  $\kappa(\mathbf{v}) = v$ ,  $\kappa(\mathbf{b} + \mathbf{u}) = a$  and  $\kappa(\mathbf{b} + \mathbf{v}) = c$ . We set:  $\mathbf{a} := \mathbf{b} + \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{c} := \mathbf{b} + \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{d} := \mathbf{b} + \mathbf{u} + \mathbf{v}$  ( $= \mathbf{a} + \mathbf{v} = \mathbf{c} + \mathbf{u}$ ) and so  $\mathbf{w} := \mathbf{v}^2 \mathbf{b} - \mathbf{b}^2 \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{a}' := \mathbf{b}^2 \mathbf{c} + \mathbf{c}^2 \mathbf{u}$ . Then  $\kappa(\mathbf{d}) = d$ ,  $\kappa(\mathbf{w}) = w$ ,  $\kappa(\mathbf{a}') = a'$  and we obtain:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} \cdot \mathbf{d} &= \mathbf{c}^2, \quad \mathbf{d}^2 = \mathbf{c}^2 + \mathbf{u}^2. \quad \text{Hence } \rho(c, d) = \frac{\mathbf{c}^2}{\mathbf{c}^2 + \mathbf{u}^2} = \frac{\mathbf{c}^2}{\mathbf{d}^2} \text{ and } \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}' = \mathbf{b}^2 \mathbf{c}^2, \\ \mathbf{a}'^2 &= (\mathbf{b}^2)^2 \mathbf{c}^2 + (\mathbf{c}^2)^2 \mathbf{u}^2. \quad \text{Thus } \rho(c, a') = \frac{(\mathbf{b}^2 \mathbf{c}^2)^2}{\mathbf{c}^2 \mathbf{a}'^2} = \frac{(\mathbf{b}^2)^2 \mathbf{c}^2}{\mathbf{a}'^2}. \\ \text{Since } \mathbf{c}^2 \mathbf{a}'^2 - \mathbf{d}^2 (\mathbf{b}^2)^2 \mathbf{c}^2 &= \mathbf{c}^2 \mathbf{u}^2 \mathbf{v}^2 (\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2) \text{ this gives us:} \\ \delta(c, a') - \delta(c, d) &= \rho(c, d) - \rho(c, a') = \frac{\mathbf{c}^2}{\mathbf{d}^2} - \frac{(\mathbf{b}^2)^2 \mathbf{c}^2}{\mathbf{a}'^2} = \frac{\mathbf{c}^2 \mathbf{u}^2 \mathbf{v}^2 (\mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2)}{\mathbf{d}^2 \mathbf{a}'^2} \in \mathbb{K}^{(2)}. \quad \square \end{aligned}$$

**Remark 1.** *Let  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  be a commutative Pythagorean field,  $\mathbb{V} := \mathbb{K}^3$ , then:*

1. *By (15.4) and (17.1) for any  $a, b \in \mathcal{P}$ ,  $a \neq b$  there exist exactly two midpoints.*
2. *If  $\{o, k, l\}$  is a polar triangle then there are vectors  $\mathbf{e}_0 \in \kappa^{-1}(o)$ ,  $\mathbf{e}_1 \in \kappa^{-1}(k)$ ,  $\mathbf{e}_2 \in \kappa^{-1}(l)$  such that  $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$  (where  $\delta_{i,j} = 1$  if  $i = j$  and  $\delta_{i,j} = 0$  if  $i \neq j$ ;  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ ) and  $\forall (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{K}^3$  :  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 0 \iff (\xi, \eta, \zeta) = (0, 0, 0)$ . Thus the scalar product*

$$f : \begin{cases} \mathbb{V} \times \mathbb{V} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \longmapsto & \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \end{cases}$$

*is a positive definite symmetric bilinear form.*

An elliptic plane with midpoints  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  may be obtained in the following way.

**Theorem 19.** *Let  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  be a commutative Pythagorean field,  $\mathbb{V} := \mathbb{K}^3$ ,*

$$\kappa : \begin{cases} \mathbb{V}^* & \longrightarrow & \mathbb{V}^*/\mathbb{K}^* \\ \mathbf{x} & \longmapsto & \mathbb{K}^*\mathbf{x} \end{cases}$$

and let  $f$  be the scalar product defined as in Remark (1.2).

Then  $(\mathbb{V}, \mathbb{K}, f)$  is a 3-dimensional anisotropic metric vector space and, if we set

$$\mathbb{S} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{V} \mid \mathbf{x}^2 = 1\}$$

and for  $\mathbf{a} \in \mathbb{S}$ ,  $\mathbf{a}^\perp := \{\mathbf{x} \in \mathbb{S} \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = 0\}$ , we have:

1. If  $\mathfrak{S} := \{\mathbf{a}^\perp \mid \mathbf{a} \in \mathbb{S}\}$  then the pair  $(\mathbb{S}, \mathfrak{S})$  is a plane spherical geometry called the spherical plane of the Pythagorean field  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ .
2. If  $\mathcal{P} = \kappa(\mathbb{S}) = \mathbb{S}/\{1, -1\}$ , if  $\mathcal{G} := \{\kappa(\mathbf{a}^\perp) \mid \mathbf{a} \in \mathbb{S}\}$  and if, for  $a := (\mathbf{a}, -\mathbf{a})$ ,  $b := (\mathbf{b}, -\mathbf{b})$ ,  $c := (\mathbf{c}, -\mathbf{c})$ ,  $d := (\mathbf{d}, -\mathbf{d}) \in \kappa(\mathbb{S})$ , it holds  $(a, b) \equiv (c, d) \iff (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})^2$ , then  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  is an elliptic plane with midpoints.

## 2.4 Affine Representation

Here we assume that the field of the elliptic plane  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  is a *commutative Pythagorean field* and then there are order relations  $<$  on  $\mathbb{K}$  such that  $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$  is an *ordered field*.

For  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  with  $\alpha < \beta$  let  $] \alpha, \beta [ := \{\xi \in \mathbb{K} \mid \alpha < \xi < \beta\}$  and let  $[ \alpha, \beta ] := ] \alpha, \beta [ \cup \{\alpha, \beta\}$ .

Let  $o \in \mathcal{P}$  be fixed,  $\mathbf{e} \in \kappa^{-1}(o)$  with  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$  and let  $\mathbb{W} := \mathbf{e}^\perp$ . Then  $\mathbb{V} := \mathbb{K}\mathbf{e} \oplus \mathbb{W}$  is a direct orthogonal sum.

Let  $\mathbb{W}^* := \mathbb{W} \setminus \{\mathbf{o}\}$ ,  $\mathcal{L} := \{\mathbf{a} + \mathbb{K}\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{W}, \mathbf{b} \in \mathbb{W}^*\}$ , if  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{W}$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ , let

$$\overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^a := \{\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}, \ ] \mathbf{a}, \mathbf{b} [ := \{\lambda \mathbf{a} + (1 - \lambda)\mathbf{b} \mid \lambda \in ] 0, 1 [ \}$$

then  $(\mathbb{W}, \mathcal{L})$  is an *affine plane* and for  $\Sigma := \{] \mathbf{a}, \mathbf{b}[ \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{W}, \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \}$ ,  $(\mathbb{W}, \Sigma)$  is a segment structure.

Let  $\mathbb{W}^{3'} := \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbb{W}^3 \mid \mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \mathbf{c} \wedge \mathbf{c} \in \overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}}^a\}$  and

$$\mathfrak{b} : \begin{cases} \mathbb{W}^{3'} & \longrightarrow \{1, -1\} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) & \longmapsto (\mathbf{a} \mid \mathbf{b}, \mathbf{c}) \end{cases}$$

with

$$(\mathbf{a} \mid \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1 \iff \mathbf{a} \in ] \mathbf{b}, \mathbf{c}[,$$

$$(\mathbf{a} \mid \mathbf{b}, \mathbf{c}) = +1 \iff \mathbf{a} \notin ] \mathbf{b}, \mathbf{c}[.$$

Then  $\mathfrak{b}$  is a *betweenness*, i.e.

(B1)  $\forall (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{W}^{3'} : (\mathbf{a} \mid \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{a} \mid \mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \mid \mathbf{b}, \mathbf{d})$ ;

(B2) If  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \binom{\mathbb{W}}{3}$  and if  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  are collinear then exactly one of the values  $(\mathbf{a} \mid \mathbf{b}, \mathbf{c}), (\mathbf{b} \mid \mathbf{c}, \mathbf{a}), (\mathbf{c} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b})$  equals  $-1$ ;

and  $(\mathbb{W}, \mathcal{L}, \mathfrak{b})$  is an ordered affine plane, i.e. also the *Pasch axiom*:

(BP) If  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{W}$  are not collinear, if  $\mathbf{x} \in ] \mathbf{b}, \mathbf{c}[$  and  $\mathbf{y} \in ] \mathbf{a}, \mathbf{x}[$  then  $\overline{\mathbf{c}, \mathbf{y}}^a \cap ] \mathbf{a}, \mathbf{b}[ \neq \emptyset$

is satisfied.

**Remark 2.** In any commutative field we have for  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{K}$  the relation:

$$\begin{aligned} & (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 = \\ & = (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2. \end{aligned}$$

We have the embedding theorem:

**Theorem 20.** The map

$$\kappa' : \begin{cases} \mathbb{W} & \longrightarrow \mathcal{P} \\ \mathbf{x} & \longmapsto \kappa(\mathbf{e} + \mathbf{x}) = \mathbb{K}^*(\mathbf{e} + \mathbf{x}) \end{cases}$$

is a bijection from the 2-dimensional vector space  $(\mathbb{W}, \mathbb{K})$  into the set of points  $\mathcal{P} \setminus \pi(o)$  of the affine plane which is obtained from the projective plane  $(\mathcal{P}, \mathcal{G})$  by deleting the points of the polar line  $\pi(o)$ . Let  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{W}$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$  and  $a := \kappa'(\mathbf{a})$ ,  $b := \kappa'(\mathbf{b})$ ,  $c := \kappa'(\mathbf{c})$ . Then:

1.  $\kappa'(\overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}^a}) = \overline{\kappa'(\mathbf{a}), \kappa'(\mathbf{b})} \setminus \pi(o) = \overline{a, b} \setminus \pi(o)$ .
2.  $a$  and  $b$  are conjugated  $\iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -1$ .
3. If  $\mathbf{a} * \mathbf{b} := \frac{1}{\sqrt{1 + \mathbf{a}^2} + \sqrt{1 + \mathbf{b}^2}} (\sqrt{1 + \mathbf{b}^2} \mathbf{a} + \sqrt{1 + \mathbf{a}^2} \mathbf{b})$  then  $\kappa'(\mathbf{a} * \mathbf{b})$  is a midpoint of  $\kappa'(\mathbf{a})$  and  $\kappa'(\mathbf{b})$ .
4. If  $2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} \neq \mathbf{a}^2 - 1$ , let  $\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) := \frac{1}{1 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{a}^2} (-(1 + \mathbf{a}^2)\mathbf{x} + 2(1 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{a})\mathbf{a})$  then  $\widetilde{\kappa'(\mathbf{a})}(\kappa'(\mathbf{x})) = \kappa'(\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{x}))$ .
5.  $\delta(a, b) = \frac{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2)}{1 + \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2} \geq 0$  and " $\delta(a, b) = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{b}$ ".
6. If  $a, b, c$  are distinct, collinear and pairwise non conjugated then

$$\delta(a, b), \delta(a, c) < \delta(b, c) \implies (\mathbf{a} | \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1;$$

if  $\delta(a, b), \delta(a, c) \leq \frac{1}{2}$  then

$$\delta(a, b), \delta(a, c) < \delta(b, c) \iff (\mathbf{a} | \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1.$$

*Proof.* (5). Is a consequence of Remark 2.

(6). We may assume  $a = o$  and we set  $\beta := \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ . Since  $a, b, c$  are distinct, collinear, non conjugated,  $\beta > 0$  and there is a  $\lambda \in \mathbb{K}$  such that  $\lambda \neq 0, 1$ ,  $\kappa(\mathbf{e} + \lambda \mathbf{b}) = c$  and  $\lambda \beta \neq -1$ . Then,

$$\delta(b, c) = \frac{\beta(\lambda - 1)^2}{(1 + \beta)(1 + \lambda^2 \beta)}, \quad \delta(b, a) = \frac{\beta}{1 + \beta}, \quad \delta(a, c) = \frac{\lambda^2 \beta}{1 + \lambda^2 \beta}$$

and so

$$\delta(b, c) = \frac{\beta}{1 + \beta} \cdot \frac{\lambda^2 \beta}{1 + \lambda^2 \beta} \cdot \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2 \beta} = \delta(a, b) \cdot \delta(a, c) \cdot (1 - \lambda^{-1})^2 \beta^{-1}.$$

We have:

$$(\mathbf{a} | \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1 \iff 0 < \frac{1}{1 - \lambda} < 1 \iff \lambda < 0$$

and

$$\delta(b, a), \delta(c, a) < \delta(b, c) \iff \frac{(\lambda - 1)^2}{1 + \lambda^2 \beta}, \frac{(\lambda - 1)^2}{\lambda^2(1 + \beta)} > 1 \iff$$

$$\begin{cases} (\lambda - 1)^2 > 1 + \lambda^2\beta \\ (\lambda - 1)^2 > \lambda^2 + \lambda^2\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda(\lambda - 2) > \lambda^2\beta > 0 \\ -2\lambda + 1 > \lambda^2\beta > 0 \end{cases}.$$

This implies  $\lambda < 0$  hence: “ $\delta(a, b), \delta(a, c) < \delta(b, c) \implies (\mathbf{a}|\mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1$ ”.

Under the assumption  $\lambda < 0$  we have:  $\lambda(\lambda - 2) > \lambda^2\beta \iff \lambda(1 - \beta) < 2$ . For  $\beta \leq 1$  we obtain no further restrictions, for  $\beta > 1$ ,  $|\lambda| < \frac{2}{\beta - 1}$ . Moreover:  $-2\lambda + 1 > \lambda^2\beta \iff (\lambda - 1)^2 > \lambda^2(\beta + 1) \iff |\lambda| + 1 > |\lambda|\sqrt{\beta + 1} \iff |\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\beta + 1} - 1}$ , which is fulfilled by the restriction  $\delta(a, c) \leq \frac{1}{2}$ .  $\square$

### 3. Non Archimedean elliptic planes

#### 3.1 Ordered fields and their valuation rings

In this section let  $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$  be a commutative ordered field, let  $\mathbb{A} := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists n \in \mathbb{N} : |\lambda| < n\}$  be the corresponding valuation ring,  $\mathbb{M}$  the maximal ideal of the valuation ring  $\mathbb{A}$  (hence  $\mathbb{M} = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \forall n \in \mathbb{N} : n \cdot |\lambda| < 1\}$ ) and  $\mathbb{U} := 1 + \mathbb{M}$  be the group of all units of the ring  $\mathbb{A}$ . We recall that an ordered field  $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$  is called *Archimedean* if  $\mathbb{A} = \mathbb{K}$  and *non Archimedean* if  $\mathbb{A} \neq \mathbb{K}$ .

By Remark 2 it follows:

**Theorem 21.** *If  $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$  is an ordered commutative Pythagorean field,  $\mathbb{V} := \mathbb{K}^3$  the 3-dimensional vector space over  $\mathbb{K}$  and  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$  the scalar product. Then:*

1. *The scalar product satisfies the Schwarz inequality  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$ .*
2.  *$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}^*$  let be  $a := \kappa(\mathbf{a})$  and  $b := \kappa(\mathbf{b})$ . Then:  $\rho(a, b) \in [0, 1] \cap \mathbb{K}^{(2)}$  and for  $\delta := 1 - \rho$ ,  $\delta(a, b) \in [0, 1]$ . Moreover: “ $\delta(a, b) = 0 \iff a = b$ ” and “ $\delta(a, b) = 1 \iff a$  and  $b$  are conjugate”.*
3. *If  $(a, b, c)$  is a rectangular triangle with  $\overline{a, b} \perp \overline{a, c}$ ,  $b, c \notin \pi(a)$  then  $\delta(a, b), \delta(a, c) \leq \delta(b, c)$  and “ $\delta(a, b) = \delta(b, c) \iff \delta(a, b) = 1$ ”.*

*Proof.* (2). By definition of  $\rho$ ,  $\rho(a, b) \in \mathbb{K}^{(2)} \cup \{0\}$  and by the Schwarz inequality,  $\rho(a, b) \in [0, 1]$ .

(3). Theorem (16.1) implies  $\delta(b, c) = \delta(a, b) \cdot (1 - \delta(a, c)) + \delta(a, c)$ ; if  $b \neq c$  and  $b, c \notin \pi(a)$  then by (2),  $\delta(a, c), \delta(b, c) \in ]0, 1[$  hence  $\delta(b, c) = \delta(a, b) \cdot (1 - \delta(a, c)) + \delta(a, c) > \delta(a, c)$  and in the same way,  $\delta(b, c) > \delta(a, b)$ .  $\square$

### 3.2 Nano substructures in an ordered affine plane

This section is a continuation of section 2.4 by making the additional assumption that the ordered Pythagorean field  $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$  is not Archimedean ordered; hence the valuation ring  $\mathbb{A}$  is a proper subset of  $\mathbb{K}$  and the maximal ideal  $\mathbb{M}$  of  $\mathbb{A}$  contains more elements than just 0. We supplement the vector  $\mathbf{e}$  to an orthonormal basis  $(\mathbf{e}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  of  $\mathbb{V}$ , hence  $\mathbb{W} = \mathbb{K}\mathbf{e}_1 + \mathbb{K}\mathbf{e}_2$  and set  $\mathbf{M} := \mathbb{M}\mathbf{e}_1 + \mathbb{M}\mathbf{e}_2$ . Moreover in the affine plane  $(\mathbb{W}, \mathcal{L})$  we consider the metric function

$$d : \begin{cases} \mathbb{W} \times \mathbb{W} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \longmapsto & (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 \end{cases}$$

and call a subset  $\mathbf{D} \subseteq \mathbb{W}$  a *nano domain* if  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{D}, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{M}$ . Then  $\mathbf{M}$  is a nano domain and we have:

**Theorem 22.**  $\mathbf{M}$  is a subgroup of  $(\mathbb{W}, +)$  even an  $\mathbb{A}$ -modul (i.e.  $\forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}, \forall \alpha \in \mathbb{A} : \alpha \cdot \mathbf{m} \in \mathbf{M}$ ). If  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{M}, \mathbf{a} \neq \mathbf{b}$  and  $a := \kappa'(\mathbf{a}), b := \kappa'(\mathbf{b})$  then:

1.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{M}, \delta(a, b) \in \mathbb{M}, \mathbf{a} * \mathbf{b} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subseteq \mathbf{M}$ .
2.  $\overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}} := \mathbf{a} + \mathbb{A}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \subseteq \mathbf{M}$  and  $\overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}} = \overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}^a} \cap \mathbf{M}$ .
3. If  $\mathbf{L}_{\mathbf{M}} := \{\mathbf{a} + \mathbb{A}\mathbf{b} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{M}, \mathbf{b} \neq \mathbf{o}\}$  then  $(\mathbf{M}, \mathbf{L}_{\mathbf{M}})$  is an incidence space.
4. If  $\mathbf{b}_{\mathbf{M}} := \mathbf{b}_{|\mathbf{M}^3 \cap \mathbb{W}^3}$  then  $(\mathbf{M}, \mathbf{L}_{\mathbf{M}}, \mathbf{b}_{\mathbf{M}})$  is an ordered space with the property:

$$(\mathbf{Z}) \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{M}, \exists \mathbf{c} \in \mathbf{M} : \mathbf{b} \in ]\mathbf{a}, \mathbf{c}[.$$

*Proof.* “(4)” We have just to prove the Pasch axiom and the property **(Z)**. Let  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{M}$  be not collinear, let  $\mathbf{x} \in ]\mathbf{b}, \mathbf{c}[$  and  $\mathbf{y} \in ]\mathbf{a}, \mathbf{x}[$ , then in the affine plane  $(\mathbb{W}, \mathcal{L})$  the point  $\mathbf{u} := \overline{\mathbf{c}, \mathbf{y}^a} \cap ]\mathbf{a}, \mathbf{b}[$  exists and by (1),  $\mathbf{u} \in \mathbf{M}$  hence  $\mathbf{u} \in \overline{\mathbf{d}, \mathbf{a}' \cap ]\mathbf{a}, \mathbf{b}[}$ .

Clearly  $\mathbf{c} := 2\mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathbf{M}$  and  $\mathbf{b} = \frac{1}{2}(2\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} \in ]\mathbf{a}, \mathbf{c}[$ .  $\square$

### 3.3 Ordered elliptic planes

A quadruple  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \tau)$  is called an *ordered elliptic plane* if  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  is an elliptic plane and if

$$\tau : \begin{cases} \mathcal{P}^4 & \longrightarrow \{+1, -1\} \\ (a, b, c, d) & \longmapsto [a, b|c, d] \end{cases}$$

is a function defined on the set  $\mathcal{P}^4 := \{(a, b, c, d) \in \mathcal{P}^4 \mid a, b \neq c, d \wedge b, d \in \overline{a, c}\}$  such that  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \tau)$  is an *ordered projective plane*, i.e. the following conditions are fulfilled:

**T1**  $\forall (a, b, c, d), (a, b, d, e) \in \mathcal{P}^4 : [a, b|c, d] \cdot [a, b|d, e] = [a, b|c, e]$ ;

**T2**  $\forall (a, b, c, d) \in \binom{\mathcal{P}}{4}$  with  $a, b, c, d$  collinear, exactly one of the values  $[a, b|c, d]$ ,  $[a, c|b, d]$ ,  $[a, d|b, c]$  is equal -1;

**T3** if  $(a, b, c, d) \in \mathcal{P}^4$  and if  $\psi$  is a perspectivity, then  $[a, b|c, d] = [\psi(a), \psi(b)|\psi(c), \psi(d)]$ .

If  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \tau)$  is an ordered elliptic plane and  $U \in \mathcal{G}$  a fixed line, then the separation  $\tau$  induces a betweenness  $\mathbf{b}_\tau$  in the affine plane  $\Lambda$  obtained by deleting the points of the line  $U$  in the following way:

if  $a, b, c \in \mathcal{P} \setminus U$  are collinear with  $a \neq b, c$  and if  $u := \overline{a, b} \cap U$  then  $\mathbf{b}_\tau(a, b, c) = (a|b, c) := [a, u|b, c]$ .

The affine plane  $\Lambda$  is then, together with the betweenness  $\mathbf{b}_\tau$ , an ordered affine plane. The embedding map  $\kappa'$  defined in Theorem 20 is an isomorphism from the ordered affine plane  $(\mathbb{W}, \mathcal{L}, \mathbf{b})$ , defined in section 2.4, onto this ordered affine plane  $\Lambda$ .

**Remark 3.** *If the commutative field  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  corresponding to the elliptic plane  $(\mathcal{P}, \mathcal{G} \equiv)$  (cf. section 2.3 has an order structure  $<$  such that  $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$  is an ordered field, then we can define a separation function  $\tau_{<}$  so that  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \tau_{<})$  becomes an ordered projective plane in the following way.*

*Let  $(a, b, c, d) \in \mathcal{P}^4$ . If  $a = b$  we set  $[a, b|c, d] := 1$ . If  $a \neq b$  let  $\mathbf{a} \in \kappa^{-1}(a), \mathbf{b} \in \kappa^{-1}(b)$  and, since  $c, d \in \overline{a, b}$ , there are  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^*$  such that  $c := \kappa(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})$  and  $d := \kappa(\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})$ . Then (by denoting, for  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ ,  $\text{sgn}(\lambda) := 1$  if  $\lambda > 0$  and  $\text{sgn}(\lambda) := -1$  if  $\lambda < 0$ ) we set:  $[a, b|c, d] := \text{sgn}(\lambda \cdot \mu)$ .*

*Thus  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \tau_{<})$  is an ordered projective plane and  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv, \tau_{<})$  an ordered elliptic plane.*

Now let  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  be an elliptic plane with midpoints. Then by (17.1) and (17.3) the corresponding field  $(\mathbb{K}, +, \cdot)$  is Pythagorean which can be turned in an ordered field  $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$  and the metric function  $\rho$  of the elliptic plane  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  assumes values in the interval  $[0, 1] := \{\lambda \in \mathbb{K} \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ . For  $a, b \in \mathcal{P}$  we have “ $\rho(a, b) = 1 \iff a = b$ ” and “ $\rho(a, b) = 0 \iff a \in \pi(b)$ ”. Besides  $\rho$  we consider the function  $\delta(a, x) := 1 - \rho(a, x)$ . Then to each point  $p \in \mathcal{P}$  and each  $\lambda \in [0, 1]$  we associate the *disc*  $\mathbb{D}(p; \lambda) := \{x \in \mathcal{P} \mid \delta(p, x) < \lambda\}$  and the *nano disc* (also called *nano neighbourhood*)  $[p] := \mathbb{D}(p; \mathbb{M}) := \{x \in \mathcal{P} \mid \delta(p, x) \in \mathbb{M}\}$ .

The elliptic plane  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  is called *non Archimedean* if the corresponding field has a non Archimedean order.

### 3.4 Non Archimedean elliptic planes

In this part let  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  be a non Archimedean elliptic plane and let  $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$  be the corresponding Pythagorean field with a non Archimedean order. Again let  $\mathbb{V} := \mathbb{K}^3$ ,  $\mathbf{e}_0 := (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_1 := (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{e}_2 := (0, 0, 1)$  and let  $\mathcal{P}$  be identified with  $\mathbb{V}^*/\mathbb{K}^*$ . Then, by (2.2) and (12.3), we can state:

1. If  $o := \mathbb{K}^*\mathbf{e}_0$  then  $\pi(o) = \{\mathbb{K}^*(0, x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{K}^{2*}\}$ .
2.  $\mathbb{D}(o; 1) = \{\mathbb{K}^*(1, x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{K}^2\} = \mathcal{P} \setminus \pi(o)$ .

$$3. \mathbb{D}(o; \mathbb{M}) = \{\mathbb{K}^*(1, x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{M}^2\}.$$

$$4. \text{ If } a := \mathbb{K}^*\mathbf{a} \text{ and } b := \mathbb{K}^*\mathbf{b} \text{ then } \delta(a, b) = \frac{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2}.$$

**Theorem 23.** *Let  $a, b, c \in \mathcal{P}$  with  $\delta(a, b), \delta(a, c) \in \mathbb{M}$  then  $\delta(b, c) \in \mathbb{M}$ .*

*Proof.* By Theorem 12.4, we may assume  $a = o = \mathbb{K}^*\mathbf{e}_0$  and since  $\delta(a, b), \delta(a, c) \in \mathbb{M}$ ,  $b = \mathbb{K}^*(1, b_1, 0)$  and  $c = \mathbb{K}^*(1, c_1, c_2)$  with (cf. (3))  $b_1, c_1, c_2 \in \mathbb{M}$ . Then:

$$\mathbf{b}^2\mathbf{c}^2 = 1 + b_1^2 + c_1^2 + c_2^2 + b_1^2c_1^2 + b_1^2c_2^2 \in 1 + \mathbb{M} = \mathbb{U},$$

$$\mathbf{b}^2\mathbf{c}^2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 = b_1^2 + c_1^2 + c_2^2 + b_1^2c_1^2 - 2b_1^2c_1^2 \in \mathbb{M}$$

$$\text{and } \delta(b, c) \in \mathbb{M} \cdot \frac{1}{\mathbb{U}} = \mathbb{M} \cdot \mathbb{U} = \mathbb{M}. \quad \square$$

A subset  $D \subseteq \mathcal{P}$  is called a *nano domain* if  $\forall x, y \in D : \delta(x, y) \in \mathbb{M}$ .

**Theorem 24.** *Let  $a, b, c \in \mathcal{P}$ ; then:*

1.  $[a]$  is a nano domain containing the point  $a$ .
2. If  $D \subseteq \mathcal{P}$  is a nano domain and  $b \in D$  then  $D \subseteq [b]$ ; in particular, if  $b \in [a]$  then  $[b] = [a]$ .
3.  $\mathcal{P} = \dot{\bigcup} \{[a] \mid a \in \mathcal{P}\}$  is a disjoint union.
4.  $b \in [a] \implies \pi(b) \cap [a] = \emptyset$ .
5. Let  $a, b \in \mathcal{P}$ ,  $a \neq b$  and let  $m_1, m_2$  be the midpoints of  $a, b$ . If  $\delta(a, b) \in \mathbb{M}$  then exactly one of the statements  $\delta(a, m_1) \in \mathbb{M}$  or  $\delta(a, m_2) \in \mathbb{M}$  is true.
6.  $\tilde{a}([b]) = [\tilde{a}(b)]$ ; if  $b \in [a]$  then  $\tilde{b}([a]) = [a]$ .
7. If  $b \in \pi(a)$  and  $a := \mathbb{K}^*\mathbf{a}$ ,  $b := \mathbb{K}^*\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{b}^2 = 1^{11}$  then  $[a] = \bigcup \{\mathbb{K}^*(\mathbf{a} + \mathbb{M}\mathbf{b}) \mid \mathbf{b} \in \mathbb{V}\}$ . Thus if  $\mathbf{a}^2 = 1$  and  $x := \mathbb{K}^*\mathbf{x} := \mathbb{K}^*(\mathbf{a} + \mathbb{m}\mathbf{b})$  with  $\mathbb{m} \in \mathbb{M}$ , it follows  $\delta(a, x) = \frac{\mathbb{m}^2}{1 + \mathbb{m}^2}$ .

<sup>11</sup>The assumptions  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$  are always allowed by (17.1) and (17.3).

*Proof.* (1) and (2) are consequences of Theorem 23.

(3) follows from (1) and (2).

(4). If  $x \in \pi(b)$  then  $\delta(x, b) = 1$  hence  $x \notin [b] = [a]$ .

(5). By Theorems 15.4 and 17.3 if  $\mathbf{a} \in \kappa^{-1}(a)$ ,  $\mathbf{b} \in \kappa^{-1}(b)$  with  $\mathbf{a}^2 = \mathbf{b}^2 = 1$ , then  $m_1 := \kappa(\mathbf{a} + \mathbf{b})$  and  $m_2 := \kappa(\mathbf{a} - \mathbf{b})$  are the two midpoints and

$$\text{we have: } \delta(a, b) = 1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2, \delta(a, m_1) = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}))^2}{(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2} =$$

$$\frac{2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - (1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{2(1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} = \frac{1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2}{2(1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})} = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

$$\delta(a, m_2) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Since  $\delta(a, b) = 1 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \in \mathbb{M}$  and  $\mathbb{M}$  is a prime ideal then at least one of the factors is contained in  $\mathbb{M}$ . If  $(1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \in \mathbb{M}$  hence  $(-1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \in \mathbb{M}$  and so  $2 + (-1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \in 1 + \mathbb{M} = \mathbb{U}$ . Then  $\delta(a, m_1) = \frac{1}{2}(1 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \in \frac{1}{2}\mathbb{M} = \mathbb{M}$  and  $\delta(a, m_2) = \frac{1}{2}(1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \in \frac{1}{2}(1 + \mathbb{M}) = \frac{1}{2}\mathbb{U} = \mathbb{U}$ .

(6). Since  $\tilde{a}$  is a motion and  $\delta(a, x) = 1 - \rho(a, x)$  by (12.4)  $\delta(\tilde{a}(b), \tilde{a}(x)) = \delta(b, x)$  and so  $\tilde{a}([b]) = [\tilde{a}(b)]$ . If  $b \in [a]$  then by (2),  $[a] = [b]$  hence  $\tilde{b}([a]) = \tilde{b}([b]) = [\tilde{b}(b)] = [b] = [a]$ .  $\square$

**Theorem 25.** Let  $[o]$  be the nano disc of a point  $o \in \mathcal{P}$  and let  $\widetilde{[o]} := \{\tilde{x} \mid x \in [o]\}$  be the set of all point reflections in points of the nano disc  $[o]$ . Then:

1. For any  $x \in [o]$ :  $\tilde{x}([o]) = [o]$ .
2. For any  $x \in [o]$  there exists exactly one  $x' \in [o]$  such that  $\tilde{x}'(o) = x$ .
3. The set  $\widetilde{[o]}$  is acting regularly on the nano disc  $[o]$ .

$$4. \text{ If } + : \begin{cases} [o] \times [o] \rightarrow [o] \\ (x, y) \mapsto x + y := \tilde{x}' \circ \tilde{o}(y) \end{cases} \quad \text{then } ([o], +) \text{ is a K-loop.}$$

*Proof.* (1). Cf. Theorem 24.6.

(2), (3). Let  $x, y \in [o]$ ,  $x \neq y$ , then by Theorem 24.5 exactly one of the midpoints of  $x, y$  is contained in  $[o]$ .

(4). For  $a, b \in [o]$  we have by Theorem 8,  $\tilde{a} \circ \tilde{b} \circ \tilde{a} = \widetilde{\tilde{a}(b)}$  and by (1),  $\tilde{a}(b) \in [o]$ .

Therefore together with (3) the pair  $([o], \widetilde{[o]})$  is an invariant regular involution set i.e., by Theorem 11, an *invariant reflection structure* (cf. [4]).

By ([4], (3.2)) the so called loop-derivation gives us that  $([o], +)$  is a K-loop.  $\square$

**Remark 4.** 1. By (25.3) it follows that  $\widetilde{[a]} := \{\tilde{x} \in \widetilde{\mathcal{P}} \mid x \in [a]\}$  is transitive on  $[a]$ , since  $x \in [a]$  implies, by (24.2),  $[a] = [x]$  and then  $\tilde{x} \in \widetilde{[a]} \implies \tilde{x}[x] = [x] = [a]$ .

2. By (24.6), since  $\tilde{a} \in \mathcal{M}$ , it follows that  $[b]$  and  $\tilde{a}[b]$  are isomorphic with respect to the line structure and the congruence relation. Thus, since for any  $b, c \in \mathcal{P}$ , if  $a$  is a midpoint of  $(b, c)$ , we have  $\tilde{a}(b) = c$  and it follows:  $\tilde{a}[b] = [\tilde{a}[b]] = [c]$ . Then all the nano neighbourhoods of the points of  $\mathcal{P}$  are isomorphic.

### 3.5 Connections between nano substructures in ordered affine and elliptic planes

We apply the embedding function  $\kappa'$  defined in Theorem 20 on the nano substructures of an ordered affine plane as considered in section 3.2.

**Theorem 26.**  $\kappa'$  maps the nano domain  $\mathbf{M}$  of the ordered affine plane  $(\mathbb{W}, \mathcal{L}, \mathbf{b})$  bijectively onto the nano disc  $[o]$  of the elliptic plane  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  and we have:

1. If  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{M}$ ,  $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$  and  $a := \kappa'(\mathbf{a})$ ,  $b := \kappa'(\mathbf{b})$  then:  $\kappa'(\overline{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \overline{a, b} \cap [o]$ , i.e.  $\kappa'$  is a bijective collineation of the incidence space  $(\mathbf{M}, \mathbf{L}_{\mathbf{M}})$  onto the trace space  $([o], \mathcal{G}_{[o]})$  where

$$\mathcal{G}_{[o]} := \{L \cap [o] \mid L \in \mathcal{G}, L \cap [o] \neq \emptyset\}.$$

2. If one transfers the order structure  $\mathbf{b}_{\mathbf{M}}$  of the ordered (nano) space  $(\mathbf{M}, \mathbf{L}_{\mathbf{M}}, \mathbf{b}_{\mathbf{M}})$  defined in Theorem 22 via the embedding function  $\kappa'$  onto the trace space  $([o], \mathcal{G}_{[o]})$  then  $([o], \mathcal{G}_{[o]}, \kappa'(\mathbf{b}_{\mathbf{M}}))$  becomes an ordered space.

**Remark 5.** *The betweenness function  $\kappa'(\mathbf{b}_M)$  coincides with the restriction on  $[o]$  of the betweenness function  $\mathbf{b}_\tau$  defined in section 3.3 by taking for  $U$  the line  $\pi(o)$  and we shall denote  $\mathbf{b}_{[o]} := \kappa'(\mathbf{b}_M)$ .*

## 4. Nano domains of an elliptic plane are absolute planes with elliptic congruence

Now we show that, if  $[a]$  is any nano domain, the ordered space  $([a], \mathcal{G}_{[a]}, \mathbf{b}_{[a]})$  with respect to the restriction of the congruence relation  $\equiv$  of the elliptic plane, is an absolute plane with elliptic congruence.

**Theorem 27.** *Let  $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \equiv)$  be an elliptic plane over a non Archimedean ordered Pythagorean field, for each  $a \in \mathcal{P}$  let  $\equiv_{[a]}$  denote the restriction of “ $\equiv$ ” on the nano domain  $[a]$  then, by Theorems 15, 17, 24 and Remark 4, we have the following.*

1. *The set  $\mathcal{M}_{[a]} := \{\varphi \in \mathcal{M} \mid \varphi([a]) \cap [a] \neq \emptyset\}$  is a group with the properties:*

- (a)  $\forall \varphi \in \mathcal{M}_{[a]} : \varphi([a]) = [a];$
- (b)  $\mathcal{M}_{[a]_{|[a]}} = \text{Aut}([a], \mathcal{G}_{[a]}, \mathbf{b}_{[a]}, \equiv_{[a]});$
- (c)  $\forall b, c \in [a] \exists! m \in [a] : \tilde{m}(b) = c$ , i.e. any two distinct points of  $[a]$  have exactly one midpoint and  $\tilde{m} \in \mathcal{M}_{[a]}$ .
- (d)  $\mathcal{M}_{[a]}$  is flag transitive on  $([a], \mathcal{G}_{[a]});$
- (e)  $\forall b \in [a], \forall c \in \mathcal{P}, b \neq c$  let  $\overline{b, c} := \overline{b, c} \cap [a]$  then  $\overline{b, c} \in \mathcal{G}_{[a]}$ .

2.  $\Sigma := ([a], \mathcal{G}_{[a]}, \mathbf{b}_{[a]}, \equiv_{[a]})$  is an absolute plane with elliptic congruence.

3. For  $a, b \in \mathcal{P}$  the absolute planes  $([a], \mathcal{G}_{[a]}, \mathbf{b}_{[a]}, \equiv_{[a]})$  and  $([b], \mathcal{G}_{[b]}, \mathbf{b}_{[b]}, \equiv_{[b]})$  are isomorphic (if  $m$  is a midpoint of  $a$  and  $b$  then  $\tilde{m}$  is an isomorphism).

4.  $\mathcal{P} = \dot{\bigcup} \{[a] \mid a \in \mathcal{P}\}$  is a disjoint union.

*Proof.* (2). Let  $\Sigma := ([o], \mathcal{G}_{[o]}, \mathbf{b}_{[o]}, \equiv_{[o]})$ , let  $\mathbf{e} \in \kappa^{-1}(o)$  with  $\mathbf{e}^2 = 1$ ,  $\mathbb{W} := \mathbf{e}^\perp$  and let  $\mathbf{M}$  be the nano domain of  $\mathbb{W}$  (cf. section 3.2). Then by Theorem 26,  $[o] = \kappa'(\mathbf{M}) = \kappa(\mathbf{e} + \mathbf{M})$ . (We use the same notations as in section 3.4).

We have to prove that the compatibility conditions **V2**, ..., **V7** requested in ([5], sec. 16) are fulfilled in  $\Sigma$ .

**(V2).** Let  $a, b, c \in [o]$  with  $a \neq b$  and  $G \in \mathcal{G}$  with  $c \in G$  (implying  $G \cap [o] \in \mathcal{G}_{[o]}$ ). Then by Theorem 24.4, the points  $a, b$  are not conjugated and by Sørensen's Axiom W 2(a), there is exactly one point  $d \in \overline{a, b} \setminus \{b\}$  with  $(a, b) \equiv (a, d)$ . And then, since  $a, b \in [o]$ ,  $d \in [o]$ . By (1.d), there is a  $\varphi \in \mathcal{M}_{[o]}$  with  $\varphi(a) = c$  and  $\varphi(\overline{a, b}) = G \cap [o]$ . Then  $d_1 := \varphi(b)$  and  $d_2 := \varphi(d)$  are the two requested distinct points on  $G \cap [o]$  with  $(a, b) \equiv (c, d_1) \equiv (c, d_2)$ .

**(V3).** Let  $a, b, c \in [o]$  be three distinct collinear points with  $(a, b) \equiv (a, c)$ . Again by (1.d), we may assume  $a = o$ . Then there are  $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbf{M}$  and  $\lambda \in \mathbb{K}$  with  $\lambda\mathbf{b} + (1 - \lambda)\mathbf{c} = \mathbf{o}$  (hence  $\mathbf{b} = (1 - \lambda^{-1})\mathbf{c}$ ) and  $\kappa'(\mathbf{b}) = b$ ,  $\kappa'(\mathbf{c}) = c$ .  $(a, b) \equiv (a, c)$  implies  $\rho(o, b) = \rho(o, c)$  hence  $\frac{1}{1 + \mathbf{b}^2} = \frac{1}{1 + \mathbf{c}^2} \iff \mathbf{b}^2 = (1 - \lambda^{-1})^2 \mathbf{c}^2 = \mathbf{c}^2 \iff \lambda = \frac{1}{2}$ . Therefore  $\mathbf{o} \in ]\mathbf{b}, \mathbf{c}[$ , i.e. (cf. sections 2.4, 3.3)  $(a|b, c) = (\mathbf{o}|\mathbf{b}, \mathbf{c}) = -1$ .

**(V4).** Let  $(a, b, c)$  and  $(a', b', c')$  be triples of distinct and collinear points of  $[o]$  with  $(a, b) \equiv (a', b')$ ,  $(b, c) \equiv (b', c')$  and  $(b | a, c) = (b' | a', c')$ . By (1.d), we may assume  $a' = a$ ,  $b' = b$  and then  $(b | a, c) = (b | a, c')$  and we have to prove  $c = c'$  according to the statement of Axiom **V4**. Actually by Sørensen's Axiom W4, there is exactly one  $c'' \in \overline{a, b}$  with  $(a, b, c) \equiv (a, b, c'')$ . Then also  $c'' \in [o]$ . If  $c'' \neq c'$  then by **V3**,  $(b | c'', c') = -1$  hence  $(b | a, c') = (b | c'', c') \cdot (b | a, c'') = -(b | a, c'') = -(b | a, c)$ . Thus  $c' = c'' = c$ .

**(V5).** Let  $a, b, c \in [o]$  non collinear and  $a', b' \in [o]$  with  $(a, b) \equiv (a', b')$ . Let  $e := \pi(o) \cap \overline{a, b}$  then  $e \notin [o]$  hence  $(c, a) \not\equiv (c, e)$ . By Sørensen's Axiom W5(a) there is exactly one  $c' \in P \setminus \{c\}$  with  $(a, b, c) \equiv (a, b, c')$  and  $(c, e) \equiv (c', e)$ . By  $a, c \in [o]$  and  $(a, c') \equiv (a, c)$  follows  $c' \in [o]$ , by Theorem 17 there is a motion  $\varphi \in \mathcal{M}_{[o]}$  with  $\varphi(a) = a'$ ,  $\varphi(b) = b'$  and so  $\varphi(c)$  and  $\varphi(c')$  are the only two distinct points in  $[o]$  with  $(a, c) \equiv (a', \varphi(c)) \equiv (a', \varphi(c'))$  and  $(b, c) \equiv (b', \varphi(c)) \equiv (b', \varphi(c'))$  and that is the statement of Axiom **V5**.

(V6). Let  $a, b, c \in [o]$  non collinear  $d \in \overline{a, b} \cap [o]$  and  $a', b', c', d' \in [o]$  with  $(a, b, c) \equiv (a', b', c')$ , and  $(a, b, d) \equiv (a', b', d')$ . By Axiom V5 there is exactly one further point  $c'' \in [o]$ ,  $c'' \neq c$  with  $(a, b, c) \equiv (a, b, c'')$  and so if  $D := \overline{a, b}$  then  $\tilde{D}(c) = c''$ . If  $\varphi \in \mathcal{M}_{[o]}$  is a motion with  $\varphi(a') = a$ ,  $\varphi(b') = b$  then also  $\tilde{D} \circ \varphi$  is such a motion and so we may assume  $a' = a$ ,  $b' = b$ ,  $c' = c$  and  $(a, b, d) \equiv (a, b, d')$ . Assume  $d' \notin D$ . since  $d' \in [o]$ ,  $d' \neq \pi(D)$ ,  $d'' := \tilde{D}(d') \neq d', d$  and  $(a, b, d) \equiv (a, b, d') \equiv (a, b, d'')$  contradicting Axiom V5. Hence  $d' \in D$  and if  $d' \neq d$  then  $a$  and  $b$  are two distinct midpoints of  $d$  and  $d'$  and by Theorem 15,  $\delta(a, b) = 1$  which contradicts  $a, b \in [o]$ . Thus  $d = d'$  and so  $(c, d) \equiv (c', d')$  which is the statement of Axiom V6.

(V7). Let  $a, b, c, c' \in [o]$  be distinct with  $(a, b, c) \equiv (a, b, c')$  and let  $D := \overline{a, b}$ . Then by Axiom V5,  $\tilde{D}(c) = c'$  and for  $m := D \cap \overline{c, c'}$ ,  $(a, m, c)$  is a rectangular triangle hence by Theorem 21.3,  $\delta(a, m) \leq \delta(a, c)$  hence  $m \in [o]$ . By Axiom V6,  $(c, m) \equiv (c', m)$ , i.e.  $m$  is the midpoint of  $c$  and  $c'$  and so by Axiom V3,  $(D|c, c') = (m|c, c') = -1$ .

That the absolute plane  $\Sigma$  has elliptic congruence, is a consequence Theorem 18. Actually, if we consider in Theorem 18 the points  $a, b, c, d, a'$  then  $\overline{d, a} \perp \overline{a, b} \perp \overline{b, c} \perp \overline{c, d}$  and  $\{a'\} = (a \perp \overline{c, d}) \cap \overline{c, d}$ , i.e.  $(a, b, c, d)$  forms a *Lambert Saccheri quadrangle*. Then  $\delta(c, a') - \delta(c, d) \in \mathbb{K}^{(2)}$  tells us that this difference for any ordering of the Pythagorean field  $\mathbb{K}$  is positive, hence  $\delta(c, a') > \delta(c, d)$  and so  $]c, d[ \subset ]c, a'[$ . Such a Lambert Saccheri quadrangle is called *elliptic* (cf. [3], section 2 and Theorem 2.3). If an absolute plane has elliptic Lambert Saccheri quadrangles then we say that *the absolute plane has elliptic congruence*.  $\square$

# Bibliografia

- [1] M. DEHN: *Legendre'sche Sätze über die Winkelsumme im Dreieck.* Math-Ann., 53, 1900, 404-439.
- [2] H. KARZEL, H.-J. KROLL: *Geschichte der Geometrie seit Hilbert.* Wiss. Buchges, Darmstadt, 1988.
- [3] H. KARZEL, M. MARCHI: *Classification of General Absolute Geometries with Lambert-Saccheri Quadrangles.* Le Matematiche, 51, 2006, 27-35.
- [4] H. KARZEL, M. MARCHI, S. PIANTA: *The defect in an invariant reflection structure.* Journal of Geometry, 99, 2010, 67-87.
- [5] H. KARZEL, K. SÖRENSEN, D. WINDELBERG: *Einführung in die Geometrie.* UTB Vandenhoeck, Göttingen, 1973.
- [6] K. SÖRENSEN: *Elliptische Ebenen.* Mitt. Math. Ges. Hamburg, 10, 1976, 277-296.
- [7] K. SÖRENSEN: *Elliptische Räume.* Mitt. Math. Ges. Hamburg, 18, 1999, 159-167.

# Nota C

Intern. Math. Forum, 7, n. 40, 2012, 1993 - 1998.

## Equilibrium à la Cournot and Supply Function Equilibrium in electricity markets under linear price/demand and quadratic costs

Francesca Bonenti and Magali E. Zuanon

Dipartimento di Metodi Quantitativi,  
Università degli Studi di Brescia,  
Contrada Santa Chiara 50, 25122 Brescia, Italy

**Abstract.** We present a comparison between the Cournot and the Supply Function Equilibrium models under linear price/demand, linear supply functions and quadratic costs.

**AMS Subject Classification Code:** 91A80; 90C90.

**Keywords:** Cournot equilibrium, Supply function equilibrium, monopoly.

## 1. Introduction

The *Supply Function Equilibrium* (SFE) approach in an electric market takes place whenever firms compete in offering a schedule of quantities and prices. On the other hand, in the *Cournot equilibrium model* each firm chooses the optimal output by maximizing its own profit. It is well known that Cournot equilibrium is easier to compute than SFE because the mathematical structure of Cournot models turns out to be a set of algebraic equations, while the mathematical structure of SFE models turns out to be a set of differential equations (see e.g. Ventosa et al. [7]).

Bonenti and Zuanon [2] considered a simplified version of the Cournot equilibrium model under linear price/demand and quadratic costs presented by Ruiz et al. [5]. In particular, they presented the explicit expressions characterizing analytically the Cournot equilibrium values for the produced quantities, the market-clearing price and the profits whenever each generating company is characterized by a quadratic cost function and the price/demand function is linear.

In this paper, we consider the Supply Function Equilibrium in case that the *supply functions*  $s_i(p) = \eta_i p$  are also linear and there are no other constraints. Starting from the linear demand function  $D(p) = \frac{p-\gamma}{\beta}$ , we use the classical first-order (unconstrained) optimality conditions (see e.g. Klemperer and Meyer [4] and Anderson and Hu [1]) at the market clearing price in order to determine the explicit expressions for the produced quantities, the optimal price and the profits. Finally, we make a comparison between the two models in the spirit of the considerations presented by Willems and Rumiantseva [8].

## 2. Comparison between Equilibrium à la Cournot and Supply function equilibrium

In the Cournot approach,  $n$  generating companies are considered, each of them producing a quantity of energy  $q_i$ . While each generating company affects the *market-clearing price*, it is assumed that the production level of any generator does not depend on the production levels of the remaining companies.

The generic  $i$ -th generating company is characterized by a quadratic cost function  $C_i(q_i)$  defined as follows:

$$C_i(q_i) = a_i + \frac{1}{2}b_i\Delta q_i^2, \quad (2)$$

where the real parameters  $a_i$  and  $b_i$  are positive.

It is further assumed that the *price/demand function* (i.e., the *inverse demand function*)  $p(q_1 + \dots + q_n)$  is linear, i.e.

$$p(q_1 + \dots + q_n) = \gamma + \beta(q_1 + \dots + q_n) \quad (3)$$

with  $\gamma > 0$  and  $\beta < 0$ , the following “simultaneous” maximum profit problem comes into consideration:

$$\begin{aligned} \max_{p, q_i} \quad & \pi_i = p(q_1 + \dots + q_n)q_i - C_i(q_i) = \\ \max_{p, q_i} \quad & \left[ (\gamma + \beta(q_1 + \dots + q_n))q_i - a_i - \frac{1}{2}b_i\Delta q_i^2 \right] \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4)$$

where  $\pi_i$  is the profit that is obtained by the  $i$ -th company.

Explicit solutions of problem (4) are obtained by considering the system of the partial derivatives of the profits equal to zero:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} &= \gamma + \beta \sum_{j \neq i} q_j + q_i(2\beta - b_i) = \gamma + \beta \sum_{j=1}^n q_j + q_i(\beta - b_i) = \\ &= p\left(\sum_{j=1}^n q_j\right) + q_i(\beta - b_i) = 0 \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

Ruiz, Conejo, García-Bertrand [5] provide a nice expression of the solutions of system (5) (see also Bonenti and Zuanon [2]).

Indeed, the optimal quantities  $q_i^C$  to be produced, the market-clearing price  $p^C$  and the profits  $\pi_i^C$  are determined as follows:

$$q_i^C = \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\left(\frac{1}{\beta} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_j - \beta}\right) (b_i - \beta)} \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

$$p^C = \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\frac{1}{\beta} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_j - \beta}}, \quad (7)$$

$$\pi_i^C = \left( \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\left(\frac{1}{\beta} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{b_j - \beta}\right) (b_i - \beta)} \right)^2 \left( \frac{b_i}{2} - \beta \right) - a_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Let us now turn to the Supply Function Equilibrium in case that the *supply functions*

$$s_i(p) = \eta_i p \quad (i = 1, \dots, n) \quad (9)$$

are linear and there are no other constraints (see e.g. Gao and Sheble [3]).

We consider the linear demand function (i.e., precisely the inverse of (3))

$$D(p) = \frac{p - \gamma}{\beta} \quad (10)$$

and we assume that the cost functions are quadratic and expressed precisely by conditions (2).

We recall that first-order (unconstrained) optimality conditions are the following (see Klemperer and Meyer [4] and Anderson and Hu [1]):

$$s_i(p) = [p - C'_i(s_i(p))] \left[ \sum_{j \neq i} s'_j(p) - D'(p) \right] \quad i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

at the *market clearing price*  $p$ , i.e., whenever

$$s_i(p) = D(p) - \sum_{j \neq i} s_j(p) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

It is immediate to check that the system of equations (11) is equivalent to the following one:

$$\eta_i = [1 - b_i \eta_i] \left[ \sum_{j \neq i} \eta_j - \frac{1}{\beta} \right] \quad i = 1, \dots, n. \quad (13)$$

On the other hand, from the expressions (9) and (10) of the supply functions and respectively the demand function and the market clearing conditions (12), we immediately recover the following expression for the price:

$$p^{SFE} = \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\frac{1}{\beta} - \sum_{j=1}^n \eta_j} \quad (14)$$

The following proposition is an immediate consequence of a comparison between (7) and (14).

**Proposition 1.** *The optimal prices  $p^C$  and  $p^{SFE}$  are equal if and only if the following condition holds:*

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{b_j - \beta} = \sum_{j=1}^n \eta_j. \quad (15)$$

We recall that a case of particular relevance occurs whenever all but one the supply functions are zero. This means that there exists a generating company  $i$  such that  $\eta_i \neq 0$  and  $\sum_{j \neq i} \eta_j = 0$ . In this case company  $i$  is acting as a *monopoly* and the system (13) reduces to the following equation:

$$\eta_i = \frac{1}{b_i - \beta}. \quad (16)$$

The following proposition summarizes the monopolistic situation in the supply function equilibrium approach.

**Proposition 2.** *If company  $i$  is acting as a monopoly, then*

$$p^{SFE} = \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b_i - \beta}}, \quad (17)$$

$$s_i(p^{SFE}) = \frac{\frac{\gamma}{\beta}}{(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{b_i - \beta})(b_i - \beta)} = q_i^C. \quad (18)$$

On the other hand, easy computations preclude the choices  $\eta_i = \frac{1}{b_i - \beta}$  for  $i = 1, \dots, n$ , which seem to be naturally suggested by the consideration of the condition (15). Indeed, such a substitution would imply a monopoly with  $\sum_{j \neq i} \frac{1}{b_j - \beta} = 0$  but this condition is impossible. Therefore, the following proposition holds.

**Proposition 3.** *It is never the case that*

$$\eta_i = \frac{1}{b_i - \beta} \quad i = 1, \dots, n$$

*is a solution of the system (13).*

In [1] is characterized the *strong SFE* as one in which supply functions are piece- wise smooth and strongly optimal. A supply function  $s_i(p)$  is *strongly optimal* if it gives the highest achievable profit subject to constraints on price, capacity, and the other supplies offered, for every realization of demand, excluding cases in which the best supply has a negative slope. We have that a strongly optimal supply function remains optimal for any distribution of demand shocks.

According with [1], we can proof:

**Proposition 4.** *In a strong equilibrium*

$$\forall i, p \quad s_i(p) > 0 \iff \eta_i > 0.$$

# Bibliografia

- [1] E. J. Anderson and X. Hu, Finding supply function equilibria with asymmetric firms, *Operation Research* **56** (2008), 697-711.
- [2] F. Bonenti and M.E. Zuanon, On Cournot models for electricity markets under linear price/demand and quadratic costs, *Quaderni dell'Università degli Studi di Brescia* **353** (2010).
- [3] F. Gao and G.B. Sheble, Electricity market equilibrium model with resource constraint and transmission congestion, *Electric Power System Research* **80** (2010), 9-18.
- [4] P.D. Klemperer, M.A. Meyer, Supply function equilibria in oligopoly under uncertainty, *Econometrica* **57** (1989), 1243-1277.
- [5] C. Ruiz, A.J. Conejo and R. García-Bertrand, Some analytical results pertaining to Cournot models for short-term electricity markets, *Electric Power System Research* **78** (2008), 1672-1678.
- [6] K. Shirai, An existence theorem for Cournot-Walras equilibria in a monopolistically competitive economy, *Journal of Mathematical Economics* (2010), to appear.
- [7] M. Ventosa, A. Baíllo, A. Ramos, M. Rivier, Electricity market modeling trends, *Energy Policy* **33** (2005), 897-913.
- [8] B. Willems, I. Rumiantseva, H. Weigt, Cournot versus supply functions: what does the data tell us?, *Energy Economics* **31** (2009), 38-47.

- [9] X. Zou, Double-sided auction mechanism design in electricity based on maximizing social welfare, *Energy Policy* **37** (2009), 4231-4239.

# Nota D

## Evaluating the EU ETS impacts on profits, investments and prices of the Italian electricity market<sup>12</sup>

Francesca Bonenti, Giorgia Oggioni, Elisabetta Allevi

Department of Quantitative Methods,  
University of Brescia,  
Contrada Santa Chiara 50, 25122 Brescia, Italy.  
Tel.: +39 030 2988518, Fax: +39 030 2400925

**Giacomo Marangoni**

Fondazione Eni Enrico Mattei, Milan, Italy.  
Tel.: +39 02 52036884, Fax: +39 02 52036946

**Abstract.** Climate change is a global issue, but actions to mitigate its development are regional. Europe has taken the leadership in the carbon emission policy by introducing the Emissions Trading Scheme (EU ETS), currently regulated by Directive 2003/87/EC and since 2013 by Directive 2009/29/EC. This new Directive imposes a full auctioning system for

---

<sup>12</sup>The work has been financially supported by the grant “Regione Lombardia: Metodi di integrazione delle fonti energetiche rinnovabili e monitoraggio satellitare dell’impatto ambientale”, EN-17, ID 17369.10 financed by Regione Lombardia, Italy.

allocating CO<sub>2</sub> allowances to the power sector and encourages the use of renewables.

We investigate the economic impacts of the EU ETS on the Italian electricity market using a power generation expansion model. We adopt a technological representation of the energy market that also accounts for power exchanges with foreign countries and we assume that generators operate in different zones connected by interconnections with limited capacity. We study both an oligopolistic and a perfectly competitive behavior of Italian generators and we compare the corresponding outcomes under different EU ETS scenarios. Our analysis shows that, in perfect competition, generators generally invest more than in an oligopolistic framework, but in both market configurations, investments in Italy are mainly concentrated in fossil-fired plants, especially in 2020. This happens also when incentives are given to renewables.

The developed models are implemented as complementarity problems and solved in GAMS using the PATH solver.

**Keywords:** EU ETS, Investments, Italian electricity market.

## 1. Introduction

In the last twenty years, the restructuring process of the electricity system has deeply changed the organization of this market around the world. In Europe, following the examples of United Kingdom and Norway, the European Commission issued the Directive 96/92/EC in order to liberalize the power sector and create an Internal Electricity Market (IEM). This Directive imposed the unbundling of generation, transmission and distribution that, since then, were vertically integrated and controlled by a sole entity (power company) operating in a monopolistic regime. The aim of this Directive was to improve efficiency and avoid abuses of dominant positions, especially in setting power prices.

In Italy, the disposals of the European Directive 96/92/EC were acknowledged by the Bersani decree in 1999, but only in 2004 the Power Exchange GME (“Gestore del Mercato Elettrico”) became operative on the Italian energy market (IPEX). With the Bersani decree, the old monopolist Enel had to disinvest 15 GW of its production capacity in order to reduce its market share. The current Enel’s contribute to the Italian power production is of 28,1%, significantly lower than its 2004 level of 43,9%<sup>13</sup>. However, the Italian market cannot be yet considered fully competitive as highlighted by Floro (2009).

Since 2005, the energy sector is involved in the European Emission Trading Scheme (EU ETS)<sup>14</sup>. The EU ETS is an environmental policy developed in the framework of the Kyoto Protocol that aims at reducing the European CO<sub>2</sub> emissions generated by carbon-intensive installations of the energy and industrial sectors. Such a goal is achieved through the implementation of a cap-and-trade system that imposes a CO<sub>2</sub> emission limit to all covered installations and creates a market that prices CO<sub>2</sub> where ETS participants can exchange their emission permits. The EU ETS was initially subdivided into two phases as indicated by Directive 2003/87/EC. The first phase (2005-2007), the so-called “learning by doing phase”, was introduced to test the functioning of the EU ETS system. Its implementation led to some economic distortions mainly due to the grandfathering of the emission allowances (Neuhoff et al., 2006a, 2006b; Reinaud, 2003, 2005) and to the consequent raise of “windfall profits” for the power sector (Sijm et al. 2006). Compared to the energy intensive industries involved in the EU ETS, generators are able to pass through a high proportion of their carbon costs in electricity prices despite the fact that almost all CO<sub>2</sub> permits, needed to cover their emissions, are freely distributed. This happens because the current organization of electricity markets allows for pricing power at marginal production

---

<sup>13</sup>See Autorità per l’Energia Elettrica e il Gas (AEEG), Relazione annuale sullo stato dei servizi e sull’attività svolta, 2011. Available at [http://www.autorita.energia.it/it/relaz\\_ann/11/11.htm](http://www.autorita.energia.it/it/relaz_ann/11/11.htm)

<sup>14</sup>[http://ec.europa.eu/clima/policies/ets/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/clima/policies/ets/index_en.htm)

cost. The result is twofold: the EU ETS causes both an increase of electricity prices and an intended raise of generators' profits. These two issues have been extensively discussed in literature and many studies confirm this outcome (see, for instance, Chen et al., 2008; Kara et al. 2008; Linares et al., 2008; Lise et al. 2010; Oggioni and Smeers, 2009).

In order to remedy to this situation, the Directive 2009/29/EC, regulating the third EU ETS phase (2013-2020), has imposed a full auctioning system for the allocation of emission permits destined to the energy sector. For the industrial sectors, it foresees a progressive adoption of the auctioning system starting from a proportion of the 20% in 2013 and reaching a 70% level in 2020<sup>15</sup>. Moreover, the revised EU ETS will cover more industries and types of greenhouse gases and will encourage the development of renewables.

In this paper, we investigate the economic impacts of the EU ETS on the Italian electricity market. To this aim, we develop equilibrium models that describe the interaction of different agents. A first group of agents is represented by generators which aim at maximizing their profits; Market Operator is the other agent which has the scope to maximize consumers' willingness to pay while guaranteeing both the satisfaction of the energy market balance and the respect of the transfer limits of the interconnections linking the different zones. The market equilibrium results from the simultaneous interaction of generators and the Market Operator.

In particular, taking into account the current organization of the Italian electricity market, we first formulate a model, where generators are Cournot players. Indeed, imperfect competition models are often used to study electricity markets (see, for instance, Chen and Hobbs, 2005; Chen et al., 2006; Hobbs, 2001; Hobbs and Helman, 2004; Vespucci et al., 2009). An oligopolistic market can be described either by a Nash-Cournot or a Bertrand or a Supply Function Equilibrium models. Supply Function Equilibrium (see

---

<sup>15</sup>The Article 10 ter of the Directive 2009/29/EC states that all industrial sectors that are exposed to the risk of carbon leakage will continue to receive free permits. See [http://ec.europa.eu/clima/policies/ets/leakage/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/clima/policies/ets/leakage/index_en.htm).

Anderson and Hu, 2008; Willems et al., 2009) and Cournot Equilibrium (for overviews see Tirole, 1988; Vives, 1999 and for review see Ventosa et al., 2005) are the most applied models to electricity markets. Alternative model formulations, such as equilibrium problem with equilibrium constraints (EPEC) or mathematical program with equilibrium constraints (MPEC), could be also applied in order to analyze the strategic interactions among different agents (see, for instance, Limpitton et al. 2011, Ralph and Smeers, 2006 and Yao et al., 2008 for application to energy markets).

However, since the aim of the restructuring process has been to make the electricity market fully competitive, we also analyze the case where power producers operate in a perfectly competitive market.

In all model formulations, we adopt a technological representation of the energy market and we assume that generators operate existing and new power plants in different zones that are linked by inter-connectors with limited transfer capacity. Generators are, in fact, allowed to invest in new capacity. The solution of the overall system is found by exploiting the mixed complementarity theoretical framework and solution algorithms.

The organization of this paper is as follows. In Section 2, we describe the market model where generators are Cournot competitors. Section 3 presents a perfectly competitive version of the model illustrated in Section 2. In Sections 4 and 5, we discuss the results of our analysis. In particular, the results presented in Section 4 are based on the assumption that the Italian power market is closed and has no exchanges with other countries, while in Section 5 we illustrate how these outcomes change when also imports/exports with foreign zones contribute to the equilibrium of the Italian electricity market. Finally, Section 6 is devoted to conclusions and final remarks.

## 2. The market model

We first describe the energy market by developing an equilibrium model where Italian generators compete à la Cournot. In this formulation, each

generator  $f$  maximizes its profits taking into account the decision taken by his competitors. The Italian Market Operator maximizes consumers' willingness to pay taking into account the physical constraints of the transmission grid and ensuring the respect of the energy balance in each zone  $i$  and time segment  $t$ . The Market Operator can be considered as an additional player. We also model an emission market limited to the energy sector. We first list the notation used in this paper.

## 2.1 Notation

We here introduce all symbols of the model. They are classified on basis of their means and use.

### Sets

- $i \in I$ : Zones;
- $t \in T$ : Time segment, we consider time horizon  $t = 1, \dots, 24$  hours;
- $p \in P$ : Set of technologies (note that we respectively indicate with  $p = h$  and  $p = sh$  the hydro plants based on reservoir and on the pumped-storage technologies);
- $f \in F$ : Generators;

### Parameters

- $vc_{f,p,i}$ : Hourly variable costs of new and existing plant of technology type  $p$  owned by generator  $f$  in zone  $i$  (€/MWh);
- $fc_{f,p,i}$ : Hourly fixed costs of new plant of technology type  $p$  owned by generator  $f$  in zone  $i$  (€/MWh);
- $shc_{f,sh,i}$ : Hourly costs of pumped-storage technology  $sh$  when pumping owned by generator  $f$  in zone  $i$  (€/MWh);

- $\overline{G}_{f,p,i}$ : Total available capacity of technology plant  $p$  owned by generator  $f$  in zone  $i$  (MW);
- $\overline{TH}_{f,p,i}$ : Total available capacity of hydro  $p = h, sh$  technology owned by generator  $f$  in zone  $i$  (MW);
- $\underline{gh}_h, \overline{gh}_h$ : Minimum and maximum capacity of hydro technology  $h$  (MW) owned by generator  $f$  in zone  $i$ ;
- $\underline{sh}_{f,sh,i}, \overline{sh}_{f,sh,i}$ : Minimum and maximum capacity of the technology pumping water in the upper basin in the pumped-storage technology  $sh$  (MW);
- $\underline{gsh}_{f,sh,i}, \overline{gsh}_{f,sh,i}$ : Minimum and maximum capacity of pumped-storage technology  $sh$  (MW) owned by generator  $f$  in zone  $i$ ;
- $\overline{R}_{f,p,i}$ : Variance between maximum and minimum energy reserve of hydro technology  $h$  and  $sh$  (MW) owned by company  $f$  in zone  $i$ ;
- $e_p$ : Emission factor of technology  $p$  (ton/MWh);
- $E$ : Total emission cap (ton);
- $GE_f$ : Total amount of emission allowances grandfathered to generators  $f$  in the period considered (ton);
- $\tau$ : 8760 (number of hours in one year);
- $\tau_t$ : 365 (number of days in one year);
- $a_{t,i}$ : Intercept of consumers' affine demand functions at zone  $i$  in time segment  $t$  (€/MWh);
- $b_{t,i}$ : Slope of consumers' affine demand functions at zone  $i$  in time segment  $t$  (€/MWh<sup>2</sup>);
- $\rho_{f,sh,i}$ : Performance of pumped-storage technology  $sh$  owned by generator  $f$  in zone  $i$ .

- $\overline{Flow}_{i,j}$ : Flow transfer limit from zone  $i$  to zone  $j \neq i$  where  $j \in I$  (MW).

### Variables

- $g_{t,f,p,i}$ : Power produced by generators  $f$  in zone  $i$  using existing technology  $p$  in time segment  $t$  (MWh);
- $gn_{t,f,p,i}$ : Power produced by generators  $f$  to zone  $i$  using new technology  $p$  in time segment  $t$  (MWh);
- $sh_{t,f,sh,i}$ : Power used by generator  $f$  in zone  $i$  to pump water in the upper reservoir of pumped-storage technology  $sh$  in time segment  $t$  (MWh);
- $R_{t,f,h,i}$ : Hydro energy reserve of hydro technology  $h$  owned by generator  $f$  in zone  $i$  in time segment  $t$  (MWh);
- $I_{f,p,i}$ : Investments in new capacity of technology type  $p$  operated by generators  $f$  in zone  $i$  (MW);
- $s_{t,f,i}$ : Power supplied by generator  $f$  to zone  $i$  in time segment  $t$  (MWh);
- $d_{t,i}$ : Electricity consumption in zone  $i$  in time segment  $t$  (MWh);
- $p_{t,i}$ : Nodal electricity price in time segment  $t$  (€/MWh);
- $P_{t,i}(d_{t,i})$ : Willingness to pay in zone  $i$  and in time segment  $t$  (€). This term can be explicitly defined as follows:  $P_{t,i}(d_{t,i}) = a_{t,i} - b_{t,i} \cdot d_{t,i}$ ;
- $flow_{t,i,j}$ : Power transferred from zone  $i$  to zone  $j \neq i$  where  $j \in I$  in time segment  $t$ .

## 2.2 Generation expansion model

We model a zonal market where generators compete as Cournot players on quantities. They produce energy by running existing or new plants in which

they invest. Note that our analysis is based on a static view of the problem. In this model, generators build and operate both existing and new capacity in a single period where they also incur investment and operations costs. This standard static formulation assumes that new power plants are immediately available when built. The construction of these power plants is conducted by generators already operating in the market. Each (existing and new) plant is characterized by its own fixed<sup>16</sup>, emission and fuel costs that influence their endogenously determined merit order. During the implementation phase, we consider a set of eight technologies composed of wind, photovoltaic, geothermal, run-on-river, coal, CCGT, gas and oil based technologies. These plants are endogenously put in merit order. In the theoretical formulation of the problem, we also model the use of reservoir and pumped-storage hydro plants<sup>17</sup>. Generators make their strategical investment and production choices by taking into account the environmental opportunity costs due to the CO<sub>2</sub> regulation.

Considering the assumption of Cournot competition among Italian generators, we assume that the electricity prices are function of quantities. More specifically, we define the zonal electricity prices  $p_{t,i}$  as follows:

$$p_{t,i} = p_{t,i} \left( s_{t,-f,i} + s_{f,t,i} - \sum_j (flow_{t,i,j} - flow_{t,j,i}) \right), \quad i \in I \quad t \in T \quad (19)$$

This expression means that the electricity prices  $p_{t,i}$  are functions of the total amount of electricity sold on the market ( $s_{t,-f,i} + s_{f,t,i}$ ) corrected by the amount of electricity exchanged ( $\sum_j (flow_{t,i,j} - flow_{t,j,i})$ )<sup>18</sup> between zones  $i$  and  $j$ . Note that the term  $s_{t,-f,i}$  in (19) corresponds to the sum of the amount of electricity sold in node  $i$  by all generators, with the exception of generator  $f$ . In mathematical terms, this can be expressed as  $s_{t,-f,i} = \sum_{f' \neq f} s_{t,f',i}$ .

<sup>16</sup>We only account for fixed costs of new generating units because we assume that existing plants are already fully amortized.

<sup>17</sup>Since we do not dispose of the data related to these two hydro technologies, we do not include them in our simulations.

<sup>18</sup>Note that  $flow_{t,i,j}$  stands for the amount of electricity exported from zone  $i$  to zone  $j$  ( $i \neq j$  and  $i, j \in I$ );  $flow_{t,i,j}$  indicates the import of zone  $i$  from zone  $j$ .

Considering this price formulation, each generator  $f$  maximizes its annual profits (20) taking into account the technological constraints (21)-(34). In particular, each generator gains by selling electricity at nodal prices  $p_{t,i}$  defined in (19) that depends on the total quantity sold and exchanged in each node  $i$ . Generators also face variable generation costs ( $\sum_{p,i} vc_{f,p,i} \cdot (g_{t,f,p,i} + gn_{t,f,p,i}) \cdot \tau_t$ ), investment costs ( $\sum_{p,i} fc_{f,p,i} \cdot I_{f,p,i} \cdot \tau$ ) and emission opportunity costs ( $\varphi \cdot (GE_f - (\sum_{t,p,i} e_p \cdot (g_{t,f,p,i} + gn_{t,f,p,i}) \cdot \tau_t))$ ) computed over a year. Note that the difference  $\left[ GE_f - (\sum_{t,p,i} e_p \cdot (g_{t,f,p,i} + gn_{t,f,p,i}) \cdot \tau_t) \right]$  can be either positive or negative. It is positive if the amount of grandfathered allowances ( $GE_f$ ) is higher than the CO<sub>2</sub> emissions generated ( $\sum_{t,p,i} e_p \cdot (g_{t,f,p,i} + gn_{t,f,p,i}) \cdot \tau_t$ ) when producing electricity; otherwise it is negative. In the first case, generators gain, while, in the second, incur in a cost. The allowance auctioning system can be simply modeled by setting  $GE_f$  equal to zero. Under this alternative assumption, generators have to pay for all their CO<sub>2</sub> emissions.

Finally, for those generators who dispose of hydro pumped-storage technologies, we consider the cost of pumping water from the lower to the upper basin ( $\sum_{i,t} shc_{f,sh,i} \cdot sh_{t,f,sh,i} \cdot \tau_t$ ).

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \left\{ \sum_{t,i} \left[ p_{t,i} \left( s_{t,-f,i} + s_{t,f,i} - \sum_j (flow_{t,i,j} - flow_{t,j,i}) \right) \right] \cdot s_{t,f,i} \right\} \cdot \tau_t + \\
& (20) \\
& - \left\{ \sum_{t,p,i} vc_{f,p,i} \cdot (g_{t,f,p,i} + gn_{t,f,p,i}) + \sum_{t,i} shc_{f,sh,i} \cdot sh_{t,f,sh,i} \right\} \cdot \tau_t + \\
& + \left\{ \varphi \cdot \left[ GE_f - \left( \sum_{t,p,i} e_p \cdot (g_{t,f,p,i} + gn_{t,f,p,i}) \cdot \tau_t \right) \right] \right\} + \\
& - \sum_{p,i} fc_{f,p,i} \cdot I_{f,p,i} \cdot \tau
\end{aligned}$$

s.t.

$$\sum_p g_{t,f,p,i} + \sum_p gn_{t,f,p,i} = s_{t,f,i} \quad (\alpha_{t,f,i}) \quad \forall t, f, i \quad (21)$$

$$\bar{G}_{f,p,i} - g_{t,f,p,i} \geq 0 \quad (\beta_{t,f,p,i} \geq 0) \quad \forall t, f, p \neq h, p \neq sh, i \quad (22)$$

$$I_{f,p,i} - gn_{t,f,p,i} \geq 0 \quad (\nu_{t,f,p,i} \geq 0) \quad \forall t, f, p, i \quad (23)$$

$$\overline{TH}_{f,p,i} - g_{t,f,p,i} - R_{t,f,p,i} \geq 0 \quad (\beta_{t,f,p=h,p=sh,i} \geq 0) \quad \forall t, f, p = h, p = sh, i \quad (24)$$

$$R_{t,f,p,i} + \bar{R}_{f,p,i} \geq 0 \quad (\bar{\xi}_{t,f,p,i} \geq 0) \quad \forall t, f, p = h, p = sh, i \quad (25)$$

$$\bar{R}_{f,p,i} - R_{t,f,p,i} \geq 0 \quad (\underline{\xi}_{t,f,p,i} \geq 0) \quad \forall t, f, p = h, p = sh, i \quad (26)$$

$$g_{t,f,h,i} - \underline{gh}_{f,h,i} \geq 0 \quad (\delta_{t,f,h,i} \geq 0) \quad \forall t, f, h, i \quad (27)$$

$$\overline{gh}_{f,h,i} - g_{t,f,h,i} \geq 0 \quad (\bar{\delta}_{t,f,h,i} \geq 0) \quad \forall t, f, h, i \quad (28)$$

$$\rho_{f,sh,i} \cdot sh_{t,f,sh,i} - g_{t,f,sh,i} \geq 0 \quad (\eta_{t,f,sh,i} \geq 0) \quad \forall t, f, sh, i \quad (29)$$

$$sh_{t,f,sh,i} - \underline{sh}_{f,sh,i} \geq 0 \quad (\underline{\theta}_{t,f,sh,i} \geq 0) \quad \forall t, f, sh, i \quad (30)$$

$$\overline{sh}_{f,sh,i} - sh_{t,f,sh,i} \geq 0 \quad (\bar{\theta}_{t,f,sh,i} \geq 0) \quad \forall t, f, sh, i \quad (31)$$

$$g_{t,f,sh,i} - \underline{gsh}_{f,sh,i} \geq 0 \quad (\underline{\mu}_{t,f,sh,i} \geq 0) \quad \forall t, f, sh, i \quad (32)$$

$$\overline{gsh}_{f,sh,i} - g_{t,f,sh,i} \geq 0 \quad (\bar{\mu}_{t,f,sh,i} \geq 0) \quad \forall t, f, sh, i \quad (33)$$

$$g_{t,f,p,i}; gn_{t,f,p,i}; I_{t,f,p,i}; s_{t,f,i} \geq 0 \quad \forall t, f, p, i \quad (34)$$

Equation (21) defines a production balance between the total amount of electricity generated ( $\sum_p g_{t,f,p,i} + \sum_p gn_{t,f,p,i}$ ) and sold ( $s_{t,f,i}$ ) in zone  $i$  by generator  $f$  in each time segment  $t$ .

Constraints (22) and (23) impose generation capacity limits respectively for existing and new plants. These constraints hold for all technologies with the exception of pumped storage and hydro plants with reservoir. For these hydro technologies, we have specific capacity constraints (see (24)-(33)). Constraint (24) states that the total available capacity  $\overline{TH}_{f,p,i}$  (with

$p = h, sh$ ) has to be greater or equal to the sum of the quantity of electricity  $g_{t,f,p,i}$  (with  $p = h, sh$ ) generated by those hydro plants and the energy reserve  $R_{t,f,p,i}$  of the reservoir. This reserve varies between a minimum ( $-\bar{R}_{f,p,i}$ ) and a maximum ( $\bar{R}_{f,p,i}$ ) level as indicated by constraints (25) and (26). Conditions (27), (28), (32) and (33) indicate the generation limits of the turbines of hydro (with reservoir) and pumped-storage technologies respectively.

Condition (29) defines that the energy needed to pump water from the lower to the upper reservoir is greater than the energy produced. The turbine used to pump water has capacity limits as indicated by inequalities (30) and (31) that respectively define a lower and an upper bound.

Finally, conditions (34) are the non-negativity constraints.

### 2.3 Market operator's model

Market Operator maximizes the consumers' willingness to pay (35) taking into account a zonal energy balance constraint (36)-(37) and transmission constraint (38) that defines the flow transfer limits among connected zones (more details are reported in Section 4.1). Note that the dual variable  $\sigma_{t,i,j}$  of constraint (38) represents the transmission cost associated to the interconnection between zones  $i$  and  $j$ . This variable assumes positive values when the line connecting zone  $i$  to  $j$  is congested.

$$\mathbf{Max}_{\mathbf{d}_{t,i}} \quad \sum_t \left[ \int_0^{d_{t,i}} P_{t,i}(\xi) d\xi \right] \cdot \tau_t \quad (35)$$

s.t

$$\sum_f s_{t,f,i} - \sum_j (flow_{t,i,j} - flow_{t,j,i}) - d_{t,i} = 0 \quad (\psi_{t,i}) \quad \forall t, i \quad (36)$$

$$d_{t,i} \geq 0 \quad \forall t, i \quad (37)$$

$$0 \leq flow_{t,i,j} \leq \overline{Flow}_{i,j} \quad (\sigma_{t,i,j}) \quad \forall t, i, j \quad (38)$$

## 2.4 Emission market

Our model only considers the emissions of power plants. Since National Allocation Plans (NAPs) refer to annual targets, we impose one emission constraint, limited to the electricity market, which is associated with the dual variable  $\varphi$ , representing the allowance price.  $E$  indicates the annual CO<sub>2</sub> emission cap while  $\sum_{t,f,p,i} e_p \cdot (g_{t,f,p,i} + gn_{t,f,p,i}) \cdot \tau_t$  are the annual emissions generated by electricity production.

$$E - \sum_{t,f,p,i} e_p \cdot ((g_{t,f,p,i} + gn_{t,f,p,i}) \cdot \tau_t) \geq 0 \quad (\varphi \geq 0) \quad (39)$$

## 2.5 Mathematical structure

Let  $K$  be a nonempty, closed and convex subset of the  $n$ -dimensional Euclidean space  $\mathbb{R}^n$ ,  $F : K \rightarrow \mathbb{R}^n$  a continuous mapping. The variational inequality problem (VI for short) is the problem of finding a point  $x^* \in K$  such that

$$\langle F(x^*), (x - x^*) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K. \quad (40)$$

The solution set of VI (40) is denoted by  $SOL(K, F)$ .

Most existence results of solutions for VIs are proved by using various fixed point theorems or KKM approaches.

As shown by Hartmann and Stampacchia (1966), VI (40) has a solution if  $K$  is compact and  $F$  is continuous.

In general, VI can have more than one solution. We now recall one condition under which VI (40) has a unique solution, this result needs generalized monotonicity assumption.

**Definition 1.** *Let  $K$  be a convex set in  $\mathbb{R}^n$ . A mapping  $F : K \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  is said to be*

- monotone on  $K$  if  $(F(x) - F(y))^T(x - y) \geq 0, \forall x, y \in K$ ;
- strictly monotone on  $K$  if  $(F(x) - F(y))^T(x - y) > 0, \forall x, y \in K$  and  $x \neq y$ .

**Theorem 28.** (see Harker and Pang, 1990) *If  $F(x)$  is strictly monotone then VI (40) has at most one solution.*

In addition, we now recall the known monotonicity criteria for continuously differentiable mappings.

**Theorem 29.** (see Ortega and Rheinboldt, 1970) *Let  $K$  be an open convex set in  $\mathbb{R}^n$  and let  $F : K \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  be continuously differentiable on  $K$ .*

- *$F$  is monotone on  $K$  if and only if  $\nabla F$  is positive semidefinite on  $K$ ;*
- *$F$  is strictly monotone on  $K$  if  $\nabla F$  is positive definite on  $K$ .*

VIs are closely related with many problems of Nonlinear Analysis, such as complementarity, fixed point and optimization problems. In general, a complementarity problem (CP) is the problem of finding a point  $x$  such that:

$$0 \leq x \perp F(x) \geq 0 \quad (41)$$

where  $F : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . We recall that condition (41) can be alternatively defined as:

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad F(x) \cdot x = 0. \quad (42)$$

We now consider a Nash Equilibrium problem with  $N$  players, each of whom has a certain cost function  $\theta_i(x)$ , where  $x = (x^i : i = 1, \dots, N)$ , and a strategy set  $K_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ .

The problem of player  $i$ , given the other players' strategies  $\tilde{x}^i = (x^j : j \neq i)$ , is to solve the cost minimization problem in the variable  $y^i$ :

$$\begin{aligned} \min \quad & \theta_i(y^i, \tilde{x}^i) \\ \text{sub to } & y^i \in K_i. \end{aligned} \quad (43)$$

The solution set of the problem is denoted by  $\mathcal{S}_i(\tilde{x}^i)$ .

**Definition 2.** *A Nash Equilibrium is a tuple of strategies  $x = (x^i : i = 1, \dots, N)$  such that for each  $i$ ,  $x^i \in \mathcal{S}_i(\tilde{x}^i)$ .*

This problem can often be transformed into an equivalent variational inequality or complementarity problem if for each fixed  $\tilde{x}^i$  the  $\theta_i(y^i, \tilde{x}^i)$  function is convex and continuously differentiable in  $y^i$ . The following proposition gives the relationship between the solution of VI and the solution of a Nash Equilibrium (see Facchinei and Pang, 2003).

**Proposition 5.** *Let  $K_i$  be a close subset of  $\mathbb{R}^{n_i}$ . Assume that for each fixed tuple  $\tilde{x}^i$ , the function  $\theta_i(y^i, \tilde{x}^i)$  is convex and continuously differentiable in  $y^i$ .*

*Then  $x$  is a Nash equilibrium if and only if  $x \in \text{SOL}(K, F)$ , where*

$$K := K_1 \times K_2 \times \dots \times K_N,$$

$$F(x) := (\nabla_{x^i} \theta_i(x)) \quad i = 1, \dots, N$$

and

$$\nabla_{x^i} \theta_i(x) = \left( \frac{\partial \theta_i(x)}{\partial x^{i1}}, \dots, \frac{\partial \theta_i(x)}{\partial x^{in}} \right).$$

It is easy to verify that our Cournot model presented in Section 2 can be formulated as a VI, where each function  $\theta_i(y^i, \tilde{x}^i)$  is continuous and strictly convex in the variable  $y^i$ . The resulting function  $F(x)$  that defines the VI of our Cournot problem is continuous and, as in our case where we assume that price function  $p_{t,i}$ , already presented in (19), is explicitly defined as follows:

$$p_{t,i} = a_{t,i} - b_{t,i} \cdot \left( s_{t,-f,i} + s_{f,t,i} - \sum_j (flow_{t,i,j} - flow_{t,j,i}) \right)$$

one obtains a symmetric positive definite Jacobian matrix. Hence, on the basis of these considerations, we can conclude that our model has one solution.

In order to find this solution, we formulate our model in complementarity form that we here present. In the following, we denote the electricity prices defined in (19) as  $p_{t,i}$ .

$$0 \leq vc_{f,p,i} + \varphi \cdot e_p - \alpha_{t,f,i} + \beta_{t,f,p,i} \perp g_{t,f,p,i} \geq 0 \quad \forall t, f, p, i \quad (44)$$

$$0 \leq vc_{f,p,i} + \varphi \cdot e_p - \alpha_{t,f,i} + \nu_{t,f,p,i} \perp gn_{t,f,p,i} \geq 0 \quad \forall t, f, p, i \quad (45)$$

$$0 \leq vc_{f,h,i} + \varphi \cdot e_h - \alpha_{t,f,i} + \beta_{t,f,h,i} - \underline{\delta}_{t,f,h,i} + \bar{\delta}_{t,f,h,i} \perp g_{t,f,h,i} \geq 0 \quad \forall t, f, h, i \quad (46)$$

$$0 \leq vc_{f,sh,i} + \varphi \cdot e_{sh} - \alpha_{t,f,i} + \beta_{t,f,sh,i} + \eta_{t,f,sh,i} - \underline{\mu}_{t,f,sh,i} + \bar{\mu}_{t,f,sh,i} \perp g_{t,f,sh,i} \geq 0 \quad \forall t, f, sh, i \quad (47)$$

$$0 \leq \frac{-\partial p_{t,i}}{\partial s_{t,f,i}} \cdot s_{t,f,i} - p_{t,i} + \alpha_{t,f,i} \perp s_{f,p,i} \geq 0 \quad \forall f, p, i \quad (48)$$

$$0 \leq shc_{f,sh,i} - \rho_{f,sh,i} \cdot \eta_{t,f,sh,i} - \underline{\theta}_{t,f,sh,i} + \bar{\theta}_{t,f,sh,i} \perp sh_{t,f,sh,i} \geq 0 \quad \forall t, f, sh, i \quad (49)$$

$$0 \leq fc_{f,p,i} - \sum_t \frac{\tau_t}{\tau} \nu_{t,f,p,i} \perp I_{f,p,i} \geq 0 \quad \forall f, p, i \quad (50)$$

$$\sum_p g_{t,f,p,i} + \sum_p gn_{t,f,p,i} - s_{t,f,i} = 0 \quad (\alpha_{t,f,i}) \quad \forall t, f, i \quad (51)$$

$$0 \leq \bar{G}_{f,p,i} - g_{t,f,p,i} \perp \beta_{t,f,p,i} \geq 0 \quad \forall t, f, p \neq h, p \neq sh, i \quad (52)$$

$$0 \leq \bar{TH}_{f,p,i} - g_{t,f,p,i} - R_{t,f,p,i} \perp \gamma_{t,f,p,i} \geq 0 \quad \forall t, f, p = h, p = sh, i \quad (53)$$

$$0 \leq g_{t,f,h,i} - \underline{gh}_{f,h,i} \perp \underline{\delta}_{t,f,h,i} \geq 0 \quad \forall t, f, h, i \quad (54)$$

$$0 \leq \bar{gh}_{f,h,i} - g_{t,f,h,i} \perp \bar{\delta}_{t,f,h,i} \geq 0 \quad \forall t, f, h, i \quad (55)$$

$$0 \leq R_{t,f,p,i} + \bar{R}_{f,p,i} \perp \bar{\xi}_{t,f,p,i} \geq 0 \quad \forall t, f, p = h, p = sh, i \quad (56)$$

$$0 \leq \bar{R}_{f,p,i} - R_{t,f,p,i} \perp \underline{\xi}_{t,f,p,i} \geq 0 \quad \forall t, f, p = h, p = sh, i \quad (57)$$

$$0 \leq \rho_{f,sh,i} \cdot sh_{t,f,sh,i} - g_{t,f,sh,i} \perp \eta_{t,f,sh,i} \geq 0 \quad \forall t, f, sh, i \quad (58)$$

$$0 \leq sh_{t,f,sh,i} - \underline{sh}_{f,sh,i} \perp \underline{\theta}_{t,f,sh,i} \geq 0 \quad \forall t, f, sh, i \quad (59)$$

$$0 \leq \bar{sh}_{f,sh,i} - sh_{t,f,sh,i} \perp \bar{\theta}_{t,f,sh,i} \geq 0 \quad \forall t, f, sh, i \quad (60)$$

$$0 \leq g_{t,f,sh,i} - \underline{gsh}_{f,sh,i} \perp \underline{\mu}_{t,f,sh,i} \geq 0 \quad \forall t, f, sh, i \quad (61)$$

$$0 \leq \overline{gsh}_{f,sh,i} - g_{t,f,sh,i} \perp \overline{\mu}_{t,f,sh,i} \geq 0 \quad \forall t, f, sh, i \quad (62)$$

$$0 \leq I_{f,p,i} - gn_{t,f,p,i} \perp \nu_{t,f,p,i} \geq 0 \quad \forall t, f, p, i \quad (63)$$

$$\beta_{t,f,h,i} - \overline{\xi}_{t,f,h,i} + \underline{\xi}_{t,f,h,i} = 0 \quad (R_{t,f,h,i}) \quad \forall t, f, h, i \quad (64)$$

The complementarity conditions associated to the market operator' problem are as follows:

$$0 \leq -a_{t,i} + b_{t,i} \cdot d_{t,i} + \psi_{t,i} \perp d_{t,i} \geq 0 \quad \forall t, i \quad (65)$$

$$\sum_f s_{t,f,i} - \sum_j (flow_{t,i,j} - flow_{t,j,i}) - d_{t,i} = 0 \quad (\psi_{t,i}) \quad \forall t, i \quad (66)$$

$$0 \leq \overline{Flow}_{i,j} - flow_{t,i,j} \perp \sigma_{t,i,j} \geq 0 \quad \forall t, i, j \quad (67)$$

$$0 \leq \psi_{t,i} - \psi_{t,j} + \sigma_{t,i,j} - \sigma_{t,j,i} \perp flow_{t,i,j} \geq 0 \quad \forall t, i, j \quad (68)$$

The complementarity condition associated to the emission market's problem is as follows:

$$0 \leq E - \sum_{t,f,p,i} e_p \cdot ((g_{t,f,p,i} + gn_{t,f,p,i}) \cdot \tau_t) \perp \varphi \geq 0 \quad (69)$$

### 3. Perfect competition model

We modify the equilibrium model presented in Section 2 by assuming that generators operate in a perfectly competitive way. Under this assumption, generators are price takers and sell electricity at the zonal price  $p_{t,i}$  defined by the market. This implies a slight modification of their objective function that becomes as reported in (70) below. The price  $p_{t,i}$  is now the dual variable of the market clearing condition in the Market Operator's problem (see (71)).

All the remaining constraints are as in Section 2.

$$\begin{aligned}
& \text{Max} \left\{ \sum_{t,i} p_{t,i} \cdot s_{t,f,i} - \sum_{p,i} v_{c_{f,p,i}} \cdot (g_{t,f,p,i} + g_{n_{t,f,p,i}}) \right\} \cdot \tau_t + \quad (70) \\
& + \left\{ \varphi \cdot [GE_f - \sum_{t,p,i} e_p \cdot (g_{t,f,p,i} + g_{n_{t,f,p,i}})] - \sum_{i,t} sh_{c_{f,sh,i}} \cdot sh_{t,f,sh,i} \right\} \cdot \tau_t + \\
& \quad - \sum_{p,i} f_{c_{f,p,i}} \cdot I_{f,p,i} \cdot \tau
\end{aligned}$$

$$\sum_f s_{t,f,i} - \sum_j (flow_{t,i,j} - flow_{t,j,i}) - d_{t,i} = 0 \quad (p_{t,i}) \quad \forall t, i \quad (71)$$

The complementarity conditions of the perfectly competitive market are the same of those of the Cournot model except for conditions (48), (65) and (66) that respectively become:

$$0 \leq -p_{t,i} + \alpha_{t,i} \perp s_{t,f,i} \geq 0 \quad \forall t, f, p, i \quad (72)$$

$$0 \leq -a_{t,i} + b_{t,i} \cdot d_{t,i} + p_{t,i} \perp d_{t,i} \geq 0 \quad \forall t, i \quad (73)$$

$$\sum_f s_{t,f,i} - \sum_j (flow_{t,i,j} - flow_{t,j,i}) - d_{t,i} = 0 \quad (p_{t,i}) \quad \forall t, i \quad (74)$$

## 4. Application to the Italian electricity market: no power exchanges with foreign countries

### 4.1 Market description

We apply our models to a prototype of the Italian electricity market as depicted on Figure 1. This market is discretized into eleven zones of which six are geographical (North, Center-North, Center-South, South, Sicily and Sardinia) and five are virtual poles with limited production (Monfalcone,

Foggia, Brindisi, Rossano, Priolo). Some of the geographical zones group together several Italian regions. These are:

1. **North** which includes Valle d'Aosta, Piemonte, Liguria, Lombardia, Trentino-Alto Adige, Veneto, Friuli-Venezia Giulia and Emilia-Romagna. Note that Liguria, Veneto, Friuli Venezia Giulia and Emilia Romagna are coastal regions;
2. **Center-North** which assembles Toscana, Umbria and Marche;
3. **Center-South** which gathers Lazio, Abruzzo and Campania;
4. **South** which accounts for Molise, Puglia, Basilicata and Calabria.

Following the network representation provided by Terna, the Italian Transmission System Operator (TSO), we assume that each zone is connected to the others by two connections with different limited transfer capacities that depend on the flow directions. The transfer limits are listed in Table 1<sup>19</sup> and are used to define the parameter  $\overline{Flow}_{i,j}$  in condition (38).

A set of eight generators<sup>20</sup> produces electricity running wind, run-on-river (hydro), geothermal, photovoltaic, coal, CCGT, other gas and oil based power plants depending on their availability. Capacity data for all these technologies are taken from Terna<sup>21</sup> and from the annual reports of the aforementioned power companies. Our analysis is calibrated with 2009 data. Electricity is generated by existing and new power plants. In order to simplify both the database and the interpretation of the results, we assume that old and new capacity have identical variable and emission costs. The models

---

<sup>19</sup>See Terna, (2011). Valori dei limiti di transito tra le zone di mercato REV.14. Available at [http://www.terna.it/default/Home/SISTEMA\\_ELETTRICO/mercato\\_elettrico/Procedura\\_valutazione\\_limiti\\_e\\_limiti\\_transito.aspx](http://www.terna.it/default/Home/SISTEMA_ELETTRICO/mercato_elettrico/Procedura_valutazione_limiti_e_limiti_transito.aspx)

<sup>20</sup>The considered companies are: Enel, Edison, Eni, Edipower, Eon, A2A, TirrenoPower and a fringe that collects all the remaining small power companies.

<sup>21</sup>See [http://www.terna.it/default/Home/SISTEMA\\_ELETTRICO/statistiche/dati\\_statistici.aspx](http://www.terna.it/default/Home/SISTEMA_ELETTRICO/statistiche/dati_statistici.aspx)

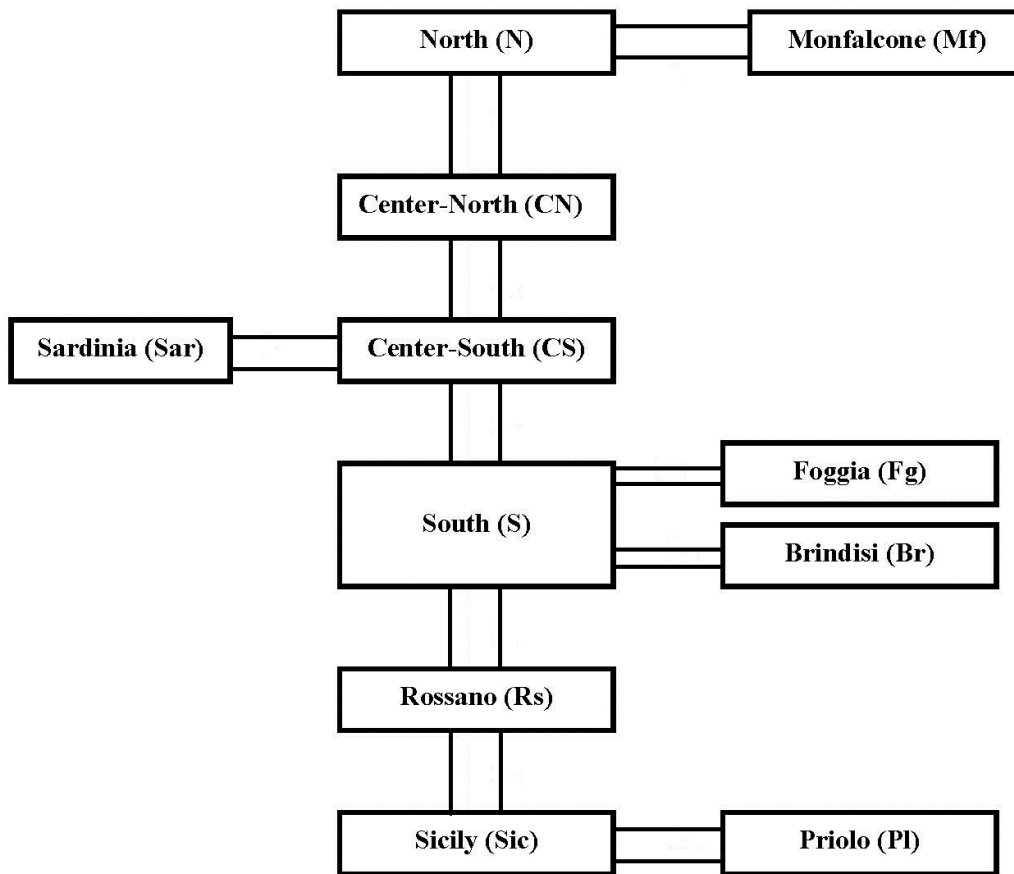


Figura 1: Italian Network

MW	N	CN	CS	S	Sic	Sar	Mf	Fg	Br	Rs	Pl
N	0	3450	0	0	0	0	10000	0	0	0	0
CN	1700	0	1750	0	0	0	0	0	0	0	0
CS	0	2250	0	10000	0	420	0	0	0	0	0
S	0	0	3700	0	0	0	0	10000	10000	10000	0
Sic	0	0	0	0	0	0	0	0	0	275	10000
Sar	0	0	450	0	0	0	0	0	0	0	0
Mf	1030	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Fg	0	0	0	1200	0	0	0	0	0	0	0
Br	0	0	0	5200	0	0	0	0	0	0	0
Rs	0	0	0	1613	150	0	0	0	0	0	0
Pl	0	0	0	0	315	0	0	0	0	0	0

Tabella 1:  $\overline{Flow}_{i,j}$  of the Italian network only

obviously allow one to change this assumption and to apply different efficiency rates to new plants. Doing so in this prototype study would however mix fundamental economic phenomena and sometimes arbitrary data differentiations and hence cloud the interpretation of the results. For this reason, we do not consider plant depreciation and maintenance costs.

The time horizon is a day subdivided into twenty-four hours. Empirical data referred to the last years showed that the variability of the Italian electricity consumption in the four seasons is low. The consumption in summer time is similar to that in winter because of the use of the air conditioning systems. For this reason, we decide to take a prototype day as reference time horizon. We model electricity demand by using an affine inverse demand function depending on time and zones. Demand function is constructed taking an elasticity of 0.1 for all consumers; reference demand and price used to compute demand parameters are taken from the Italian Market Operator website<sup>22</sup>.

<sup>22</sup>See Gestore Mercato Elettrico (GME) website at [http://www.mercatoelettrico.org/En/download/DownloadDati.aspx?val=MGP\\_PrezziConvenzionali](http://www.mercatoelettrico.org/En/download/DownloadDati.aspx?val=MGP_PrezziConvenzionali)

We develop and analyze a variety of scenarios in the framework of the two market forms previously analyzed. This allows us to evaluate the EU ETS impacts on electricity prices, investments and generators' profits under different assumptions.

More specifically, scenarios are subdivided into two groups, each representing a specific EU ETS phase. The first group describes the situation of the Italian electricity market in 2009 (second ETS phase), while the second studies the new setting of the third EU ETS phase in 2020 (see Table 3). In all these scenarios, we assume that generators operate under the EU ETS regime and can always invest in new capacity. Because renewable still needs to be incentivized today, we assume that generators receive subsidies used to abate the fixed costs they face for investing in new wind and photovoltaic plants.

In the 2009 scenarios, we describe the setting of the current EU ETS phase without ("ETS") and with ("ETS, inc") incentives in new renewable power plants. We apply these tests both to the "Cournot" and "Perfect" competition market organizations.

<b>Scenario 2009</b>	<b>Description</b>
Cournot, ETS	Oligopolistic competition with ETS regulation and investments
Cournot, ETS, inc	Oligopolistic competition with ETS regulation, investments and incentives in new renewable technologies
Perfect, ETS	Perfect competition with ETS regulation and investments
Perfect, ETS, inc	Perfect competition with ETS regulation, investments and incentives in new renewable technologies

Tabella 2: 2009 scenarios

In the 2020 group, we analyze scenarios with and without ("nodev") development of the European economy. For both of them, we also consider the cases with and without incentives ("inc") in renewables. To model economic development in 2020, we increase the 2009 reference electricity demand

and prices used to construct the inverse demand function<sup>23</sup> by 22,4% and 14% respectively, while these increases are only of 14.3% and 11% in case of economic stagnation<sup>24</sup>.

Scenario 2020	Description
Cournot, ETS	Oligopolistic competition with ETS regulation and investments
Cournot, ETS, inc	Oligopolistic competition with ETS regulation, investments and incentives in new renewable technologies
Cournot, ETS, nodev	Oligopolistic competition with ETS regulation and investments in the case of no economic development
Cournot, ETS, inc, nodev	Oligopolistic competition with ETS regulation, investments incentives in new renewable technologies in the case of no economic development
Perfect, ETS	Perfect competition with ETS regulation and investments
Perfect, ETS, inc	Perfect competition with ETS regulation, investments and incentives in new renewable technologies
Perfect, ETS, nodev	Perfect competition with ETS regulation and investments in the case of no economic development
Perfect, ETS, inc, nodev	Oligopolistic competition with ETS regulation, investments and incentives in new renewable technologies in the case of no economic development

Tabella 3: 2020 scenarios

The emission market that we model is limited to the Italian electricity market.

Given this restriction, the total emission cap  $E$  computed for the 2009 scenarios corresponds exactly to the sum of the NAPs of the electricity generating companies included in the simulation tests that we took from the European Commission website<sup>25</sup>. It amounts to about 94 Millions tons of CO<sub>2</sub>. Considering the new disposals introduced by Directive 2009/29/EC,

<sup>23</sup>Here we refer to the parameters used to construct the inverse demand function.

<sup>24</sup>See Terna, 2006 and ICCF, 2005.

<sup>25</sup>See [http://ec.europa.eu/clima/policies/ets/allocation/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/clima/policies/ets/allocation/index_en.htm)

we compute the 2020 cap by reducing by 15% the 2009 cap<sup>26</sup>.

Finally, our mixed complementarity problems are implemented in GAMS language using PATH as solver.

## 4.2 Results

In this section, we report the results of our analysis. In particular, we want to show the effects of the EU ETS on electricity prices, investments and generators' profits in the different scenarios under the assumption that the Italian power market has no exchanges with foreign countries.

### 4.2.1 Impact on prices

Figures 2 and 3 define the trend of the national hourly electricity prices respectively in 2009 and 2020. For 2009, we consider all scenarios listed in Table 2, while for 2020, we select only four among the six cases proposed in Tables 3.

Looking at Figures 2 and 3, one can first notice that electricity prices are higher in the oligopolistic market organization than in perfect competition. A second remark is that electricity prices are generally lower when incentives are given to investments in renewables. This happens both in 2009 (see Figure 2) and 2020<sup>27</sup> and can be explained by the fact that these incentives enhance investments in less pollutant plants which contribute to lessen CO<sub>2</sub> allowance price and thus electricity prices. In fact, as verified in the first two phases of application of the EU ETS, generators are able to transfer their carbon costs in power prices. This effect is particularly evident when comparing the two perfect competition cases "Perfect, ETS" and "Perfect, ETS, inc" in Figure 2. This Figure shows that electricity prices in the "Perfect, ETS" case are almost double than in "Perfect, ETS, inc". This big price

---

<sup>26</sup>The 15% cut corresponds to a yearly reduction of 1,74% of the 2009 cap as foreseen by the new ETS Directive.

<sup>27</sup>We do not report this case in Figure 3.

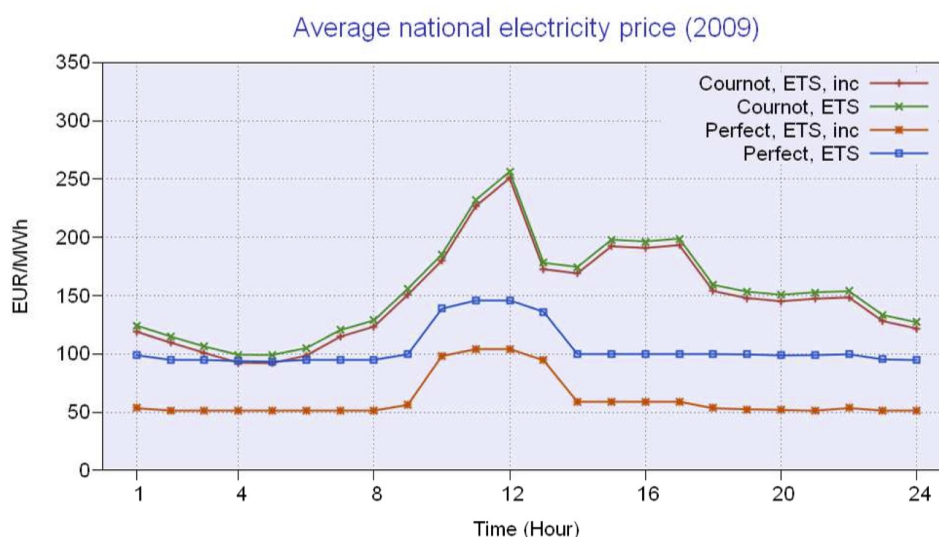


Figure 2: Average national electricity prices in 2009 without power exchanges with foreign countries (€/MWh)

gap is mainly due to the CO<sub>2</sub> allowance prices. In fact, in a perfect competition framework, the electricity prices reflect the marginal operating costs of power plants used to supply the last unit of electricity at the equilibrium point. In our models, these marginal operating costs are represented by fuel and emission costs. Since, in the “Perfect, ETS” and “Perfect, ETS, inc” cases, the plants at the “margin” used to serve energy at the equilibrium are identical or almost equivalent in terms of fuel costs and emission factors, the significant reduction of the energy prices in the “Perfect, ETS, inc” can be ascribed to allowance prices. This happens in each hour. In fact, in the “Perfect, ETS, inc” of the 2009 setting, the emission price is 41% lower than in “Perfect, ETS” case without incentives. Note that, these lower electricity prices also imply a significant rise of power consumption. In fact, the daily increase compared to the “Perfect, ETS” amount is about of 102 GW. We register the same phenomenon in the 2009 “Cournot, ETS, inc” case, but in a smaller proportion because the CO<sub>2</sub> price decreases only by 23.5% compared

to the “Cournot, ETS” case and the raise of the daily power consumption is just of 9 GW.

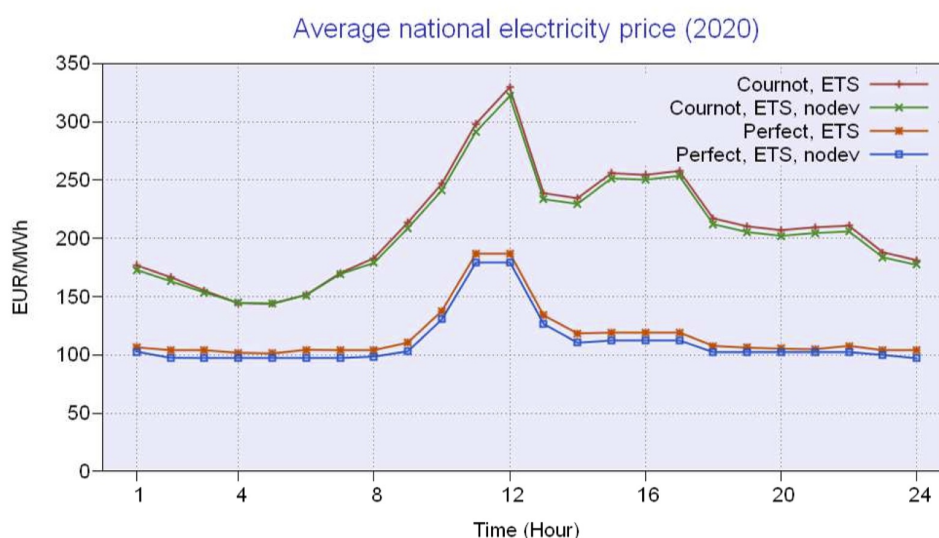


Figure 3: Average national electricity prices in 2020 without power exchanges with foreign countries (€/MWh)

Figure 3 depicts the electricity prices in 2020 in the cases with and without economic development for both the “Perfect” and the “Cournot” models. Again, electricity is more expensive when generators are Cournot players than in the case where they assume a perfectly competitive behavior. Moreover, comparing Figure 3 with Figure 2, one can see that 2020 power prices are higher than 2009 ones, especially in the two “Cournot” scenarios.

Since the difference between the total quantity of electricity produced in the cases of economic growth and stagnation is small, we obtain similar electricity prices in these two cases. This happens both in the Cournot and in the perfect competition market organizations<sup>28</sup>.

<sup>28</sup>In the “Perfect, ETS, nodev” electricity generation is only 7% lower than in the

### 4.2.2 Impact on investments

In this section, we describe how the market organization (Cournot vs perfect competition) and the EU ETS can affect investment strategies. In our simulations, we assume that generators can only invest in the geographical zones<sup>29</sup> (namely North, Center-North, Center-South, South, Sicily and Sardinia).

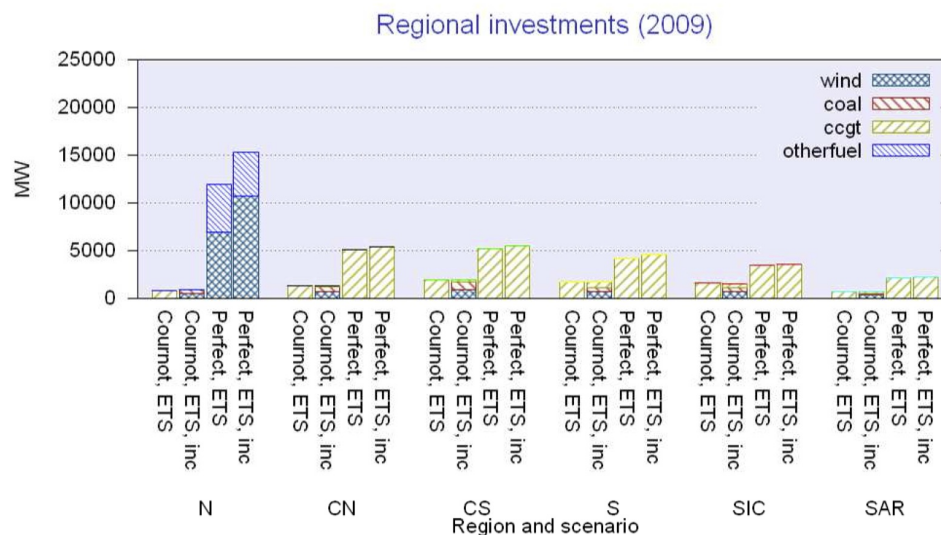


Figure 4: Zonal investments in 2009 by source of energy without power exchanges with foreign countries (MW)

In Figure 4, we report the results of the 2009 scenarios “ETS”, “ETS, inc” in the “Cournot” and “Perfect” competition cases. A first result is that perfect competition enhances investments compared to the situation where “Perfect, ETS”. We have an identical reduction in the “Cournot, ETS, nodev” compared to “Cournot, ETS”.

<sup>29</sup>Note that we assume no investments in hydro plants since the hydroelectric resources are almost fully exploited in Italy. We do not put any investment restrictions on the other types of technologies.

generators are Cournot players. This happens both in the scenarios with and without incentives. Considering the “Perfect” scenarios, investments differ by zone (see Figure 4). In the North, there are investments in wind and in other-gas based plants, while in the other zones generators only invest in CCGT. These investment choices can be explained by the fact that generators aim to complete their technological mix in the different zones. In fact, in the North where almost the 57% of the Italian available CCGT plants are concentrated, generators prefer to build new wind<sup>30</sup> and other-gas plants respectively a base and a peak load technologies. On the contrary, in the other zones, generators invest in CCGT that is an efficient technology both in terms of production and emission generation and, moreover, it compensates for the intermittence problems created by wind and photovoltaic plants that have been installed in Central-Southern Italy in these recent years. Even in presence of incentives (“Perfect, ETS, inc”) investment strategies do not change, even though their global level is higher than in “Perfect, ETS”. This is particularly evident in the North where incentives increase wind investments by 35% compared to the “Perfect, ETS” case. When considering the two “Cournot” scenarios in 2009 (see Figure 4), one can notice that investment tendencies depend on incentives policies. When renewables sources are not incentivized (“Cournot, ETS”), generators invest in CCGT in all zones. With incentives in renewables (“Cournot, ETS, inc”), the investment mix changes and includes wind, CCGT and a small proportion of coal plants. This apparently surprising result may be explained by the fact that coal plants become competitive when incentives are given to renewables. This kind of technology is characterized by relatively low fixed and fuel costs and a high emission factor. But, in “Cournot, ETS, inc”, carbon price is much lower than in all other 2009 scenarios<sup>31</sup>. This happens because, compared to a per-

---

<sup>30</sup>We recall that the Northern zone includes also some Italian coastal regions as illustrated in Section 4.1.

<sup>31</sup>In the “Cournot, ETS, inc”, carbon price amounts to 39 €/MWh, while it is 51 €/MWh in the “Cournot, ETS”. Under perfect competition, CO<sub>2</sub> emission prices amount to 207 €/MWh and 112 €/MWh respectively in the “Perfect, ETS” and in the “Perfect,

fectly competitive market, oligopolistic generators are able to reduce their electricity output. This, in turn, implies a decrease of both CO<sub>2</sub> emission level and price. In the “Cournot, ETS, inc” scenario, these emissions are further reduced by the increased use of wind production.

Note that, besides these investments, generators also use existing plants to produce electricity. In particular, both with and without incentives, they run all renewables<sup>32</sup> and CCGT technologies. While renewables are run at full capacity in almost all hours, existing CCGT is mainly used in the central hours of the day (from 10 a.m. to 5 p.m.).

In 2020, the overall investment level is higher than in 2009 both under the Cournot and the perfect competition assumptions. In Figure 5, we report the results of the 2020 scenarios in the cases with and without economic development. Under perfect competition, generators’ investment strategies remain almost unchanged at zonal level with respect to the 2009 situation<sup>33</sup>. This is particularly true in the “Perfect, ETS, nodev” scenario where there are still investments in wind and other-gas power plants in the North and new CCGT plants become operative in the other zones<sup>34</sup>. These investments in other-gas plants disappear in presence of economic development because generators only build new wind stations in the North. With incentives in renewables (these cases are not reported in Figure 5), investments increase

---

ETS, inc”. We know that these two prices are not realistic, but they can be compatible with our model assumptions. In fact, we assume that the emission market involves the electricity market only and experience has shown that the power market has been always short in emission permits. This becomes particularly true in the case of the Italian electricity market because its production is mainly based on fossil-fired power plants. In fact, we have observed that an increase of the emission cap determines a decrease of the CO<sub>2</sub> allowance price.

<sup>32</sup>Wind, hydro, photovoltaic, and geothermic.

<sup>33</sup>Compare the “Perfect” scenarios reported in Figure 5 with the “Perfect, ETS” case in Figure 4.

<sup>34</sup>Note that, in 2009, investments in other-gas plants amount to 42% and 30% of the total investment level in the North respectively in the “Perfect, ETS” and “Perfect, ETS, inc” scenarios. In the considered 2020 scenario, this proportion drops to 9%.

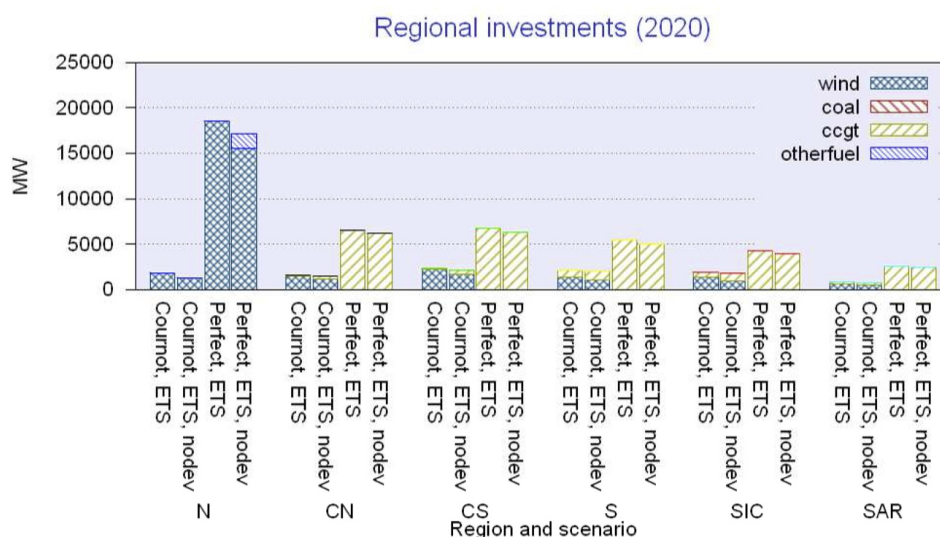


Figure 5: Zonal investments in 2020 by source of energy without power exchanges with foreign countries (MW)

both in the scenarios with and without economic development and the investment mix remains unchanged in all zones with the exception of the North where only new wind plants appear.

Considering now the “Cournot” scenarios in Figure 5 and comparing them with the case “Cournot, ETS” in Figure 4, one can see that generators reduce their global investments in CCGT in favor of wind in all zones. This is particularly evident in the North. This change of tendency can be considered as a direct effect of the compulsory auctioning system imposed by Directive 2009/29/EC on energy sector during the third EU ETS phase. Since the aim of oligopolistic generators is to maximize their profits, they try to reduce their emission costs by investing in renewables. This happens both with and without economic developments.

In presence of incentives in renewables<sup>35</sup>, investments in wind almost double in the “Cournot, ETS, inc” and triple in the “Cournot, ETS, inc,

<sup>35</sup>Again, results are not reported in Figure 5.

nodev” with respect to the corresponding cases without incentives (see Figure 5). However, incentives induce generators to build new coal plant both with and without economic development. The reasoning, illustrated for the 2009 scenarios with incentives, also holds for these 2020 cases.

### 4.2.3 Impact on generators’ profits

Tables 4 and 5 respectively report the profit analysis in the 2009 and 2020 scenarios. In particular, they list the “Generation Revenues”, the “Generation Costs”, the “Emission Revenues” and the “Emission Costs”. The first two terms respectively indicate the revenues and the (fixed and variable) costs of producing electricity from new and existing plants. The difference between the other two shows the emission opportunity costs that affect generators’ profits. “Emission Revenues” corresponds to the economic value of the permits grandfathered to generators in the first two ETS phases, while “Emission Costs” is the cost of purchasing permits on the emission market. Considering the new rules imposed by Directive 2009/29/EC, in the 2020 scenarios, the column “Emission Revenues” disappears since during the third EU ETS phase the power sector will buy all needed permits through an auctioning system. Note in our analysis, we do not consider the windfall profits problem, raised during the first two ETS phases, that has been extensively discussed and proved in literature (see Chen et al., 2008, Kara et al., 2008, Linares et al., 2008, Lise et al., 2010, Sijm et al., 2006).

As expected, the generators’ profits in an oligopolistic market are always higher than in perfect competition. This happens both in 2009 and 2020 scenarios, but it is particularly evident in 2020 when generators no longer receive permits for free. The comparison between the results in Tables 4 and 5 shows that the profits of oligopolistic (“Cournot”) generators are higher in 2020 than in 2009, but this is not true for the “Perfect” scenarios. This depends on the fact that in the “Cournot” scenarios, generators are able to transfer almost all their emission costs in the final price paid by consumers. In 2020, since generators do not receive any free permits, they set an elec-

tricity price that more than compensates the cost of emissions. In perfect competition, instead, electricity price is defined by the market at lower level and generators are assumed to be price takers.

Scenarios	Generation Revenues (M€)	Generation Costs (M€)	Emission Revenues (M€)	Emission Costs (M€)	Total Profits (M€)
<b>Cournot, ETS</b>	40,010	10,615	4,317	4,797	28,915
<b>Cournot, ETS, inc</b>	38,997	10,779	3,268	3,631	27,854
<b>Perfect, ETS</b>	38,366	11,149	17,387	19,319	25,284
<b>Perfect, ETS, inc</b>	25,293	10,144	9,405	10,450	14,104

Tabella 4: Generators' profits in 2009 scenarios without power exchanges with foreign countries

In almost all scenarios, generators gain lower profits when receiving incentives on renewables because the subsidies to these technologies lead to lower electricity prices while maintaining relatively high investment costs. Finally, in the 2020 case with no economic developments, generators' profits are lower than in the corresponding cases with economic growth.

Scenarios	Generation Revenues (M€)	Generation Costs (M€)	Emission Costs (M€)	Total Profits (M€)
<b>Cournot, ETS</b>	62,817	21,698	8,086	33,034
<b>Cournot, ETS, inc</b>	53,665	17,920	2,578	33,166
<b>Cournot, ETS, nodev</b>	57,306	19,044	7,720	30,542
<b>Cournot, ETS, inc, nodev</b>	49,156	16,156	2,578	30,417
<b>Perfect, ETS</b>	52,076	24,231	19,583	8,262
<b>Perfect, ETS, inc</b>	36,162	17,761	13,169	5,231
<b>Perfect, ETS, nodev</b>	47,084	20,790	18,211	8,083
<b>Perfect, ETS, inc, nodev</b>	27,081	13,864	9,068	4,149

Tabella 5: Generators' profits in 2020 scenarios without power exchanges with foreign countries

## 5. Application to the Italian electricity market: power exchanges with foreign countries

In Section 4, we assume that the Italian electricity market is closed and there are no power exchanges with foreign countries. However, imports from foreign countries play an important role in the determining the equilibrium of the Italian market. For this reason, in this Section, we analyze the EU ETS impacts on prices, investments and generators' profit when power imports and exports with other countries are allowed. To this aim, we modify the market representation of Section 4 and we include the five foreign countries to which the Italian transmission system is connected. These are: France (FR), Switzerland (CH), Austria (AT), Slovenia (SLO) and Greece (GR). Each country corresponds to a zone which is linked to Italy with two capacitated lines. France, Switzerland, Austria and Slovenia are connected with the North, while Greece with the virtual pole Brindisi. The transfer limits of these additional lines are reported in Table 6 in Appendix A, while this new network representation is depicted in Figure 6.

We assume that, in each of the foreign zone, there is just one power producer who operates all the capacity available in that specific country<sup>36</sup> and can invest in new plants in that zone only. Note that this simplified representation of the foreign energy markets is in line with our goal. Our aim, in fact, is to analyze whether the inclusion of power exchanges with foreign countries may significantly modify Italian generators' investment strategies. For this reason, we are interested in endogenously determining the amount of energy that Italy exchanges with these five foreign countries. This can be done by endogenously modeling the market equilibrium of these foreign zones, namely the total quantity of electricity supplied and consumed in

---

<sup>36</sup>Data for the installed capacity in the foreign zones are taken from Eurostat <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/portal/page/portal/energy/data/database> and EWEA <http://www.ewea.org/index.php?id=1486>

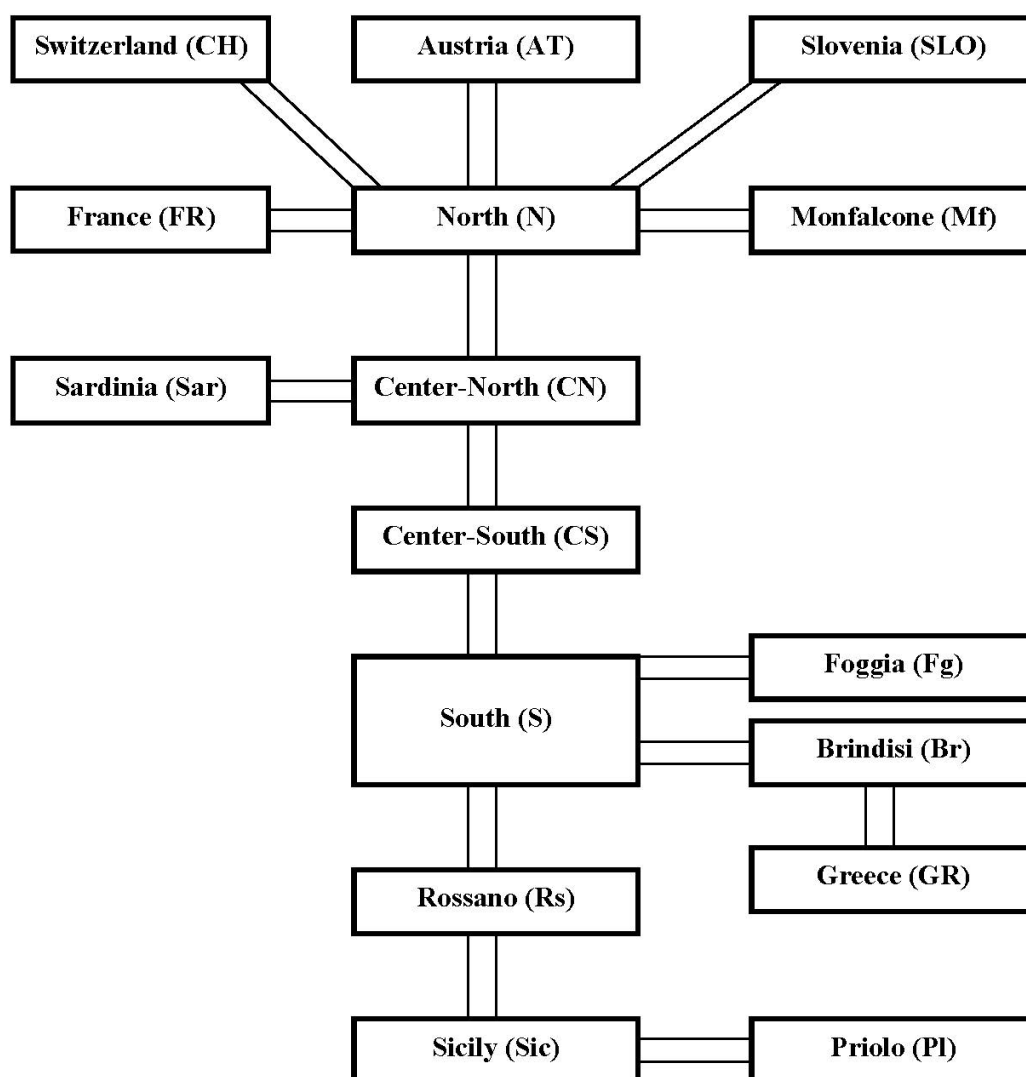


Figura 6: Italian network including foreign countries

these markets. This also means that the information on who produces those electricity quantities is less relevant for our analysis. Another consequence of the application of this assumption is that the electricity equilibrium prices in the foreign zones are always determined following a perfectly competitive approach.

The inclusion of the foreign countries also lead to a modification of the technology set. In fact, we added nuclear<sup>37</sup> that is operated in France, Switzerland and Slovenia to the list of technologies indicated in Section 4.1. Again, the merit order with which all these plants are operated is endogenously determined. Moreover, in order to be in line with the representation of the Italian market adopted in Section 4.1 and make results comparable with those described in Section 4.2, we assume that the time horizon is still one day subdivided in twenty-four hours. For the construction of the inverse demand function in the foreign zones, we still assume that the elasticity is of 0.1 for all consumers. The reference hourly demand in these zones are provided by ENTSO-E<sup>38</sup>, while the reference prices are taken from the Italian Market Operator website<sup>39</sup>.

Recall that France, Austria, Slovenia and Greece are also included in the EU ETS regulation<sup>40</sup>. Their inclusion in energy market has also implied an extension of the emission market and an increase of the total emission cap  $E$  that, in this case, also accounts for the NAPs of the power installations operated in these four foreign zones.

Finally, this extended version of the Italian electricity market has been studied under the same scenarios described in Tables 2 and 3 of Section 4.1 respectively for 2009 and 2020.

---

<sup>37</sup>We assume that investments in new nuclear plants are only allowed in France.

<sup>38</sup>We compute an average hourly demand over the daily consumption of each country. Data are taken from ENTSO-E <https://www.entsoe.eu/resources/data-portal/country-packages/>

<sup>39</sup>[http://www.mercatoelettrico.org/It/Download/DownloadDati.aspx?val=MGP\\_Prezzi](http://www.mercatoelettrico.org/It/Download/DownloadDati.aspx?val=MGP_Prezzi)

<sup>40</sup>Switzerland is not covered by this environmental regulation and thus is not included in the emission market.

## 5.1 Results

The possibility to import/export power with foreign countries partially changes our model results. This section discusses the EU ETS impacts on Italian energy prices, investments and generators' profit under this more realistic assumption.

A general remark is that the inclusion of the foreign zones induces Italian consumers to raise their electricity consumption compared to the scenarios analyzed in Section 4.2. This Italian demand increase can be considered as a direct consequence of the electricity and CO<sub>2</sub> price decreases due to the enlargement of both the energy and emission markets. This raise of the Italian electricity consumption is covered by the a higher exploitation of national (new and existing) plants and by imports from all foreign zones. The border connections from France, Austria, Slovenia to the North of Italy are congested in almost all hours in all considered scenarios. The same happens with the line going from Greece to Brindisi. The North also imports huge amounts of electricity from Switzerland and the corresponding border line is usually congested in peak hours<sup>41</sup>.

We first analyze the effects of the EU ETS and the power exchanges with foreign countries on the national hourly electricity prices in 2009 and 2020 whose trends are respectively illustrated in Figures 7 and 8. We consider the same scenarios presented in Figures 2 and 3 of Section 4.2.1.

As already highlighted in the former analysis, one can see that, both in 2009 and 2020, national electricity prices are generally higher in the oligopolistic organization of the Italian market than in perfect competition. In addition, prices are lower when incentives are given to new renewables plants. In fact, with the application of this incentive policy, generators invest more in clean technologies, namely wind both in Italy and in foreign zones

---

<sup>41</sup>This happens because the capacity of the line Switzerland-North is higher than those of the other foreign countries. See corresponding values in Table 6 of Appendix A.

and nuclear in France<sup>42</sup> and this leads to a reduction of the CO<sub>2</sub> prices<sup>43</sup>. For instance, the allowance prices in the “Perfect, ETS, inc” and “Cournot, ETS, inc” scenarios of 2009 are respectively of 56.88 €/ton and 24.81 €/ton compared to the 70.48 €/ton and 47.23 €/ton in the corresponding scenarios without incentives. We already discussed the implications of this carbon cost reduction on electricity prices in Section 4.2.1.

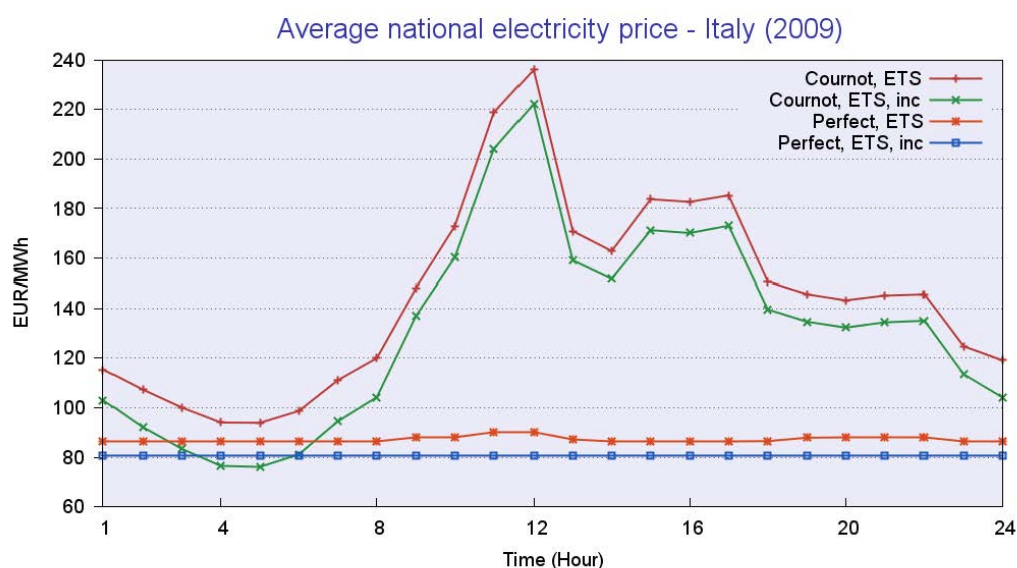


Figure 7: Average national electricity prices in 2009 with power exchanges with foreign countries (€/MWh)

The analysis of national electricity prices trends per year and market organization shows some interesting features. First, one can notice that electricity prices in Figure 7 are generally lower than in Figure 2 that analyzes

<sup>42</sup>Note that France invests in new nuclear units in almost all scenarios (see Figures 9 and 10). Nuclear can not be enumerated in the renewables technologies, but it can be considered a “clean” technology since it does not cause CO<sub>2</sub> emissions.

<sup>43</sup>In other words, this means that the scarcity of CO<sub>2</sub> allowances compared to the generated emissions is reduced compared to the situation without incentives.

the same 2009 scenarios<sup>44</sup>. This can be considered as a positive effect of the enlargement of the Italian electricity markets. In fact, in this alternative market configuration, Italian generators prefer importing foreign energy instead of using extremely dirty technologies that tend to increase electricity prices. Moreover, the consequent extension of the emission market to the French, Austrian, Slovenian and Greek power installations contributes to lessen the CO<sub>2</sub> prices compared to the corresponding cases presented in Section 4.2.1<sup>45</sup>. However, the “Perfect, ETS, inc” case in Figure 7 represents an exceptional case. First, national power prices are constant over time and, second, they are, on average, higher than in the corresponding case reported in Figure 2, even though the carbon cost is lower<sup>46</sup>. This is mainly due to the congestion costs. In each hour, lines connecting Italy with France, Austria, Slovenia and Greece are in each hour saturated respectively in the North and Brindisi directions. Italian generators also import significant amounts of energy from Switzerland. These vary according to the hourly national demand and are higher in the peak hours, but they never congest the corresponding lines. Moreover, lines connecting the Italian internal zones are never congested and thus prices are identical in all zones.

Figure 8 reports the electricity prices in 2020 in the scenarios with and

---

<sup>44</sup>For instance, the price range for the “Perfect, ETS” case in Figure 7 is between 86 €/MWh and 90 €/MWh, while in Figure 2, this range is between 100 €/MWh and 150 €/MWh.

<sup>45</sup>This happens because, with the inclusion of the foreign countries in the energy market, the proportion of clean power plants (nuclear and renewables) increases. We recall that the 2009 CO<sub>2</sub> prices of the “Perfect, ETS”, “Perfect, ETS, inc”, “Cournot, ETS” and “Cournot, ETS, inc” scenarios in Section 4.1 respectively amounted to 207 €/ton, 112 €/ton, 51 €/ton and 39 €/ton. These values are significantly higher than those indicated above. Note that this tendency also holds for 2020 scenarios.

<sup>46</sup>In the “Perfect, ETS, inc” case of Figure 7, electricity prices are identically equal to 80.57 €/MWh in each hour.

In Figure 2, they assume an average value that is around 70 €/MWh since they vary in a range between 50 and 100 €/MWh. As a consequence, in this scenario, the electricity demand is lower when foreign zones are included in the Italian market.

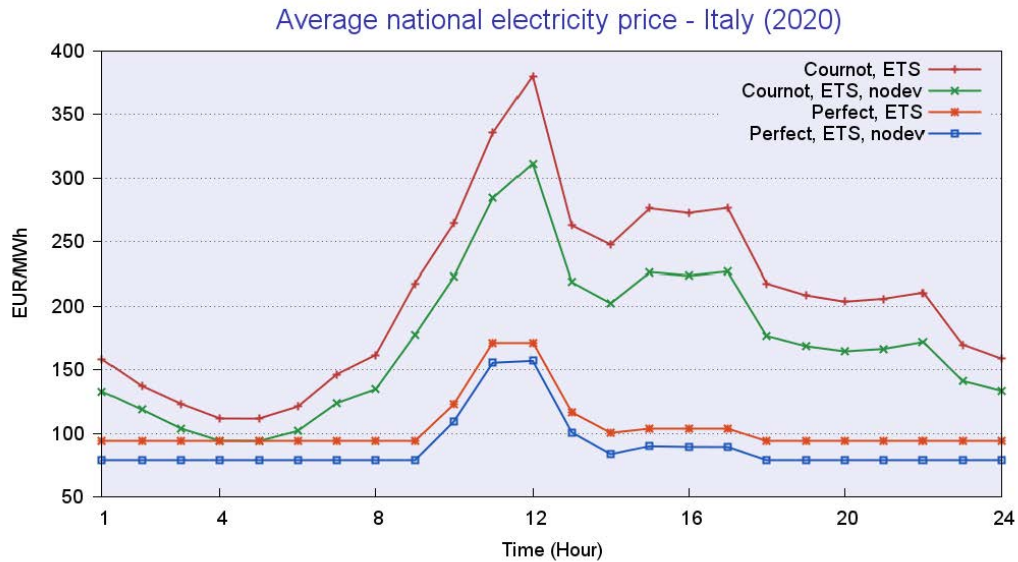


Figure 8: Average national electricity prices in 2020 with power exchanges with foreign countries (€/MWh)

without economic development for the perfect competition and the Cournot market organization. These 2020 prices are higher than those reported in Figure 7 for 2009. Moreover, if one makes a comparison between these prices and those in Section 4.2.1, one can notice that prices in Figure 8 are generally lower than those indicated in Figure 3. This is particularly true for the off-peak power prices.

Investments choices are also affected by this extended representation of the Italian energy market. Figures 9 and 10 reports the investments in the different national and foreign zones in the scenarios already considered in Figures 4 and 5 of Section 4.2.2. A first observation is that, in this alternative market configuration, perfectly competitive generators tend to reduce their investment levels compared to those of the corresponding cases where the Italian market has no imports/exports with other countries. One faces an opposite situation when generators are Cournot competitors. This happens both the in 2009 and 2020 scenarios respectively illustrated in Figures 9 and

10. One also assists to a change in the technological investments mix and this holds true especially for the perfect competition cases.

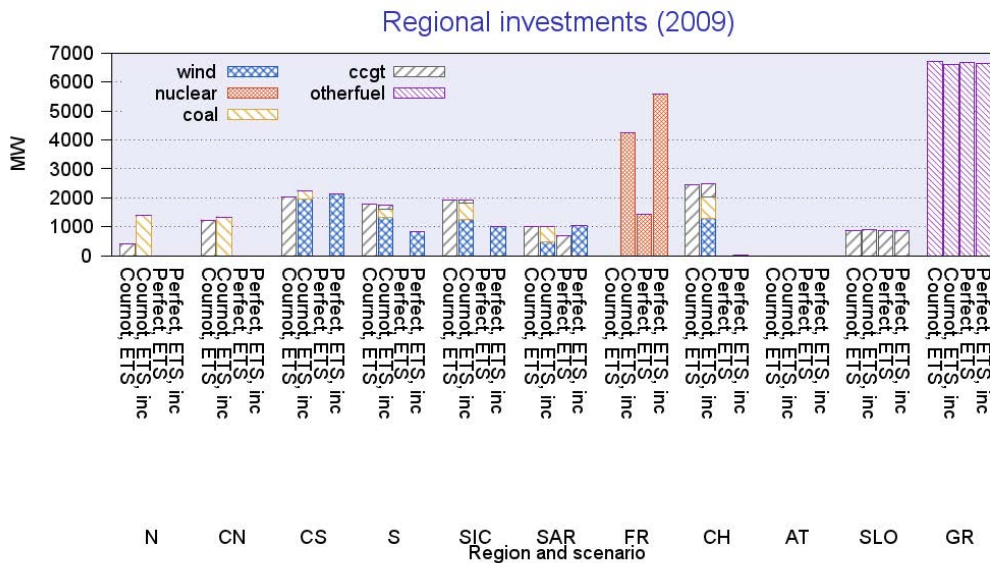


Figure 9: Zonal investments in 2009 by source of energy with power exchanges with foreign countries (MW)

Considering the 2009 scenarios in Figure 9, one can see that, in the “Perfect, ETS” case, Italian generators only invest in CCGT in Sardinia, while in the “Perfect, ETS, inc” case, they build new wind stations in all Southern zones. In the “Perfect, ETS” scenario, Italian generators prefer to import energy from the foreign countries in order to cover national demand, instead of investing. This strategy is also applied in “Perfect, ETS, inc” case, at least in the Northern zones, where generators do not invest in new capacity, but continue to import huge amount of energy from foreign zones. This is the reason why almost all cross-boarding connections with foreign zones become congested and all investments in the North and Center-North disappear. On the other side, the Southern Italian regions become more independent from the Northern ones since they increase their internal electricity production

thanks to a higher investment level. Moreover, since the interconnection lines are less used<sup>47</sup> they can start to invest in wind when incentives are given to renewables. As already said, oligopolistic generators invest more than in the corresponding scenarios in Figure 4 in Section 4.2.2, but without changing their technological mix. In the “Cournot, ETS” case, they still invest in CCGT in all zones, while they still build new wind, coal and CCGT plants in the “Cournot, ETS, inc” scenario. Moreover, even under the oligopolistic market assumption, generators invest more in the South than in the North of Italy. Similarly to the perfectly competitive cases, generators decide to import energy from the foreign countries to cover consumers’ demand in the North and Center-North zones, while in the other Southern zones they raise their investment level. Again, the Southern zones reduce their dependency on Northern and Center-Northern power and national interconnections are less overloaded. This allows generators to build new wind power stations in the South of Italy in presence of incentives policies.

We also register some changes in the investment strategies of the 2020 scenarios. Comparing Figures 5 and 10, one can immediately notice that investments in wind in the Italian zones disappear and generators decide to build only new CCGT and otherfuel based plants. New otherfuel plants are mainly located in the North, while new CCGT installations are built in the other Italian zones. This happens both in the perfectly competitive and in the Cournot market organizations. Investments in renewables (photovoltaic in the North and wind in the South) appear only in presence of incentives<sup>48</sup>. Note that the investments choices depicted in Figure 5 were strongly affected by the particularly high CO<sub>2</sub> prices that forced generators to (partially) invest in wind<sup>49</sup>.

---

<sup>47</sup>As confirmed by the corresponding price trend in Figure 7, any of the interconnections between the Italian zones is congested.

<sup>48</sup>This cases are not reported in Figure 10.

<sup>49</sup>For instance, the CO<sub>2</sub> prices of the “Perfect, ETS” case related to the investment decisions in Figures 5 and 10 are respectively of 241.80 €/ton and 206.32 €/ton. In the

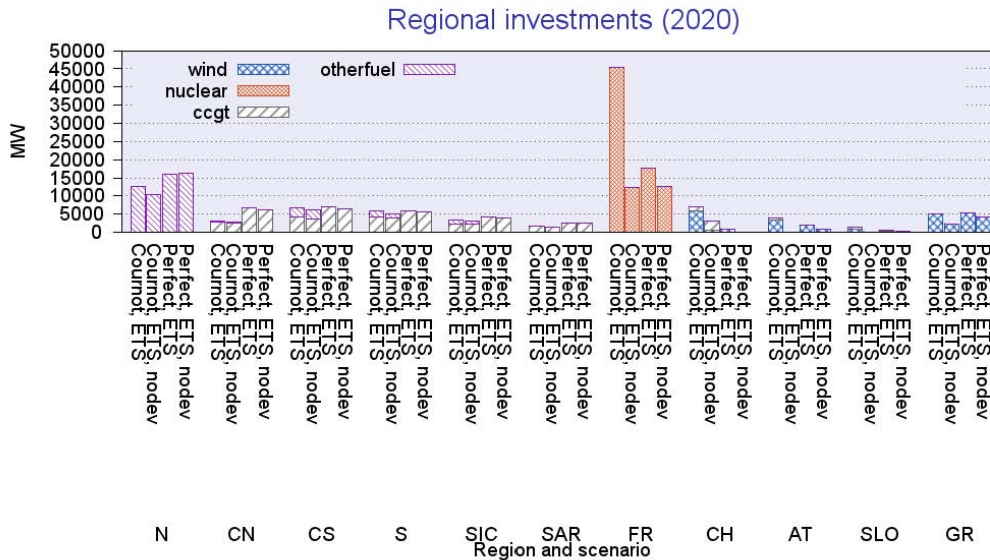


Figure 10: Zonal investments in 2020 by source of energy with power exchanges with foreign countries (MW)

As far as generators’ profits are concerned, trends are similar to those analyzed in Section 4.2.3. and for this reason we remand to the comments presented in that Section.

## 6. Conclusion

In this paper, we analyze the EU ETS impacts on the Italian electricity market through the expansion generation models presented in Sections 2 and 3. In particular, these equilibrium models are adopted to measure the EU ETS Directives’ effects on electricity prices and demand, investments and generators’ profits both in an oligopolistic and in a perfectly competitive organization of the power production. In our study, we consider several

---

“Perfect, ETS, dev” scenario, the carbon costs are respectively of 224.85 €/ton and 173.76 €/ton for the investments results in Figures 5 and 10.

investment scenarios under CO<sub>2</sub> regulation, with and without incentives in renewable sources, in different period. We first detect the situation of the Italian electricity market in 2009 and then we conduct an analysis for 2020. This allows us to compare the EU ETS impacts in the second and in the third phases of its application. For investigating the 2020 scenarios, we consider both the assumptions of economic development and economic stagnation. This is due to the uncertainty on the future growth of the European, and more specifically of the Italian economy. Moreover, all these scenarios are analyzed in the case where Italy has no power exchanges with foreign countries (Section 4) and in the situation where these exchanges are allowed (Section 5).

Considering the assumption that the Italian market is closed and cannot import/export energy from other countries, our results show that perfect competition induces generators to invest more than in an oligopolistic framework, but in both market configurations, investments are mainly concentrated in fossil-fired plants (CCGT and coal), leaving a small proportion to new wind plants. This happens also in presence of incentives given to renewable technologies. This can be interpreted as the signal that the costs for building renewables plants are still too high. Moreover, their development requires an efficient and adequate transmission network able to guarantee the stability of grid even in presence of high wind and photovoltaic power penetration. We can thus conclude that investments in a secure and efficient technology like CCGT are preferable compared to those in renewables that cannot be used with continuity. The absence of nuclear plants in the Italian power market also influences the choice described above. The application of an auctioning system in the third phase has a positive effect since it encourages the investments in wind plants, even when generators are Cournot competitors. However, incentives in renewables sources have a counter-productive effect in the case generators are oligopolistic competitors. These, in fact, favor investments in coal plants. This happens both in 2009 and 2020 scenarios.

The raise of electricity prices in 2020 is particularly favorable for gene-

rators operating as Cournot players which are able to increase their profits compared to 2009, despite the full auctioning system foreseen for the allocation of CO<sub>2</sub> allowance to the power sector in the third EU ETS phase. On the contrary, in a perfect competition organization, generators face a significant drop in their 2020 profits compared to 2009 caused by the increase of their emission costs.

The situation partially changes when the Italian market is enlarged to other countries. A general remark is that the inclusion of the foreign zones induces Italian consumers to raise their electricity consumption compared to the scenarios analyzed in Section 4. This is mainly due to the general reduction of both power and CO<sub>2</sub> prices. Generators adopt different strategies in order to cover this consumption raise. In the Center-South, South, Sicily and Sardinia generators increase both the exploitation of local plants and the investment level in new installations. In this way, the Southern zones reduce their power dependency on North and Center-North and the relative interconnections become less overloaded. This also allows generators to invest in wind power stations in the South, at least in 2009. On the contrary, in the North, one assist to an increase of the imports from foreign zones and, in almost all scenarios, lines connecting France, Switzerland, Austria and Slovenia with the North of Italy are congested. In general, investments are mainly concentrated in CCGT and otherfuel based plants and this holds especially for 2020. Again, the results for 2009 and 2020 show that incentive policies are extremely important to enhance investments in renewables.

In our future research, we intend to develop the current model by including a technological representation of industrial sectors covered by the EU ETS. This will allow us to have a complete and more realistic representation of the emission market.

# Bibliografia

- [1] Anderson, E. J., Hu, X., 2008. Finding supply function equilibria with asymmetric firms. *Operation Research*, 56, 697-711.
- [2] Chen ,Y., Hobbs, B.H., 2005. An Oligopolistic Power Market Model With Tradable  $\text{NO}_x$  Permits. *IEEE*, 20(1), 119-129.
- [3] Chen, Y., Hobbs, B.H., Leyffer, S., Munson,T.S., 2006. Leader-Follower Equilibria for Electric Power and  $\text{NO}_x$  Allowances Markets. *Computational Management Sciences*, 3(4), 307-330.
- [4] Chen, Y., Sijm, J., Hobbs, B.H., Lise, W., 2008. Implications of  $\text{CO}_2$  emissions trading fro short-run electricity market outcomes in northwest Europe. *Journal of Regulatory Economics*, 34, 23-44.
- [5] Facchinei, F., Pang, J.-S., 2003. *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Vols 1 and 2. Springer, New York.
- [6] Floro. D., 2009. Selecting static oligopolistic models in the Italian wholesale electricity market.
- [7] Harker, P.T., Pang, J.-S., 1990. Finite-Dimensional Variational Inequality and Nonlinear Complementarity Problems: A survey of Theory, Algorithms and Applications. *Mathematical Programming*, 115, 153-188.

- 
- [8] Hartmann, P., Stampacchia, G., 1966. On some Nonlinear Elliptical Differential Functional Equations. *Acta Mathematica*, 48, 161-220.
- [9] Hobbs, B.H., 2001. Linear Complementarity Models of Nash–Cournot Competition in Bilateral and POOLCO Power Markets. *IEEE Transaction on Power Systems*, 16(2), 194-202.
- [10] Hobbs, B.F., Helman, U., 2004. Complementarity-Based Equilibrium Modeling for Electric Power Markets. D. Bunn, ed., *Modeling Prices in Competitive Electricity Markets*, 69-98, J. Wiley.
- [11] International Council for Capital Formation-ICCF., 2005. *Kyoto Protocol and Beyond: the Economic Cost to Italy*.
- [12] Kara, M., Syri, S., Lehtila, A. H., Helunen, S., Kekkonen, V., Ruska, M., Forsstrom, J., 2008. The impacts of the EU CO<sub>2</sub> emissions trading on electricity markets and electricity consumers in Finland. *Energy Economics*, 30, 193-211.
- [13] Limpaitoon, T., Chen, T., Oren, S.S., 2011. The impact of carbon cap and trade regulation on congested electricity market equilibrium, *Journal of Regulatory Economics*, 40, 237-260.
- [14] Linares, P., Santos, F.J., Ventosa, M., Lapiedra, L., 2008. Incorporating oligopoly, CO<sub>2</sub> emissions trading and green certificates into a power generation expansion model. *Automatica*, 44, 1608-1620.
- [15] Lise, W., Sijm, J., Hobbs, B.H., 2010. The impact of the EU ETS on Prices, Profits and Emissions in the Power Sector: Simulation Results with the COMPETES EU20 Model. *Environmental and Resource Economics*, 47, 23-44.
- [16] Neuhoff K., Keats K., Sato M., 2006a. Allocation, incentives and distortions: the impact of EU ETS emission allowance allocations to the electricity sector. *Climate Policy*, 6(1), 73-91.

- 
- [17] Neuhoff K., Ahman M., Betz R., Cludius J., Ferrario F., Holmgren K., Pal G., Grubb M., Matthes F., Rogge K., Sato M., Schleich J., Sijm J., Tuerk A., Kettner C., Walker N., 2006b. Implications of announced phase 2 national allocation plans for the EU ETS. *Climate Policy*, 6(5), 41-422.
- [18] Oggioni G., Smeers Y., 2009. Evaluating the impact of average cost based contracts on the industrial sector in the European emission trading scheme. *CEJOR*, 17(2), 181-217.
- [19] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., 1970. *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. Academic Press, New York.
- [20] Ralph, D., Smeers, Y., 2006. EPECs as models for electricity markets. Invited paper, Power Systems Conference and Exposition (PSCE), pp 74-80. doi:10.1109/PSCE.2006.296252
- [21] Reinaud J., 2003. Emission trading and its possible impacts on investment decisions in the power sector. IEA Information Paper.
- [22] Reinaud J., 2005. Industrial competitiveness under the European Union Emission Trading Scheme. IEA Information Paper.
- [23] Sijm J. P. M., Neuhoff K., Chen Y., 2006. Cost pass thought and windfall profits in the power sector. *Climate Policy*, 5(1), 61-78.
- [24] Terna (2006). Previsioni della domanda elettrica in Italia e del fabbisogno di potenza necessario.
- [25] Tirole, J., 1988. *The Theory of Industrial Organization*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [26] Ventosa, M., Baillo, A., Ramos, A., Rivier, M., 2005. Electricity market modelling trends. *Energy Policy*, 33, 897-213.

- 
- [27] Vespucci M.T., Allevi, E., Gnudi, A., Innorta, M., 2009. Cournot equilibria in oligopolistic electricity markets. IMA Journal of Management Mathematics, doi: 10.1093/imaman/dpp004.
- [28] Vives, X., 1999. Oligopoly Pricing: Old Ideas and New Tools. MIT Press, Cambridge, MA.
- [29] Willems, B., Rumiantseva, I., Weigt, H., 2009. Cournot versus supply functions: what does the data tell us?. Energy Economics, 31, 38-47.
- [30] Yao, J., Adler, I., Oren, S.S., 2008. Modeling and Computing Two-Settlement Oligopolistic Equilibrium in a Congested Electricity Network. Operations Research, 56(1), 34-47.

## Network data of the Italian power market open to foreign countries

Table 6 reports the transfer limits ( $\overline{Flow}_{i,j}$ ) of the lines composing the extended version of the Italian market. Compared to Table 1, we added the limits of interconnections between Italy and the five foreign countries considered in the model.

MW	N	CN	CS	S	Sic	Sar	Mf	Fg	Br	Rs	P1	FR	CH	AT	SLO	GR
N	0	3450	0	0	0	0	10000	0	0	0	0	933	1550	78	140	0
CN	1700	0	1750	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CS	0	2250	0	10000	0	420	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
S	0	0	3700	0	0	0	0	10000	10000	10000	0	0	0	0	0	0
Sic	0	0	0	0	0	0	0	0	0	275	10000	0	0	0	0	0
Sar	0	0	450	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mf	1030	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Fg	0	0	0	1200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Br	0	0	0	5200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	500
Rs	0	0	0	1613	150	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
P1	0	0	0	0	315	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
FR	2525	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CH	3775	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AT	210	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SLO	380	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GR	0	0	0	0	0	0	0	0	500	0	0	0	0	0	0	0

Tabella 6:  $\overline{Flow}_{i,j}$  of the Italian network including foreign countries